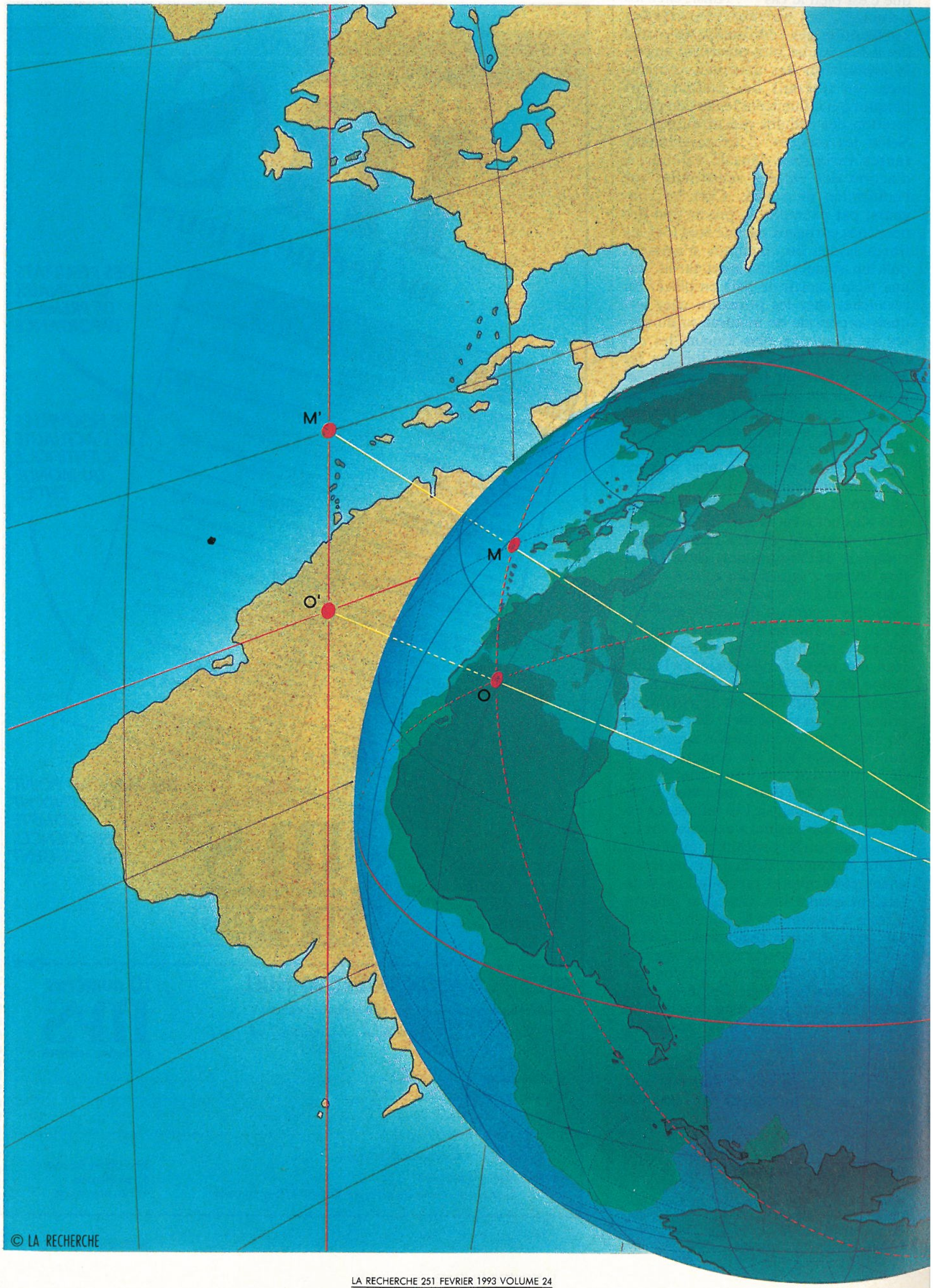

M'
M
O'
O
© LA RECHERCHE

L'INVARIANCE CONFORME ET LA PHYSIQUE A DEUX DIMENSIONS

JEAN-BERNARD ZUBER

LES SYMÉTRIES JOUENT UN RÔLE TRÈS IMPORTANT EN PHYSIQUE. DES CRISTAUX AUX PARTICULES ÉLÉMENTAIRES EN PASSANT PAR LES NIVEAUX D'ÉNERGIE ATOMIQUES, LA CONNAISSANCE DES SYMÉTRIES SOUS-JACENTES SIMPLIFIE CONSIDÉRABLEMENT L'ÉTUDE D'UN SYSTÈME PHYSIQUE. OR PARMI LES SYMÉTRIES, IL EN EST UNE QUI INTÉRESSE DE PLUS EN PLUS LES MATHÉMATICIENS ET LES PHYSICIENS : L'INVARIANCE CONFORME, C'EST-À-DIRE L'INVARIANCE PAR RAPPORT À DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES QUI CONSERVENT LES ANGLES. CETTE SYMÉTRIE SE RÉVÈLE TRÈS FÉCONDE LORSQU'ELLE S'APPLIQUE À DES SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS, SITUATION QUI CONCERNE DES DOMAINES TRÈS DIVERS, COMME L'ÉTUDE DES TRANSITIONS DE PHASE, LA « THÉORIE DES CORDES » QUI VISE À UNIFIER LES INTERACTIONS FONDAMENTALES OU LES MATHÉMATIQUES DES NŒUDS. JEAN-BERNARD ZUBER EXPLIQUE DANS CET ARTICLE EN QUOI CONSISTE L'INVARIANCE CONFORME ET COMMENT CETTE NOTION A RÉVÉLÉ SON UTILITÉ EN PHYSIQUE.

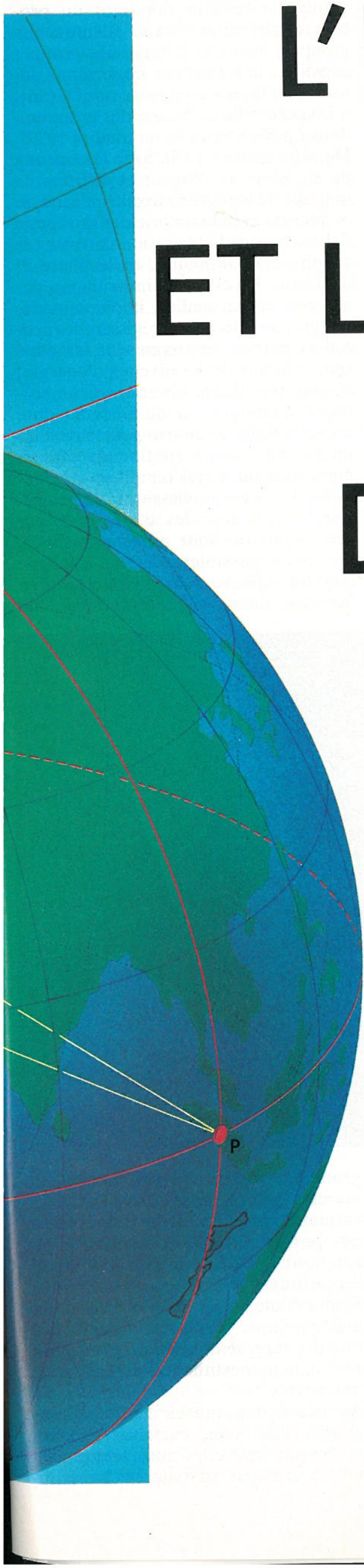


Figure 1. La projection stéréographique utilisée en cartographie projette tout point M de la sphère depuis un point P, pris ici sur l'équateur, sur un plan parallèle au plan tangent au point O diamétralement opposé. On montre que la transformation M → M' conserve les angles. En particulier, le système de parallèles et méridiens est projeté en deux faisceaux de cercles orthogonaux. L'image du point P est rejetée à l'infini dans le plan. Une telle transformation, qui conserve les angles, est dite conforme. Certains systèmes étudiés en physique et en mathématiques ont la propriété d'être invariants sous l'effet des transformations conformes. Or lorsqu'elle s'applique à des systèmes bidimensionnels, cette symétrie a de riches conséquences. C'est pourquoi l'invariance conforme est devenue un thème très en vogue parmi les physiciens théoriciens et les mathématiciens.

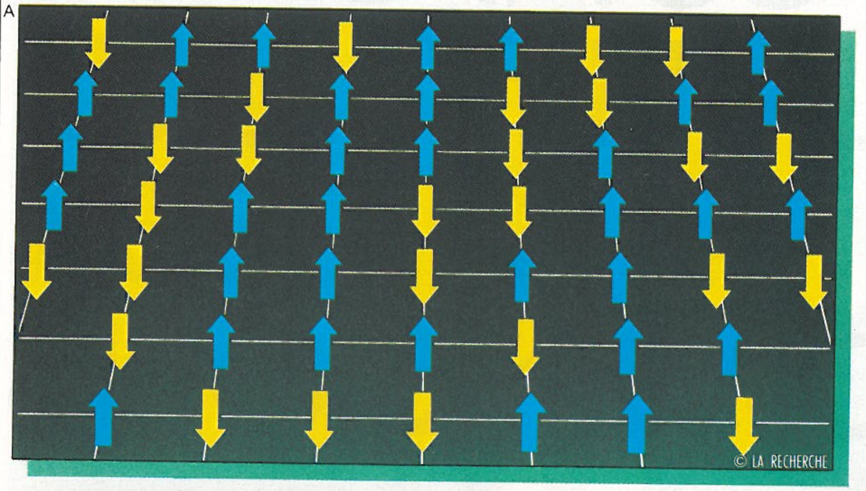
JEAN-BERNARD ZUBER est membre du Service de physique théorique du Centre d'études de Saclay (Commissariat à l'énergie atomique). Ses recherches portent sur la mécanique statistique et la théorie quantique des champs.

La physique poursuit avec le concept de symétrie une longue histoire d'amour. Les Platoniciens, émerveillés par les cinq polyèdres réguliers, voulaient leur faire correspondre les éléments chimiques. Kepler les utilisait quant à lui dans un modèle de système planétaire... Plus proches de nous, les cristallographes du XIX^e siècle nous ont fait prendre conscience de l'importance des propriétés d'invariance par rotation, réflexion et translation des réseaux cristallins, et ont pu en classifier les 32 types de symétrie. En géométrie comme dans la vie courante, une symétrie se signale en effet par des propriétés d'*invariance*. Par exemple, nous disons que la cour du Louvre (sans sa pyramide) est symétrique parce qu'une réflexion par rapport au plan médiateur échange les ailes gauche et droite, mais laisse l'ensemble inchangé. Il en est de même en physique. Ainsi, dans le problème de Kepler, l'attraction d'un corps massif par un centre avec une force inversement proportionnelle au carré de la distance, la trajectoire du corps n'est pas elle-même invariante par les rotations autour du centre, mais est transformée en une trajectoire équivalente, soumise à la même loi. On dit alors que le problème est invariant par rotation, ou encore que les rotations sont une symétrie du problème. Les rotations sont des exemples de transformations ponctuelles, c'est-à-dire qui associent à chaque point de l'espace un autre point, et forment ce que les mathématiciens nomment un *groupe* : la succession de deux rotations est encore une rotation, l'inverse d'une rotation (qui ramène au point de départ) en est une aussi. Ensemble, rotations et translations forment le groupe des « déplacements » qui conservent les longueurs, donc aussi les angles. Plus généralement, les transformations préservant une certaine propriété géométrique ou laissant invariant un problème physique donné forment un groupe ; aussi, la théorie des groupes constitue une branche importante des mathématiques contemporaines (voir « La genèse de la théorie des groupes » dans *La Recherche* de septembre 1979).

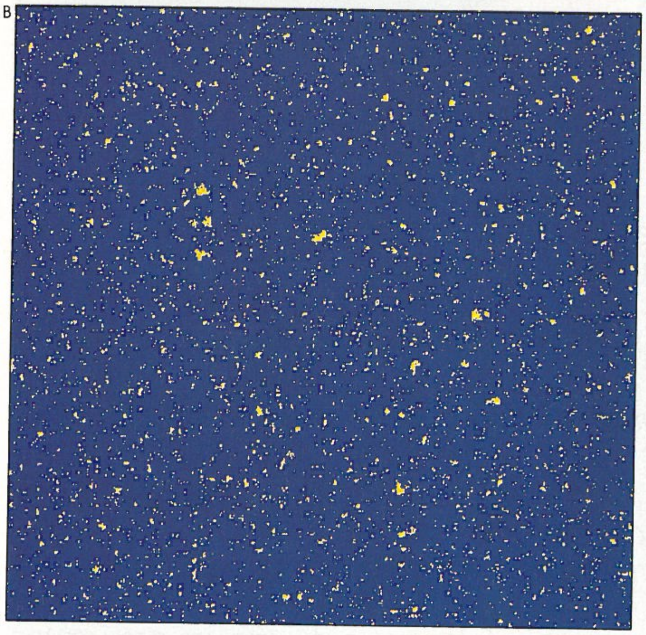
Dans les années 1930, avec les travaux de H. Weyl, E. Wigner et d'autres, le mariage de la toute nouvelle mécanique quantique avec la théorie des groupes a débouché sur d'impressionnants succès en physique atomique, moléculaire et nucléaire. En effet, les invariances, par rotation en particulier, impliquent des « règles de sélection » régissant les processus permis, et organisent les états (par conséquent, les niveaux d'énergie) susceptibles d'être observés. En mécanique quantique, si un système doté d'une certaine symétrie peut être dans un certain « état » (notion spécifiquement quantique qui remplace et généralise le concept classique de trajectoire), alors tous les états reliés par cette symétrie sont aussi accessibles. Les états possibles d'un tel système quantique peuvent donc être classés en familles, dites « représentations » du groupe de symétrie. Ainsi, dans un atome d'hydrogène (version électrique et quantique du problème de Kepler, et qui possède la même invariance par rotation), les états forment des représentations du groupe des rotations. Dans l'étude d'un système invariant par une symétrie, l'analyse et la classification des représentations du groupe correspondant constituent donc une étape importante.

Au début des années 1970, on s'est aperçu que, dans certaines circonstances sur lesquelles nous allons revenir, la symétrie spatiale est beaucoup

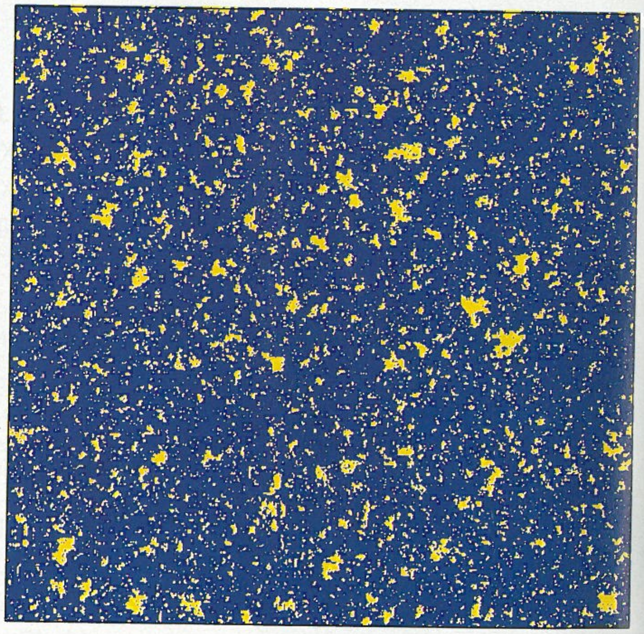
A



B



C



plus vaste que les simples déplacements ; elle incorpore les *transformations conformes*, c'est-à-dire les transformations qui préservent les angles (mais pas nécessairement les distances). De telles transformations sont bien connues depuis l'Antiquité, puisque la projection stéréographique, due à Ptolémée, a cette propriété, si utile en navigation, de respecter les angles (fig. 1). Dans cet exemple, la transformation fait passer d'une figure sur la sphère (le globe terrestre) à une figure sur un plan (la carte). Les deux configurations, initiale et transformée, peuvent être considérées comme équivalentes. Comme on le verra plus bas, ce n'est que dans un espace à deux dimensions que l'invariance par de telles transformations devient extrêmement contraignante, et donc riche de conséquences. Il y a une dizaine d'années, sous l'impulsion de l'école soviétique de mathématiques et de physique, des progrès décisifs ont été effectués dans l'étude des systèmes quantiques sujets à une invariance conforme bidimensionnelle, et un cadre théorique adéquat a été mis en place. On assiste depuis huit ou neuf ans à une explosion d'activités dans ce domaine, avec des résultats très variés et des applications à des domaines *a priori* aussi éloignés que la physique de l'état condensé et la construction de théories unifiées de toutes les interactions, ou des domaines purement mathématiques, comme la théorie des nœuds ou la topologie des variétés à trois dimensions.

Ces considérations s'appliquent tout particulièrement à une classe de phénomènes dits critiques. De quoi s'agit-il ? En général, à un système physique donné, on sait attacher une certaine échelle de longueur caractéristique : c'est ainsi que la physique atomique fait intervenir des échelles variant de l'angström au micromètre, tandis qu'en hydrodynamique, elles vont du centimètre (tourbillons) au kilomètre (houle).

LES TRANSFORMATIONS CONFORMES SONT LES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES QUI LAISSENT LES ANGLES INCHANGÉS

■

Des phénomènes d'échelles complètement différentes ne s'influencent généralement pas ; par exemple, les mouvements de l'atmosphère ne dépendent pas des interactions individuelles des atomes qui la constituent (et *vice versa*). Il existe cependant des situations dans lesquelles interviennent simultanément des échelles d'ordres de grandeur très variés ; ce sont les phénomènes critiques. L'exemple traditionnel est un système ferromagnétique à la température de Curie T_c, qui est la température au-dessous de laquelle le matériau est aimanté et au-dessus de laquelle l'aimantation est nulle. Rappelons que, dans un aimant, ce sont les petits moments magnétiques des atomes qui, par un effet coopératif, peuvent donner lieu à une aimantation macroscopique. A basse température, les moments magnétiques d'un matériau ferromagnétique ont tendance à s'orienter dans une même direction, et le système présente alors une aimantation spontanée. Quand la température augmente, des fluctuations apparaissent, c'est-à-dire des régions où les moments magnétiques s'alignent dans une autre direction, diminuant l'aimantation. Ces fluctuations de taille d'abord modeste croissent avec la température, tandis que d'autres fluctuations apparaissent en leur sein. Ces effets peuvent être étudiés avec le modèle d'Ising (à deux dimensions par exemple). Il s'agit d'un modèle simplifié de matériau ferromagnétique, conçu dans les années 1920, dans lequel les moments sont attachés aux points d'un réseau carré, ne peuvent prendre que deux orientations opposées dans une

D

E

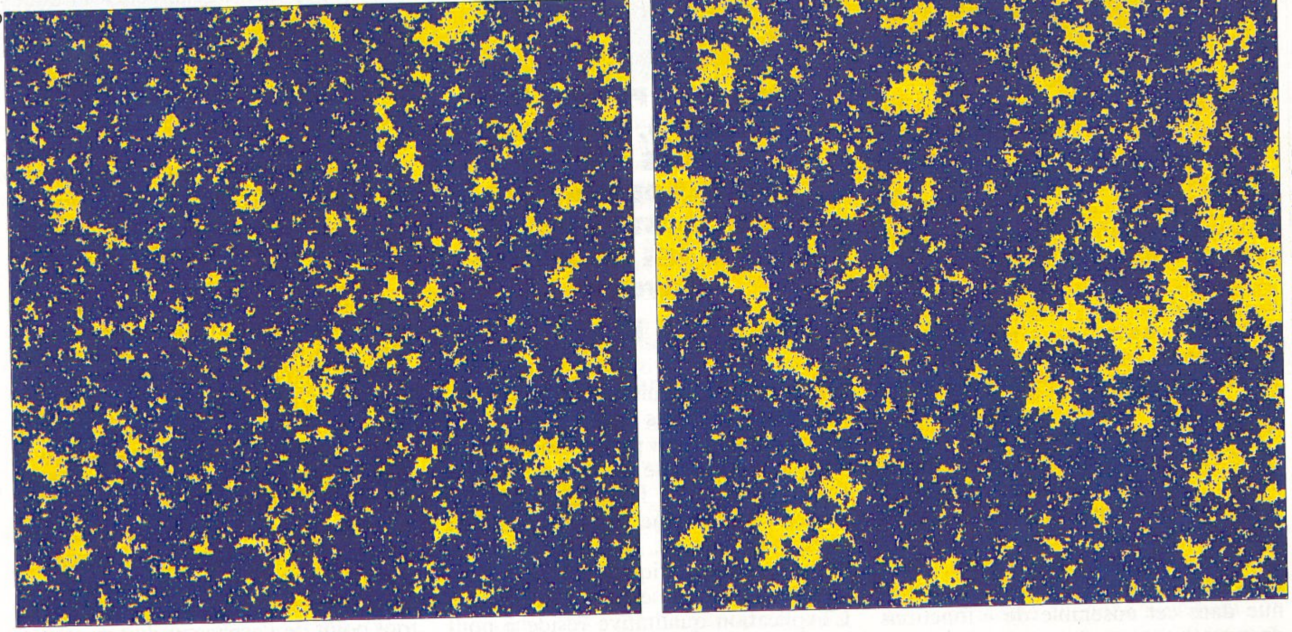


Figure 2. Le modèle d'Ising est un modèle simplifié de système ferromagnétique, où il existe une aimantation macroscopique au-dessous d'une température critique T_c. Des moments magnétiques sont attachés aux sites d'un réseau régulier, ici un réseau plan carré (A), et ne prennent que deux orientations opposées dans une même direction (figurées ici en bleu et en jaune). Des configurations typiques de ce modèle peuvent être engendrées par simulation sur ordinateur à différentes valeurs de la température (B à E). A basse température (B), quasiment tous les aimants microscopiques s'orientent dans la même direction, à part quelques fluctuations de moments isolés. L'aimantation du système est proche du maximum. Plus la température se rapproche de T_c, plus les îlots des fluctuations sont étendus (C, D, E). On voit que la longueur de corrélation (taille typique des grandes fluctuations) augmente quand la température approche sa valeur critique, et que ces fluctuations prennent un aspect auto-similaire : des îlots imbriqués les uns dans les autres et d'aspect pareillement découpé apparaissent clairement en (D) et (E). Au point critique, la disparition de toute échelle de longueur caractéristique fait que le système devient invariant sous l'effet de transformations conformes. En deux dimensions, l'étude de cette symétrie permet d'obtenir de précieuses informations sur le régime critique. (Figures réalisées avec l'aide de L. Jacobs et de T. Bhattacharya, A. Billoire et R. Lacaze).

(1) E. Brezin et al., *in Phase transitions and critical phenomena*, VI, C. Dombs et M.S. Green (eds) Academic Press, 1976.
(2) A.M. Polyakov, *JETP Lett.*, 39, 381, 1970.
(3) V.G. Kac, *Lect. Notes in Phys.*, 94, 441, 1979 ; B.L. Feigin et D.B. Fuchs, *Funct. Anal. and Appl.*, 16, 114, 1982.
(4) A.A. Belavin et al., *Nucl. Phys.*, B241, 333, 1984.
(5) H.W.J. Blöte et al., *Phys. Rev. Lett.*, 56, 742, 1986 ; I. Affleck, *ibid.*, 746.
(6) D. Friedan et al., *Phys. Rev. Lett.*, 52, 1575, 1984.
(7) A. Cappelli et al., *Nucl. Phys.*, B280, 445, 1987.

direction fixée et ne sont sensibles qu'à l'influence de leurs voisins immédiats (fig. 2). Au « point critique » T_c, on est en présence de fluctuations à toutes les échelles imbriquées les unes dans les autres et le système prend un aspect auto-similaire (fig. 2E). Autrement dit, le grossissement d'une portion d'une configuration des moments constitue une autre configuration possible. Corrélativement, l'aimantation du système s'annule à la température T_c, tandis que d'autres grandeurs macroscopiques du système, comme la chaleur spécifique, deviennent infinies. Au-dessus de T_c, les moments sont complètement désordonnés et le système n'est plus aimanté. Ce type de comportements critiques s'observe aussi dans une variété de situations : point critique d'un mélange liquide-vapeur ou d'un fluide binaire (système de deux fluides), où la distinction entre les deux phases disparaît, transition entre l'état fluide normal et l'état superfluide dans l'hélium, etc. Dans tous ces cas, une grandeur thermodynamique non nulle au-dessous de la température critique (l'aimantation du corps ferromagnétique, la différence de densité des deux fluides,...), s'annule comme $(T_c - T)^{\beta}$, tandis que la chaleur spécifique se comporte comme $|T - T_c|^{-\alpha}$, β étant un exposant positif et α d'un signe ou de l'autre.

Les systèmes macroscopiques étudiés en physique de l'état condensé — conducteurs, liquides, verres, corps ferromagnétiques, polymères, etc. — relèvent de la mécanique statistique. Ils impliquent en effet un nombre considérable de constituants (l'ordre de grandeur est le nombre d'Avogadro, 6.10^{23}) et ne peuvent être traités que par des méthodes statistiques. Un corps ferromagnétique, par exemple, est décrit par un ensemble de probabilités : probabilité de trouver le moment magnétique d'un point donné orienté dans une certaine direction, mais aussi corrélations entre moments distants, c'est-à-dire probabilités de trouver des moments en des points donnés pointant dans des directions données. En général, toute l'information sur le système est contenue dans cet ensemble de « fonctions de corrélation ». A une température différente de T_c, la fonction de corrélation de deux moments décroît très vite (exponentiellement) avec leur distance. Cela exprime simplement le fait que des moments éloignés n'ont que peu d'influence mutuelle. La distance sur laquelle des influences mutuelles se font sentir s'appelle la longueur de corrélation et est notée ξ. C'est l'échelle caractéristique du système mentionnée plus haut. Ainsi la taille typique des plus grandes fluctuations (fig. 2D et 2E) est donnée par ξ. Au voisinage de T_c, la longueur de corrélation croît, pour devenir infinie à la température critique.

Cette « divergence » de la longueur de corrélation à T_c a des conséquences importantes. En un sens, le système ayant perdu son échelle caractéristique devient auto-similaire, c'est-à-dire invariant par dilatation (fig. 2E). On parle encore d'invariance d'échelle. Par ailleurs, au point critique, les fonctions de corrélation ne décroissent plus exponentiellement avec la distance r mais comme une puissance r^{-x}. Cette décroissance beaucoup plus lente exprime que les degrés de liberté (les moments magnétiques) sont plus fortement corrélés. A chaque type de fonction de corrélation est attachée une valeur d'un « exposant critique » x qui décrit cette loi de puissance. Or l'un des grands problèmes de la théorie des phénomènes critiques, résolu dans la décennie 1965-1975, a été de déterminer ces exposants critiques ainsi que ceux apparaissant dans le comportement de l'aimantation (α), de la chaleur spécifique (β), etc., au voisinage de T_c. A titre d'exemple, les valeurs relatives au modèle d'Ising bidimensionnel sont $\alpha = 0$, $\beta = 1/8$ et, pour la fonction de corrélation entre moments, $x = 1/4$.

DANS LES « PHÉNOMÈNES CRITIQUES », LE SYSTÈME PHYSIQUE N'A PLUS D'ÉCHELLE DE LONGUEUR CARACTÉRISTIQUE. IL EN RÉSULTE UNE INVARIANCE CONFORME

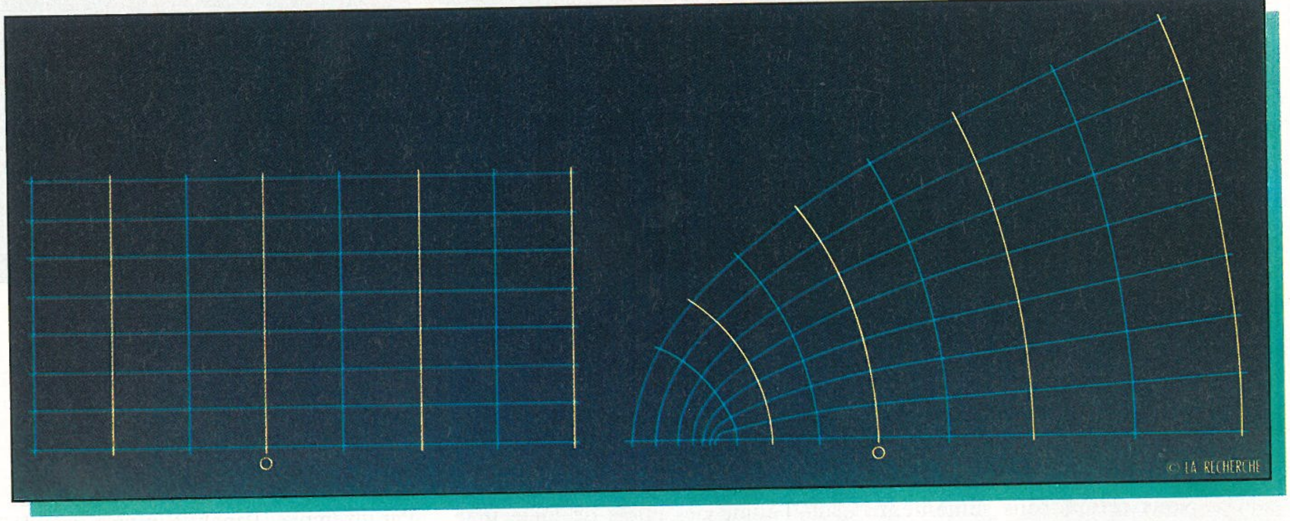
■

On a constaté depuis longtemps que les exposants critiques sont « robustes », en ce sens qu'une petite modification d'un système laisse ses exposants critiques inchangés ; la température critique, en revanche, est affectée par cette modification. Par exemple, deux corps ferromagnétiques différents présentent les mêmes exposants critiques. L'explication qualitative réside à nouveau dans la divergence de la longueur de corrélation ξ : ces deux systèmes diffèrent par des détails de leurs interactions à une échelle microscopique petite par rapport à ξ. Quand ξ croît, ces différences deviennent de moins en moins importantes à l'échelle macroscopique où sont observés les systèmes critiques. Cela conduit à l'importante notion de *classe d'universalité* de phénomènes critiques, qui regroupe des systèmes différents ayant le même comportement critique, donc les mêmes ensembles d'exposants critiques. Par exemple, un fluide binaire et le modèle d'Ising tridimensionnel appartiennent à la même classe et leur comportement critique est décrit par les mêmes exposants. Une dernière conséquence de la divergence de la longueur de corrélation est de gommer d'éventuelles anisotropies de la physique microscopique. Le phénomène critique doit donc présenter les symétries de rotation et de translation, même si l'on est parti d'un système (par exemple sur réseau, comme notre modèle d'Ising) qui n'en était pas doté. Le mérite de la justification de ces idées qualitatives — de la construction de la théorie critique à partir du modèle microscopique et de l'élaboration d'une méthode de calcul systématique (la méthode du « groupe de renormalisation ») des exposants critiques — revient à l'Américain K. Wilson, de l'université Cornell, prix Nobel de physique 1982 (voir « Une quête obstinée de l'universalité » dans *La Recherche* de décembre 1982). Les méthodes fondées sur l'invariance conforme dont il va être question ici ne remettent nullement en cause la validité et la puissance de cette méthode. Elles viennent plutôt la compléter dans le contexte des phénomènes critiques bidimensionnels par une voie radicalement différente, de nature essentiellement algébrique.

Comment l'invariance conforme intervient-elle dans les phénomènes critiques ? Il découle de ce qui précède que le caractère éventuellement discontinu du système à petite échelle ne joue pas de rôle dans l'étude des propriétés critiques. On peut donc considérer l'espace comme continu ; cela a l'avantage de permettre d'utiliser le formalisme élaboré mais puissant de la théorie quantique des champs. Ce terme désigne l'appareil théorique à la base de la physique des particules élémentaires, domaine où les effets relativistes (vitesses proches de celle de la lumière) et quantiques (fluctuations, en particulier création et annihilation de particules) sont importants. Une théorie quantique des champs revient à considérer une particule comme un quantum d'un certain champ défini en tout point de l'espace et du temps. Par exemple, en électrodynamique quantique, le photon est le quantum du champ électromagnétique. Il est étonnant de voir ce formalisme jouer un rôle dans la théorie des phénomènes critiques, qui semblent n'avoir rien de relativiste et peuvent apparaître dans des systèmes non quantiques (comme le modèle d'Ising). En fait, il existe une forte similitude mathématique entre le formalisme de la mécanique statistique et celui de la théorie quantique des champs. C'est cette ressemblance qui, moyennant une étude détaillée[1] permet de construire la théorie quantique

Les transformations conformes et leur algèbre

En dimension supérieure ou égale à trois, les transformations conformes, transformations ponctuelles conservant les angles, sont obtenues en composant des déplacements (rotations et translations), des dilatations et des transformations conformes spéciales. Pour ces dernières, on effectue successivement une inversion par rapport à l'origine qui change le point repéré par le vecteur $\vec{r}$ en $\vec{r}/r^2$, une translation par un vecteur a puis à nouveau l'inversion : le vecteur obtenu est $\vec{r}' = (\vec{r} + \vec{a}r^2)/(1 + 2\,\vec{r}.\vec{a} + a^2 r^2)$.



En deux dimensions, il est commode de repérer un point du plan par un nombre complexe z. Les transformations conformes mentionnées précédemment ne sont autres que les transformations homographiques $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$; mais plus généralement, toute application analytique $z \rightarrow w = f(z)$ est conforme. Au voisinage d'un point z_0, un petit vecteur représenté par dz est changé en $dw = f'(z_0)\,dz$, donc dilaté par le module de $f'(z_0)$ et tourné de l'argument de $f'(z_0)$: si $|f'(z_0)| \neq 0$, on est en présence d'une rotation-dilatation locale qui préserve les angles orientés. Sur la figure ci-contre, on a représenté l'effet de la transformation $z \rightarrow z + z^2/10$: les droites du réseau sont transformées en deux faisceaux de paraboles orthogonales.

L'étude d'un groupe continu, comme celui des rotations, commence par celle des transformations infinitésimales et de leurs « générateurs ». Par exemple, les rotations infinitésimales dans l'espace à trois dimensions sont décrites par trois générateurs J_x, J_y et J_z, ce qui exprime que toute rotation peut être obtenue par une succession de rotations autour des axes Ox, Oy et Oz. Ils ne commutent pas, ce qui reflète le fait que la composition de deux rotations dépend de leur ordre ; cela est codé dans les relations de commutation $J_x J_y - J_y J_x = J_z$, etc. Les représentations du groupe des rotations, dont l'étude se fonde sur ces relations de commutation, sont complètement caractérisées par un nombre entier ou demi-entier, le spin.

L'étude des transformations conformes en deux dimensions suit une méthode toute parallèle. Les générateurs des transformations infinitésimales $z \rightarrow z + \varepsilon z^{n+1}$, où n est un entier quelconque, sont les opérateurs différentiels $l_n = - z^{n+1}\, \partial/\partial z$. Ils satisfont les relations de commutation $l_m l_n - l_n l_m = (m - n)\, l_{n+m}$. Cependant, dans une théorie quantique des champs, ils sont représentés par des opérateurs L_n constituant l'« algèbre de Virasoro » $L_n L_m - L_m L_n = (n - m) L_{n+m} + c/12\; n\,(n^2 - 1)\, \delta_{n+m,0}$. Le dernier terme, non nul seulement si $n + m = 0$, (c'est le sens du $\delta_{n+m,0}$) est une anomalie quantique. Il commute avec les L_n, et son coefficient c est appelé charge centrale. L'étude des représentations de cette algèbre de Virasoro montre qu'elles sont caractérisées par la donnée de c et d'un autre nombre h, qui exprime l'action de l'opérateur de dilatation L_0 et est donc directement relié à un exposant critique. Cela ramène la détermination des exposants critiques à celui des représentations de l'algèbre de Virasoro décrivant le système étudié. Dans le cas où c est restreint à des valeurs inférieures à 1, on montre que les seules valeurs admissibles dans une théorie (satisfaisant une certaine contrainte d'« unitarité ») sont

$c = 1 - 6/m(m + 1)$ et
$h = [(r(m + 1) - sm)^2 - 1] / 4\, m(m + 1)$
où m est un entier supérieur à 2, et r et s des entiers satisfaisant $1 \leqslant r \leqslant m - 1$, $1 \leqslant s \leqslant m$. Pour chaque valeur de $c<1$, donc de m, il n'existe alors qu'un nombre fini de valeurs permises pour h. Ainsi les trois représentations pertinentes pour le modèle d'Ising ont $m = 3$, donc $c = 1/2$ et $h = 0$, $1/2$ et $1/16$. L'exposant critique 1/4 mentionné dans le texte s'obtient comme quatre fois cette dernière valeur de h.

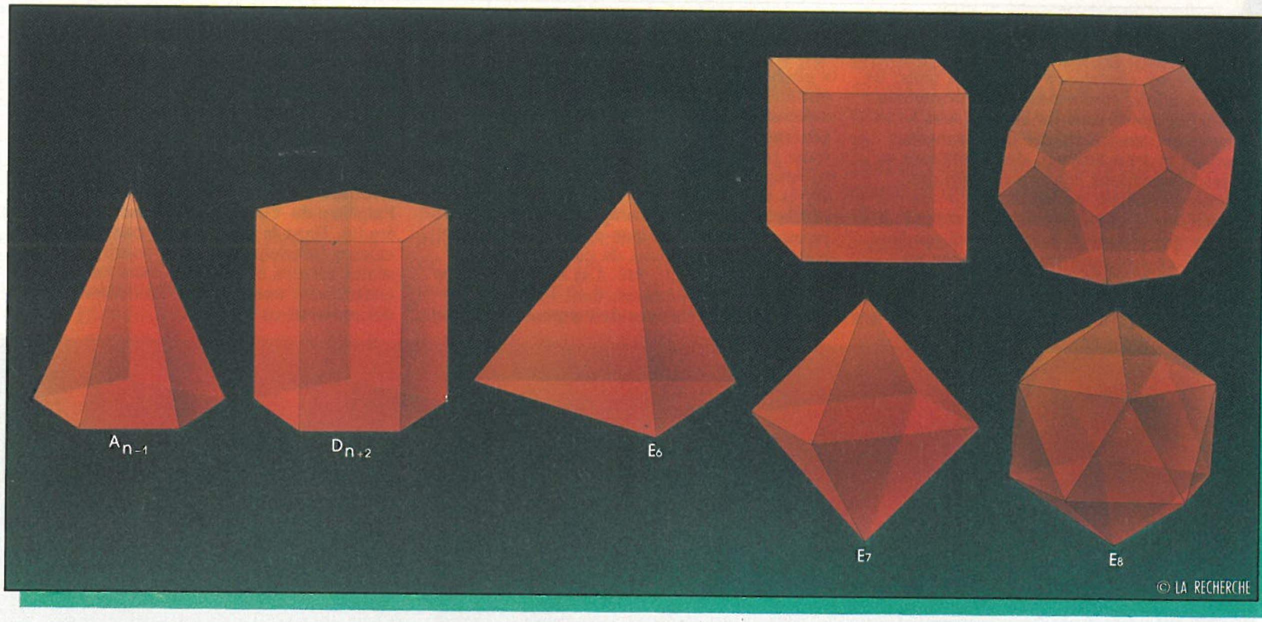
Une différence essentielle avec le groupe des rotations réside dans le nombre infini de générateurs L_n : les représentations de l'algèbre de Virasoro sont de dimension infinie, et décrivent un nombre infini d'états indépendants. C'est cela qui rend possible la description du modèle d'Ising critique, avec son nombre infini d'états, par trois représentations de l'algèbre.

de champ associée au système critique. Celle-ci doit alors être invariante sous l'effet des translations et rotations mais aussi des dilatations, cette dernière invariance étant liée à la divergence de la longueur de corrélation et à la propriété d'auto-similitude qui en résulte.

Comme conséquence remarquable du formalisme de la théorie des champs sujette à ces conditions, le physicien russe A. Polyakov a démontré en 1970 qu'une symétrie d'ordre plus grand apparaît nécessairement[2]. L'invariance sous les translations, rotations et dilatations implique l'invariance plus générale sous l'effet de transformations conformes. Quand la dimension de l'espace est supérieure ou égale à trois, un théorème classique de géométrie dû à Liouville affirme que les transformations conformes sont composées de déplacements, de dilatations et de certaines transformations spéciales (voir l'encadré). Mais en fait, dans ces dimensions, l'invariance conforme des phénomènes critiques ne nous apprend pas grand-chose de neuf.

La situation est tout autre en deux dimensions, où il existe une variété infinie de transformations conformes. En effet, si l'on choisit de repérer un point du plan par un nombre complexe z, alors toute fonction (« analytique ») f(z) s'interprète comme une transformation conforme (voir l'encadré). Selon la stratégie évoquée plus haut, on doit étudier ce que sont les représentations de ce groupe de transformations pour exploiter l'invariance conforme d'un système critique bidimensionnel. Pour cela, on étudie d'abord les transformations conformes « infinitésimales » (très proches de l'identité) ; elles forment l'*algèbre de Virasoro*. Or l'étude des représentations de cette algèbre s'avère beaucoup plus complexe que dans les cas usuels de dimension finie (comme le groupe des rotations) et n'a abouti qu'il y a dix ou douze ans, avec les travaux des mathématiciens russes V. Kac, B. Feigin et D. Fuchs[3].

(8) A.C. Scott et al., *The soliton, a new concept in applied science*, Proc. of the IEEE, 61, 1443, 1973 ; L.D. Faddeev et L.A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer-Verlag, 1980.
(9) R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982 ; M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson, 1983.
(10) V. Pasquier, *Nucl. Phys.*, B285, 162, 1987.
(11) A. Zamolodchikov et Al. Zamolodchikov, *Ann. Phys.*, 120, 253, 1979.



Cela a permis en 1984 à A. Belavin, A. Polyakov et A. Zamolodchikov, de l'Institut Landau à Moscou, de formuler de façon précise le cadre d'une théorie des champs invariante conforme[4]. Il est malheureusement impossible d'exposer ou même de résumer ici ces travaux abstraits mais d'une grande élégance. Nous retiendrons seulement qu'il apparaît, dans une théorie conforme quantique, un paramètre noté c dont l'existence était insoupçonnée : la *charge centrale*. Cette charge (qui n'a rien d'électrique) correspond à une anomalie d'origine quantique dans la façon dont l'invariance conforme est réalisée. Elle est propre aux systèmes critiques à deux dimensions. *A priori*, elle peut prendre toute valeur positive ou nulle (dans une théorie physiquement raisonnable) ; nous verrons que ses valeurs sont en fait restreintes.

Donnons un aperçu de quelques résultats saillants obtenus dans cette façon d'aborder les phénomènes critiques bidimensionnels. Une des premières applications est de relier des systèmes critiques de géométries différentes. Par exemple, la projection stéréographique (fig. 1) identifie la sphère et le plan ; de même, un cylindre infini et un plan privé d'un point peuvent être identifiés par une transformation conforme. L'intérêt est de relier ainsi une configuration dotée d'une longueur intrinsèque (le diamètre du cylindre) à une autre qui n'en a pas (le plan troué), ce qui permet d'étudier les effets dus à la taille du système critique. Or le contrôle de ces effets est important pour comparer la théorie soit aux expériences en laboratoire, soit aux simulations sur ordinateur, les unes et les autres portant par la force des choses sur des objets d'extension finie. Ces considérations permettent aussi de répondre à une question d'une autre nature. Comme on l'a dit, l'algèbre de Virasoro qui est attachée aux transformations conformes infinitésimales fait apparaître un nouveau paramètre c, la charge centrale. Fait remarquable, celle-ci est mesurable dans l'étude des effets de taille finie, comme l'ont montré H. Blöte, J. Cardy, M. Nightingale et I. Affleck en 1985[5]. Imaginons le système critique placé sur un cylindre très long de diamètre L ; alors, par rapport à la limite où L est infini, certaines grandeurs thermodynamiques du système, telles que son « énergie libre », subissent une correction proportionnelle à c/L^2. Cet effet n'a pas encore été mesuré dans des systèmes physiques réels, mais il est couramment utilisé dans les études sur ordinateur de modèles critiques afin d'identifier leur charge centrale.

C'EST DANS LES SYSTÈMES CRITIQUES BIDIMENSIONNELS QUE LA SYMÉTRIE PAR RAPPORT AUX TRANSFORMATIONS CONFORMES SE RÉVÈLE UTILE

Plus généralement, le formalisme de l'invariance conforme met en évidence l'origine algébrique des exposants critiques à deux dimensions, et explique qu'apparaissent souvent des valeurs fractionnaires simples (comme l'exposant $\beta = 1/8$ du modèle d'Ising). D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker, alors à l'université de Chicago, ont pu prouver en 1984 que les exposants critiques des théories conformes de charge centrale $c<1$ sont à choisir dans une liste infinie mais discrète[6] : c ne peut prendre que les valeurs : $c = 1 - 6/m(m+1)$, où m est un entier supérieur à 2, et pour chaque valeur de m, seul un nombre fini d'exposants, tous fractionnaires, sont possibles. Par exemple, l'analyse révèle que le modèle d'Ising correspond à $m = 3$, donc $c = 1/2$.

On peut aller plus loin dans cette voie et classifier les théories conformes possibles, sujettes à certaines contraintes, par exemple $c<1$. Le simple fait qu'on puisse recenser les théories conformes, c'est-à-dire les classes d'universalité des phénomènes critiques, est en soi remarquable et sans doute propre à deux dimensions. La classification des théories à $c<1$, que nous avons menée à bien en 1987 avec A. Cappelli et C. Itzykson au Service de physique théorique de Saclay, fait apparaître elle-même une beauté inattendue[7] : elle s'effectue essentiellement en deux familles infinies et trois cas exceptionnels, selon un schéma qu'on retrouve aux quatre coins des mathématiques sous le sigle ADE. Ainsi, les sous-groupes finis du groupe des rotations se classent selon ce même schéma (fig. 3). Mais la raison profonde de la classification ADE des classes d'universalité à $c<1$ reste imparfaitement comprise.

Au-delà de ces catalogues, la propriété majeure des théories conformes est d'être complètement résolubles : en particulier, toutes les fonctions de corrélation peuvent être déterminées exactement au point critique. Là encore, cette situation est exceptionnelle en théorie des champs, où les résultats exacts sont rares et où l'on doit habituellement faire appel à des méthodes

Figure 3. La classification des théories conformes caractérisées par une « charge centrale » c<1 fait apparaître deux familles infinies et trois cas exceptionnels. Ce schéma de classification dit ADE se retrouve dans d'autres domaines des mathématiques. Par exemple, les sous-groupes finis du groupe des rotations à trois dimensions, c'est-à-dire les ensembles à nombre fini de rotations se composant entre elles, peuvent être classifiés selon un schéma ADE, avec deux séries infinies (A et D) et trois cas exceptionnels E. Ces sous-groupes ont ici été symbolisés par un solide qu'ils laissent invariants : la pyramide à n côtés, le prisme droit à n côtés et, pour les trois cas exceptionnels, les cinq solides platoniciens, le tétraèdre, le cube ou l'octaèdre, et le dodécaèdre ou l'icosaèdre. Ces quatre derniers ont deux à deux le même groupe de symétrie. Les notations A_{n-1}, D_{n+2} et E_6, E_7, E_8 sont conventionnelles et se rapportent à une classification célèbre due aux mathématiciens allemand W. Killing et français E. Cartan, à la fin du XIXe siècle, celle des « algèbres de Lie simples simplement lacées ».

d'approximations successives (« théorie des perturbations »). Les théories conformes apportent une moisson de résultats exacts, non perturbatifs, qui devraient être riches d'enseignements.

En définitive, l'analyse des effets de taille finie ou la détermination de quelques exposants d'un système critique donné peut suffire à identifier la théorie conforme qui le décrit, et donc à prédire toutes les quantités mesurables.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le point critique T_c proprement dit, où la longueur de corrélation est infinie et l'invariance d'échelle exacte. On sait cependant que, dans un voisinage du point critique où cette longueur est grande mais finie, se manifestent déjà des propriétés universelles : la longueur de corrélation est suffisamment grande pour gommer les détails des interactions de petite échelle. La question naturelle est de se demander ce que les théories conformes peuvent nous apprendre sur ce régime, très intéressant d'un point de vue expérimental puisqu'il élargit le domaine critique. En particulier, peut-on déterminer les fonctions de corrélation au voisinage du point critique ?

Ce problème n'a pas encore reçu de solution générale mais fait l'objet de recherches intensives. Dans de nombreux cas, il semble possible de s'écarter du point critique (par exemple dans un corps ferromagnétique en modifiant un peu la température ou en introduisant un faible champ magnétique), donc de perdre l'invariance conforme, tout en préservant le caractère soluble de la théorie. Il apparaît dans ce contexte des liens inattendus avec des problèmes dits complètement intégrables. Il s'agit de situations où il existe un nombre suffisant de quantités conservées au cours de l'évolution dans le temps (énergie, charges,...) pour que cette évolution soit complètement déterminée par ces quantités. De tels systèmes apparaissent dans toutes les branches de la physique, et particulièrement en basse dimension. Un exemple simple est celui d'un pendule n'oscillant pas nécessairement dans un plan, dont la position est donc déterminée par deux angles ; l'énergie totale (cinétique plus potentielle) est conservée ainsi que la composante verticale du moment cinétique et le mouvement du pendule est complètement fixé par la donnée de ces quantités et de sa position initiale.

Des cas plus intéressants concernent des systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté (fluide, théorie de champ), pour lesquels un nombre infini de lois de conservation est requis. On peut citer certains modèles de propagation d'ondes dans un milieu à une ou deux dimensions d'espace, où des ondes solitaires (des « solitons ») se propagent sans dissipation et sans déformation[8], des modèles sur réseau[9] comme le modèle d'Ising à deux dimensions, qui est en fait le premier d'une famille ADE de modèles intégrables[10], des théories de champ à deux dimensions (une coordonnée d'espace, une de temps) pour lesquelles les phénomènes de collision entre « particules » sont calculables exactement[11]. Cet inventaire peut paraître fort disparate, mais ces différents modes d'intégrabilité ont tous à voir avec les théories conformes. Dans ces questions, un certain type de déformation de la structure de groupe, auquel on a donné le nom de *groupe quantique*, joue un rôle central. C'est de l'étude de ces nouvelles structures qu'on peut attendre la résolution du problème posé plus haut.

Cette belle construction théorique a-t-elle quelque application à des systèmes physiques réels ? Il est clair que la restriction à deux dimensions complique singulièrement la tâche. Il existe bien des systèmes pratiquement bidimensionnels, films de gaz ou de liquide sur un substrat, interfaces entre deux phases, films de polymères, etc., dont les propriétés critiques sont du ressort de la théorie conforme. Mais ces systèmes sont toujours placés dans l'espace à trois dimensions, et les interactions avec le substrat et ses défauts interfèrent inévitablement avec les phénomènes purement bidimensionnels. C'est pourquoi seules quelques-unes des prédictions de l'invariance conforme ont pu jusqu'à présent être vérifiées. Une situation expérimentale appropriée est celle où un gaz est adsorbé sur une surface aussi parfaite que possible d'un solide cristallin. Les atomes de gaz viennent se placer sur

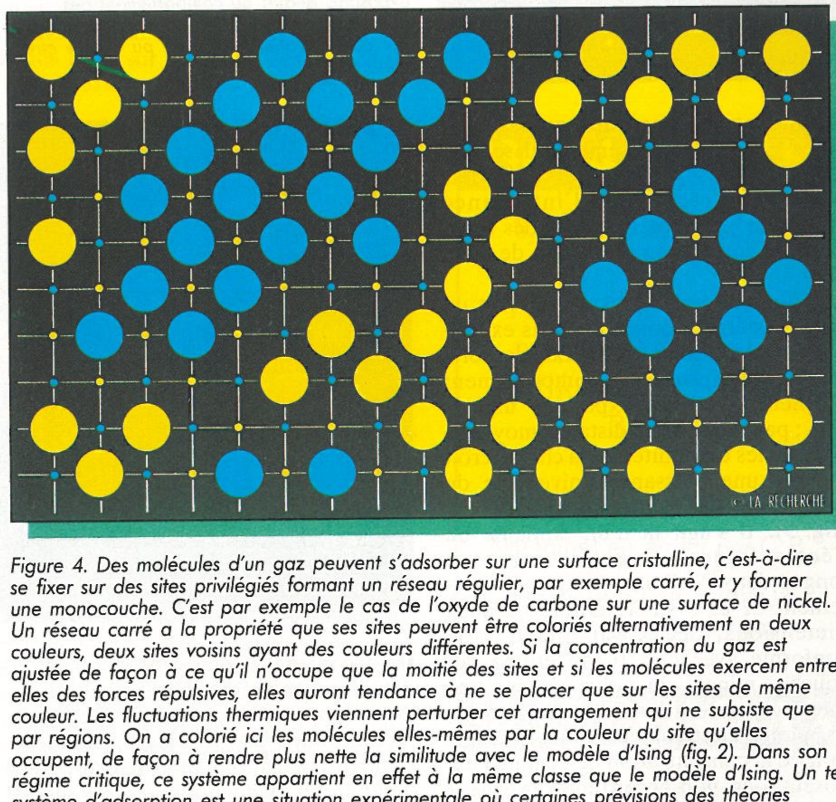


Figure 4. Des molécules d'un gaz peuvent s'adsorber sur une surface cristalline, c'est-à-dire se fixer sur des sites privilégiés formant un réseau régulier, par exemple carré, et y former une monocouche. C'est par exemple le cas de l'oxyde de carbone sur une surface de nickel. Un réseau carré a la propriété que ses sites peuvent être coloriés alternativement en deux couleurs, deux sites voisins ayant des couleurs différentes. Si la concentration du gaz est ajustée de façon à ce qu'il n'occupe que la moitié des sites et si les molécules exercent entre elles des forces répulsives, elles auront tendance à ne se placer que sur les sites de même couleur. Les fluctuations thermiques viennent perturber cet arrangement qui ne subsiste que par régions. On a colorié ici les molécules elles-mêmes par la couleur du site qu'elles occupent, de façon à rendre plus nette la similitude avec le modèle d'Ising (fig. 2). Dans son régime critique, ce système appartient en effet à la même classe que le modèle d'Ising. Un tel système d'adsorption est une situation expérimentale où certaines prévisions des théories conformes pourraient être vérifiées.

(12) T. Einstein, *in Chemistry and physics of solid surfaces VII*, R. Vanselow et R.F. Howe (eds.), Springer-Verlag, 1988.
(13) P.-G. de Gennes, *Scaling concepts in polymer physics*, Cornell Univ. Pr., 1979 ; J. des Cloizeaux et G. Jannink, *Les polymères en solution*, Editions de Physique, 1987.
(14) R. Vilanove *et al.*, *Macromolecules*, *21*, 2880, 1988 ; *ibid.*, *22*, 2491, 1989 et à paraître.
(15) P.W. Anderson, *Comm. Solid State Phys.*, *5*, 73, 1973 ; P. Nozières, *J. Low Temp. Phys.*, *17*, 31, 1974.
(16) I. Affleck et A. Ludwig, *Nucl. Phys.*, *B360*, 641, 1991 ; *Phys. Rev. Lett.*, *67*, 3160, 1991.
(17) D.J. Gross *et al.* (eds.), *Two dimensional quantum gravity and random surfaces*, World Scientific, 1992.
(18) E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, *121*, 351, 1989.

des sites privilégiés du substrat qui forment un réseau ; en variant la température à concentration fixée, on est en mesure d'atteindre un régime critique (fig. 4). Par des expériences de calorimétrie, on mesure la chaleur spécifique, tandis que des expériences de diffusion d'électrons permettent d'accéder à la fonction de corrélation entre deux atomes adsorbés. On peut ainsi aujourd'hui observer différents types de comportement critique, se manifestant par des exposants critiques qui reproduisent les valeurs du modèle d'Ising et de quelques autres modèles[12]. Malheureusement, il semble encore difficile de mesurer des effets plus fins prédits par l'invariance conforme, tels que la valeur des fonctions de corrélation entre plus de deux sites.

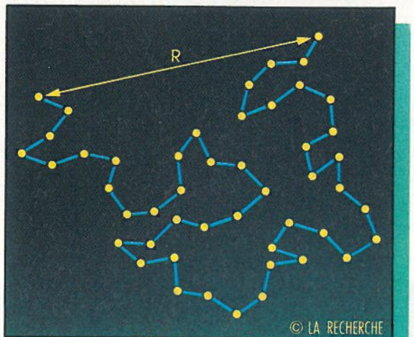


Figure 5. Un polymère constitué de N monomères ne pouvant s'interpénétrer et astreints à rester dans un plan est représenté ici par une chaîne de N maillons à laquelle on interdit de se recouper. Une telle chaîne manifeste des propriétés d'échelle : la distance moyenne R entre ses extrémités croît comme une puissance fractionnaire du nombre de ses maillons : $R \approx N^{3/4}$. La valeur de cet exposant a pu être reproduite dans le cadre d'une théorie conforme dont la « charge centrale » est nulle. D'autres exposants relatifs au comportement des polymères peuvent être également prédits par cette théorie, mais n'ont pu encore être mesurés.

Les films de polymères fournissent un autre système propice aux tests expérimentaux. De longues chaînes de polymères manifestent un comportement d'échelle avec des exposants universels ; par exemple, la distance moyenne R entre les extrémités de la chaîne croît comme une puissance universelle du nombre N de monomères : $R \approx N^{\nu}$ (fig. 5). Il s'agit là d'un domaine où l'école française s'est illustrée de longue date[13]. Pour tester le comportement de ce système critique à deux dimensions, décrit par une théorie conforme avec $c = 0$, on étudie des couches minces du polymère sur une interface eau-air et la mesure de la pression osmotique de surface en fonction de la concentration détermine l'exposant ν en bon accord avec la valeur théorique 3/4. Une méthode ingénieuse, qui simule une variation de la température en modifiant chimiquement la conformation des chaînes du polymère (la « tacticité »), permet d'atteindre d'autres régimes critiques dotés d'exposants différents[14].

Plus généralement, il existe une classe de problèmes dans la physique de l'état condensé qui, sans concerner des systèmes critiques au sens où on l'a introduit plus haut, partagent avec eux la propriété d'avoir des corrélations à grande portée. Le comportement à grande distance de ces systèmes peut être assimilé à un comportement critique, et s'il a lieu à deux dimensions, relève des méthodes de l'invariance conforme. Ainsi, une grande activité entoure en ce moment l'application possible de ces méthodes à l'effet Hall quantique (voir « La renaissance d'un effet centenaire » dans *La Recherche* de décembre 1985) et, de façon sans doute plus spéculative, à des modèles de supraconducteur à haute température.

De façon inattendue, une application détaillée des méthodes et résultats de l'invariance conforme vient d'être effectuée dans un problème tridimensionnel. Il s'agit de l'effet Kondo, effet d'impuretés magnétiques diluées sur les propriétés de conductivité électrique d'un métal non magnétique (le cuivre par exemple). Quand la température diminue, on observe que cette conductivité décroît après être passée par un maximum. Ce comportement de basse température a donné du fil à retordre à des générations de théoriciens avant de recevoir vers 1974 une solution numérique par K. Wilson, fondée sur sa méthode mentionnée plus haut. Il a en effet été compris depuis longtemps que ce problème est critique au sens élargi : les électrons de conduction sont responsables de corrélations à longue portée[14]. Selon une méthode proposée en 1991 par I. Affleck et A. Ludwig, de l'université de Vancouver, le problème est réduit à deux dimensions (une dimension radiale et un temps) et l'invariance conforme peut lui être appliquée[16]. Des résultats nouveaux et détaillés, portant en particulier sur des fonctions de corrélation à temps différents, ont pu être ainsi obtenus et des tests expérimentaux sont en cours. Cela paraît une direction prometteuse pour l'invariance conforme : il fait peu de doute que d'autres systèmes non strictement bidimensionnels attendent un traitement analogue les ramenant à un problème effectif à deux dimensions.

Dans cet article, l'accent a été mis sur l'application de l'invariance conforme aux phénomènes critiques. L'autre contexte dans lequel le sujet s'est développé dans les années 1970 (avec l'Argentin M. Virasoro et ses collaborateurs) est celui de la théorie des cordes, ou plutôt ce qu'on appelait à l'époque les « modèles duaux » (voir « L'Uni-

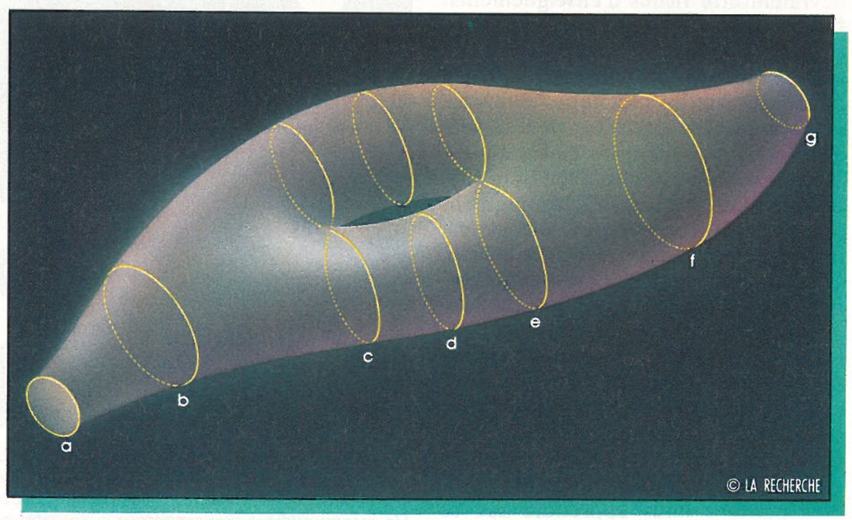


Figure 6. Dans la théorie des cordes, qui vise à unifier toutes les interactions fondamentales, les objets microscopiques élémentaires sont supposés être unidimensionnels (des cordes). En se déplaçant dans l'espace-temps, ces cordes balayent des surfaces, objets bidimensionnels. Le calcul des grandeurs physiques doit être indépendant du système de coordonnées utilisé pour représenter ces surfaces. Cela a pour conséquence une invariance conforme bidimensionnelle. Aussi la théorie des cordes est-elle un domaine où l'invariance conforme joue un rôle-clé. On a représenté ici l'évolution possible d'une corde fermée par la surface qu'elle balaye. On peut imaginer que le temps s'écoule de gauche à droite. La corde, créée en a, évolue jusqu'en c, où elle se scinde en deux cordes. Celles-ci évoluent indépendamment en d, interagissent en e et se fusionnent en une corde unique qu'on retrouve au temps final g.

vers est-il fait de cordes ? » dans *La Recherche* de janvier 1986). Les travaux menés alors par de nombreuses équipes de physiciens ont servi de base aux résultats mathématiques rigoureux cités plus haut.

L'idée originale des théories des cordes, aujourd'hui candidates à l'édification d'une théorie quantique unifiant la gravitation et les autres forces fondamentales, est que les objets microscopiques fondamentaux ne sont pas ponctuels (particules telles qu'électrons, quarks, etc.) mais unidimensionnels comme de petits morceaux de corde (fig. 6). Au cours de leurs évolutions, ces cordes balaient des surfaces, et l'invariance conforme apparaît dans le fait que les quantités physiques doivent être insensibles au système de coordonnées choisi pour représenter ces surfaces bidimensionnelles. Il est remarquable que le même formalisme de l'invariance conforme se soit développé en parallèle dans deux contextes physiques très différents : phénomènes critiques et théories de cordes, et que les théories conformes qui décrivent telle ou telle classe d'universalité puissent aussi servir à la construction de théories de cordes.

FILMS DE POLYMÈRES, THÉORIE DES CORDES, GRAVITATION QUANTIQUE, MATHÉMATIQUES DES NŒUDS, ETC. : L'INVARIANCE CONFORME INTERVIENT DANS DE NOMBREUX DOMAINES

■

Une autre application de l'invariance conforme a trait aux systèmes désordonnés, en particulier aux systèmes critiques couplés à une géométrie fluctuante. On rencontre cette situation quand on place le modèle d'Ising sur un maillage arbitraire au lieu d'un réseau régulier et qu'on prend la moyenne sur des choix aléatoires de tels maillages. Le comportement critique fait apparaître de nouvelles valeurs des exposants. Curieusement, les calculs sont souvent beaucoup plus simples que pour le système initial, au réseau régulier, et on sait extraire les nouveaux exposants critiques. A nouveau, ce problème admet une autre interprétation dans l'esprit de la théorie des cordes et d'une théorie quantique de la gravité. On sait que, selon Einstein, la gravité n'est que le reflet de la géométrie de l'espace-temps, plus précisément de sa courbure. Dans le problème qui nous occupe, les maillages fluctuants peuvent être interprétés comme une version discrète de fluctuations quantiques de la géométrie d'un espace-temps à deux dimensions. Ce sont donc des modèles de gravité quantique bidimensionnelle qu'on construit ainsi et il s'agit là encore d'un domaine en pleine effervescence[17].

Les théories conformes établissent une variété de relations avec des sujets très divers. Les travaux du physicien E. Witten, de l'Institute for Advanced Studies de Princeton, un des lauréats de la médaille Fields 1990, ont en particulier constitué une ouverture vers les mathématiques pures. En cherchant à caractériser la topologie des « variétés » (objets mathématiques que l'on appellerait en langage profane « corps continûment déformables »), Witten a été conduit à introduire des théories champs en trois dimensions dotées propriétés remarquables et intimement liées à des théories bidimensionnelles invariantes conformes[18]. Dans le même domaine sont à placer les travaux du mathématicien V. Jones de l'université de Berkeley, autre lauréat Fields 1990, sur la théorie des nœuds et leur relation avec les modèles intégrables.

On assiste donc en ce moment à un bouillonnement d'idées nouvelles et de développements théoriques, où le thème de l'invariance conforme revient avec insistance, conjugué avec celui d'intégrabilité complète. Des sujets qui semblaient éloignés apparaissent finalement comme des facettes différentes d'un même problème. Il ne paraît pas excessif de dire que le domaine de la mécanique statistique et de la théorie des champs à deux dimensions est en train de connaître une refonte complète à la lueur de ces idées. Ces travaux ont occasionné un rapprochement marqué de certaines branches de la physique théorique et des mathématiques. De façon assez caractéristique, ces développements ont été menés par la plupart des théoriciens sans souci d'applications immédiates à la physique du laboratoire, mais avec la conviction très forte qu'une si belle théorie ne pouvait rester inutilisée par la nature. Les résultats récents commencent à leur donner raison. ■

POUR EN SAVOIR PLUS

■ C. Itzykson et J.-M. Drouffe, *Théorie statistique des champs*, (2 tomes) InterEditions, 1989.

■ Cours de J. Cardy et P. Ginsparg à l'Ecole des Houches 1988, *Fields, strings and critical phenomena*, E. Brézin et J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland, 1990.

La plupart des références antérieures à 1988 sont reproduites dans :

■ C. Itzykson, H. Saleur et J.-B. Zuber (eds.), *Conformal invariance and applications to statistical mechanics*, World Scientific, 1988.