# Chapitre 1
# Groupes. Groupes et algèbres de Lie

## 1. Généralités sur les groupes

### *1.1. Définitions de base et premiers exemples*

On considère un groupe $G$, avec une opération notée selon les cas ., $\times$ ou $+$, un élément neutre $e$ (ou 1 ou $I$ ou 0), et un inverse $g^{-1}$ (ou $-a$). Si l'opération est commutative, le groupe est dit *abélien*. Si le groupe est fini, c'est-à-dire a un nombre déléments fini, on appelle ce nombre l'*ordre* du groupe. On s'intéressera dans ce cours surtout à des groupes infinis, discrets ou continus.

**Exemples** (que le physicien peut rencontrer…)

– Groupes finis
  * le groupe cyclique $\mathbb{Z}_p$ d'ordre $p$, considéré géométriquement comme le groupe d'invariance de rotation d'un cercle avec $p$ points marqués équidistants, ou comme le groupe multiplicatif des racines $p$-ièmes de l'unité, $\{e^{2i\pi q/p}\}$, $q = 0, 1, \cdots, p-1$, ou comme le groupe additif des entiers modulo $p$;
  * les groupes d'invariance de rotation et/ou de réflexion des solides réguliers ou des réseaux réguliers, d'une grande importance en physique des solides et en cristallographie;
  * le groupe de permutation $S_n$ de $n$ objets, appelé aussi groupe symétrique, d'ordre $n!$
  * les groupes d'homotopie, que nous allons rencontrer bientôt, sont d'autres exemples, etc, etc.

– Groupes infinis discrets. L'exemple le plus simple est le groupe additif $\mathbb{Z}$. Citons aussi les groupes de translations des réseaux réguliers.

Ou encore les groupes engendrés par les réflexions dans un nombre fini d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$, qui sont finis ou infinis, selon l'arrangement de ces hyperplans, cf. les groupes de Weyl au Chapitre 4.

Un autre exemple important est le groupe modulaire $PSL(2,\mathbb{Z})$ des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers, de déterminant unité $ad - bc = 1$, où on identifie les matrices $A$ et $-A$. Étant donné un réseau à 2 dimensions engendré dans le plan complexe par deux nombres complexes de rapport non réel $\omega_1$ et $\omega_2$, ce groupe décrit les changements de base $(\omega_1, \omega_2)^T \to (\omega_1', \omega_2')^T = A(\omega_1, \omega_2)^T$ laissant invariant l'aire de la cellule élémentaire ($\Im m\, \omega_2\omega_1^* = \Im m\, \omega_2'\omega_1'^*$) et leur effet sur $\tau = \omega_2/\omega_1$ : $\tau \to a\tau + b/c\tau + d$. Ce groupe joue un rôle important en mathématiques dans l'étude des fonctions elliptiques, des formes modulaires, etc, et en physique dans l'étude des théories conformes et des théories de cordes…

– Groupes continus. Nous n'aurons à faire qu'à des groupes de matrices de dimension finie, c'est-à-dire des sous-groupes des groupes linéaires $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, pour un certain $n$. En particulier

 * $\mathrm{U}(n)$, groupe des matrices unitaires complexes, $UU^\dagger = I$, qui est le groupe d'invariance de la forme sesquilinéaire $(x,y) = \sum x^{*i} y^i$ ; plus généralement,
 * $\mathrm{SU}(n)$ son sous-groupe unimodulaire, des matrices unitaires de déterminant $\det U = 1$ ;
 * $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont les groupes orthogonaux laissant invariante la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^n x_i y_i$. Les matrices de $\mathrm{SO}(n)$ sont en outre de déterminant 1 ;
 * $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{SU}(p,q)$, resp. $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{SO}(p,q)$, les groupes d'invariance d'une forme sesquilinéaire, resp. bilinéaire, de signature $((+)^p,(-)^q)$.

On considère le plus souvent les groupes O($n$,$\mathbb{R}$), SO($n$,$\mathbb{R}$) de matrices à coefficients réels mais les groupes O($n$,$\mathbb{C}$), SO($n$,$\mathbb{C}$) d'invariance de la même forme bilinéaire peuvent aussi jouer un rôle.

 * $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ : Soit $Z$ la matrice $2n \times 2n$ faite d'une diagonale de $n$ blocs $i\sigma_2$ $Z = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et considérons la forme bilinéaire antisymétrique

$$(X,Y) = X^T Z Y = \sum_{i=1}^{N} (x_{2i-1} y_{2i} - y_{2i-1} x_{2i}) \ . \tag{1.1}$$

 Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ est le groupe de matrices $B$ réelles $2n \times 2n$ préservant cette forme $B^T Z B = Z$ . (La forme ci-dessus apparaît naturellement en mécanique hamiltonienne en relation avec la 2-forme symplectique $dp_i \wedge dq_i$.) Pour $n = 1$, vérifier que Sp(2,$\mathbb{R}$)=SL(2,$\mathbb{R}$).

On peut aussi considérer le groupe symplectique complexe Sp($2n$,$\mathbb{C}$). Un groupe relié, souvent noté Sp($n$) mais que je noterai USp($n$) pour éviter la confusion avec les précédents, est le *groupe symplectique unitaire*, groupe d'invariance d'une forme hermitienne quaternionique, USp($n$)=U($2n$)$\cap$ Sp($2n$,$\mathbb{C}$). Voir Appendice A.

 * le groupe de déplacement dans $\mathbb{R}^3$, et les groupes obtenus en lui ajoutant les dilatations, puis les inversions par rapport à un point ;
 * le groupe de Galilée des transformations $\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0$, $t' = t + t_0$,
 * O(3,1), le groupe de Lorentz, et le groupe de Poincaré,

 etc etc.

*1.2. Classes d'un groupe*

On définit sur un groupe $G$ la relation d'équivalence suivante:

$$a \sim b \quad \text{si} \quad \exists\, g \in G \ : \quad a = g.b.g^{-1} \tag{1.2}$$

et on dit aussi que les éléments $a$ et $b$ sont *conjugués*.

Les classes d'équivalence qui en découlent réalisent une partition de $G$, puisque tout élément appartient à une classe et une seule. Noter que l'élément neutre constitue à lui seul une classe. Pour un groupe fini, les différentes classes ont en général des ordres différents. Par exemple, la classe de l'identité $e$ ne contient que le seul élément $e$.

On a déjà noté que dans le groupe SO(3), une classe de conjugaison est caractérisée par l'angle de rotation $\psi$ (autour d'un vecteur unitaire $\mathbf{n}$). Mais cette notion est aussi familière dans le cas du groupe SU($n$), où une classe est caractérisée par un $n$-tuple non ordonné de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. La notion de classe joue un rôle important dans la discussion des représentations des groupes et sera abondamment illustrée par la suite.

Ce type de classe d'équivalence ne doit pas être confondu avec celui impliquant un sous–groupe, que nous examinerons au § 1.5.

*1.3. Sous-groupes*

La notion de sous-groupe, sous-ensemble d'un groupe lui-même doté de la structure de groupe, est familière. Si $H$ est un sous–groupe, pour tout $a \in G$, l'ensemble $a^{-1}.H.a$ des éléments de la forme $a^{-1}.h.a$, $h \in H$ forme aussi un sous–groupe, dit *sous–groupe conjugué* de $H$.

Des exemples de sous-groupes particuliers sont donnés par :

* le centre $Z$ :

Soit $G$ un groupe. On appelle *centre* de $G$ l'ensemble $Z$ des éléments qui commutent avec tous les éléments de $G$ :

$$Z = \{a \mid \forall g \in G, a.g = g.a\} \tag{1.3}$$

$Z$ est un sous-groupe de $G$, propre si $G$ est non-abélien. Exemples : le centre du groupe $GL(2,\mathbb{R})$ des matrices régulières $2 \times 2$ est l'ensemble des matrices multiples de $I$ ; le centre de SU(2) est le groupe $\mathbb{Z}_2$ des matrices $\pm I$ (le vérifier par le calcul direct).

* le centralisateur d'un élément $a$ :

Le *centralisateur* (ou *commutant* ) d'un élément $a$ fixé de $G$ est l'ensemble des éléments de $G$ qui commutent avec $a$.

$$Z_a = \{g \in G | a.g = g.a\} \tag{1.4}$$

Le commutant $Z_a$ n'est jamais vide : il contient au moins le sous-groupe engendré par $a$. Le centre $Z$ est l'intersection de tous les commutants. Exemple: dans le groupe $GL(2,\mathbb{R})$, le commutant de la matrice de Pauli $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est le groupe abélien des matrices de la forme $a\mathbf{1} + b\sigma_1$, $a^2 - b^2 \neq 0$.

* Plus généralement, étant donnée une partie $S$ d'un groupe $G$, on définit son *centralisateur* $Z(S)$ et son *normalisateur* $N(S)$ comme les sous-groupes commutant respectivement individuellement avec tout élément de $S$ ou globalement avec $S$ tout entier

$$\begin{aligned} Z(S) =& \{y : \forall s \in S \quad y.s = s.y\} \\ N(S) =& \{x : x^{-1}.S.x = S\} \ . \end{aligned}$$

### *1.4. Homomorphisme d'un groupe $G$ dans un groupe $G'$*

Un *homomorphisme* d'un groupe $G$ dans un groupe $G'$ est une application $\rho$ de $G$ dans $G'$ qui respecte la loi de composition:

$$\forall g, h \in G, \qquad \rho(g.h) = \rho(g).\rho(h) \tag{1.6}$$

En particulier, à l'élément neutre de $G$ correspond par $\rho$ celui de $G'$, à l'inverse de $g$ correspond celui de $g' = \rho(g)$ : $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$.

Un exemple d'homomorphisme que nous allons particulièrement étudier est celui d'une représentation linéaire de groupe, dont la définition a été donnée au chapitre 00 et sur laquelle on va revenir au chap. 2.

Le *noyau* de l'homomorphisme noté $\ker\rho$ ("kernel" en anglais) est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre $e'$ de $G'$. C'est un sous-groupe de $G$.

Par exemple, la parité (ou signature) d'une permutation de $S_n$ définit un homomorphisme de $S_n$ dans $\mathbb{Z}_2$. Son noyau est constitué des permutations paires : c'est le *groupe alterné* $A_n$ d'ordre $n!/2$.

### *1.5. Classes par rapport à un sous-groupe*

Soit $H$ un sous-groupe d'un groupe $G$. On définit la relation entre éléments de $G$ :

$$g \sim g' \iff g.{g'}^{-1} \in H, \tag{1.7}$$

ce qu'on peut encore écrire comme

$$g \sim g' \iff \exists h \in H \ : \ g = h.g' \quad \text{ou encore} \quad g \in H.g' \ . \tag{1.8}$$

C'est une relation d'équivalence (le vérifier), dite équivalence à droite. On peut définir de la même façon une équivalence à gauche par

$$g \sim_{\mathrm{g}} g' \iff g^{-1}.g' \in H \Leftrightarrow g \in g'.H. \tag{1.9}$$

La relation (disons à droite) définit des classes d'équivalence qui donnent une partition de $G$; si $g_j$ est un représentant de la classe $j$, on peut noter cette dernière $H.g_j$. (Les anglophones utilisent le terme "right-coset" pour cette classe). Les éléments de $H$ forment à eux-seuls une classe. On note $G/H$ l'ensemble quotient, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence. Si $H$ est d'ordre fini $|H|$, toutes les classes ont $|H|$ éléments, et si $G$ est lui-même d'ordre fini $|G|$, il est partitionné en $|G|/|H|$ classes, et on obtient comme corollaire le théorème de Lagrange : l'ordre $|H|$ de tout sous-groupe $H$ divise celui de $G$, et le quotient $|G|/|H|$ est l'ordre de l'ensemble quotient $G/H$.

L'équivalence à gauche donne en général une partition différente. Par exemple, le groupe $S_3$ possède un sous–groupe $\mathbb{Z}_2$ engendré par la permutation des deux éléments 1 et 2. Exercice : vérifier que les classes à gauche et à droite ne coïncident pas.

*1.6. Sous-groupe invariant.*

Soit $G$ un groupe, $H$ un sous-groupe de $G$. $H$ est un *sous-groupe invariant* (on dit aussi *normal*) si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vraie

- $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.
- les classes à gauche et à droite coïncident;
- $H$ est égal à tous ses conjugués, $\forall g \in G, \quad gHg^{-1} = H$.

Exercice : vérifier l'équivalence entre ces trois assertions.

La propriété importante à retenir est la suivante :

• *Si $H$ est un sous-groupe invariant de $G$, on peut munir l'ensemble quotient $G/H$ de la structure de groupe (mais attention ! ce n'est en général pas un sous-groupe de $G$).*

Esquissons la démonstration. Si $g_1 \sim g'_1$ et $g_2 \sim g'_2$, $\exists h_1, h_2 \in H \quad : \; g_1 = h_1.g'_1,\; g_2 = g'_2.h_2$, donc $g_1.g_2 = h_1.(g'_1.g'_2).h_2$ c'est-à-dire $g_1.g_2 \sim g'_1.g'_2$ et $g_1^{-1} = {g'}_1^{-1}.h_1^{-1} \sim {g'}_1^{-1}$. La structure de groupe passe donc au quotient, ensemble des classes. La classe constituée de $H$ est l'élément neutre du quotient.

Exemple de sous-groupe invariant : Le *noyau* d'un homomorphisme $\rho$ d'un groupe $G$ dans un groupe $G'$ est un sous–groupe invariant : montrer que son groupe quotient est un groupe isomorphe à l'image $\rho(G) \subset G'$ de $G$ par $\rho$.

### *1.7. Groupe simple, groupe semi-simple*

Un groupe est *simple* s'il n'a pas de sous-groupe invariant non trivial (c'est-à-dire différent de $\{e\}$ et de $G$ tout entier). Un groupe est *semi-simple* s'il n'a pas de sous-groupe invariant abélien non trivial.

Cette notion est importante dans l'étude des représentations et la classification des groupes.

Exemples : Le groupe des rotations à deux dimensions n'est pas simple, ni même semi-simple (pourquoi ?). Le groupe SO(3) est simple (preuve non triviale, voir plus bas, § 2.2). Le groupe SU(2) n'est ni simple, ni semi-simple, il contient en effet le sous-groupe invariant $\{I, -I\}$. Le groupe $S_n$ n'est pas simple, pour $n > 2$ (pourquoi?).

## 2. Groupes continus. Propriétés topologiques. Groupes de Lie.

Un groupe continu (ou encore groupe topologique) est un espace topologique (donc doté d'une base de voisinages permettant de définir les notions de continuité etc) muni d'une structure de groupe, telle que les opérations de groupe $(g, h) \mapsto g.h$ et $g \mapsto g^{-1}$ soient des fonctions continues.

Autrement dit, si $g'$ est proche (au sens de la topologie de $G$) de $g$ et $h'$ de $h$, alors $g'.h'$ est proche de $g.h$ et ${g'}^{-1}$ est proche de $g^{-1}$.

Les groupes de matrices présentés plus haut entrent bien dans cette classe de groupes topologiques, mais aussi des groupes “de dimension infinie” comme le groupe des difféomorphismes invoqué en Relativité Générale.

Commençons par étudier quelques propriétés topologiques de tels groupes continus.

### *2.1. Connexité*

Un groupe peut être ou non connexe. Si $G$ n'est pas connexe, la composante connexe de l'identité est un sous-groupe invariant.

On peut s'intéresser à la propriété de connexité au sens topologique général (un espace est connexe s'il est à la fois ouvert et fermé), mais c'est surtout la connexité par arcs qui nous concernera (pour toute paire de points, il existe un chemin continu les joignant). Démontrer que la composante connexe de l'identité est un sous-groupe invariant dans l'une et l'autre définition. Réf. [Po].

Exemples. O(3) est disconnexe et la composante connexe de l'identité est SO(3) ; pour le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$=O(3,1) on a défini sa composante propre orthochrone $\mathcal{L}_+^\uparrow$, les autres “nappes” s'en déduisant via la parité $P$, le renversement du temps $T$ et leur produit $PT\dots$

*2.2. Simple connexité. Groupe d'homotopie. Recouvrement universel*

Cette notion ne doit pas être confondue avec la précédente. On considère les chemins fermés tracés dans le groupe ou *lacets* à extrémité fixée, c'est-à-dire les applications continues $g(t)$ de $[0,1]$ dans $G$ telles que $g(0)=g(1)=g_0$. Étant donnés deux tels chemins $g_1(.)$ et $g_2(.)$ de $g_0$ à $g_0$, peut-on les déformer continûment l'un en l'autre ? Autrement dit, existe-t-il une fonction continue $f(t,\xi)$ de deux variables $t,\xi\in[0,1]$, à valeurs dans le groupe, telle que

$$\begin{aligned} &\forall\xi\in[0,1] \qquad f(0,\xi)=f(1,\xi)=g_0 \quad : \text{courbes fermées} \\ &\forall t\in[0,1] \qquad f(t,0)=g_1(t) \qquad f(t,1)=g_2(t) \quad : \text{interpolation .} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si c'est le cas, on dit que les lacets $g_1$ et $g_2$ sont homotopes (c'est une relation d'équivalence), et on dit qu'ils appartiennent à la même classe d'homotopie.

On peut aussi *composer* les chemins : Si $g_1(.)$ et $g_2(.)$ sont deux lacets de $g_0$ à $g_0$, le chemin $g_2\circ g_1$ va aussi de $g_0$ à $g_0$ en parcourant d'abord $g_1$ puis $g_2$. Un inverse du lacet $g(.)$ pour cette composition est le même lacet, parcouru en sens inverse : $g^{-1}(t)=g(1-t)$. Cette composition est compatible avec l'homotopie : si $g_1\sim g_1'$ et $g_2\sim g_2'$, alors $g_2\circ g_1\sim g_2'\circ g_1'$. La composition passe donc aux classes et on montre que l'ensemble des classes d'homotopie est muni d'une structure de groupe pour cette composition, c'est le **groupe d'homotopie** $\pi_1(G,g_0)$. On montre enfin que les groupes relatifs à des extrémités $g_0$ différentes sont isomorphes (dans un groupe connexe), et on peut se ramener au choix du point de base à l'identité $g_0=e$. On parle donc **du** groupe d'homotopie (ou groupe fondamental) $\pi_1(G)$. Pour plus de détails, voir par exemple [Po], [DNF].

Si tous les lacets de $g_0$ à $g_0$ peuvent être contractés en le lacet trivial $\{g_0\}$, on dit que $G$ est simplement connexe. Dans le cas contraire, on montre que l'on peut construire un groupe $\widetilde{G}$, dit *groupe de recouvrement universel* de $G$, tel que $\widetilde{G}$ est simplement connexe et que **localement**, $G$ et $\widetilde{G}$ sont *homéomorphes*. Cela signifie qu'il existe une application continue surjective $p$ de $\widetilde{G}$ dans $G$ tel que tout point $g$ de $\widetilde{G}$ ait un voisinage $V_g$ et que $V_g\mapsto p(V_g)$ soit un homéomorphisme, c'est-à-dire une application bijective et bicontinue[1]. Le groupe $\widetilde{G}$ de recouvrement universel de $G$ est unique.

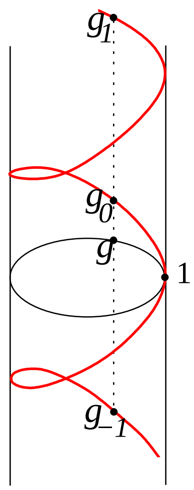
On peut construire le groupe de recouvrement universel $\widetilde{G}$ en considérant les chemins qui joignent l'identité $e$ à un point $g$ et leurs classes d'équivalence par déformation continue à extrémités fixes. $\widetilde{G}$ est l'ensemble de ces classes d'équivalence. C'est un groupe pour la multiplication des chemins définie comme suit : si deux chemins $g_1(t)$ et $g_2(t)$ joignent $e$ à $g_1$ et à $g_2$ respectivement, le chemin $g_1(t).g_2(t)$ joint $e$ à $g_1.g_2$. Cette loi de composition est compatible avec l'équivalence et munit $\widetilde{G}$ d'une structure de

[1] "bicontinue" signifie que l'application et son inverse sont continues.

groupe et on montre que $\widetilde{G}$ est simplement connexe (cf. Pontryagin [Po]). La projection $p$ de $\widetilde{G}$ dans $G$ associe à toute classe de chemins leur extrémité commune. C'est bien un homéomorphisme local et un homomorphisme de groupes, ([Po], sect 51), et son noyau qui est un sous-groupe invariant n'est autre que le groupe d'homotopie $\pi_1(G)$ (pourquoi ?). Le groupe quotient est isomorphe à $G$

$$\widetilde{G}/\pi_1(G) \simeq G \ , \tag{2.2}$$

(selon une propriété générale du groupe quotient par le noyau d'un homomorphisme, cf. § 1.2).



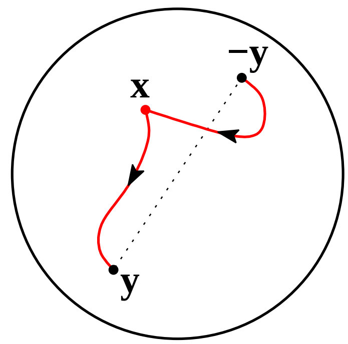




**Fig. 1:** Le groupe U(1), identifié au cercle et son groupe de recouvrement universel $\mathbb{R}$, identifié à l'hélice. Un élément $g \in$ U(1) se relève en des points $\cdots, g_{-1}, g_0, g_1, \cdots$ sur l'hélice. **Fig. 2:** Dans la boule $B^3$ représentant SO(3), les points $\mathbf{y}$ et $-\mathbf{y}$ de la surface sont identifiés. Un chemin allant de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{x}$ via $\mathbf{y}$ et $-\mathbf{y}$ est donc fermé et non contractible : SO(3) est non simplement connexe.

Exemple : Le groupe des phases $G =$U(1), vu comme le cercle unité $S^1$, n'est pas simplement connexe : un chemin de l'identité 1 à 1 peut faire un nombre arbitraire de fois le tour du cercle arbitraire et ce nombre de tours (positif ou négatif) distingue les différentes classes d'homotopie : le groupe d'homotopie est $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$ . Le groupe $\widetilde{G}$ n'est autre que le groupe additif $\mathbb{R}$ qu'on peut visualiser comme une hélice au-dessus du cercle U(1). Le quotient est $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq$ U(1), ce qu'il faut rapprocher du fait qu'un point de U(1), c'est-à-dire un angle, est un nombre réel modulo un multiple entier de $2\pi$. On peut dire encore $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. En fait la notion de groupe d'homotopie s'applique à toute variété topologique, et en particulier on se convainc aisément que pour les sphères, $\pi_1(S^n)$ est trivial (tous les lacets sont contractibles) dès que $n > 1$.

Autre exemple fondamental : Le groupe des rotations SO(3) n'est pas simplement connexe, comme cela a été pressenti au Chapitre 00. Pour nous en convaincre, visualisons la rotation $R_{\mathbf{n}}(\psi)$ par le point $\mathbf{x} = \tan\frac{\psi}{4}\mathbf{n}$ d'un espace $\mathbb{R}^3$ auxiliaire ; ces points sont tous dans la boule $B^3$ de rayon 1, avec la rotation identité au centre et les rotations d'angle $\pi$ sur la surface de la sphère, mais en raison de $R_{\mathbf{n}}(\pi) = R_{-\mathbf{n}}(\pi)$, il faut identifier les points de la sphère diamétralement opposés. Il s'ensuit qu'il existe dans SO(3) des courbes fermées non contractibles : une courbe de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{x}$ passant par deux points diamétralement opposés sur la sphère $S^2$ doit être considérée comme fermée mais n'est pas contractible (Fig. 2). Il existe deux classes de chemins fermés non homotopes et le groupe SO(3) est doublement connexe. Son groupe d'homotopie est $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$. En fait, nous connaissons déjà le groupe de recouvrement universel de SO(3) : c'est le groupe SU(2), dont on a montré qu'il était homéomorphe à la sphère $S^3$, donc simplement connexe, et qu'il existait un homomorphisme l'envoyant dans SO(3), selon $\pm U_{\mathbf{n}}(\psi) = \pm(\cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\sigma.\mathbf{n}) \mapsto R_{\mathbf{n}}(\psi)$, cf. Chapitre 00, §1.2.

Cette même visualisation des rotations par l'intérieur de la boule unité permet de comprendre l'assertion faite plus haut que le groupe SO(3) est simple. Supposons qu'il ne le soit pas, et soit $R = R_{\mathbf{n}}(\psi)$ un élément d'un sous-groupe invariant de SO(3), qui contient aussi tous les conjugués de $R$ (par définition d'un sous-groupe invariant). Ces conjugués sont visualisés par les points de la sphère de rayon $\tan\psi/4$. Le sous-groupe invariant contenant $R_{\mathbf{n}}(\psi)$ et des points arbitrairement proches de son inverse $R_{-\mathbf{n}}(\psi)$ contient des points arbitrairement proches de l'identité, qui par conjugaison, remplissent une petite boule au voisinage de l'identité. Il reste à montrer que le produit de tels éléments permet de remplir toute la boule, c'est-à-dire que le sous-groupe invariant ne peut être que le groupe SO(3) tout entier; ceci est en fait vrai pour tout groupe de Lie connexe, comme on le verra plus bas.

Autres exemples : les groupes classiques. On démontre que

- les groupes SU($n$) sont tous simplement connexes, pour tout $n$ ;
- pour le groupe SO(2)$\cong$ U(1), on a vu que $\pi_1$(SO(2))= $\mathbb{Z}$ ;
- pour tout $n > 2$, SO($n$) est doublement connexe, $\pi_1$(SO(n))= $\mathbb{Z}_2$, et on appelle Spin($n$) son groupe de recouvrement universel. Donc Spin(3)=SU(2).

La notion d'homotopie, c'est-à-dire de déformation continue, qu'on vient d'appliquer à des lacets, c'est-à-dire à des applications de $S^1$ dans une variété $\mathcal{V}$ (un groupe $G$ ici), peut s'étendre à des applications d'une sphère $S^n$ dans $\mathcal{V}$. Même si la composition de telles applications est moins aisée à visualiser, elle peut être définie et est à nouveau compatible avec l'homotopie, ce qui conduit à la définition du groupe d'homotopie $\pi_n(\mathcal{V})$. Par exemple $\pi_n(S^n)$ =$\mathbb{Z}$. Cette notion est importante pour le physicien pour décrire des défauts topologiques, solitons, instantons, monopoles, etc. Voir [DNF] pour plus de détails et des calculs de ces groupes $\pi_n$.

### *2.3. Groupes compacts et non compacts*

Si le domaine $\mathcal{D}$ dans lequel vivent les paramètres du groupe $G$ est compact, on dit que $G$ est un *groupe compact.*

Rappelons quelques-unes des nombreuses caractérisations équivalentes d'un ensemble compact $E$. Toute suite infinie y admet un sous-suite convergente. Étant donné un recouvrement de $E$ par un ensemble d'ouverts $U_i$, $E$ peut être recouvert par un nombre fini d'entre eux. Toute fonction continue y est bornée, etc. Pour un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^d$, la propriété de compacité équivaut à la propriété de $\mathcal{D}$ d'être fermé et borné.

Exemples. Les groupes de matrices unitaires U($n$) et leurs sous-groupes SU($n$), O($n$), SO($n$), USp($n/2$) ($n$ pair), sont compacts. Les groupes SL($n,\mathbb{R}$) ou SL($n,\mathbb{C}$), Sp($n,\mathbb{R}$) ou Sp($n,\mathbb{C}$), le groupe de translation dans $\mathbb{R}^n$, le groupe de Galilée, les groupes de Lorentz et Poincaré ne le sont pas, pourquoi ?

### *2.4. Mesure invariante*

Quand on traite d'un groupe *fini*, on est souvent amené à considérer des sommes sur tous les éléments du groupe et à utiliser le "lemme de réarrangement", qui consiste à écrire

$$\sum_{g\in G} f(g'g) = \sum_{h=g'g\in G} f(g'g) = \sum_{g\in G} f(g) \ ,$$

(invariance à gauche), la même chose avec $g'g$ changé en $gg'$ (invariance à droite), et aussi

$$\sum_{g\in G} f(g^{-1}) = \sum_{g^{-1}\in G} f(g^{-1}) = \sum_{g\in G} f(g) \ .$$

On aimerait pouvoir effectuer de telles opérations dans le cas d'un groupe continu, la somme finie étant remplacée par une intégrale, finie et dotée des mêmes invariances. Cela nécessite de pouvoir disposer d'une mesure d'intégration invariante à gauche et à droite

$$d\mu(g) = d\mu(g'.g) = d\mu(g.g') = d\mu(g^{-1})$$

telle que $\int d\mu(g) f(g)$ soit finie pour toute fonction $f$ continue.

On démontre que

• *si le groupe est compact, une telle mesure existe et est unique à une normalisation près.* C'est la *mesure de Haar.*

Par exemple, pour le groupe unitaire U($n$), on peut construire la mesure de Haar explicitement. On peut utiliser la méthode proposée au chapitre 0, § 2.3 : on définit d'abord une métrique sur U($n$) en écrivant $ds^2 = \mathrm{tr}\, dU.dU^\dagger$ dans la paramétrisation de son choix ; cette métrique est bien invariante par $U \to UU'$ ou $U \to U'U$ et par $U \to U^{-1} = U^\dagger$ ; la mesure $d\mu(U)$ qu'on en tire a les mêmes propriétés. On trouvera dans l'Appendice B le calcul explicite de cette mesure pour SU(2) et U($n$).

Inversement si le groupe n'est pas compact, les mesures invariantes à gauche et à droite peuvent exister, elles peuvent même coïncider, (groupes non compacts abéliens ou semi-simples) mais leur intégrale sur le groupe diverge.

Ainsi, si $G$ est localement compact, (c'est-à-dire tout point a une base de voisinages compacts), on démontre qu'il existe une mesure invariante à gauche, unique à une constante près. Il existe aussi une mesure invariante à droite, mais elles peuvent ne pas coïncider. Exemple

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| x, y \in \mathbb{R}, y > 0 \right\}$$

on vérifie aisément que $d\mu_L(g) = y^{-2} dx dy\,, \quad d\mu_R(g) = y^{-1} dx dy$ sont les mesures invariantes à gauche et à droite, respectivement, et que leurs intégrales divergent. Réf. [Bu].

*2.5. Groupes de Lie*

En imposant davantage de structure à un groupe continu, nous sommes amenés à la notion de groupe de Lie.

Selon la définition la plus usuelle, un groupe de Lie est un espace topologique muni d'une loi de groupe, (un groupe topologique), qui en outre est une variété différentiable et qui est tel que les lois de composition et de passage à l'inverse $G \times G \to G$ et $G \to G$ soient des fonctions infiniment différentiables. On impose parfois que ce soit des fonctions analytiques réelles, c'est-à-dire des fonctions dont le développement de Taylor converge vers la fonction considérée. Le fait que l'une et l'autre de ces deux propriétés se trouvent dans la littérature laisse présager que la plus faible (différentiabilité) implique la plus forte (analyticité). En fait, selon un théorème très puissant de Montgomery et Zippen (1955), des hypothèses beaucoup plus faibles suffisent à assurer la propriété de groupe de Lie. Un groupe topologique connexe qui est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, $d$ fini, est un groupe de Lie. Autrement dit, l'existence de coordonnées locales (en nombre fini) et les propriétés de groupe topologique (la continuité des opérations de groupe) suffisent à entraîner les propriétés d'analyticité ! [2] Ceci laisse entrevoir que la structure de groupe de Lie est très puissante et très rigide.

Pour ne pas rentrer dans une discussion mathématique inutile pour nos besoins, nous nous restreindrons à des groupes continus de matrices de taille finie. Pour un tel groupe, les éléments de matrices de $g \in G$ dépendent de façon continue de paramètres réels $(\xi^1, \xi^2, \cdots \xi^d) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Un tel groupe est appelé *groupe de Lie*, et $d$ est appelé sa *dimension*.

Pour être plus précis, dans l'esprit de la géométrie différentielle, il faut en général introduire plusieurs domaines $\mathcal{D}_j$, avec des fonctions de recollement continues, et en fait analytiques, etc.

Exemples : tous les groupes de matrices présentés plus haut sont des groupes de Lie. Vérifier que la dimension de $\mathrm{U}(n)$ est $n^2$, celle de $\mathrm{SU}(n)$ est $n^2-1$, celle de $\mathrm{O}(n)$ ou $\mathrm{SO}(n)$ est $n(n-1)/2$. Quelle est celle de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ ? du groupe de Galilée dans $\mathbb{R}^3$? des groupes de Lorentz et de Poincaré ? Montrer que $\dim(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}))=\dim(\mathrm{USp}(n))=\dim(\mathrm{SO}(2n+1))$, et nous verrons plus bas au chap. 3 que cela n'est pas un accident.

Dans l'étude d'un groupe de Lie et de ses représentations, on est conduit à se livrer à une double étude : d'une part une étude locale de son espace tangent au voisinage de l'identité, son algèbre de Lie, et d'autre part, une étude globale sur la topologie du groupe, information que ne révèle pas l'étude locale.

## 3. Étude locale d'un groupe de Lie. Algèbre de Lie.

*3.1. Algèbres et algèbres de Lie. Définitions*

On rappelle d'abord la définition d'une algèbre.

[2] Pour un exemple élémentaire d'un tel phénomène, considérer une fonction $f$ d'une variable réelle satisfaisant $f(x)f(y) = f(x+y)$. Sous la seule hypothèse que $f$ est continue, démontrer que $f(x) = \exp kx$, donc qu'elle est analytique !

Une *algèbre* est un espace vectoriel sur un corps (en pratique, toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous), doté d'un produit noté $X * Y$, (pas nécessairement associatif), bilinéaire en $X$ et $Y$

$$\begin{aligned}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) * Y &= \lambda_1 X_1 * Y + \lambda_2 X_2 * Y \\ X * (\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) &= \mu_1 X * Y_1 + \mu_2 X * Y_2 \ .\end{aligned} \tag{3.1}$$

Exemple : l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels ou complexes, $M(n, \mathbb{R})$ ou $M(n, \mathbb{C})$, est une algèbre associative pour le produit matriciel usuel.

Une *algèbre de Lie* est une algèbre dont le produit noté $[X, Y]$ a la propriété supplémentaire d'être antisymétrique et de satisfaire l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned}&[X, Y] = -[Y, X] \\ &[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0\end{aligned} \tag{3.2}$$

Toute algèbre associative, en particulier toute algèbre de matrices, est une algèbre de Lie pour le produit (ou crochet) de Lie défini par le commutateur

$$[X, Y] = X * Y - Y * X \ .$$

Les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie sont évidentes, et l'identité de Jacobi est vérifiée au prix d'une ligne de calcul.

### *3.2. Espace tangent d'un groupe de Lie G*

Soit $G$ un groupe de Lie. On considère un *sous-groupe à un paramètre* $g(t)$, où $t$ est un paramètre réel prenant ses valeurs dans un voisinage de 0, avec $g(0) = e$ ; autrement dit, il s'agit d'une courbe (supposée différentiable) dans $G$ passant par l'origine, et on suppose que (toujours au voisinage de 0),

$$g(t_1)g(t_2) = g(t_1 + t_2) \qquad g^{-1}(t) = g(-t) \ .$$

Localement, ce groupe à un paramètre est isomorphe au groupe abélien $\mathbb{R}$. Il est donc naturel de différencier

$$g(t + \delta t) = g(t)g(\delta t) \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}(t)g(t + \delta t) = g(\delta t) \ . \tag{3.3}$$

Puisque nous avons choisi de nous restreindre à des groupes de matrices, (avec $e \equiv I$, la matrice identité), nous pouvons écrire l'application linéaire tangente sous la forme

$$g(\delta t) = I + \delta t X + \cdots$$

ce qui définit un vecteur $X$ dans l'espace tangent. On écrit encore

$$X = \frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0} , \tag{3.4}$$

c'est le vecteur vitesse en $t = 0$ (ou en $g = e$) le long de la courbe. L'équation (3.3) se récrit donc

$$g'(t) = g(t)X . \tag{3.5}$$

Comme il est habituel en géométrie des variétés, l'espace tangent $T_eG$ en $e$ au groupe $G$, que nous noterons désormais $\mathfrak{g}$, est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $X$ tangents à tous les sous-groupes à un paramètre (=tous les vecteurs vitesse). Si on a choisi dans $G$ des coordonnées $\xi^\alpha$ au voisinage de $e$, un vecteur tangent est un opérateur différentiel $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$.

Dans le cas auquel nous nous restreignons d'un groupe $G \subset \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, $X \in \mathfrak{g} \subset M(d,\mathbb{R})$, et on peut effectuer tous les calculs dans cette algèbre. En particulier, on peut intégrer (3.5) selon

$$g(t) = \exp tX = \sum_{n=0} \frac{t^n}{n!} X^n ,$$

une somme toujours convergente (mais en fait l'idée est tout à fait générale, à condition de donner un sens à l'application $\exp X$, application dotée des propriétés usuelles de l'exponentielle).

*3.3. Relations entre l'espace tangent $\mathfrak{g}$ et le groupe $G$*

$\star$ Si $G$ est le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}$ est l'ensemble de matrices réelles $n \times n$, noté $M(n,\mathbb{R})$. Si $G$ est le groupe de matrices unitaires $\mathrm{U}(n)$, $\mathfrak{g}$ est l'ensemble de matrices antihermitiennes $n \times n$. Elles sont en outre de trace nulle si $G = \mathrm{SU}(n)$. De même, pour le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$, $\mathfrak{g}$ est constitué des matrices antisymétriques, et donc de trace nulle. Pour le groupe symplectique $G = \mathrm{USp}(n)$, $\mathfrak{g}$ est engendré par les matrices quaternioniques "antiselfduales", cf. Appendice A.

$\star$ On démontre

– que l'application $X \in \mathfrak{g} \mapsto e^X \in G$ est bijective au voisinage de l'identité ;

– qu'elle est surjective (=atteint tout élément de $G$) si $G$ est connexe et compact;

– qu'elle est injective (un $g \in G$ n'a qu'un seul antécédent) seulement si $G$ est simplement connexe. Un exemple de non injectivité est fourni par $G = \mathrm{U}(1)$, pour lequel $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ et tous les $i(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ont la même image par exp. La réciproque est en général fausse :

par exemple, dans SU(2) qui est simplement connexe, si $\mathbf{n}$ est de norme 1, $e^{2i\pi\mathbf{n}.\boldsymbol{\sigma}} = -I$, donc tous les éléments $2\pi i\mathbf{n}.\boldsymbol{\sigma}$ de $\mathfrak{g}$ =su(2) ont même image !

⋆ Exemple de groupe non compact pour lequel l'application exp n'est pas surjective : $G$ =SL(2,$\mathbb{R}$), pour lequel $\mathfrak{g}$=sl(2,$\mathbb{R}$), ensemble des matrices réelles de trace nulle. Pour toute matrice $A\in\mathfrak{g}$, donc de trace nulle, en utilisant son équation caractéristique, montrer que $\operatorname{tr} A^{2n+1} = 0$, $\operatorname{tr} A^{2n} = 2(-\det A)^n$, donc $\operatorname{tr} e^A = 2\cosh\sqrt{-\det A} \geq -2$. Cependant il existe dans $G$ des matrices de trace $< -2$, par exemple $\operatorname{diag}(-2, -\frac{1}{2})$.

⋆ Pour un groupe non compact, l'application exponentielle est aussi utile. On démontre que tout élément d'un groupe de Lie matriciel peut s'écrire comme le produit d'un nombre fini d'exponentielles d'éléments de son algèbre de Lie. [Cornwell p 151].

⋆ On a encore $\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$, une propriété qu'on établit aisément si $X$ appartient à l'ensemble des matrices diagonalisables. Ces dernières étant denses dans $M(d,\mathbb{R})$, la propriété est vraie en général.

### *3.4. L'espace tangent comme algèbre de Lie*

On va maintenant montrer que l'espace tangent $\mathfrak{g}$ en $e \equiv I$ au groupe de Lie $G$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Étant donnés deux groupes à un paramètre engendrés par deux éléments distincts $X$ et $Y$ de $\mathfrak{g}$, nous mesurons leur défaut de commutativité en formant leur *commutateur* (dans un sens différent du sens usuel !) $g = e^{tX}e^{uY}e^{-tX}e^{-uY}$ ; pour $t \sim u$ petits, ce $g$ est proche de l'identité, donc s'écrit $g = \exp Z$, $Z \in \mathfrak{g}$. Calculons $Z$ au premier ordre non trivial

$$\begin{aligned} e^{tX}e^{uY}e^{-tX}e^{-uY} &= (I + tX + \frac{1}{2}t^2X^2)(I + uY + \frac{1}{2}u^2Y^2)(I - tX + \frac{1}{2}t^2X^2)(I - uY + \frac{1}{2}u^2Y^2) \\ &= I + (X.Y - Y.X)tu + O(t^3) \ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

On a effectué le calcul dans l'algèbre (associative) des matrices, l'élément neutre a été noté $I$. Tous les termes négligés sont du 3ème ordre puisque $t \sim u$. À l'ordre 2, on voit donc apparaître le commutateur $X.Y - Y.X$ au sens habituel, c'est-à-dire le crochet de Lie des matrices $X$ et $Y$. En général, pour un groupe de Lie quelconque, on définit le crochet par

$$e^{tX}e^{uY}e^{-tX}e^{-uY} = e^Z \quad , \quad Z = tu[X,Y] + \mathrm{O}(t^3) \tag{3.7}$$

et on démontre que ce crochet a les propriétés (3.2) d'un crochet de Lie.

∘ *Application adjointe dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Formule de Baker-Campbell-Hausdorff*

Introduisons une notation commode. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, soit $\operatorname{ad} X$ l'opérateur linéaire dans l'algèbre de Lie défini par

$$Y \mapsto (\operatorname{ad} X)Y := [X,Y] \ , \tag{3.8}$$

et donc

$$(\operatorname{ad}^p X)Y = [X,[X,\cdots[X,Y]\cdots]]$$

avec $p$ crochets (commutateurs).

Étant donnés deux éléments $X$ et $Y$ de $\mathfrak{g}$, $e^X$ et $e^Y$ les éléments de $G$ qu'ils engendrent, existe-t-il $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $e^X e^Y = e^Z$ ? La réponse est positive, au moins pour $X$ et $Y$ suffisamment petits.

Notons d'abord que si $[X, Y] = 0$, les règles du calcul ordinaire s'appliquent et $Z = X + Y$. En général, la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff*, que nous admettrons, donne une expression explicite de $Z$.

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^Z \\ Z &= X + \int_0^1 dt \psi(\exp \operatorname{ad} X \ \exp t \operatorname{ad} Y) Y \end{aligned} \tag{3.9}$$

où $\psi(.)$ est la fonction

$$\psi(u) = \frac{u \ln u}{u - 1} = 1 + \frac{1}{2}(u - 1) - \frac{1}{6}(u - 1)^2 + \cdots \tag{3.10}$$

régulière en $u = 1$. Explicitement, les premiers termes du développement en puissances de $x$ et $y$ s'écrivent

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}\Big([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]\Big) + \cdots \tag{3.11}$$

La formule admet des cas particuliers intéressants à connaître. Ainsi si $X$ et $Y$ commutent avec $[X, Y]$, on a simplement

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]} = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}[X,Y]} \ , \tag{3.12}$$

formule qu'on démontre en utilisant l'identité vraie en général

$$e^X Y e^{-Y} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \operatorname{ad}^n X \, Y \tag{3.13}$$

(qui n'est que le développement de Taylor à $t = 0$ de $e^{tX} Y e^{-tX}$ évalué en $t = 1$) et en écrivant et en résolvant l'équation différentielle satisfaite par $f(t) = e^{tX} e^{tY}$, $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (X + e^{tX} Y e^{-tX}) f(t) \\ &= (X + Y + t[X, Y]) f(t) \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Par ailleurs, au premier ordre en $Y$, on peut remplacer l'argument de $\psi$ dans (3.9) par $\exp \operatorname{ad} X$ et on voit qu'on a

$$Z = X + \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} (-1)^n \, (\operatorname{ad} X)^n \ Y + \mathrm{O}(Y^2) \tag{3.15}$$

où les $B_n$ sont les nombres de Bernoulli : $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_0 B_n \frac{t^n}{n!}$, $B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}$ et en dehors de $B_1 = -\frac{1}{2}$, tous les $B$ d'indice impair sont nuls. Toujours au premier ordre en $Y$, on a encore

$$e^{X+Y} = e^X + \int_0^1 dt \, e^{tX} Y e^{(1-t)X} + \mathrm{O}(Y^2)$$

qu'on obtient en écrivant et en intégrant l'équation différentielle satisfaite par $F(t) = \exp t(X + Y).\exp -tX$.

La convergence des expressions peut se démontrer pour $X$ et $Y$ assez petits. Bien noter que cette formule de BCH ne fait appel qu'à l'application ad dans l'algèbre de Lie, et non à la multiplication ordinaire des matrices de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$. C'est cela qui lui donne un caractère canonique et universel.

### *3.5. Un exemple explicite : l'algèbre de Lie de SO(n)*

De la définition des éléments de $\mathfrak{g}$ comme vecteurs tangents à $G$ en $e \equiv I$, ou encore de la construction de sous-groupes à un paramètre associés à chaque $X \in \mathfrak{g}$, il découle l'interprétation de $X$ comme "générateur infinitésimal" du groupe $G$. Le calcul concret de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie donné $G$ peut s'effectuer de diverses façons, selon la manière dont on définit ou représente le groupe.

Si on a une paramétrisation explicite des éléments de $G$ en termes de $d$ paramètres réels, les générateurs infinitésimaux s'obtiennent par différentiation par rapport à ces paramètres. Voir au chapitre 00, le cas explicite de SO(3) ou SU(2) traité de cette façon.

Si le groupe a été défini comme groupe d'invariance d'une forme quadratique dans des variables $x$, on peut en tirer une expression des générateurs infinitésimaux comme opérateurs différentiels en $x$. Illustrons cela sur le groupe $\mathrm{O}(n)$, groupe d'invariance de la forme $\sum_{i=1}^n x_i^2$. La transformation linéaire la plus générale laissant cette forme invariante s'écrit $x \to x' = Ox$, avec $O$ orthogonale. Sous forme infinitésimale, $O = I+\omega$, et $\omega = -\omega^T$ est une matrice antisymétrique arbitraire. Une transformation infinitésimale de la forme $\delta x^i = \omega^i{}_j x^j$ peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \delta x^i = \omega^i{}_j x^j = -\frac{1}{2}\omega^{kl} J_{kl} x^i \\ J_{kl} = x^k\partial_l - x^l\partial_k \quad : \quad J_{kl}x^i = x^k\delta_{il} - x^l\delta_{ik} \end{aligned} \tag{3.16}$$

(notons que nous nous autorisons à monter et descendre librement les indices, ce qui est justifié avec la métrique de signature $(+)^n$). On dispose ainsi d'une représentation explicite des générateurs infinitésimaux de l'algèbre $\mathrm{so}(n)$. C'est alors un calcul simple de calculer les relations de commutation[3]

$$[J_{ij}, J_{kl}] = \delta_{il}J_{jk} - \delta_{ik}J_{jl} - \delta_{jl}J_{ik} + \delta_{jk}J_{il} \ . \tag{3.17}$$

[3] Noter que par rapport au calcul mené pour le groupe O(3,1) au chapitre 00, § 6.1, nous avons changé nos conventions et adopté ici des générateurs infinitésimaux antihermitiens.

(Autrement dit, les seuls commutateurs non nuls sont de la forme $[J_{ij}, J_{ik}] = -J_{jk}$ pour tout triplet $i \neq j \neq k \neq i$, et tous ceux qui s'en déduisent par antisymétrie dans les indices.)

On peut enfin procéder autrement, en utilisant une base des matrices de l'algèbre de Lie, considérée comme ensemble des matrices antisymétriques $n \times n$. Une telle base est donnée par des matrices $A_{ij}$ indexées par des paires d'indices $1 \leq i < j \leq n$, d'éléments de matrice

$$(A_{ij})^k{}_l = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \ .$$

Autrement dit, la matrice $A_{ij}$ n'a que deux éléments non nuls (et opposés), à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$ et vice versa. Vérifier que ces matrices $A_{ij}$ ont les relations de commutation données par (3.17).

Exercice : répéter cette discussion et le calcul des relations de commutation pour le groupe $\mathrm{SO}(p,q)$ d'invariance de la forme $\sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$. On introduira le tenseur métrique $g = \mathrm{diag}\,((+1)^p, (-1)^q)$.

### *3.6. Un exemple de dimension infinie : l'algèbre de Virasoro*

Dans ces notes nous avons convenu de nous retreindre à des groupes et algèbres de Lie de dimension finie. Donnons ici un exemple de dimension infinie. On s'intéresse aux difféomorphismes $z \mapsto z' = f(z)$ où $f$ est une fonction analytique (holomorphe) de son argument sauf en 0 et à l'infini. (On parle aussi des "difféomorphismes du cercle".) C'est à l'évidence un groupe et une variété de dimension infinie, et cela se manifeste dans son algèbre des difféomorphismes infinitésimaux $z \mapsto z' = z + \epsilon(z)$, engendrés par les opérateurs différentiels $\ell_n$

$$\ell_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.18}$$

qui satisfont

$$[\ell_n, \ell_m] = (n-m)\ell_{n+m} \tag{3.19}$$

comme un calcul immédiat le montre. On appelle algèbre de Witt cette algèbre. C'est sous la forme de son *extension centrale* (cf. chap. 2), où on lui ajoute un générateur $c$ supplémentaire "central", c'est-à-dire commutant avec tous les générateurs, que cette algèbre, dite alors algèbre de Virasoro, est la plus intéressante. Appelons maintenant $L_n$ et $c$ les générateurs

$$[L_n, L_m] = (n-m) + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} \qquad [c, L_n] = 0 \ . \tag{3.20}$$

(On peut penser aux $L_n$ comme réalisant dans une théorie quantique des champs les opérateurs $\ell_n$, le terme $c$ résultant d'effets quantiques. . . )

Vérifier que l'identité de Jacobi est bien satisfaite par cette algèbre. On montre que c'est l'extension centrale la plus générale de (3.19) respectant l'identité de Jacobi. Montrer que la sous-algèbre engendrée par $L_{\pm 1}$, $L_0$ n'est pas affectée par le terme central. Quelle est l'interprétation géométrique des transformations correspondantes ?

L'algèbre de Virasoro joue un rôle central dans la construction des théories de champs invariantes conformes et dans leur application à la physique des phénomènes critiques bidimensionnels et à la théorie des cordes. . . . Plus de détails dans [DFMS].

## 4. Des propriétés de l'algèbre de Lie à celles du groupe

Certaines propriétés du groupe $G$ se traduisent sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

### *4.1. Simplicité, semi-simplicité*

Rappelons la définition d'un *idéal* dans une algèbre (de Lie) $\mathfrak{g}$. C'est un sous-espace $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{g}$ stable par multiplication (au sens du crochet de Lie) par un élément quelconque de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire tel que $[\mathfrak{I},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{I}$. L'idéal est dit *abélien* si $[\mathfrak{I},\mathfrak{I}]=\{0\}$.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'autre idéal que $\{0\}$. Elle est semi-simple si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'autre idéal abélien que $\{0\}$.

Exemple. Considérons l'algèbre de Lie de SO(4), notée so(4), cf les formules données en (3.17) pour so($n$). On vérifie aisément que les combinaisons

$$A_1 := \frac{1}{2}(J_{12}-J_{34}),\ A_2 = \frac{1}{2}(J_{13}+J_{24}),\ A_3 := \frac{1}{2}(J_{14}-J_{23})$$

commutent avec

$$B_1 := \frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}),\ B_2 = \frac{1}{2}(-J_{13}+J_{24}),\ B_3 := \frac{1}{2}(J_{14}+J_{23})$$

et que

$$[A_i,A_j]=\epsilon_{ijk}A_k \qquad [B_i,B_j]=\epsilon_{ijk}B_k\ , \qquad [A_i,B_j]=0$$

où on reconnaît deux copies commutantes de l'algèbre so(3). On écrit so(4)=so(3)$\oplus$ so(3). À l'évidence l'algèbre so(4) n'est pas simple, mais elle est semi-simple.

Bien noter la différence entre ce cas de so(4) et le cas de l'algèbre so(3,1) étudiée au chapitre 00, § 6.1. Là, la signature indéfinie nous a obligé à complexifier l'algèbre pour "découpler" les deux copies de l'algèbre so(3).

On a les relations suivantes

$$G \text{ simple} \Longrightarrow \mathfrak{g} \text{ simple}$$
$$G \text{ semi-simple} \Longrightarrow \mathfrak{g} \text{ semi-simple}$$

mais la réciproque n'est pas vraie ! Plusieurs groupes de Lie différents peuvent en effet avoir la même algèbre de Lie, tels SO(3) qui est simple, et SU(2) qui n'est pas semi-simple, comme on l'a vu plus haut au § 1.7. [4]

[4] Attention ! Certains auteurs appellent "simple" tout groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est simple. Cela revient à faire une distinction entre le concept de groupe simple et groupe de Lie simple. Ce dernier est tel qu'il ne possède pas de sous-groupe *de Lie* invariant non trivial. Le groupe de Lie SU(2) est simple au sens des groupes de Lie, mais pas simple au sens général des groupes (il a un sous-groupe invariant qui n'est pas de Lie) ...

*4.2. Compacité. Complexifiée*

On dit de l'algèbre de Lie d'un groupe compact qu'elle est compacte.

A ce stade, cette définition semble non intrinsèque à l'algèbre, et liée au groupe de Lie dont elle est issue. On verra plus bas une condition (critère de Cartan) qui permet de s'affranchir de cette relation.

Il faut aussi examiner la notion de complexification. Plusieurs groupes distincts peuvent avoir des algèbres de Lie différentes mais qui deviennent isomorphes si on autorise la complexification des paramètres. Par exemple les groupes O(3) et O(2,1), l'un compact, l'autre non, ont pour algèbres de Lie

$$\mathrm{o}(3)\left\{\begin{array}{l} X_1 = z\partial_y - y\partial_z \\ X_2 = x\partial_z - z\partial_x \\ X_3 = y\partial_x - x\partial_y \end{array}\right. \qquad [X_1, X_2] = y\partial_x - x\partial_y = X_3 \text{ etc}$$

$$\mathrm{o}(2,1)\left\{\begin{array}{l} \widetilde{X}_1 = z\partial_y + y\partial_z \\ \widetilde{X}_2 = x\partial_z + z\partial_x \\ \widetilde{X}_3 = y\partial_x - x\partial_y \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = y\partial_x - x\partial_y = \widetilde{X}_3 \\ [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3] = -z\partial_y - y\partial_z = -\widetilde{X}_1 \\ [\widetilde{X}_3, \widetilde{X}_1] = -x\partial_z - z\partial_x = -\widetilde{X}_2 \end{array}$$

mais $i\widetilde{X}_1$, $i\widetilde{X}_2$ et $-\widetilde{X}_3$ vérifient l'algèbre o(3). On dit que les algèbres o(3) et o(2,1) ont la même complexifiée, et qu'elles en sont des formes réelles, mais seule la forme réelle o(3) (ou so(3)=su(2)) de cette complexifiée est compacte. Cette complexifiée n'est autre que l'algèbre sl(2,$\mathbb{C}$), dont sl(2,$\mathbb{R}$) est aussi une forme réelle non compacte.

Exercice. Étudier les algèbres réelles de dimension 3 : so(3)=su(2), so(2,1), su(1,1), sp(2,$\mathbb{R}$), usp(1) et sl(2,$\mathbb{R}$). En trouver les isomorphismes et montrer qu'à isomorphisme près, deux seulement sont indépendantes. (Voir [DNF] vol. 1, §13 et 24 pour plus de détails sur ces isomorphismes et leur interprétation géométrique.)

Les algèbres so(4) et so(3,1) étudiées plus haut et au chapitre 1 offrent un autre exemple de deux algèbres, qui sont deux formes réelles non isomorphes de la même complexifiée.

Autre exemple, sp($2n$,$\mathbb{R}$) et usp($n$). (Voir Appendice A).

De façon générale, on démontre que

• *toute algèbre de Lie complexe semi-simple a une unique forme réelle compacte.* (Réf. [FH] p. 130)

L'algèbre de Lie ne capte cependant pas les propriétés topologiques globales du groupe.

*4.3. Connexité, simple-connexité*

– Si $G$ n'est pas connexe et $G'$ est le sous-groupe composante connexe de l'identité, les algèbres de Lie de $G$ et $G'$ coïncident $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$.

– Si $G$ n'est pas simplement connexe, soit $\widetilde{G}$ son groupe de recouvrement universel. $G$ et $\widetilde{G}$ étant localement isomorphes, ils ont mêmes algèbres de Lie. Exemples U(1) et $\mathbb{R}$; SO(3) et SU(2); SO(3,1) et SL$(2,\mathbb{C})$.

Pour résumer :

Étant donné un groupe de Lie $G$, on a construit son algèbre de Lie. Réciproquement, un théorème de Cartan affirme que toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un certain groupe de Lie [Ki, p.99]. Plus précisément, à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond un unique groupe de Lie $G$ connexe et simplement connexe dont $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie. Tout autre groupe de Lie $G'$ connexe ayant $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie est de la forme $G' = G/H$ où $H$ est un sous-groupe invariant fini ou discret. Ceci est en accord avec ce nous avons vu plus haut : si $G$ est le groupe de recouvrement de $G'$, $G' = G/\pi_1(G')$. Par exemple U(1)=$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, SO(3)=SU(2)/$\mathbb{Z}_2$. Si $G'$ n'est pas connexe, la propriété précédente s'applique à la composante connexe de l'identité.

### *4.4. Constantes de structure. Forme de Killing. Critères de Cartan*

Choisissant une base $\{t_\alpha\}$ dans l'algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension $d$, tout élément $X$ s'écrit $X = \sum_{\alpha=1}^d x^\alpha t_\alpha$. Nous définissons les *constantes de structure* de $\mathfrak{g}$ (dans cette base) par

$$[t_\alpha, t_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} t_\gamma \ , \tag{4.1}$$

et donc

$$\mathrm{ad}\, X\, Y = [X, Y] = \sum x^\alpha y^\beta C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} t_\gamma \ ,$$

pour l'opérateur ad défini plus haut. On a donc

$$\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y\ Z = [X, [Y, Z]] = C_{\alpha\delta}{}^{\epsilon} C_{\beta\gamma}{}^{\delta} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma t_\epsilon \ .$$

En particulier, montrer que l'identité de Jacobi est équivalente à l'identité

$$\sum_\delta \left( C_{\alpha\delta}{}^{\epsilon} C_{\beta\gamma}{}^{\delta} + C_{\beta\delta}{}^{\epsilon} C_{\gamma\alpha}{}^{\delta} + C_{\gamma\delta}{}^{\epsilon} C_{\alpha\beta}{}^{\delta} \right) = 0 \tag{4.2}$$

(bien noter la structure : permutation cyclique sur les trois indices $\alpha, \beta, \gamma$ à $\epsilon$ fixe et $\delta$ sommé). En prenant la trace de cet opérateur linéaire $\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y$, on définit la *forme de Killing*

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \mathrm{ad}\, Y) = \sum_{\gamma,\delta} C_{\alpha\delta}{}^{\gamma} C_{\beta\gamma}{}^{\delta} X^\alpha Y^\beta =: g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \ . \tag{4.3}$$

Autrement dit, le tenseur symétrique $g_{\alpha\beta}$ est donné par

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} C_{\alpha\delta}{}^{\gamma} C_{\beta\gamma}{}^{\delta} = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, t_\alpha\, \mathrm{ad}\, t_\beta) \ .$$

(La symétrie en $\alpha, \beta$ est manifeste sur la 1ère expression, elle résulte de la cyclicité de la trace dans la 2ème.) On peut alors utiliser ce tenseur pour abaisser le 3ème indice de $C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, définissant ainsi

$$C_{\alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta}{}^{\delta} g_{\gamma\delta} = C_{\alpha\beta}{}^{\delta} C_{\gamma\epsilon}{}^{\kappa} C_{\delta\kappa}{}^{\epsilon}$$

Montrons alors que ce $C_{\alpha\beta\gamma}$ est complètement antisymétrique en $\alpha, \beta, \gamma$. Compte tenu de l'antisymétrie en $\alpha, \beta$ déjà connue, il suffit d'établir que $C_{\alpha\beta\gamma} + C_{\gamma\beta\alpha} = 0$. Exercice : le vérifier, en utilisant l'identité de Jacobi.

Un théorème très remarquable d'E. Cartan affirme :

• *Une algèbre de Lie est semi-simple sissi la forme de Killing est non-dégénérée, c'est-à-dire* $\det g \neq 0$.

• *Une algèbre de Lie semi-simple est compacte sissi la forme de Killing $g$ est définie négative.*

Ce sont les *critères de Cartan.*

Exemple. Le cas de SO(3) ou SU(2) est bien familier. Les constantes de structure sont données par le tenseur complètement antisymétrique $C_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. La forme de Killing est $g_{\alpha\beta} = -2\delta_{\alpha\beta}$. Exercice : calculer la forme de Killing pour l'algèbre $so(2,1)$

Enfin un dernier théorème important (toujours de Cartan !) énonce que

• *Toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est somme directe d'algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}_i$*

$$\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i \ .$$

Ces propriétés ont été mises à profit par Cartan pour classifier les algèbres de Lie simples complexes ou réelles. Nous donnerons au Chapitre 3 quelques éléments de cette classification .

### *4.5. Opérateur(s) de Casimir*

Avec les notations précédentes, étant données une algèbre $\mathfrak{g}$ semi-simple, donc dotée d'une forme de Killing $g$ inversible, et une base $\{t_\alpha\}$ de $\mathfrak{g}$, on définit

$$C_2 = \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta \qquad (4.4)$$

où $g^{\alpha\beta}$ est l'inverse de $g_{\alpha\beta}$, c'est-à-dire $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$.

Formellement, cette combinaison des $t$ qui ne fait pas appel au crochet ne vit pas dans l'algèbre de Lie mais dans son *algèbre enveloppante universelle* $U\mathfrak{g}$, définie comme l'algèbre associative des polynômes dans les éléments de $\mathfrak{g}$. Ici, puisque nous nous sommes restreints à $\mathfrak{g} \subset M(n,\mathbb{R})$, $U\mathfrak{g}$ peut aussi être considérée comme une sous-algèbre de $M(n,\mathbb{R})$.

Montrons que $C_2$ a un crochet (commutateur) nul avec tout $t_\gamma$ donc avec tout élément de $\mathfrak{g}$. C'est l'*opérateur de Casimir* quadratique.

$$\begin{aligned}
[C_2, t_\gamma] &= \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}[t_\alpha t_\beta, t_\gamma] \\
&= \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\left(t_\alpha[t_\beta, t_\gamma] + [t_\alpha, t_\gamma]t_\beta\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\delta} g^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma}{}^{\delta}(t_\alpha t_\delta + t_\delta t_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\kappa} g^{\alpha\beta} g^{\delta\kappa} C_{\beta\gamma\kappa}(t_\alpha t_\delta + t_\delta t_\alpha)\ .
\end{aligned}$$

Le terme $\sum_{\beta\kappa} g^{\alpha\beta} g^{\delta\kappa} C_{\beta\gamma\kappa}$ est antisymétrique en $\alpha \leftrightarrow \delta$, tandis que le terme entre parenthèses est symétrique. La somme s'annule donc, qed.

On démontre que dans une algèbre de Lie simple, (plus précisément dans son algèbre universelle), une expression *quadratique* dans les $t$ qui commute avec tous les $t$ est proportionnelle à l'opérateur de Casimir $C_2$. Autrement dit, l'opérateur de Casimir quadratique est unique à un facteur près.

Exemple. Dans l'algèbre so(3)$\cong$ su(2), l'opérateur de Casimir $C_2$ est (à un signe près) $\mathbf{J}^2$, qui, comme chacun sait, commute avec les générateurs infinitésimaux $J^i$ de l'algèbre.

Il peut exister par contre d'autres opérateurs de Casimir de degré plus élevé. Vérifier ainsi que

$$C_r = g^{\alpha_1\alpha'_1} g^{\alpha_2\alpha'_2} \cdots g^{\alpha_r\alpha'_r} C_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2} C_{\alpha_2\beta_2}{}^{\beta_3} \cdots C_{\alpha_r\beta_r}{}^{\beta_1} t_{\alpha'_1} t_{\alpha'_2} \cdots t_{\alpha'_r}$$

a un crochet nul avec tout $t_\gamma$. Que vaut $C_3$ dans su(2) ? Voir Bourbaki [Bo] pour la discussion de ces opérateurs de Casimir généraux.

Si on se rappelle que les générateurs infinitésimaux (vecteurs de l'algèbre de Lie) s'interprètent comme des opérateurs différentiels dans les coordonnées sur le groupe, on conçoit que les opérateurs de Casimir fournissent des opérateurs différentiels invariants (puisque commutant avec les générateurs infinitésimaux). En particulier, l'opérateur de Casimir quadratique correspond à un laplacien sur le groupe.

Ces opérateurs de Casimir vont jouer un rôle important dans l'étude des représentations des groupes.

**Bibliographie sommaire**

Ouvrages mathématiques

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. 1-9, Hermann 1960-1983.

[Bu] D. Bump, *Lie groups*, Series "Graduate Texts in Mathematics", vol. **225**, Springer 2004.

C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton University Press.

J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Gauthier-Villars, en particulier tomes 5-7 (très complets mais difficiles !).

[DNF] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko, *Géométrie contemporaine*, Éditions de Moscou, en particulier, les §14, 23 et 24 du volume 1 et les chapitres 1 (variétés) et 4 et 5 (homotopie) du volume 2. La version française étant épuisée, voici les références de la version anglaise : Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., Novikov, S. P. *Modern geometry—methods and applications.* Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields. Graduate Texts in Mathematics, 93. Springer-Verlag, New York, 1992. Part II. The geometry and topology of manifolds. Graduate Texts in Mathematics, 104. Springer-Verlag, New York, 1985. (il y a aussi un troisième tome qui traite d'homologie . . . )

[K-S] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et symétries*, *Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

[Po] L.S. Pontryagin, *Topological Groups*, Gordon and Breach, 1966.

[W] H. Weyl, *Classical groups*, Princeton University Press.

Un ouvrage récent écrit par une mathématicienne, mais avec un contenu et dans un esprit proches du présent cours, est celui de

[K-S] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et symétries, Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

Théorie des groupes pour physiciens

[Wi] E. Wigner, *Group Theory and its Applications to Quantum Mechanics.* Academ. Pr. 1959

J.F. Cornwell, *Group theory in physics. An introduction*, Academic Pr. contient beaucoup d'information mais utilise une terminologie parfois différente du reste de la littérature. . .

[Gi] R. Gilmore, *Lie groups, Lie algebras and some of their applications*, Wiley

[Ha] M. Hamermesh, *Group theory and its applications to physical problems*, Addison-Wesley

[OR] L. O' Raifeartaigh, *Group structure of gauge theories*, Cambridge Univ. Pr. 1986.

Voir aussi plusieurs cours de théorie des groupes par et pour des physiciens disponibles sur le serveur du CCSD, `http://cel.ccsd.cnrs.fr/`, entre autres
J.-B. Z., *Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations*, (Notes de cours au Magistère MIP 1994), qui met plutôt l'accent sur les groupes finis.

## Appendix A. Corps des quaternions et groupes symplectiques

*A.1. Quaternions*

L'ensemble des quaternions est l'algèbre engendrée par 4 éléments 1, $e_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$q = q^{(0)}1 + q^{(1)}e_1 + q^{(2)}e_2 + q^{(3)}e_3 \qquad q^{(\cdot)} \in \mathbb{C} \tag{A.1}$$

dotée de la multiplication $e_i^2 = e_1e_2e_3 = -1$, d'où il découle que

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3$$

et ses permutations cycliques. On peut représenter les $e_i = -i\sigma_i$ en termes des matrices de Pauli.

Le conjugué d'un quaternion $q$ est le quaternion

$$\overline{q} = q^{(0)}1 - q^{(1)}e_1 - q^{(2)}e_2 - q^{(3)}e_3 \ , \tag{A.2}$$

à ne pas confondre avec son complexe conjugué

$$q^* = q^{(0)*}1 + q^{(1)*}e_1 + q^{(2)*}e_2 + q^{(3)*}e_3 \ . \tag{A.3}$$

Noter que $q\overline{q} := |q|^2 = |q^{(0)}|^2 + |q^{(1)}|^2 + |q^{(2)}|^2 + |q^{(3)}|^2$, la norme carrée du quaternion, et donc $q^{-1} = \overline{q}/|q|^2$ si sa norme est non nulle.

On définit encore le conjugué hermitique de $q$

$$q^\dagger = \overline{q}^* = q^{(0)*}1 - q^{(1)*}e_1 - q^{(2)*}e_2 - q^{(3)*}e_3 \tag{A.4}$$

(en accord avec le fait que les matrices de Pauli sont hermitiennes).

Noter que la conjugaison et la conjugaison hermitique renversent l'ordre des facteurs

$$\overline{(q_1q_2)} = \overline{q}_2\overline{q}_1 \qquad (q_1q_2)^\dagger = q_2^\dagger q_1^\dagger \ . \tag{A.5}$$

Un quaternion *réel* est un quaternion de la forme (A.1) avec $q^{(\mu)} \in \mathbb{R}$ , donc identique à son complexe conjugué.

L'ensemble des quaternions réels forment un corps, qui est aussi un espace de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. Il est désigné par $\mathbb{H}$ (H comme Hamilton).

*A.2. Matrices de quaternions*

On considère des matrices $Q$ d'éléments quaternioniques $(Q)_{ij} = q_{ij}$, ou $Q = (q_{ij})$. On peut appliquer à $Q$ les conjugaisons définies plus haut. En outre, on peut transposer $Q$. L'hermitique conjugué de $Q$ est

$$(Q^\dagger)_{ij} = q_{ji}^\dagger \ . \tag{A.6}$$

Le *dual* $Q^R$ d'une matrice quaternionique $Q$ est la matrice

$$(Q^R)_{ij} = \overline{q}_{ji} \ . \tag{A.7}$$

Une matrice quaternionique est donc dite *self-duale* si

$$Q^R = Q = (q_{ij}) = \left(\overline{q}_{ji}\right) \ , \tag{A.8}$$

elle est *quaternionique réelle* si

$$Q^R = Q^\dagger \quad \text{donc} \quad q_{ij} = q_{ij}^* \ , \tag{A.9}$$

donc si ses éléments sont des quaternions réels.

*A.3. Groupes symplectiques Sp(2n,$\mathbb{R}$) et USp(n), algèbres de Lie sp(2n) et usp(n)*

Soit la matrice $2n \times 2n$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_N \\ -\mathbf{1}_N & 0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

et la forme bilinéaire alternée ("skew-symmetric" en anglais) associée

$$(X,Y)=X^TSY=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n}-y_ix_{i+n})\ . \tag{A.11}$$

Le groupe symplectique Sp($2n$,$\mathbb{R}$) est le groupe de matrices réelles $2n\times 2n$ préservant cette forme

$$B^TSB=S\ . \tag{A.12}$$

Dans la base où $X^T=(x_1,x_{n+1},x_2,x_{n+2},\cdots)$, la matrice $S=\mathrm{diag}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\mathrm{diag}\,(-e_2)$ en termes quaternioniques, et le groupe symplectique est alors engendré par des matrices quaternioniques $n\times n$ $Q$ satisfaisant $Q^R.Q=I$, (le vérifier !) ; cependant, la matrice $B$ étant réelle, les éléments de $Q$ sont tels que les $q_{ij}^{(\alpha)}$ sont réels pour $\alpha=0,2$ et imaginaires purs pour $\alpha=1,3$. Ce groupe n'est pas compact. Son algèbre de Lie sp($2n$,$\mathbb{R}$) est engendrée par les matrices réelles $A$ telles que $A^TS+SA=0$. La dimension de ce groupe ou de son algèbre de Lie est $n(2n+1)$. Pour $n=1$, Sp(2,$\mathbb{R}$)=SL(2,$\mathbb{R}$).

Un groupe relié est le groupe USp($n$) engendré par les matrices $n\times n$ unitaires et quaternioniques réelles $Q^R=Q^\dagger=Q^{-1}$. C'est le groupe d'invariance de la forme hermitienne quaternionique $\sum\overline{x}_iy_i$, $x,y\in\mathbb{H}^n$. Il est compact car c'est un sous groupe de U($2n$). Son algèbre de Lie usp($n$) est engendrée par les matrices quaternioniques réelles antiselfduales $A=-A^R=-A^\dagger$ (le vérifier). Elle a aussi $n(2n+1)$ pour dimension. Pour $n=1$, USp(1)=SU(2).

En exprimant la condition sur les matrices $A$ de sp($n$,$\mathbb{R}$) en termes de quaternions, on constate que les deux algèbres sp($2n$,$\mathbb{R}$) et usp($n$) ont la même algèbre complexifiée, qui n'est autre que sp($2n$,$\mathbb{C}$). Seule usp($n$) est compacte.

## Appendix B. Mesures invariantes sur SU(2) et sur U($n$)

Le groupe SU(2) isomorphe à une sphère est compact et on peut donc intégrer une fonction sur ce groupe avec une grande variété de mesures d'intégration $d\mu(g)$. La mesure invariante, c'est-à-dire telle que $d\mu(g.g_1)=d\mu(g_1.g)=d\mu(g^{-1})=d\mu(g)$, est, elle, unique à un facteur près.

Une manière possible de trouver cette mesure est de considérer la transformation $U\to U'=U.V$ où $U,V$ et donc $U'$ sont unitaires de la forme (00-1.8) (c'est-à-dire $U=u_0I-\mathbf{u}.\boldsymbol{\sigma}$, $u\in S^3$ etc); si on relâche momentanément la condition que $u_0^2+\mathbf{u}^2=1$ (mais qu'on garde $v_0^2+\mathbf{v}^2=1$), ceci définit une transformation linéaire $u\to u'$ qui conserve la norme $\det U=u_0^2+\mathbf{u}^2=u_0'^2+\mathbf{u}'^2=\det U'$. C'est donc une rotation de l'espace $\mathbb{R}^4$ qui préserve la mesure naturelle $\mathrm{d}^4u\,\delta(u^2-1)$ sur la sphère unité $S^3$ d'équation $\det U=1$. En d'autres termes, cette mesure sur la sphère $S^3$ fournit une mesure invariante à droite : $d\mu(U)=d\mu(U.V)$. On démontrerait de la même façon que cette mesure est aussi invariante à gauche : $d\mu(U)=d\mu(V.U)$. Cette mesure est aussi invariante par $U\to U^{-1}$, car l'inversion dans SU(2) est la restriction à $S^3$ de la transformation orthogonale $u_0\to u_0$, $\mathbf{u}\to-\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^4$, qui préserve bien sûr la mesure naturelle sur $S^3$ :

$$d\mu(U)=d\mu(UV)=d\mu(VU)=d\mu(U^{-1})\ .$$

La forme explicite de la mesure dépend de la paramétrisation utilisée. Si on adopte la direction **n** (ou ses deux angles polaires $\theta$ et $\phi$) et l'angle de rotation $\psi$, on prendra

$$d\mu(U) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\sin\theta\, d\psi\, d\theta\, d\phi \tag{B.1}$$

normalisée pour SU(2) à

$$v(\mathrm{SU}(2)) = \int_{\mathrm{SU}(2)} d\mu(U) = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2\frac{\psi}{2} = 2\pi^2 \tag{B.2}$$

qui est l'"aire" de la sphère unité $S^3$ et le "volume" de SU(2). Pour SO(3) où l'angle $\psi$ est restreint à $(0,\pi)$, on a plutôt $v(\mathrm{SO}(3)) = \int_{\mathrm{SO}(3)} d\mu(g) = \pi^2$.

On obtient l'expression dans tout autre système de coordonnées, par exemple les angles d'Euler, en calculant le jacobien adéquat,

$$d\mu(U) = \frac{1}{8}\sin\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\ . \tag{B.3}$$

(Noter que $0 \le \gamma \le 4\pi$ pour SU(2), tandis que $0 \le \alpha \le 2\pi$ et $0 \le \beta \le \pi$).

Une autre méthode pour obtenir ces résultats passe par l'introduction d'une métrique invariante sur le groupe; on définit une distance carrée entre deux éléments $U$ et $U + dU$ par $ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr} dU dU^\dagger$, invariante par $U \to UV$, $U \to VU$ ou $U \to U^{-1}$, et on en déduit une mesure d'intégration invariante (cf Chapitre 0, §2.3). Avec la paramétrisation $(\mathbf{n} = (\theta,\phi),\psi)$, on a

$$ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, dU dU^\dagger = \left(d\frac{\psi}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\psi}{2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\ , \tag{B.4}$$

qui conduit bien à (B.1). Dans la paramétrisation des angles d'Euler,

$$U = e^{-i\alpha\frac{\sigma_3}{2}} e^{-i\beta\frac{\sigma_2}{2}} e^{-i\gamma\frac{\sigma_3}{2}} \tag{B.5}$$

d'où

$$ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr} dU dU^\dagger = \frac{1}{4}\left(d\alpha^2 + 2 d\alpha d\gamma\cos\beta + d\gamma^2 + d\beta^2\right) \tag{B.6}$$

et avec $\sqrt{g} = \sin\beta$ on retrouve bien (B.3) (le vérifier).

**Cas de U($n$)**

Examinons finalement rapidement le cas du groupe U($n$). Toute matrice unitaire $U \in \mathrm{U}(n)$ peut se diagonaliser sous la forme

$$U = V \Lambda V^\dagger \ , \tag{B.7}$$

où $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et les $\lambda_i$ sont en fait des phases $\lambda_j = e^{i\alpha_j}$. Les $\lambda_i$ peuvent être considérées comme des variables "radiales", tandis que $V$ représente les variables "angulaires". Noter que $V$ doit être restreint à ne pas commuter avec la matrice diagonale $\Lambda$. Supposant cette dernière générique, avec des valeurs propres $\lambda_i$ toutes distinctes, $V$ vit dans $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(1)^n$. La métrique naturelle, invariante par $U \mapsto U'U$ ou $\mapsto UU'$, s'écrit $\mathrm{tr}(\mathrm{d}\,U \mathrm{d}\,U^\dagger)$. Or $\mathrm{d}\,U = V(\mathrm{d}\,\Lambda + [\mathrm{d}\,X, \Lambda])V^\dagger$, où $\mathrm{d}\,X := V^\dagger \mathrm{d}\,V$ est antihermitienne (et sans termes diagonaux, pourquoi ?). On a donc $\mathrm{tr}(\mathrm{d}\,U \mathrm{d}\,U^\dagger) = \sum_i |\mathrm{d}\,\alpha_i|^2 + 2\sum_{i<j} |\mathrm{d}\,X_{ij}|^2 |\lambda_i - \lambda_j|^2$ ce qui définit le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ dans les coordonnées $\xi^\alpha = (\alpha_i, \Re e X_{ij}, \Im m X_{ij})$ et détermine la mesure d'intégration

$$d\mu(U) = \sqrt{\det g} \prod \mathrm{d}\,\xi^\alpha = \mathrm{const.}\ |\Delta(e^{i\alpha})|^2 \prod \mathrm{d}\,\alpha_i d\mu(V) \ . \tag{B.8}$$

Ici $\Delta(\lambda)$ est le déterminant de Vandermonde

$$\Delta(\lambda) := \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) = \begin{vmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \ . \tag{B.9}$$

La partie "radiale" de la mesure d'intégration est donc donnée par $|\Delta(e^{i\alpha})|^2 \prod \mathrm{d}\,\alpha_i$ à un facteur près, soit encore

$$d\mu(U) = \mathrm{const.} \prod_{i<j} \sin^2\left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}\right) \prod \mathrm{d}\,\alpha_i \times \text{partie angulaire} \ . \tag{B.10}$$

**Exercices pour le chapitre 1.**

A. Groupes et algèbres de Lie de dimension 3.

1. Rappeler la définition du groupe SU(1,1). Quelle est sa dimension ?

2. Quelle équation définit son algèbre de Lie ? Quelle conséquence cela implique-t-il sur les éléments de matrices de $X \in \mathrm{su}(1,1)$ ? Montrer qu'on peut écrire une base de su(1,1) en termes des 3 matrices de Pauli et en calculer les relations de commutation. Cette algèbre est-elle isomorphe à l'algèbre de so(3) ?

3. On considère maintenant le groupe linéaire réel SL(2,$\mathbb{R}$). Quelle est sa définition ? Comment son algèbre de Lie est-elle définie ? En donner une base en termes de matrices de Pauli.

4. Montrer l'isomorphisme des deux algèbres su(1,1) et sl(2,$\mathbb{R}$).

5. En utilisant les critères de Cartan, discuter la semi-simplicité et la compacité de ces différentes algèbres.

(Pour la relation géométrique entre les groupes SU(1,1), SL(2,$\mathbb{R}$) et SO(1,2)), cf. le §13, vol. 1 de [DNF].

B. Soit $E$ un ensemble, $G$ un groupe. On dit que le groupe $G$ agit dans l'ensemble $E$ s'il existe un homomorphisme $\beta$ de $G$ dans le groupe des bijections de $E$ dans lui-même. Écrire précisément les conditions requises. On définit l'orbite $O(x)$ d'un point $x \in E$ comme l'ensemble des images $\beta(g)x$ pour $g \in G$.

1. Montrer que l'appartenance à une même orbite est une relation d'équivalence.

2. Exemple : action du groupe O($n$) sur l'espace $\mathbb{R}^n$. Que sont les orbites ?

3. Un espace est homogène s'il n'a qu'une seule orbite. Exemple trivial : $\mathbb{R}^n$ sous l'action des translations. Plus généralement, qu'en est-il de l'action à gauche de $G$ sur lui-même, avec $E = G$ ? Donner d'autres exemples d'espaces homogènes pour $G =$ O(3) ou $\mathcal{L} =$O(3,1).

4. On définit aussi le *groupe d'isotropie*, (appelé aussi *stabilisateur*, ou, par les physiciens, *petit groupe*) $S(x)$ de l'élément $x \in E$ : c'est le sous-groupe de $G$ laissant $x$ invariant :

$$S(x) = \{g \in G | \beta(g)x = x\} .$$

Montrer que si $x$ et $y$ appartiennent à la même orbite, leurs groupes d'isotropie sont conjugués. Quel est le groupe d'isotropie d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ sous l'action de SO($n$) ?

5. Montrer qu'il existe une bijection entre les points de l'orbite $O(x)$ et l'ensemble quotient $G/S(x)$. Cet ensemble $G/S(x)$ est-il un espace homogène pour l'action de $G$ ?

Le sujet du chapitre 2 porte sur le cas particulier où $E$ est un espace vectoriel avec comme bijections les transformations linéaires du groupe $\mathrm{GL}(E)$ : on parle alors de représentations du groupe $G$ dans $E$.

**Problème : Transformations conformes**

**A-**1. On rappelle que dans une théorie (classique) des champs locale invariante par translations, on sait définir un tenseur-énergie impulsion $\Theta_{\mu\nu}(x)$ tel que

– sous l'effet d'un changement de coordonnées infinitésimal $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$, l'action subit une variation

$$\delta S = \int d^d x \, (\partial_\mu a_\nu) \, \Theta^{\mu\nu}(x) \ ;$$

– $\Theta_{\mu\nu}$ est conservé : $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) = 0$ ;

– on suppose $\Theta_{\mu\nu}$ symétrique en $\mu\,,\ \nu$.

Montrer que si $\Theta$ est en outre de trace nulle, $\Theta_\mu^{\ \mu} = 0$, l'action est aussi invariante sous l'effet des dilatations, $x^\mu \to x'^\mu = (1+\delta\lambda)x^\mu$.

2. Dans un espace riemannien ou pseudo-riemannien de dimension $d$, doté d'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$ de signature $\{(+1)^p, (-1)^{d-p}\}$, on appelle transformation conforme une transformation des coordonnées $x^\mu \to x'^\mu$ qui dilate localement les longueurs

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \to ds'^2 = g_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu = \alpha(x) ds^2$$

a) Écrire la forme infinitésimale de cette condition, quand $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$. (On reliera le paramètre de dilatation $1+\delta\alpha$ à $a^\mu$ en prenant une trace adéquate.)

b) Montrer que pour un espace euclidien ou pseudo-euclidien de métrique $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,\{(+1)^p, (-1)^{d-p}\}$, la condition se ramène à

$$\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \partial_\rho a^\rho \ .$$

3. Montrer que sous les conditions du 1. et du 2.b, toute théorie invariante par translations, rotations et dilatations l'est aussi sous l'effet des transformations conformes.

**B-**1. Dans l'espace euclidien de dimension $d > 2$, les transformations conformes sont engendrées par les translations, les rotations, les dilatations et "les transformations conformes spéciales", obtenues en composant une inversion $x^\mu \to x^\mu/x^2$, une translation et à nouveau une inversion. Écrire la forme finie puis la forme infinitésimale de ces transformations conformes spéciales.

2. Écrire l'expression des générateurs infinitésimaux $P_\mu$ des translations, $J_{\mu\nu}$ des rotations, $D$ des dilatations et $K_\mu$ des transformations spéciales, comme opérateurs différentiels en $x$.

3. Écrire avec le minimum de calculs les relations de commutation de ces générateurs (on utilisera les résultats déjà connus sur les générateurs $P_\mu$ et $J_{\mu\nu}$ et on tirera profit de l'homogénéité et de la définition des transformations conformes spéciales pour réduire le seul calcul non trivial à celui de $[K_\mu, P_\nu]$). Vérifier que des relations de commutation se ferment bien sur les générateurs $P$, $J$, $D$ et $K$.

4. Quelle est la dimension du groupe conforme dans l'espace euclidien de dimension $d$ ?

**C-**1. Pour mieux comprendre la nature du groupe conforme, on applique l'espace $\mathbb{R}^d$, complété du point à l'infini et doté de sa métrique $\vec{x}^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$, sur la sphère $S^d$. Cette sphère est définie par l'équation $\vec{r}^2 + r_{d+1}^2 = 1$ dans l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$, et l'application est réalisée grâce à la projection stéréographique à partir du "pôle Nord" $\vec{r} = 0,\ r_{d+1} = 1$ (voir figure). Montrer qu'on a

$$\vec{r} = \frac{2\vec{x}}{\vec{x}^2+1} \qquad r_{d+1} = \frac{\vec{x}^2-1}{\vec{x}^2+1}\ .$$

Quelle est l'image du point à l'infini ? Quel est l'effet de l'inversion dans $\mathbb{R}^d$ sur le point $r = (\vec{r}, r_{d+1}) \in S^d$ ?

2. La sphère précédente est à son tour considérée comme la section du cône de lumière $\mathcal{C}$ dans l'espace de Minkowski $\mathcal{M}_{d+1,1}$ de métrique $z_0^2 - \vec{z}^2 - z_{d+1}^2 = 0$ par l'hyperplan $z_0 = 1$. Montrer que de cette façon on a une correspondance biunivoque entre les points de $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ et les *rayons* du cône de lumière (c'est-à-dire les vecteurs à une dilatation près) et que l'expression de $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ en fonction de $z = (z_0, \vec{z}, z_{d+1}) \in \mathcal{C}$ est

$$\vec{x} = \frac{\vec{z}}{z_0 - z_{d+1}}\ .$$

3. On va montrer maintenant que l'action du groupe conforme dans $\mathbb{R}^d$ découle de transformations *linéaires* dans $\mathcal{M}_{d+1,1}$ préservant le cône de lumière. Sans aucun calcul,

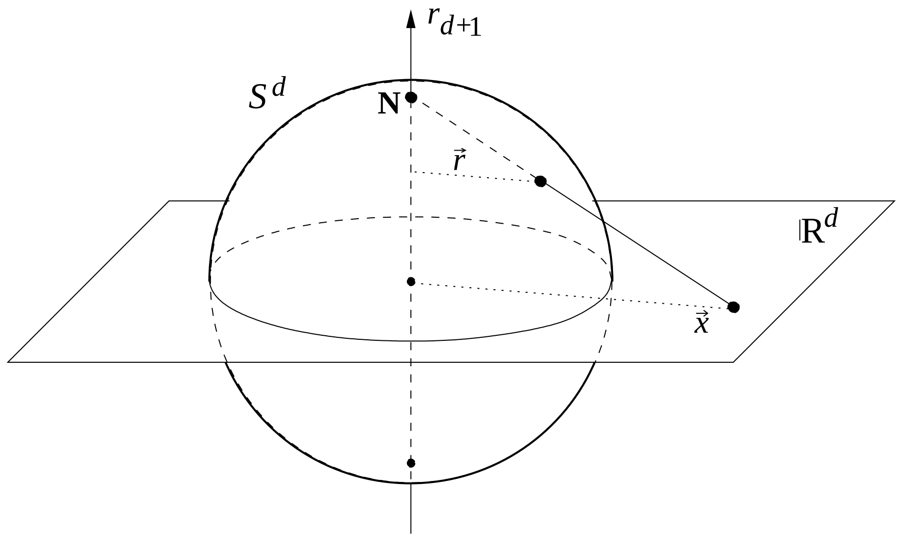



**Fig. 2:** Projection stéréographique

montrer que ces transformations doivent alors appartenir au groupe de Lorentz de $\mathcal{M}_{d+1,1}$, soit $O(d+1,1)$.

a) Identifier les transformations linéaires de $z$ correspondant aux rotations de $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que les dilatations de $x$ correspondent à des "boosts" de rapidité $\beta$ dans le plan $(z_0, z_{d+1})$, en donnant la relation entre le paramètre de dilatation et la rapidité.

b) On considère ensuite les transformations de $O(d+1,1)$ qui préservent $z_0 - z_{d+1}$. Écrire la matrice $T_a$ d'une telle transformation infinitésimale agissant sur les coordonnées $(z_0, \vec{z}, z_{d+1})$ telle que $\delta\vec{z} = \vec{a}(z_0 - z_{d+1})$ (au premier ordre en $\vec{a}$). A quelle transformation de $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ correspond-elle ? Calculer par exponentiation de $T_a$ la matrice d'une transformation finie (on pourra par exemple calculer les premières puissances $T_a^2$, $T_a^3 \ldots$).

c) Quelle est enfin l'interprétation de l'inversion de $\mathbb{R}^d$ dans le groupe de Lorentz de $\mathcal{M}_{d+1,1}$ ? Que dire des transformations conformes spéciales ? Quelle est la dimension du groupe $O(d+1,1)$ ? Qu'en conclure sur la relation entre le groupe de Lorentz dans l'espace de Minkowski $\mathcal{M}_{d+1,1}$ et le groupe conforme dans $\mathbb{R}^d$ ?