Mention "Physique" de la
Licence de Sciences et Technologies
L2
Parcours "Physique-Chimie" (PC)
Année 2008-2009

Méthodes mathématiques pour physiciens

LP206

Jean-Bernard Zuber

Nul ne peut lire le grand livre de l'Univers s'il n'en connaît la langue,
qui est la langue mathématique. (Galilée) [1]

[1] La citation complète est la suivante : « La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à en connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur. » Galilée, *Il Saggiatore*, Rome 1623.

Table des matières

Chapitre 0. Rappels et notations 1
1. Symboles, etc 1
2. Nombres entiers, réels, complexes 1
3. Polynômes 2
4. Fonctions “élémentaires” : trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme 3
5. Dérivation 5
6. Intégration 6
6.1. Méthodes d’intégration 6
Appendix A. Identités trigonométriques 8
Appendix B. Dérivées des fonctions élémentaires 10

Chapitre 1. Limites et convergence 11
1. Limite d’une fonction en un point 11
1.1. Limite d’une fonction en un point où elle est définie. 11
1.2. Limite d’une fonction en un point singulier ou à l’infini 12
1.3. Infiniment petits, infiniment grands, développements limités. Rappels 13
1.4. Formes indéterminées 16
1.5. Permuter des limites 18
2. Suites 19
2.1. Définition 19
2.2. Limite d’une suite 20
2.3. Suites de Cauchy 22
2.4. Suites de fonctions 22
3. Intégrales 24
3.1. Propriétés générales 25
3.2. Méthodes d’intégration 25
3.3. Intégrales impropres avec une singularité sur un intervalle fini 26
3.4. Intégrales impropres avec intervalle d’intégration infini 28
3.5. Partie principale 30
3.6. Échange de limites, dérivation sous le signe somme 30
4. Séries 31
4.1. Généralités 31

4.2. Séries à termes positifs 32
4.3. Séries absolument convergentes 34
4.4. Séries NON absolument convergentes 35
4.5. Séries de fonctions, séries entières et leurs propriétés. 36

Chapitre 2. Équations différentielles 37
1. Généralités sur les équations différentielles 39
1.1. Définitions et exemples 39
1.2. Systèmes d'équations différentielles 40
2. Conditions initiales. Théorème de Cauchy. Conditions aux limites 41
2.1. Existence et unicité des solutions 41
2.2. Conditions initiales et conditions aux bords 43
3. Équations différentielles linéaires 44
3.1. Propriétés générales 44
3.2. Équations linéaires homogènes, équations linéaires inhomogènes. 45
3.3. Quelques cas solubles d'équations linéaires 48
3.4. Équations linéaires à coefficients constants 48
3.5. Systèmes d'équations différentielles linéaires 51
4. Autres classes d'équations différentielles simples. Autres méthodes 53
4.1. Intégrales premières 53
4.2. Équations à variables séparées 55
4.3. Changement de la fonction inconnue 56
4.4. Résolution d'une équation différentielle par une série entière 57

Chapitre 3. Séries de Fourier 59
0. Préambule sur les fonctions périodiques 59
1. Représentation de Fourier d'une fonction périodique 60
1.1. Le développement de Fourier; sa convergence. 60
1.2. Phénomène de Gibbs 66
2. Équations différentielles linéaires avec source périodique 67
2.1. Découplage des modes de Fourier 67
2.2. Filtre RC 69
2.3. Autres exemples 72
3. Analyse d'un système périodique avec une bande passante finie. 73
4. Diffusion cohérente par un réseau 75

4.1. Réseau fini 75
4.2. Réseau infini. Peigne de Dirac 77
4.3. Réseau tridimensionnel. Condition de Bragg 78

Chapitre 4. Dynamique des systèmes linéaires 59
1. Généralités sur les systèmes linéaires. L'oscillateur harmonique 79
1.1. Équations différentielles linéaires. 79
1.2. Oscillateur harmonique 79
2. Amortissement 84
2.1. Frottement fluide 84
2.2. Oscillateur harmonique amorti 84
2.3. Bilan d'énergie, facteur Q. 87
3. Oscillateur excité par une source périodique 88
4. Susceptibilité 91
5. Oscillateurs couplés (traités en TD) 93
5.1. Cas de deux oscillateurs couplés 93
5.2. Modes propres 97
5.3. Chaîne de boules et de ressorts 97

Chapitre 5. Systèmes non-linéaires 99
1. Richesse et spécificités des systèmes non-linéaires. Bifurcations 100
1.1. Stabilité et instabilité 100
1.2. Brisure de symétrie. 102
1.3. Bifurcation de Hopf 103
2. Analyse de stabilité : méthode graphique et linéarisation. 104
2.1. Flot de $x(t)$. Interprétation graphique du critère $\rho < 0$ de stabilité. . . . 104
2.2. Linéarisation d'une équation du premier ordre 105
2.3. Exemple : linéarisation de l'équation (1.4) 106
2.4. Linéarisation d'une équation d'ordre plus élevé : linéarisation au voisinage d'un extrémum du potentiel. 108
2.5. Linéarisation du système de Hopf 108
3. Portrait de phase 110
3.1. Espace de phases 110
3.2. Pendule simple, son portrait de phase 112
4. Le modèle proie-prédateur, équation de Lotka-Volterra. *(traité en TD)* 114

5. Applications récursives 116
5.1. Points fixes et stabilité linéaire 117
5.2. Application logistique 118

Chapitre 6. Équations de bilan 99
1. Courant. Équation de conservation. 125
1.1. Densité et courant 125
1.2. Loi de conservation 126
1.3. Équation de continuité d'un fluide 126
1.4. Équation de la chaleur, équation de diffusion 127
2. Chaîne radioactive 129
3. Autres équations de bilan 132
3.1. Réactions chimiques 132
3.2. Processus stochastiques. Équation maîtresse 133

Chapitre 0. Rappels et notations

1. Symboles, etc

$A := \cdots$: la quantité A est *définie* par ce qui suit; on écrit aussi $A \overset{\text{déf}}{=} \cdots$.

$\forall x \cdots$: quel que soit x ...

$\exists\, x \cdots$: il existe un x tel que ...

$x \in A$: x appartient à l'ensemble A

$x \notin A$: x n'appartient pas à A

$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$: la propriété $\mathcal{P}_1$ *implique* la propriété $\mathcal{P}_2$

$\mathcal{P}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_2$: la propriété $\mathcal{P}_1$ *est équivalente à* la propriété $\mathcal{P}_2$, ce qu'on énonce «$\mathcal{P}_1$ si et seulement si ("*ssi*" en abrégé) $\mathcal{P}_2$».

2. Nombres entiers, réels, complexes

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ ensemble des nombres entiers non négatifs,

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ ensemble des nombres entiers relatifs,

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ensemble des nombres réels (ou "droite réelle"),

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes.

Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble des x : $a \leq x \leq b$, tandis que l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$ désigne l'ensemble des x : $a < x \leq b$, avec une inégalité stricte à gauche, etc. Les notations $[a, b]$, $]a, b[$ etc impliquent $a \leq b$.

Dans $\mathbb{C}$, soit i (="$\sqrt{-1}$") tel que $i^2 = -1$.

Tout $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire $z = x + iy$, ou encore $z = \rho e^{i\theta}$, interprétation géométrique voir figure; $x = \Re e\, z$ est la partie réelle de z, $y = \Im m\, z$ sa partie imaginaire; $\rho = |z|$ son *module*, $\theta = \mathrm{Arg}\,(z)$ son *argument*; $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.

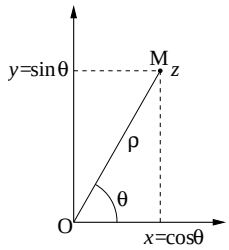


Fig. 1: Interprétation géométrique d'un nombre complexe

Produit de $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ ,$$

donc le module de z est $\rho = \rho_1\rho_2$, son argument $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

$\overline{z}$, ou z^*, complexe conjugué de z

$$\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

Module carré de z

$$|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2 = \rho^2$$

Inverse de z

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$$

En particulier pour le nombre i de module 1

$$i = e^{i\pi/2} \qquad \overline{i} = i^{-1} = e^{-i\pi/2}$$

Inégalités du triangle $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$ pour a, b réels ou complexes.

3. Polynômes

Soit le polynôme de degré n en x : $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. On définit l'addition, la multiplication de tels polynômes. Exemple, la puissance n-ième de $(x+a)$ qui par la formule du binôme s'écrit

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + x^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} x^p\end{aligned} \tag{3.1}$$

avec les coefficients combinatoires $\binom{n}{p}$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\ 2\cdots(p-1)p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

en termes de la factorielle $p! = 1.2.\cdots(p-1)p$. Ces coefficients qui forment le triangle de Pascal satisfont la relation de récurrence

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

qui exprime la relation $(a+x)^n = (a+x)(a+x)^{n-1}$.

Si $P(z) = 0$, on dit que z est une *zéro* de P, (ou une *racine* de l'équation $P(x) = 0$), et on peut factoriser de façon *unique* $P(x) = (x-z)Q(x)$, avec Q un polynôme de degré $n-1$. Un polynôme de degré n en x à coefficients réels a au plus n zéros réels. Il en a exactement n dans $\mathbb{C}$ ("théorème fondamental de l'algèbre"), dont certains peuvent être identiques (zéros multiples). On peut donc écrire de façon unique

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - z_i), \quad z_i \in \mathbb{C}\ .$$

4. Fonctions "élémentaires" : trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme

Fonctions trigonométriques

$\cos\theta$, $\sin\theta$, interprétation géométrique voir fig. 1, $\tan\theta$ (noté $\operatorname{tg}\theta$ dans les "vieilles" notations françaises...), $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ représente la *pente* de la droite OM.

Quelques identités trigonométriques.

Elles découlent toutes de

$$\begin{aligned}
\sin(-a) &= -\sin a \\
\cos(-a) &= \cos a \\
\sin^2 a + \cos^2 a &= 1 \\
\sin(\frac{\pi}{2} - a) &= \cos a \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b
\end{aligned}$$

dont l'interprétation géométrique doit être claire (par exemple la dernière : produit scalaire de deux vecteurs). Retrouver à partir de ces identités les identités de l'appendice A.

Fonctions trigonométriques inverses.

Dans un intervalle où elles sont monotones, on peut inverser les fonctions sin, cos et tan. On définit la fonction $\mathrm{Arc}\sin$ comme la fonction inverse de sin dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\mathrm{Arc}\sin x$ est définie pour $x \in [-1, 1]$, elle y est croissante et prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$x \in [-1, 1] \qquad \mathrm{Arc}\sin \ : \quad -\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2} \ .$$

La solution générale de $x = \sin y$ est $y = \mathrm{Arc}\sin x + 2k\pi$ ou $y = \pi - \mathrm{Arc}\sin x + 2k\pi$, k un entier arbitraire.

De même $\mathrm{Arc}\cos x$ est définie pour $x \in [-1, 1]$, elle y est décroissante et prend ses valeurs dans $[0, \pi]$

$$x \in [-1, 1] \qquad \mathrm{Arc}\cos \ : \quad \pi \searrow 0 \ .$$

La solution générale de $x = \cos y$ est $y = \pm\mathrm{Arc}\cos x + 2k\pi$. On a $\mathrm{Arc}\sin x + \mathrm{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$ comme il découle soit de l'inversion de $x = \cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$, soit du calcul de la dérivée de cette somme.

Enfin la fonction inverse $\mathrm{Arc}\tan x$ est définie pour tout x réel, elle est croissante et prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Arc}\tan \ : \quad -\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2} \ .$$

La solution générale de $x = \tan y$ est $y = \mathrm{Arc}\tan x + k\pi$.

Fonctions exponentielles : e^x, ou plus généralement a^x pour $a > 0$; leur propriété caractéristique

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

(et donc aussi $(a^x)^y = a^{xy}$). Leurs fonctions inverses : log (noté aussi ln, le logarithme népérien) et $\log_a$

$$y = e^x \Longleftrightarrow x = \log y \ ,$$
$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$$
$$a^x = e^{x \log a}$$

Relation avec les fonctions trigonométriques

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \ .$$

Fonctions hyperboliques : sh (= sinh) et ch (= cosh), définies comme parties paire et impaire de l'exponentielle, et th (=tanh), leur rapport

$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \qquad \operatorname{sh} u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \qquad \operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \frac{1 - e^{-2u}}{1 + e^{-2u}}$$

donc

$$e^u = \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \qquad \operatorname{ch}(-u) = \operatorname{ch} u \qquad \operatorname{sh}(-u) = -\operatorname{sh} u \ ,$$

et

$$\operatorname{ch} iu = \cos u \qquad \operatorname{sh} iu = i \sin u \ .$$

Il est important de se rappeler les propriétés de parité et le comportement à l'infini des trois fonctions ch, sh et th (voir figure 2).

5. Dérivation

La dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point x_0, définie par

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5.1}$$

est notée aussi

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \ .$$

Les dérivées successives (si elles existent) se notent

$$f''(x_0) = \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \quad \cdots \quad f^{(k)}(x_0) = \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x=x_0} \quad \cdots$$

En physique, la notation f' est souvent réservée à une dérivation par rapport à une coordonnée d'espace, tandis qu'une dérivée par rapport au temps est notée par un point : $\dot{f}$

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} \qquad , \qquad \ddot{f}(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \ , \quad \text{etc.}$$

S'il y a plusieurs variables (par exemple des coordonnées d'espace et de temps, ou des variables de pression et de température), on utilise les notations de dérivée partielle

$$f'_u(u,v) \equiv \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}, \qquad f'_v(u,v) \equiv \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \quad f''_{uv}(u,v) \equiv \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v} \quad \text{etc.}$$

Dérivation des fonctions élémentaires, voire un petit formulaire dans l'Appendice B, à utiliser conjointement avec les deux formules fondamentales

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

(qui découlent de la définition (5.1)).

6. Intégration

Deux concepts liés :

* le calcul de la *primitive* F d'une fonction f, opération inverse de la dérivation : $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ est une fonction (définie à une constante additive près) telle que $F'(x) = f(x)$;
* l'*intégrale définie* de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ de la droite réelle, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est l'aire algébrique d'un domaine compris entre l'axe des x et le graphe de la fonction f, d'une part, entre les droites $x = a$ et $x = b$ de l'autre; elle peut être calculée comme la limite de l'aire totale de petits trapèzes découpant ce domaine (intégrale de Riemann) quand la largeur de chacun de ces trapèzes tend vers zéro. Cette limite existe sous certaines conditions d'intégrabilité, par exemple que la fonction est continue (condition suffisante d'intégrabilité).

La relation entre les deux notions est que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ .$$

6.1. Méthodes d'intégration

En pratique, pour calculer effectivement une intégrale, il est indispensable de bien connaître les formules de *dérivation* des fonctions simples et de les combiner avec quelques "trucs".

- intégration par parties

On rappelle la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \ .$$

Il en découle que si une fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = u'(x)v(x)$, sa primitive peut se mettre sous la forme (à une constante additive près)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{6.1}$$

Si la primitive de $u(x)v'(x)$ est plus simple, on y a gagné ! Par exemple

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int (x)' \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x(\ln x)'\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) \ . \tag{6.2}$$

Calculer de même $\int x \ln x\,\mathrm{d}x$. Pour une intégrale définie, (6.1) implique

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{6.3}$$

◦ changement de variable

Cette fois, on utilise la propriété de la dérivation d'une fonction composée (fonction de fonction)

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x)$$

où $F'(g(x))$ signifie la fonction F' évaluée en $g(x)$. Cela permet de calculer de façon simplifiée des intégrales de la forme $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$ (on suppose f et g' continues). Par exemple,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{1}{2}\ln(1+u) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

où on a «effectué le changement de variables $u = x^2$». Autre exemple important $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$: si on pose $x = \tan u$, l'intégrale est simplement $\int \mathrm{d}u$, donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{Arc}\tan x \ ,$$

la fonction inverse de tan, définie pour tout x et prenant ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dans le même ordre d'idées,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arc}\sin x \ ,$$

la fonction inverse de sin, définie sur $]-1,1[$ et prenant ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Quand on effectue un changement de variable dans une intégrale définie, il faut veiller à prendre en compte la modification des bornes d'intégration

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \ . \tag{6.4}$$

Mais attention, inversement, supposons qu'on veuille lire et utiliser cette équation de droite à gauche, pour calculer $\int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u$ via le changement de variable $u = g(x)$. Il est nécessaire de supposer que g est inversible (définie et monotone) car on a besoin de la fonction réciproque $h = g^{-1}$, $x = h(u)$, pour déterminer les bornes $a = h(\alpha)$ et $b = h(\beta)$

$$g(x) \text{ monotone sur } [\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Si la fonction n'est pas monotone, il faut d'abord décomposer l'intervalle d'intégration en sous-intervalles où elle est monotone. Faute de quoi on risque de trouver des absurdités. Exemple (trivial) : changement de variable $u^2 = x$ dans $\int_{-1}^1 \mathrm{d}u \stackrel{?}{=} \int_1^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = 0!?$

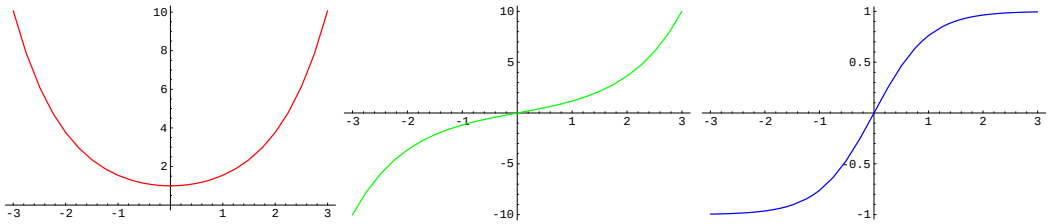


Fig. 2: Graphes des fonctions hyperboliques ch, sh et th.

Appendix A. Identités trigonométriques

Elles découlent toutes de 5 identités fondamentales

$$\sin(-x) = -\sin x \quad ; \qquad \cos(-x) = \cos x \tag{A.1}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{A.2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{A.3}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{A.4}$$

Par exemple (A.3) implique pour $\tan x = \sin x / \cos x$ et $\operatorname{cotan} x = 1/\tan x$ que

$$1 + \tan^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Décalage de l'argument par des multiples de $\pi/2$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos -x = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin -x = -\sin x$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotan} x \quad ; \quad \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotan} x$$

$$\sin(x + \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2})\right) = -\cos x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \tan(x + 2\pi) = \tan x$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\tan(x+y) &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

ou inversement

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)
\end{aligned}$$

ou encore

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \text{etc.}$$

Formules de doublement

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \\
&\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\tan x \cos^2 x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \\
&\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\ .
\end{aligned}$$

Noter que $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sont des fractions rationnelles de $\tan\frac{x}{2}$.

Appendix B. Dérivées des fonctions élémentaires

Fonction	**Dérivée**
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \; a^x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
$\mathrm{Arc}\sin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arc}\cos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arc}\tan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{th}\, x$	$1-\mathrm{th}^2 x$

Chapitre 1. Questions de limite et de convergence

Ce chapitre est consacré à des problèmes de limite : limite d'une fonction en un point, limite d'une suite, d'une intégrale "impropre", d'une série... On va voir que des techniques analogues sont utilisées dans ces différents cas : utilisation d'équivalents, majorations, encadrements.

1. Limite d'une fonction en un point

Sauf mention explicite du contraire, on ne traitera dans ce chapitre que de fonctions réelles d'une variable réelle.

1.1. Limite d'une fonction en un point où elle est définie.

Une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$ a une limite quand $x \to c \in [a, b]$ et on écrit alors $L = \lim_{x\to c} f(x)$, si pour **tout** x suffisamment proche de c, $f(x)$ est arbitrairement proche de L. On exprime cela par

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x : |c - x| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \ , \tag{1.1}$$

(attention à l'ordre des symboles !!) ce qui se lit mot à mot «pour tout ϵ (sous-entendu aussi petit qu'on veut), il existe un nombre η (sous-entendu, suffisamment petit, fonction de ϵ) tel que pour tout x à une distance de c plus petite que η, la différence entre $f(x)$ et L soit inférieure en valeur absolue à ϵ».

Exemple : La fonction x^2 a pour limite 4 quand $x \to 2$. Contre-exemple : $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *n'a pas* de limite quand $x \to 0$: $f(x)$ oscille de plus en plus vite entre -1 et 1.

Continuité. Comparons la limite et la valeur en un point. Une fonction définie sur $[a, b]$ est *continue* en $c \in [a, b]$ si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Elle est continue sur $[a, b]$ si elle l'est en chaque point de $[a, b]$ (y compris les bornes a, b).

Exemples : les fonctions usuelles, puissances, polynômes, trigonométriques, exponentielle, logarithme etc sont continues en tout point de leur ensemble de définition. Contre-exemple, la fonction *partie entière* $E(x)$,

$$E(x) := n \text{ si } n \leq x < n + 1 \tag{1.2}$$

a une limite en tout point non entier et y est continue, mais est discontinue à tout point entier. En effet la limite de $E(x)$ quand $x \to n_-$ (c'est-à-dire tend vers l'entier n par valeurs inférieures) est $n - 1$, mais elle est n si $x \to n_+$.

1.2. Limite d'une fonction en un point singulier ou à l'infini

Exemples : quel sens donner à la limite de $\sin x/x$ quand $x \to 0$? de $\tan x$ quand $x \to \pi/2$? de $e^{-x}+1$ ou de $x \ln x$ quand $x \to \infty$?

Définitions : 1. $f(x)$ définie sur l'intervalle ouvert $[a, b[$ a une limite finie L quand $x \to b_-$ (c'est-à-dire par valeurs inférieures) si pour tout x suffisamment proche et strictement inférieur à b, $f(x)$ est arbitrairement proche de L : $\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x : 0 < b - x < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

2. La fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle ouvert $[a, b[$ tend vers l'infini $+\infty$ quand $x \to b_-$ (et le physicien s'autorise à écrire $\lim_{x\to b_-} f(x) = \infty$) si pour tout x suffisamment proche et strictement inférieur à b, $f(x)$ est supérieur à tout nombre K arbitrairement grand. Ou dit autrement, si tout intervalle $]K, +\infty[$ contient *toutes* les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de b.

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \ : \ 0 < b - x < \eta \quad \Rightarrow f(x) > K \ . \tag{1.3}$$

Le cas où $f(x) \to -\infty$ s'exprime de même.

Exemple : La fonction tangente est définie dans les intervalles ouverts $](2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}[$ et $\tan x \to +\infty$ quand $x \to (2n+1)\pi/2$ par valeurs inférieures, $\to -\infty$ quand $x \to (2n+1)\pi/2$ par valeurs supérieures.

Limites à $\pm\infty$. Définitions analogues :

La fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle ouvert $[a, \infty[$ a une limite finie L quand $x \to \infty$ si pour tout x suffisamment grand, $f(x)$ est arbitrairement proche de L

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists K > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x > K \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{1.4}$$

tandis que la limite est infinie si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \forall M > 0\ \exists K > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x > K \quad \Rightarrow f(x) > M \ . \tag{1.5}$$

Exemples :

1. $\lim_{x\to\infty} 2 + e^{-x} = 2$, $\lim_{x\to-\infty} 2 + e^{-x} = +\infty$

2. Comportement quand $x \to +\infty$ d'une fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$, rapport de deux polynômes P et Q de degrés respectifs p et q.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \to \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_p} \quad = & \text{rapport des coefficients de degré maximal, si } p = q \\ \text{signe}\,(\frac{a_p}{b_q})\,\infty & \text{si } p > q \end{cases}$$

Opérations sur les limites : Si $f(x)$ et $g(x)$ ont des limites finies quand x tend vers un point à distance finie ou vers $\pm\infty$, $\lim(f(x)+g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$, $\lim(f(x).g(x)) = \lim f(x).\lim g(x)$ et (si $\lim g \neq 0$) $\lim(f(x)/g(x)) = \lim f(x)/\lim g(x)$. Si l'une des limites de f ou g est infinie, on peut parfois conclure, parfois on rencontre une "forme indéterminée", voir plus bas §1.4. Par exemple $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+\sin(\pi x/2)\right) = 1$, $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+1}.\tan \pi x/2) = \infty$, $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}/\tan \pi x/2) \stackrel{?}{=} 0/0$??.

Théorème d'encadrement, dit «théorème des gendarmes». Si la fonction $f(x)$ est encadrée par les fonctions g et h en ce sens que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a, b[$ (b pouvant être ∞), et si $g(x)$ et $h(x)$ ont la *même* limite (finie ou infinie) quand $x \to b$, alors $f(x)$ a elle aussi cette même limite.
Exemples : $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in]0, 1]$. Le théorème nous dit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. De même pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} = 0$.

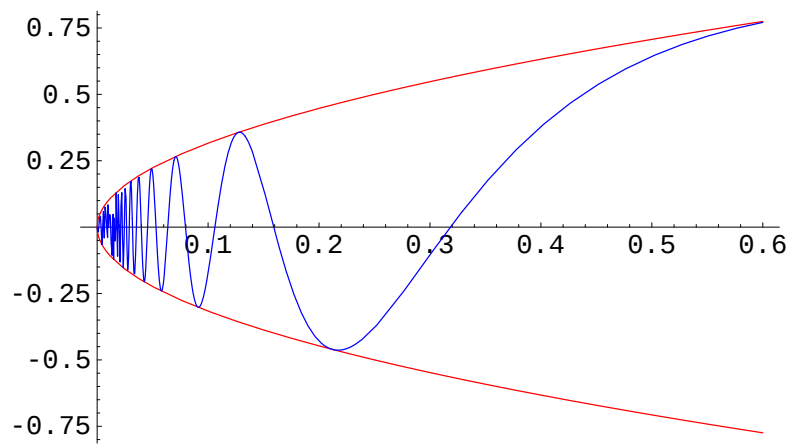


Fig. 1: La fonction $\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, encadrée par les fonctions $\pm\sqrt{x}$, tend vers 0 quand $x \to 0$.

1.3. Infiniment petits, infiniment grands, développements limités. Rappels

Une variable x qui tend vers 0 est appelée un *infiniment petit*. Une fonction $f(x)$ qui tend vers zéro avec x est un *infiniment petit équivalent à* x si $f(x)/x$ a une limite finie non nulle quand $x \to 0$; $f(x)$ est dit *infiniment petit d'ordre* p (par rapport à x) si $f(x)/x^p \to \lambda$ fini, $p > 0$ rationnel, quand $x \to 0$. Si $f(x)/x^p \to \lambda$ quand $x \to 0$, on écrit

$$f(x) \sim \lambda x^p \ , \text{ ou plus simple, mais moins précis } \ f(x) = \mathrm{O}(x^p) \ , \tag{1.6}$$

et on dit que λx^p est la *partie principale* de $f(x)$ quand $x \to 0$.

• *Développements limités*

Un développement limité de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$ est un développement dans lequel les termes successifs sont des infiniment petits d'ordre entier croissant : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \varepsilon(x^p)$ où le dernier terme est une notation signifiant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x^p)/x^p = 0$ (on trouve aussi dans les livres la notation $\mathrm{o}(x^p)$). Plus généralement, un développement limité de $f(x)$ au voisinage d'un point $x = a$ est un développement de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_p(x-a)^p + \varepsilon((x-a)^p)$.

• *Développements de Taylor.*

Une façon pratique de construire de tels développements limités est d'utiliser la formule de Taylor. Celle-ci est une généralisation d'une propriété connue des fonctions continues et dérivables sur un intervalle $[a, b]$: on peut écrire, pour $x \in [a, b]$, $f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \varepsilon(x-a)$ (et on dit que «$f(a) + (x-a)f'(a)$ est la meilleure approximation affine à $f(x)$»). Ceci se généralise en

Théorème. *Si la fonction $f(x)$ est continue ainsi que ses $n-1$ premières dérivées sur l'intervalle $[a, b]$, et si $f^{(n)}(a)$ existe en a, on peut, pour tout $x \in [a, b]$, écrire le développement de Taylor-Young*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \varepsilon((x-a)^n) \ . \tag{1.7}$$

Éléments de preuve : la formule de Taylor-Young se démontre par récurrence, en l'appliquant à l'ordre $n-1$ à la fonction f' et en intégrant le développement limité obtenu, ce qu'on montre être légitime.

Il existe une autre formule de Taylor (Taylor-Lagrange) qui donne une autre forme du reste :

Théorème de Taylor-Lagrange. *Si la fonction $f(x)$ est continue ainsi que ses n premières dérivées sur l'intervalle $[a, b]$, et si $f^{(n+1)}$ existe dans $]a, b[$, on peut, pour tout $x \in [a, b]$, écrire*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \ , \tag{1.8}$$

où $\xi \in]a, x[$.

En pratique, la formule de Taylor-Lagrange avec son reste explicite est utile pour trouver des majorations/minorations d'une fonction (si on connaît le signe du reste). La formule (1.7) est utile pour fournir des développements limités.

• *Développements limités de fonctions classiques*

Les fonctions classiques qu'on va considérer sont indéfiniment dérivables en 0, donc de la formule de Taylor on déduit aisément

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \varepsilon(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \varepsilon(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \varepsilon(x^{2n}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x^3) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \varepsilon(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \varepsilon(x^n)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Calculer en particulier les développements de $\sqrt{1+x}$ et de $(1-x)^{-1}$. Ce dernier est particulièment simple et pouvait être deviné a priori, pourquoi?

• *Opérations sur les développements limités* : addition, multiplication et division, composition et intégration. Ces manipulations sont d'usage très courant pour le physicien ! On peut effectuer des opérations d'addition, de multiplication et de division, de composition et d'intégration de développements limités, à condition d'effectuer ces développements à des ordres cohérents avec l'ordre désiré pour le résultat final. Exemple. Calculons le développement de $\tan x$ à l'ordre 3. On écrit $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x^4)$ qu'on inverse en utilisant le développement de $1/(1-u)$, d'où

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x^4)} = x(1 - \frac{x^2}{6} + \varepsilon(x^4))(1 + \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x^4)) = x(1 + \frac{x^2}{3} + \varepsilon(x^4)) = x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x^5)\,.$$

Exercice : calculer le terme suivant du développement de $\tan x$.

• *Développements limités en $a \neq 0$ ou à l'infini*

On obtient un développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point a grâce à la formule de Taylor (1.7), au prix du calcul des dérivées successives en a de la fonction f. Pour les fonctions usuelles, on peut aussi souvent se ramener au développement au voisinage de l'origine $x = 0$, en effectuant un changement de variable. Exemples : développons $\sin x$ au voisinage de a. On écrit $\sin x = \sin(a + x - a) = \sin a \cos(x - a) + \cos a \sin(x - a)$ et on utilise les développements précédents de $\sin(x - a)$ et $\cos(x - a)$ au voisinage de $x - a = 0$.

De même, pour $x \approx a$, $\ln x = \ln(a + x - a) = \ln a(1 + \frac{x-a}{a}) = \ln a + \ln(1 + \frac{x-a}{a})$ et on applique la dernière formule (1.9) dans la variable $x' = \frac{x-a}{a}$.

Mais on peut aussi aussi transposer la discussion au cas d'infiniment grands pour une variable $x \to \pm\infty$: on se ramène au cas précédent par un changement de variable $x = 1/u$. On sait donc aussi écrire des développements limités au voisinage de l'infini. Exemple : développement limité de $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ quand $x \to \infty$. On écrit $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = |x|(1 + x^{-2})^{\frac{1}{2}}$ et on applique le développement de $(1 + u)^{\frac{1}{2}}$ au voisinage de $u = x^{-2} = 0$.

1.4. Formes indéterminées

On appelle ainsi des expressions de la forme $\frac{0}{0}$, ou $\frac{\infty}{\infty}$, ou $0 \times \infty$, ou $\infty - \infty$, ou 1^∞, 0^0, ∞^0, etc.

Exemples : quelles sont les limites pour $x \to 0$ de $\frac{\sin x}{x}$, $x \ln x$, $\ln x + \frac{1}{x}$, $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, x^x, etc ?

On va montrer plus bas qu'on peut se ramener au premier cas $\frac{0}{0}$. Considèrons donc un rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 quand $x \to x_0$. Il existe plusieurs procédés d'analyse d'une telle forme indéterminée.

Tout d'abord, d'après la définition de la dérivée d'une fonction $f(x)$ en $x = x_0$ comme $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, on a

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

si ces dérivées existent et si leur rapport est fini (*règle de l'Hospital*). Ce qui signifie que la valeur d'une forme $\frac{0}{0}$ est souvent donnée par un simple calcul de dérivée.

Exemples.

(1). $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$?

1ère méthode : On multiplie et divise par la « quantité conjuguée », c'est-à-dire on écrit $\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \frac{2+x-2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})x} = \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}$

2ème méthode : on se rappelle la définition de la dérivée

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\Big|_{x=2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ .$$

(2). Un important résultat est que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.10}$$

comme il découle à nouveau de la définition de la dérivée : la limite est par définition la dérivée de $\sin x$ en 0, soit $\cos x$ évalué en 0, soit 1. L'interprétation géométrique de ce résultat est aussi importante à garder en tête : $2 \sin x$ mesure la longueur de la corde dessinée sur un cercle de rayon unité par l'angle mesuré (en radians) par $2x$. Pour de petits angles, la longueur de la corde vaut approximativement celle de l'arc : $2 \sin x \approx 2x$, voir figure.

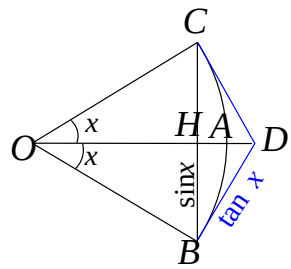


Fig. 2: Interprétation géométrique de (1.10) : $OB = OC = 1$; $BH = HC = \sin x$; $BD = DC = \tan x$. On a $BC \leq \overset{\frown}{BC} \leq BD + DC$, donc $2\sin x \leq 2x \leq 2\tan x$.

Une autre des idées est d'utiliser des majorations/minorations (comme dans le théorème des gendarmes) pour se ramener à d'autres formes indéterminées dont la limite est plus aisément déterminée. Ainsi, dans l'exemple précédent de $\sin x/x$, on a $2\sin x \leq 2x \leq 2\tan x$ (la corde BC est plus courte que celle de l'arc BAC, qui est plus court que la ligne brisée BDC), d'où l'encadrement $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Autre exemple important, comportement asymptotique de $\ln x$ quand $x \to \infty$. Partons de l'inégalité $\ln x < \sqrt{x}$.

Pour démontrer cette inégalité étudions la fonction $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$. Sa dérivée $f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$ est négative pour $x > 4$, positive pour $0 < x < 4$. La fonction f est donc maximale en $x = 4$ et son maximum vaut $f(4) = 2(\ln 2 - 1) = 2\ln\frac{2}{e} < 0$. La fonction f est donc toujours négative, c.q.f.d.

Donc $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$ donc $\lim \frac{\ln x}{x} = 0$ et plus généralement, par changement de variable,

$$\forall \alpha > 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$$

où on passe de la première assertion à la seconde par $x \mapsto 1/x$. Il faut donc retenir que

- quand $x \to \infty$, $\ln x$ tend vers ∞ *plus lentement* que toute puissance positive x^α de x, $(\alpha > 0)$;
- quand $x \to 0$, $|\ln x|$ tend vers ∞ *plus lentement* que toute puissance négative $x^{-\alpha}$ de x, $(\alpha > 0)$.

Quand toutes les méthodes précédentes ont échoué, parce que la dérivée de f ou de g n'existe pas, ou que f'/g' est encore du type $\frac{0}{0}$, et qu'aucun encadrement n'a pu être trouvé, cela impose une discussion plus serrée. Si on a deux fonctions f et g dont le rapport $f(x)/g(x) \to 0/0$ quand $x \to x_0$, on peut remplacer chacune d'elles par sa partie principale au sens des infiniment petits : si $f(x) \sim \lambda(x - x_0)^p$ et $g(x) \sim \mu(x - x_0)^q$, le rapport f/g a une limite nulle, finie ou infinie selon que $p > q$, $p = q$, $p < q$. Obtenir ces parties principales de f et g peut lui-même nécessiter l'emploi de développements limités...

Exemples : Limite de $\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$ quand $x \to 0$. En utilisant les développements limités ci-dessus, on calcule $x - \sin x \sim \frac{x^3}{3!}$, $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$, donc le rapport tend vers $-\frac{1}{2}$.
Calculer de même la limite de $\frac{1-x+\ln x}{1-\cos(1-x)}$ quand $x \to 1$.

• Finalement, des formes indéterminées de la forme ∞/∞, 1^∞ etc peuvent se ramener au cas $0/0$ précédents par passage à l'inverse, exponentiation etc. Ainsi, si $f \to 0$ et $g \to \infty$, le produit $f.g$ a une forme indéterminée $0 \times \infty$ mais f/g^{-1} est de la forme $0/0$. De même, si $f \to 1$, $g \to \infty$, $f^g = \exp((\ln f)/g^{-1})$ et l'argument de l'exponentielle est à nouveau de la forme $0/0$. Exemples : quand $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln(1+x)/x)$ a donc pour limite e; $\lim_{|x|\to 0} x^{\ln(1+x)}$, de la forme 0^0, vaut 1, etc.

1.5. Permuter des limites

Considérons une fonction de deux variables x et λ (λ peut être considéré comme un paramètre dont dépend la fonction de x), et examinons le comportement limite où *à la fois* $x \to x_0$ et $\lambda \to \lambda_0$. Plus précisément, supposons que $f(x,\lambda) \to g(x)$ quand $\lambda \to \lambda_0$, tandis que $f(x,\lambda) \to h(\lambda)$ quand $x \to x_0$. Peut-on affirmer que les fonctions $g(x)$ et $h(\lambda)$ ont des limites quand respectivement $x \to x_0$ ou $\lambda \to \lambda_0$? Autrement dit a-t-on

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x,\lambda) \stackrel{?}{=} \lim_{\lambda\to\lambda_0} \lim_{x\to x_0} f(x,\lambda) \ ,$$

c'est-à-dire l'échange des limites est-il autorisé ?

Il est aisé de construire des exemples mathématiques où cela n'est pas le cas, soit que l'une des limites de $g(x)$ ou de $h(\lambda)$ n'existe pas, ou que ces limites existent mais soient en effet différentes.
Exemples
(1) $f(x,\lambda) = \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$ est telle que $g(x) = \lim_{\lambda\to 0} f(x,\lambda) = 0$ pour tout x tandis que $h(\lambda) = \lim_{x\to 0} f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. La limite de h quand $\lambda \to 0$ n'existe pas.

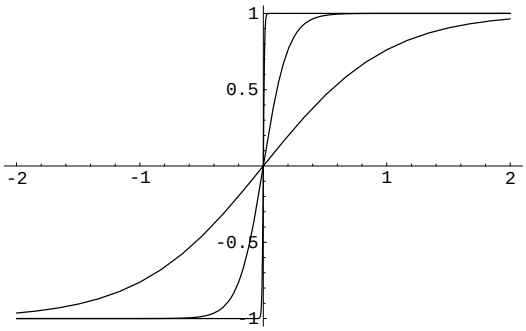


Fig. 3: La fonction $\tanh Nx$ pour trois valeurs de $N = 1, 5, 100$.

(2) $f(x,N) = \tanh Nx = \frac{1-e^{-2Nx}}{1+e^{-2Nx}}$ dans les limites où $x \to 0$ et $N \to \infty$? $\lim_{x\to 0} f(x,N) = 0$, $\lim_{N\to\infty} f(x,N) = \operatorname{signe} x$, la "fonction saut", voir figure 3.

Cette situation se rencontre aussi en physique. C'est ainsi qu'en mécanique statistique, où on s'intéresse aux propriétés de systèmes de grand nombre de constituants, il faut faire attention à l'ordre des limites. Considérons par exemple la question de l'*aimantation spontanée* d'un ferromagnétique. Un système de N moments magnétiques m_i est soumis à un champ magnétique h, qui tend à aligner ces moments et conduit à l'apparition d'une aimantation moyenne $M(h,N) = \frac{1}{N}\sum m_i$. L'aimantation spontanée est la limite de cette aimantation quand $h \to 0$. On démontre qu'à N fini, $\lim_{h\to 0} M = 0$, tandis que certains systèmes sont tels que $\lim_{N\to\infty} M(h,N)$ existe et demeure finie quand $h \to 0$.

En fait, bien sûr, un nombre d'atomes, de particules, etc, n'est jamais strictement infini, mais seulement colossalement grand, de l'ordre du nombre d'Avogadro $\mathcal{N} \approx 6\ 10^{23}$. Dans l'exemple précédent, il faut donc comprendre que N est si grand que les quantités physiques envisagées ne diffèrent de celles pour N infini que dans des intervalles des variables (ici de champ) extrêmement faibles. La fonction de la figure 3 en donne un exemple : l'intervalle où la fonction diffère de la fonction saut est de l'ordre $|\Delta x| \approx \frac{1}{N}$.

Beaucoup de soin doit donc être exercé dans l'étude de limites simultanées de plusieurs variables.

2. Suites

2.1. Définition

On considère une suite de nombres réels (u_n), $n = 1, 2, \cdots$, soit définie par la donnée explicite des valeurs de ses termes, par exemple $u_n = ar^n$ (série géométrique), ou $u_n = \sin(\frac{\pi}{3}n)$, ou $u_n = 1/n^2$, ...; soit définie par une relation de récurrence, complétée par la donnée du ou des premiers termes, pour permettre de "démarrer" la récurrence.

Exemples:

- récurrence à un terme $u_{n+1} = u_n + r$: suite "arithmétique"; $u_{n+1} = ru_n$, suite géométrique; $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$, une suite qu'on étudiera en détail au chapitre 5.
- récurrence à deux termes $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$: c'est la suite de Fibonacci

$$(u_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots) \tag{2.1}$$

(nombres de spirales concentriques observées dans nombre de végétaux, marguerite, ananas, pomme de pin...)

En physique, les suites peuvent apparaître dans des contextes variés :

– approximations de taille croissante (nombre de particules, dimensions géométriques, ...) d'un système;

– résolution numérique par itération d'une équation algébrique; les u_n sont les approximations successives d'une racine d'un polynôme, par exemple (méthode de Newton...);

– résolution numérique par itération d'une équation différentielle; les u_n décrivent par exemple les positions successives à des intervalles de temps réguliers, etc etc.

Dans tous ces cas, on est intéressé à savoir si cette suite a une limite quand l'indice $n \to \infty$ et quelle est cette limite.

2.2. Limite d'une suite

La suite (u_n) admet une limite u, ou *converge* vers la limite u, et on écrit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ ou simplement $u_n \to u$, si la différence $u_n - u$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N, \qquad \forall n > N, \qquad |u_n - u| < \epsilon \ , \tag{2.2}$$

c'est-à-dire **tous** les u_n sont arbitrairement près de u, dès que n est suffisamment grand. (Noter la ressemblance avec la condition (1.4)).

Exemple : la suite $u_n = 1/n^2$ tend vers zéro. Vérifier que (2.2) est bien satisfait.

Une suite peut ne pas converger, soit qu'elle a un comportement oscillant, telle $u_n = \sin(n\frac{\pi}{3})$, soit qu'elle diverge (tende vers l'infini), exemple $u_n = \sqrt{n}$, soit qu'elle combine ces deux comportements, comme $\tan(n\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})$ (discuter ce dernier cas).

Si les suites (u_n) et (v_n) ont des limites, respectivement u et v, alors

$$\begin{gathered}
\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u_n \to \lambda u \\
u_n + v_n \to u + v \\
u_n v_n \to uv \\
\text{si } u \neq 0 \quad \frac{1}{u_n} \to \frac{1}{u} \quad ; \quad \frac{v_n}{u_n} \to \frac{v}{u}
\end{gathered}$$

Si une suite u_n converge et qu'on a trouvé N tel que la condition (2.2) soit satisfaite, l'inégalité triangulaire (cf Chapitre 0, § 2) nous dit que $|u_n - u_{n'}| \leq |u_n - u| + |u_{n'} - u| < 2\epsilon$ dès que $n, n' > N$. Autrement dit, la différence entre deux termes quelconques de la suite peut être rendue arbitrairement petite à condition d'"aller assez loin". Réciproquement, si

$$\forall \epsilon \quad \exists N \quad \forall n, n' > N \qquad |u_n - u_{n'}| < 2\epsilon \ , \tag{2.3}$$

(ce qu'on appelle une suite de Cauchy), alors on montre que la suite u_n est convergente. Voir § 2.3 pour plus de détails. On a donc avec la condition de Cauchy (2.3) une condition *nécessaire et suffisante* de convergence.

En particulier, si u_n converge, $|u_n - u_{n+1}|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut. Cette conséquence de la condition de convergence est donc une condition *nécessaire* de convergence. Si elle est satisfaite, nous ne sommes pas sûrs que la suite converge. Mais si elle n'est pas satisfaite, nous sommes sûrs que la suite u_n ne converge pas !

Si $|u_n - u_{n+1}|$ ne tend pas vers zéro, la suite u_n n'a pas de limite.

Supposons cette condition nécessaire satisfaite. Comment déterminer si une suite converge bien et dans ce cas, quelle est sa limite?

- suite donnée explicitement : On procède par majorations, par comparaison à d'autres suites dont la limite est connue (encadrement, encore les gendarmes...), ou par étude du comportement asymptotique. Ainsi, si une suite est *monotone croissante* et *majorée*, c'est-à-dire $u_{n-1} \leq u_n \leq U$ pour un certain nombre U et pour tout n suffisamment grand, elle converge vers une limite $u \leq U$.

Preuve : l'ensemble majoré des nombres réels (u_n) admet une borne supérieure $B \leq U$, qui est le plus petit nombre tel que $u_n \leq B$ pour tout n. Alors $\forall \epsilon \quad \exists N \quad u_N > B - \epsilon$ (sans quoi B ne serait pas le plus petit), et par la monotonicité $\forall n > N \quad |u_n - B| = B - u_n < B - u_N < \epsilon$, donc $u_n \to u = B$.

Exemple : $u_n = 2^{1-\frac{1}{n}}$. On a $u_{n-1} < u_n < 2$. La suite converge vers une limite (qui est 2).

Inversement si une suite monotone croissante n'est pas bornée (c'est-à-dire si ses éléments sont arbitrairement grands), elle diverge (tend vers $+\infty$).

Encadrement, théorème des gendarmes. Si $w_n \leq u_n \leq v_n$ et que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite u, (u_n) converge aussi, et vers u.
Exemples : limites de $u_n = \frac{\sin(\sqrt{2}n)}{n^2}$, $u_n = 1/(n^2 + \sin n\frac{\pi}{4})$?
Si une suite u_n est asymptotiquement égale à une autre suite v_n, c'est-à-dire que $\frac{u_n - v_n}{v_n} \to 0$ quand $n \to \infty$ (on suppose tous les $v_n \neq 0$), et si on sait que la suite v_n converge vers une limite v, alors $u_n \to v$. Exemple : la suite $v_n = 1/n^2$ converge vers 0; la suite $u_n = 1/(n^2 + \sin n\frac{\pi}{4})$ est asymptotiquement égale à v_n (pourquoi ?) donc converge aussi vers 0. Noter que l'exemple précédent $u_n = 2^{1-\frac{1}{n}}$ relève aussi de ce cas, pour la suite $v_n = 2$ constante.

- suite définie récursivement, $u_n = f(u_{n-1}, \cdots)$: si la suite admet une limite u, cette limite doit satisfaire l'équation $u = f(u)$, donc u est à chercher parmi les racines de l'équation $x = f(x)$. Exemple : la suite définie par $v_n = u_n/u_{n-1}$, u_n la suite de Fibonacci (2.1), satisfait $v_n = 1 + 1/v_{n-1}$, son éventuelle limite est l'une des racines de $x^2 = x + 1$, soit $x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et ce ne peut être que celle des deux qui est positive, soit x'. Il reste à démontrer qu'effectivement $v_n \to v = x'$. Le nombre x', le fameux "nombre d'or", était connu des Grecs pour ses propriétés remarquables. On reviendra au chapitre 5 sur ces suites définies par récurrence, l'étude graphique de leur éventuelle convergence etc.

L'usage de la calculette est évidemment la solution la plus tentante pour déterminer rapidement si une suite a ou non une limite. Dans certains cas, cette méthode peut conduire à des résultats incorrects, en raison des erreurs d'arrondi inhérentes au calcul numérique. Exemple : soit la suite définie par $u_{n+1} = 100u_n - 9$; $u_1 = \frac{1}{11}$. On vérifie immédiatement que la suite est constante : $\forall n,\ u_n = \frac{1}{11}$, tandis qu'une calculette après un certain nombre d'itérations conclut à une divergence. Pourquoi ?

2.3. Suites de Cauchy

Nous donnons ici quelques détails supplémentaires sur la condition de Cauchy (2.3). La condition de convergence (2.2) suppose connue la limite u de la suite. Le critère de Cauchy s'affranchit de cette connaissance a priori de la limite.

L'inégalité triangulaire nous a montré que toute suite (u_n) convergente est une suite de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?

Une propriété fondamentale de l'ensemble des réels (ou des complexes), par opposition aux rationnels, est d'être *complet* : toute suite de Cauchy définit un nombre unique u dans cet ensemble, qui est la limite de (u_n) au sens de (2.2).

Par contre, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas complet : la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1+u_{n-1}}$ et $u_1 = 1$ est une suite de Cauchy de rationnels. Elle ne converge toutefois pas dans $\mathbb{Q}$, puisque sa limite est $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel.

2.4. Suites de fonctions

On considère maintenant des *suites de fonctions* $(f_n(x))$ définies pour x réel (typiquement $x \in [a, b]$) et à valeurs réelles (on pourrait aussi facilement étendre ce qui suit à des fonctions complexes). Exemples : $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$, $f_n = \frac{n \sin x}{1+nx}$.

Supposons que pour toute valeur donnée $x \in [a, b]$, la suite de *nombres* $f_n(x)$ converge vers un nombre $f(x)$. Cet ensemble de nombres définit la fonction limite f, et on dit qu'on a convergence simple de f_n vers f. Donc, pour répéter (2.2),

$$\textbf{convergence simple} \quad \forall x \in [a, b] \;\; \forall \epsilon \;\; \exists N(x) \text{ tel que } \quad \forall n > N(x) \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{2.4}$$

où on a bien souligné que l'entier N dépend a priori de x.

Cette condition de convergence est parfois trop faible. Par exemple, il n'est pas vrai en général que si les fonctions continues $f_n(x)$ convergent simplement, leur limite $f(x)$ est continue. Exemple : soit la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout $x < 1$, $x^n \to 0$, tandis que pour $x = 1$, la valeur limite est 1. La fonction limite $f(x)$ est donc la fonction discontinue qui vaut 0 sur $[0, 1[$ et 1 en 1 (c'est la fonction $E(x)$ définie en (1.2), restreinte à l'intervalle $[0, 1]$).

En fait, la dépendance de N en x dans (2.4) est souvent gênante et on a besoin d'une condition de convergence plus forte (c'est-à-dire plus contraignante), où on impose à N d'être indépendant de x

$$\textbf{convergence uniforme} \qquad \forall \epsilon \; \exists N \;\; \text{tel que} \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in [a, b] \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{2.5}$$

auquel cas on dit que f est la limite uniforme des f_n. (Bien noter et comprendre l'ordre distinct des "quantificateurs" $\forall$ et $\exists$ dans les deux conditions (2.4) et (2.5).)

Il est important de bien comprendre que

$$\text{convergence uniforme} \implies \text{convergence simple}$$

mais que l'inverse n'est pas vrai!

Exemples :

1. Dans le cas des fonctions $f_n(x) = x^n$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ de l'exemple ci-dessus, la convergence des f_n n'est pas uniforme vers $f(x) = E(x)$, comme on va le montrer plus bas, par l'absurde.

Mais il est instructif de le comprendre autrement. Montrons que $\forall a$ fixé, avec $0 \leq a < 1$, la suite $f_n(x) = x^n$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,a]$. En effet

$$\forall n > N \quad \forall x \in [0,a] \quad |x^n - 0| = x^n \leq a^n \leq a^N \ ,$$

par des inégalités triviales. Pour assurer que $|x^n - 0| < \epsilon$, il suffit de choisir N tel que $a^N < \epsilon$ ou encore de façon équivalente, $N > \frac{-\ln \epsilon}{-\ln a}$. Ce choix de N assure bien la convergence uniforme des f_n vers 0 dans l'intervalle $[0,a]$. Mais noter que ce N augmente sans limite quand a s'approche de 1. En conséquence, la convergence uniforme ne peut être maintenue sur tout l'intervalle $[0,1[$, même "ouvert" à droite.

2. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1-x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim f_n(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, il existe un n assez grand à partir duquel tous les $f_n(x) = 1 - x$. La suite converge donc simplement vers la fonction discontinue $f(0) = 0$; $f(x) = 1 - x$, $x \neq 0$, mais la convergence *n'est pas* uniforme.

3. Par contre les fonctions $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ convergent uniformément vers $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$.

En effet $|f_n(x) - x| = x - n \sin \frac{x}{n} \leq \frac{x^3}{6n^2} < \frac{1}{6n^2}$ quel que soit $x \in [0,1]$. On peut démontrer l'inégalité $\phi(\alpha) := \sin \alpha - \alpha + \frac{\alpha^3}{6} \geq 0$ utilisée dans cet argument par étude des fonctions dérivées successives $\phi'(\alpha)$ et $\phi''(\alpha)$, ou encore par utilisation de la formule de Taylor-Lagrange.

4. Autres exemples importants, les fonctions $f_n(x) := \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p!}$, et $g_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n$, convergent, pour tout x réel, vers la fonction exponentielle e^x. La convergence est-elle uniforme?

On démontre le

Théorème. *Une suite uniformément convergente de fonctions continues a pour limite une fonction continue.*

Preuve. Soit f la limite uniforme d'une suite de fonctions f_n continues sur $[a,b]$. Montrons la continuité de f en tout $c \in [a,b]$. Par la convergence uniforme,

$$\forall \epsilon \ \exists N \text{ tel que } \quad \forall n > N \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \ .$$

Choisissons un tel $n > N$. La continuité de f_n dit que

$$\forall\epsilon\ \exists\eta \text{ tel que } \quad \forall x\ : |c-x| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{3}$$

et l'inégalité triangulaire dit alors que

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\ , \quad \text{CQFD.}$$

Voir ci-dessus deux exemples de suites non uniformément convergentes de fonctions continues dont la limite n'est pas continue.

Par contre, la suite des dérivées $f_n'(x)$ d'une suite uniformément convergente de fonctions $f_n(x)$ ne converge pas nécessairement, même simplement. Par exemple, les $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos(2n+1)\pi x$ sont continues et dérivables pour tout $x \in [0,1]$. La suite converge uniformément vers 0. On calcule $f_n'(x) = -\pi\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\sin(2n+1)\pi x$. Pour $x = \frac{1}{2}$ par exemple, $f_n'(\frac{1}{2}) = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\pi$ ne converge pas.

Convergences en moyenne.
La condition (2.5) peut aussi se récrire

$$\textbf{convergence uniforme'} \quad \forall\epsilon\ \exists N \text{ tel que } \quad \forall n > N \quad \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ . \tag{2.5'}$$

Cette condition de convergence uniforme (2.5)' peut s'exprimer en termes d'une "distance" entre fonctions $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ en écrivant

$$\forall\epsilon\ \exists N \text{ tel que } \quad \forall n > N \quad d(f_n, f) < \epsilon\ .$$

Cette distance a les propriétés générales que $d(f,g) = d(g,f) \geq 0$, $d(f,g) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ pour tout x et l'inégalité triangulaire est satisfaite $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$ pour tout triplet de fonctions f, g, h. Rien n'empêche alors d'utiliser d'autres "distances" sur les fonctions, définissant ainsi d'autres types de convergence. Par exemple, si les fonctions sont intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, on peut prendre $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$; si elles sont de carré intégrable (voir paragraphe suivant), $d_2(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x$, etc. Ceci définit les notions de convergence en moyenne, ou en moyenne quadratique, etc.

3. Intégrales

On rappelle qu'on est conduit à la notion d'intégrale d'une fonction continue par deux chemins. D'une part, la recherche de la *primitive* d'une fonction f, opération inverse de la dérivation : $F(x) = \int^x f(x')\,\mathrm{d}x'$ est une fonction (définie à une constante additive près) telle que $F'(x) = f(x)$. D'autre part, l'*intégrale définie* de $f(x)$ sur le segment $[a,b]$ de la droite réelle, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est l'aire algébrique d'un domaine compris entre l'axe des x et le graphe de la fonction f, d'une part, entre les droites $x = a$ et $x = b$ de l'autre; elle peut être calculée comme la limite de l'aire totale de petits trapèzes découpant ce domaine (intégrale de Riemann) quand la largeur de chacun de ces trapèzes tend vers zéro. La relation entre les deux notions est que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ . \tag{3.1}$$

3.1. Propriétés générales

Rappelons d'abord quelques propriétés importantes de l'intégration sur un intervalle $[a, b]$. C'est une opération linéaire : $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, en pratique, on peut intégrer une somme finie de fonctions terme à terme; si $f(x) \leq g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, (avec $a < b$), $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$; enfin si $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Une inégalité importante qui généralise l'inégalité triangulaire est

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ . \tag{3.2}$$

Formule de la moyenne. Si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et si g y garde un signe constant, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

Preuve: si par exemple, $g \geq 0$, l'intégrand de gauche $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, m, M les bornes inférieure et supérieure de f, donc il existe un ξ, $m \leq \xi \leq M$, atteint par f en un certain c tel que (3.3).

En particulier pour $g = 1$, on a le théorème de la moyenne : il existe un $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a) \ , \tag{3.4}$$

autrement dit, la moyenne $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à la valeur prise par la fonction f en (au moins) un point de l'intervalle $[a, b]$.

Inégalité de Schwarz. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Pour tout réel λ on peut écrire l'inégalité triviale $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x \geq 0$, soit

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \geq 0 \ .$$

Le trinôme du second degré en λ est ≥ 0 pour tout λ ssi son discriminant est négatif ou nul, soit

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x} \tag{3.5}$$

une inégalité parfois très utile. Cette inégalité est réminiscente de l'inégalité sur le produit scalaire de deux vecteurs $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \sqrt{\vec{u}^2\vec{v}^2}$, et il y a de bonnes raisons à cela...

3.2. Méthodes d'intégration

- intégration par parties
- changement de variable

Voir chapitre 0 et TD.

◦ passage en coordonnées polaires

Une intégrale d'une fonction de deux variables peut souvent se calculer avec avantage par changement des coordonnées "rectangulaires" en coordonnées "polaires"

$$x = \rho\cos\theta\ , \quad y = \rho\sin\theta$$

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\ ,$$

l'intégrale étant entendue sur un domaine D donné. Par exemple, si la fonction $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ ne dépend pas de θ et si le domaine D est invariant par rotation, tel une couronne entre deux rayons r_1 et r_2, on a

$$\int_{r_1^2 \le x^2+y^2 \le r_2^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} f(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

.

Exemple

$$\int_{r_1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le r_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi(\mathrm{e}^{-r_1^2} - \mathrm{e}^{-r_2^2})$$

(par application du changement de variable $\rho^2 \mapsto \sigma$). Dans ce cas la limite $r_1 \to 0$, $r_2 \to \infty$ existe et vaut π. D'une part, dans cette limite, les deux intégrales en x et y se séparent, donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\ ,$$

de l'autre, on peut appliquer le résultat précédent et cela donne le résultat important sur l'*intégrale gaussienne*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\ .$$

Par changement de variable, on a encore

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\sigma\ ,$$

une intégrale fort importante en théorie des probabilités : $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)e^{-x^2/2\sigma^2}$ est la densité de probabilité d'un processus gaussien centré en 0, de variance σ. L'intégrale (probabilité totale) est bien égale à 1.

3.3. Intégrales impropres avec une singularité sur un intervalle fini

On vient de voir que si la fonction $f(x)$ est définie et continue en tout point d'un intervalle $[a,b]$ de la droite réelle, elle est intégrable sur cet intervalle : $\int_a^b f(x)dx$ existe et est finie (l'hypothèse de continuité peut être relâchée un peu...). Supposons maintenant que la fonction soit définie sur l'intervalle ouvert $[a,b[$, mais qu'elle ait un point singulier en b, c'est-à-dire un point où elle n'est pas définie, soit qu'elle tende vers l'infini, soit qu'elle oscille de plus en plus vite au voisinage de ce point. (Exemple du premier cas, $\frac{1}{x-b}$, du deuxième, $\sin\frac{1}{x-b}$). Que peut-on dire de son intégrale de a à b ? On parle alors d'*intégrale impropre*, dont il faut discuter l'existence. Il s'agit à nouveau d'étudier un problème de

limite, ici la limite $\lim_{c\to b_-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. On dira que $f(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, ou que l'intégrale converge, si cette limite existe

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf}}{=} \lim_{c\to b_-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

(On définirait de même l'intégrabilité si la singularité avait lieu à la borne inférieure a de l'intégrale.)

Soit la fonction $F(c) := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. On démontre que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi $|F(c)-F(c')|\to 0$ quand $c,c'\to b_-$.

L'argument repose à nouveau sur le critère de Cauchy (2.3).

On peut demander aussi la convergence absolue, qui est une condition plus forte

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ converge} \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}\ ,$$

l'inverse étant faux. Exemples : $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ est convergente (par intégration par parties), mais pas absolument convergente; par contre $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Considérons la fonction $g_\alpha(x) = (b-x)^{-\alpha}$. Comme sa primitive est

$$\int^x (b-x')^{-\alpha}\,\mathrm{d}x' = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(b-x)^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha\neq 1 \\ -\ln|b-x| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

cette fonction est intégrable en b si $\alpha<1$, non intégrable si $\alpha\geq 1$.

Comme dans les cas précédemment étudiés de limites, on peut trouver des conditions suffisantes d'intégrabilité (c'est-à-dire de convergence de l'intégrale) pour une fonction **positive** soit par minorations/majorations par des fonctions connues comme les $g_\alpha(x)$ ci-dessus (encore les gendarmes !), soit par utilisation d'infiniment petits (ou grands) équivalents. Ainsi, si A est une constante *finie* et

1. si $0\leq f(x)\leq \frac{A}{(b-x)^\alpha}$ pour $\alpha<1$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge;
2. si $f(x)\geq \frac{A}{(b-x)^\alpha}>0$ pour $\alpha\geq 1$, l'intégrale diverge;
3. si $f(x)\sim \frac{A}{(b-x)^\alpha}$ quand x approche b, son intégrale de a à b est convergente si $\alpha<1$, divergente si $\alpha\geq 1$.

Remarque importante. Bien noter qu'il est donc possible que $f(x)\to\infty$ quand $x\to b$ mais que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soit *finie* ! Il suffit de considérer une fonction $g_\alpha(x)$ avec $0<\alpha<1$, par exemple $1/\sqrt{x}$ en 0.

Exemples : 1. Soit $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$ à intégrer de 0 à 1. Montrer que $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$. Seule l'intégration du premier terme pose problème, dans le cas présent, elle est impossible

en 0. Plus simplement, $f(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to 0$, donc non intégrabilité. Même discussion (avec la conclusion opposée !) pour $g(x) = \sqrt{x} f(x)$.

2. Vérifier que $\int \frac{1}{\sin(x-b)}\,\mathrm{d}x = \ln|\tan\frac{b-x}{2}|$ en utilisant les formules de trigonométrie $\sin u = \frac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}$. En déduire que l'intégrale $\int_0^b \frac{1}{\sin(x-b)}\,\mathrm{d}x$ n'est pas définie. Donner un argument plus simple reposant sur un équivalent.

3. Discuter l'intégrabilité d'une fraction rationnelle $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ si Q a des zéros sur l'intervalle $[a, b]$.

Singularité logarithmique.

Un cas important en pratique qui n'est pas couvert par la comparaison avec les fonctions $g_\alpha(x)$ est celui d'une singularité logarithmique. Supposons que quand $x \to b$, $f(x) \sim \ln|x-b|$. Se rappelant la primitive de $\ln x$,

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int (x)' \ln x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)\ , \tag{3.7}$$

on vérifie que

$$\int^b \ln(b-x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge}$$

et donc par comparaison, c'est aussi le cas de l'intégrale de la fonction $f(x)$ considérée. *Une singularité logarithmique à distance finie est une singularité intégrable.*

Autres exemples : montrer que $\int^b \ln^n(b-x)\,\mathrm{d}x$ converge (intégration par parties et récurrence), que $\int^b \frac{1}{\ln(b-x)}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, et que $\int^b \ln(\ln(b-x))\,\mathrm{d}x$ converge (int.p.p).

3.4. Intégrales impropres avec intervalle d'intégration infini

Considérons une intégrale $I(a, b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle fini $[a, b]$ et examinons si la limite $b \to \infty$ existe et est finie. Si c'est le cas, on écrira cette limite $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Il en est de même pour la borne inférieure de l'intégrale, qu'on peut faire tendre vers $-\infty$, définissant éventuellement $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Noter que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie comme la limite (si elle existe) de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ où a et b tendent **indépendamment** vers $-\infty$ et ∞ respectivement. (Pour notre insistance sur le mot "indépendamment", voir plus bas la notion de partie principale, §3.5.) Comme dans le cas d'une singularité à distance finie examiné au sous-paragraphe précédent,

(a) si $F(c) := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi $|F(c) - F(c')| \to 0$ quand $c, c' \to \infty$;

(b) la convergence absolue implique la convergence (mais l'inverse est faux [1]);

(c) dans le cas de fonctions positives, la condition d'intégrabilité à $\pm\infty$ se ramène à l'étude du comportement de la fonction $f(x)$ quand $x \to \pm\infty$. En utilisant à nouveau les fonctions puissances $x^{-\alpha}$ comme étalons de comparaison, $\int^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ a une limite si $\alpha > 1$, et n'en a pas si $\alpha \leq 1$. Donc

1. Si $0 \leq f(x) \leq \frac{A}{x^\alpha}$ pour $\alpha > 1$, $\int_a^\infty$ existe.
2. Si $f(x) \geq \frac{B}{x^\alpha} > 0$ pour $\alpha \leq 1$, $B > 0$, l'intégrale diverge.
3. Si $f(x) \sim \frac{A}{x^\alpha}$ quand $x \to \infty$, son intégrale de a à ∞ est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leq 1$.

Exemple L'intégrale $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$, où P et Q sont des polynômes de degrés respectifs p et q, et on suppose toutes les racines de Q négatives ou complexes, converge pour $p \leq q-2$.

Attention : Si $f(x) > 0$, $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ est une condition nécessaire mais **pas suffisante** de convergence de $\displaystyle\int^\infty f(x)dx$!!

On a en effet avec les fonctions $1/x^\alpha$, $\alpha \leq 1$, des exemples de fonctions qui tendent vers zéro à l'infini, mais pas assez vite pour assurer la convergence de l'intégrale.

Les intégrations par parties et changements de variables peuvent être pratiqués dans une intégrale impropre et peuvent permettre de conclure à sa convergence ou divergence. Étudier ainsi la convergence de $\int^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$ selon la valeur de α.

Si $f(x)$ n'est pas de signe défini quand $x \to \infty$, donc si elle oscille entre des valeurs positives et négatives, la condition $f(x) \to 0$ n'est même pas nécessaire ! Un exemple est fourni par l'intégrale de Fresnel $\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx$, qu'on rencontre en Optique, dans la théorie de la diffraction de la lumière, et dont on démontre qu'elle converge, bien que $|\sin(x^2)|$ ne tende pas vers zéro. Pour montrer la convergence, on peut effectuer un changement de variable $u = x^2$, suivi d'une intégration par parties, qui amène à une intégrale absolument convergente :

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \sin u \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\right]_1^\infty - \frac{1}{4}\int_1^\infty \cos u \frac{du}{u^{3/2}}\ . \tag{3.8}$$

[1] Par exemple $\int_1^\infty \sin u\,du/u$, obtenue par changement de variable $x = 1/u$ à partir d'une intégrale déjà rencontrée au §3.3, est convergente mais pas absolument convergente.

3.5. Partie principale

Soit une fonction $f(x)$ dotée d'une singularité à $x = 0$, définie et continue sauf en 0 sur un intervalle $[a, b]$ contenant 0 (donc $x \neq 0$, $a \leq x \leq b$, $ab < 0$). Par définition la partie principale de l'intégrale

$$\text{P.P.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{-\epsilon} + \int_\epsilon^b \right) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

si cette limite existe. Par exemple, considérons $f(x) = 1/x$: alors que $\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ n'existe pas (la singularité $1/x$ n'est pas intégrable selon la discussion de la section 3.3), sa partie principale vaut

$$\text{P.P.} \int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-1}^{-\epsilon} + [\ln|x|]_\epsilon^2 = \ln 2\ . \tag{3.10}$$

La partie principale est aussi parfois notée $⨍_a^b\ f(x)\,\mathrm{d}x$.

On peut définir de manière analogue la partie principale à l'infini

$$\text{P.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.11}$$

(tandis que la définition initiale de $\int_{-\infty}^{\infty}$ impliquait deux limites indépendantes quand $A \to -\infty$ et $B \to \infty$). Par exemple, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ n'a pas de sens, tandis que sa P.P. vaut $\lim_{A\to\infty} \ln \frac{A-1}{A+1} = 0$.

3.6. Échange de limites, dérivation sous le signe somme

Considérons les intégrales d'une suite de fonctions $I_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et leur limite : $I = \lim_{n\to\infty} I_n$, qu'on veut comparer à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit, quand a-t-on $\lim \int = \int \lim$?

Théorème. *Si une suite $f_n(x)$ de fonctions continues converge uniformément vers $f(x)$ sur $[a, b]$, alors $f(x)$ est continue donc intégrable sur $[a, b]$ et $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Autrement dit, la convergence uniforme de la suite est une condition suffisante de convergence des intégrales vers la "bonne" limite.

Même question avec des fonctions $F(x, \lambda)$ dépendant d'un paramètre λ. Quand $\lambda \to \lambda_0$, a-t-on $\lim \int f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int \lim f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x$? Là encore, la convergence uniforme est une condition suffisante.

Contre-exemples. 1. Fonctions $f_n(x) = \frac{n}{x^2+n^2}$ intégrées sur $(-\infty, \infty)$. On calcule $\int_{-A}^{B} \frac{n\,\mathrm{d}x}{x^2+n^2} = \int_{-A/n}^{B/n} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = [\operatorname{Arc}\tan u]_{-A/n}^{B/n} \to \pi$ quand $A, B \to \infty$ à n fixé, tandis que l'intégrale de la limite pour $n \to \infty$ donne 0. Les fonctions $f_n(x)$ ne convergent pas uniformément vers leur limite nulle.

2. Fonctions gaussiennes considérées au paragraphe 3.2 : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Leur intégrale de $-\infty$ à ∞ vaut 1. Quand $\sigma \to 0$, elles tendent pour tout $x \neq 0$ vers 0, et vers ∞ en $x = 0$. La définition de l'intégrale d'une telle "fonction" limite nécessite une discussion plus approfondie, qu'on esquissera au chapitre 3.

Dans le même ordre d'idées, peut-on dériver sous le signe d'intégration ? Autrement dit, a-t-on

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \int_a^b f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x\ . \tag{3.12}$$

On démontre que si $f(x, \lambda)$ et $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)$ sont continues pour $x \in [a, b]$ et $\lambda \in I$ un intervalle réel, alors la fonction $F(\lambda)$ est dérivable pour tout $\lambda \in I$ et on peut dériver sous le signe d'intégration. Si l'intégrale en t est impropre, sur l'intervalle $[a, b[$, b éventuellement infini, il faut imposer les conditions supplémentaires

que $\int_a^b f(x,\lambda)\,\mathrm{d}x$ converge et que l'intégrale de $\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda)\,\mathrm{d}x$ soit uniformément convergente. Exemples : voir TD.

4. Séries

Étant donnée une suite (u_n) de nombres réels, on définit la *somme partielle*

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \ , \tag{4.1}$$

ce qui définit une nouvelle suite (s_n). La question de la convergence de la suite (s_n), (on dit aussi la convergence de la série $\sum u_n$), se pose alors. Si cette série converge, on note $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_1^\infty u_n$ sa somme.

Exemple de référence, la série géométrique.
La série de terme général $u_n = a^n$ a des sommes partielles données par

$$s_n = a + a^2 + \cdots a^n = a\frac{1-a^n}{1-a} \ . \tag{4.2}$$

Il est clair que s_n a une limite $a/(1-a)$ si $|a| < 1$, (puisqu'alors, $a^n \to 0$), qu'elle diverge si $|a| > 1$ (puisque $|a|^n \to \infty$), et aussi, en examinant les deux cas $a = \pm 1$, qu'elle diverge encore si $|a| = 1$.

4.1. Généralités

Opérations algébriques et convergence
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, $\sum(u_n + v_n)$ est convergente. Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Ordre des termes, etc : en général, si on change l'ordre des termes ou qu'on effectue des resommations partielles, on ne peut plus rien affirmer. Par exemple, la série de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente, puisque les sommes partielles oscillent entre $s_{2n-1} = -1$ et $s_{2n} = 0$, tandis que la série de terme général $v_n = u_{2n-1} + u_{2n} = 0$ est évidemment convergente ! Par contre, si on ne modifie ou permute ou resomme qu'un nombre fini de termes, on ne change pas la nature (convergente ou divergente) de la série.

On a vu qu'une suite de réels est convergente ssi elle est de Cauchy (cf (2.3)). Appliqué à une série, ce critère permet de dire que $\sum u_n$ est convergente ssi $\lim_{m,n\to\infty} |\sum_m^n u_k| = 0$. En particulier, si $\sum u_n$ est convergente, nécessairement $u_n \to 0$, ou inversement, si $\lim u_n \neq 0$, la série $\sum u_n$ est divergente.
Exemple Soit $u_n = \sin n$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

> **Attention** : $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$ est une condition nécessaire mais **pas suffisante** de convergence de $\sum u_n$!!

Nous allons en effet rencontrer de nombreux exemples de séries dont le terme général u_n tend vers zéro quand $n \to \infty$, mais pas assez vite pour assurer la convergence de la série $\sum u_n$. Exemple : la *série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$, dont on va montrer qu'elle diverge.

Convergence absolue Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.

$$\sum_n |u_n| \quad \text{convergente} \qquad \Longrightarrow \sum_n u_n \quad \text{convergente} \tag{4.3}$$

mais **la réciproque est fausse**.
Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est finie (et vaut $\ln 2$, voir TD), tandis que la « série harmonique » $\sum 1/n$ est divergente, comme on vient de l'annoncer. Une telle série convergente sans être absolument convergente est dite *semi-convergente*.

On peut à nouveau étendre les considérations précédentes à des séries de nombres complexes $u_n \in \mathbb{C}$, $u_n = v_n + iw_n$. Cela revient à considérer simultanément les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

4.2. Séries à termes positifs

On suppose dans ce paragraphe que $u_n \geq 0$ (éventuellement à partir d'un ordre fini, ce qui ne modifie rien à la convergence).
Convergence
La suite $s_n = \sum_1^n u_k$ (somme partielle) est croissante donc on a le

Théorème. *s_n converge ssi s_n est majoré. Inversement s_n diverge ssi $s_n \to \infty$.*

Puisque nous avons à notre disposition des critères de convergence d'intégrales, il peut être utile de comparer séries et intégrales.

Théorème. *Si $u_n = f(n)$ où f est positive, décroissante et continue à partir d'une certaine valeur, alors $\sum f(n)$ et $\int^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.*

Preuve Soit $p \geq 1$ la plus petite valeur entière à partir de laquelle la fonction décroît. On peut encadrer $f(p+n) < f(x) < f(p+n-1)$ pour $x \in [p+n-1, p+n]$, donc $f(p+n) < \int_{p+n-1}^{p+n} f(x)\,\mathrm{d}x < f(p+n-1)$ et en sommant $s_{n+p} - s_p < \int_p^{p+n} < s_{n+p-1} - s_{p-1}$. La convergence de l'intégrale et celle de la série vont de pair. Voir figure 4.

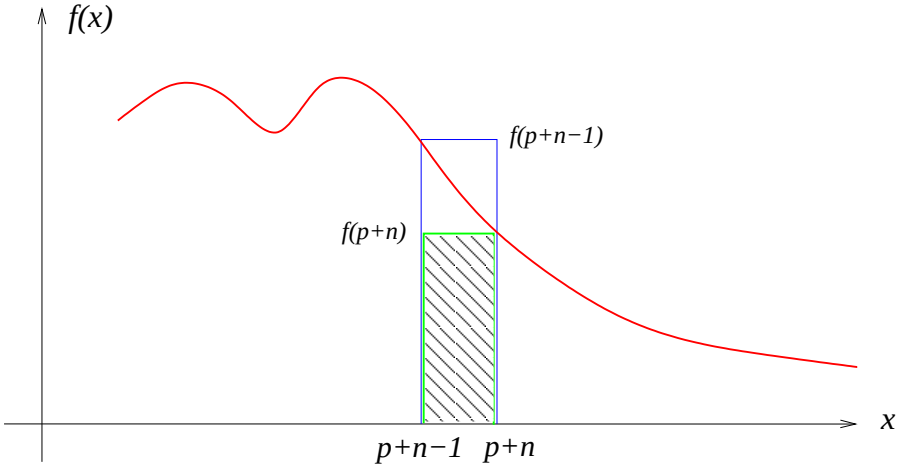


Fig. 4: Interprétation géométrique du théorème de comparaison entre série et intégrale : L'aire sous la courbe entre les abscisses $p+n-1$ et $p+n$ est encadrée par celles des deux rectangles de largeur 1 et de hauteurs respectives $f(p+n-1)$ et $f(p+n)$. La série et l'intégrale sont de même nature, convergente ou divergente.

Exemples

* les séries de Riemann $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ sont convergentes pour $\alpha > 1$, divergentes pour $\alpha \leq 1$.
* il en est de même des séries $u_n = \frac{1}{n \ln^\alpha n}$. Pourquoi ?

Comparaison de séries à termes positifs

(a) Si à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$,
$\sum v_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge;
$\sum u_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge;

(b) Si $0 < a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b < \infty$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature;

(c) Si $\frac{u_n}{v_n} \to c$, c'est-à-dire $u_n \sim cv_n$ avec c fini et $\neq 0$: $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

(d) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$, $\sum u_n$ converge; si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, elle diverge.

Les preuves s'établissent par des majorations/minorations. Par exemple, la règle (d) : dans le premier cas, $u_{n+p} < k^n u_p$, majoration par une série géométrique convergente; dans le deuxième cas, minoration $u_{n+p} \geq u_n$, le terme générique de la série ne tend pas vers zéro, divergence.

Exemples

- on prend comme série de référence $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$: Si $0 < a \leq n^\alpha u_n \leq b < \infty$, ou si $\lim n^\alpha u_n = c \neq 0$, $\sum u_n$ est convergente ou divergente selon que $\alpha > 1$ ou ≤ 1.

Si $\lim n^\alpha u_n = 0$, si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge, mais si $\alpha \leq 1$ on ne peut pas conclure. De même si $\lim n^\alpha u_n = \infty$, si $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge, mais si $\alpha > 1$ on ne peut pas conclure.

- (règle de Cauchy) : on prend comme série de référence $v_n = a^n$ qui converge si $a < 1$, diverge si $a \geq 1$. Donc
  - si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$, la série $\sum u_n$ est divergente;
  - si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq k < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente;
  - Si $\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$, $\ell > 1$: $\sum u_n$ divergente; $\ell < 1$: $\sum u_n$ convergente.

Si $\ell = 1$, il faut distinguer : si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 1+$, divergence; si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 1$ par valeurs oscillantes, il existe un nombre infini de $u_k > \ell^k$, divergence; si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 1-$, on ne peut pas conclure.

Exemples d'application de la règle de Cauchy :

1. $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$, $u_n^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n}$ qui tend vers e^{-a} (cf Exemple 4 de la section 2.4). Si $a > 0$ convergence, si $a \leq 0$ divergence (puisque u_n ne tend pas vers zéro pour $a = 0$).
2. $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec a un réel donné. Pour m un entier supérieur à $|a|$, on a $|u_n| = \frac{1}{m!}\frac{|a|^n}{(m+1)\cdots n} < \frac{m^m}{m!}\frac{|a|^n}{m^n}$ dès que $n > m$, d'où $u_n^{1/n} < \frac{|a|}{m}(\frac{m^m}{m!})^{1/n}$ qui tend vers $|a|/m < 1$. Il y a donc convergence quel que soit a. Montrer qu'en outre $\ell = \lim (u_n)^{\frac{1}{n}} = 0$. (Cette série a pour somme le nombre e^a, cf le développement de la fonction e^x).

Il existe d'autres "règles", par exemple celle de d'Alembert, qui compare aussi u_n à la série $v_n = a^n$ mais en calculant les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, divergence, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$, convergence... Répéter la discussion de la règle de Cauchy dans ce cas ($\lim u_{n+1}/u_n = \ell$, si $\ell > 1$ ou $\ell < 1$ ou $\ell = 1_{\pm}$, ibid. Si $\ell = 1$ par valeurs osc, il est plus difficile de conclure). C'est un critère moins puissant que celui de Cauchy en ce sens que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \Rightarrow (u_n)^{\frac{1}{n}} \to \ell$. En effet $\forall \epsilon\ \exists N\ \forall n \geq N\ : (\ell - \epsilon)u_n < u_{n+1} < (\ell + \epsilon)u_n$ donc $u_N(\ell - \epsilon)^p < u_{N+p} < (\ell + \epsilon)^p u_N$ soit encore $u_N{}^{\frac{1}{N+p}}(\ell - \epsilon)^{\frac{p}{N+p}} < u_{N+p}^{\frac{1}{N+p}} < u_N{}^{\frac{1}{N+p}}(\ell + \epsilon)^{\frac{p}{N+p}}$. Quand $p \to \infty$, les membres de gauche et de droite de cette inégalité tendent tous deux vers ℓ donc aussi $u_n^{\frac{1}{n}}$.

Récapitulation : pour décider de la convergence/divergence d'une série **à termes positifs**

- vérifier que $u_n \to 0$; sinon, divergence !
- chercher un équivalent plus simple de u_n;
- majoration par une série convergente ou minoration par une série divergente;
- comparaison avec une série connue; critères $n^{-\alpha}$, a^n ...

Une fois la convergence établie, reste à déterminer la somme...

4.3. Séries absolument convergentes

Théorème. *Si $\sum u_n$ est absolument convergente, toute série $\sum v_n$ obtenue à partir de $\sum u_n$ en changeant l'ordre des termes est également absolument convergente et a la même somme.*

Preuve : Soit s_n la somme partielle des u, et soit p assez grand pour que $s'_p := \sum_1^p v_k$ contienne tous les termes de s_n. On a $|s'_p - s_n| \leq \sum_{k>n} |u_k|$ où dans la somme du membre

de droite, tous les k sont supérieurs à n. Cette somme tend vers zéro quand $n \to \infty$, par la propriété de Cauchy appliquée à la série convergente des $|u_m|$..

Produit de séries absolument convergentes. On démontre que si $u_n, v_n \geq 0$, et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument vers des limites s et s', la série de terme général $w_n = \sum_k u_{n-k} v_k = u_0 v_n + \cdots + u_n v_0$ converge absolument vers la limite ss'.

4.4. Séries NON absolument convergentes

• Séries alternées

Une série est *alternée* si son terme général a un signe qui change selon que n est pair ou impair : $u_n = (-1)^n |u_n|$ et $v_n = (-1)^{n+1} |v_n|$ sont des séries alternées.

Théorème ("lemme d'Abel"). *Si les $|u_n|$ tendent vers 0 en décroissant, la série alternée $\sum (-1)^n |u_n|$ est convergente. En outre, si s est sa somme, $|s - s_n| \leq |u_{n+1}|$.*

En effet les sommes partielles s_{2n} et s_{2n+1} sont "adjacentes" : $s_{2n-1} \leq s_{2n+1} < s_{2n} \leq s_{2n-2}$, et comme $u_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1} \to 0$, elles ont la même limite s et $|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}|$, cette dernière inégalité exprimant que l'erreur faite en tronquant la somme à l'ordre n est inférieure au premier terme négligé (u_{n+1}).

Exemples. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sont convergentes (mais pas absolument convergentes !).

Le théorème précédent (lemme d'Abel) admet une extension à des séries à signes quelconques. Théorème d'Abel : $b_n \geq 0$ décroissante vers 0, a_n de signe qcq, telle que $|a_1 + \cdots + a_n| < A$ pour tout n. La série $u_n = a_n b_n$ est convergente. Preuve : Soit $A_n = a_0 + \cdots + a_n$, $\sum_0^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_1^n b_k (A_k - A_{k-1}) = A_n b_n + \sum_0^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$. Par l'hypothèse, $|A_k (b_k - b_{k+1})| < A(b_k - b_{k+1})$, donc la série $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ est absolument convergente, et $A_n b_n$ tend vers zéro. Donc la série $\sum a_k b_k$ converge. On verra une application aux séries de Fourier au chapitre 3.

• *Dangers des séries à signes quelconques*

Attention !! Il est en général incorrect de modifier l'ordre des termes d'une série non absolument convergente. Cela risque de modifier non seulement la somme mais même la nature de la série. Exemple : soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, convergente comme on vient de le voir mais pas absolument convergente. Réarrangeons les termes selon l'ordre $\cdots u_{4p-3}, u_{4p-1}, u_{2p}, \cdots$. Mais la somme $u_{4p-3} + u_{4p-1} + u_{2p} \sim \frac{2}{\sqrt{4p}} - \frac{1}{\sqrt{2p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ n'alterne plus. La série modifiée diverge !

Il est également incorrect de remplacer le terme général de la série par un terme équivalent. Si $u_n \sim v_n$ et que $|v_n|$ ne converge pas, $\sum u_n$ **n'est pas nécessairement de même nature** que $\sum v_n$!! Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \cos n\pi}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $u_n \sim v_n$; v_n est

convergente cf exemple ci-dessus, mais $u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n}-1} \sim \frac{-1}{n}$ qui diverge, donc la suite $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ ne peut être de Cauchy et la série $\sum u_n$ diverge.

• *Somme d'une série convergente*

Notons pour finir que prouver la convergence d'une série est une chose, déterminer quelle est sa somme en est une autre. Il s'agit souvent d'une tâche ardue. On verra au chapitre 3 et en TD des exemples de séries convergeant vers des valeurs comme $\pi^2/6$, $\pi^2/4$ etc. Voilà un autre exemple de convergence non triviale : la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \tag{4.4}$$

converge (démonstration facile !) très vite (comme $1/(16^k k^2)$) vers $\ldots \pi$. Vérifiez-le avec votre calculette ! La démonstration est donnée à la fin du Chap. 2.

4.5. Séries de fonctions, séries entières et leurs propriétés.

Les considérations concernant les suites de fonctions s'appliquent aux séries de fonctions $\sum f_n(x)$. On définit pour elles les notions de convergence simple, de convergence absolue et de convergence uniforme de la même façon qu'on l'a fait pour les suites de fonctions, en les appliquant aux sommes partielles $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Supposons qu'une série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément vers sa somme $S(x)$. On montre alors que si les $f_n(x)$ sont continues, leur somme $S(x)$ l'est aussi. Si les $f_n(x)$ sont intégrables, leur somme l'est aussi et on peut «intégrer terme à terme»

$$\int_a^b \sum f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{4.5}$$

Si les $f_n(x)$ sont dérivables *et que la série* $\sum f_n'(x)$ *converge aussi uniformément vers sa somme*, alors on peut «dériver terme à terme»

$$\frac{d}{dx} \sum f_n(x) = \sum \frac{d}{dx} f_n(x)\ . \tag{4.6}$$

Nous verrons ces théorèmes à l'œuvre au chapitre 3, dans l'étude des séries de Fourier.

On va se restreindre dans la fin de ce chapitre aux **séries entières**, de la forme $f_n(x) = a_n x^n$. D'autres séries de fonctions de grande importance, les séries de Fourier, seront introduites et étudiées au chapitre suivant.

Supposons que la suite $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ ait une limite ℓ. Alors on démontre le théorème fondamental

Théorème. *La série* $\sum a_n x^n$ *converge absolument pour* $|x| < R = \frac{1}{\ell}$ *et elle diverge pour* $|x| > R$*; pour* $|x| = R$*, on ne peut rien dire a priori. Si* $\ell = 0$*, la série est convergente pour tout* x*. Si* $\ell = \infty$*, elle ne converge que pour* $x = 0$*. Elle converge uniformément dans tout intervalle fermé* $|x| \leq r < R$*.*

R est le **rayon de convergence** de la série entière, le mot "rayon" se référant à l'extension au plan complexe de ce théorème.
Exemples.

1. On a vu ci-dessus $\frac{x^n}{n!}$, convergente dans tout réel x, puisque $\ell = 0$ (cf Exemple 2 au §4.2).
2. A l'inverse, $x^n n!$ est telle que $\ell = \infty$, donc la série ne converge qu'en 0.
3. $\left(\frac{x}{r}\right)^n$, $r \neq 0$. On a $\ell = 1/r$, donc un rayon de convergence $R = r$. Pour $|x| = r$, la série ne converge en aucun point (puisque le terme d'ordre n ne s'annule pas).
4. $\frac{x^n}{n}$, $R = 1$. Dans ce cas, on connaît déjà la nature de la série quand $|x| = R$. En $x = 1$ la série diverge, en $x = -1$ elle converge (cf séries alternées).
5. $\frac{x^n}{n^2}$, $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, convergence absolue.
6. nx^n, $R = 1$, la série diverge pour $x = \pm 1$.

Il ressort de cette série d'exemples que le comportement sur le bord de l'intervalle de convergence est une question délicate à étudier avec soin.

D'après les propriétés découlant de la convergence uniforme, pour x réel et $r < R$, (inégalité stricte !), sur le segment $-r \leq x \leq r$, la somme $S(x)$ de la série $\sum a_n x^n$ est continue. En intégrant terme à terme la série $\sum a_n x^n$, la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ converge pour $|x| < R$ vers l'intégrale $\int_0^x S(x')\,\mathrm{d}x'$. Enfin la série dérivée terme à terme, $\sum n a_n x^{n-1}$, est convergente pour $|x| < R$ et a pour somme $S'(x)$.

Exemple. En intégrant terme à terme entre 0 et x la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ qui converge vers $1/(1+x)$ pour $x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{4.7}$$

qui converge pour $|x| < 1$. Pour $x = 1$, la série converge encore, voir TD. On a donc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$.

On peut donc dériver terme à terme une série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence (pour x réel, $|x| < R$), puis dériver à nouveau, etc. Toutes les séries entières obtenues sont absolument convergentes et continues à l'intérieur de l'intervalle $|x| < R$. La somme de la série $S(x) = \sum a_n x^n$ est donc indéfiniment dérivable et ses dérivées successives en $x = 0$ sont données par $S^{(n)}(0) = n! a_n$, soit $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. Pour $x \in]-R, R[$, la série entière $S(x) = \sum a_n x^n$ s'identifie donc au développement de Taylor(-Maclaurin) de $S(x)$.

$$S(x) = S(0) + xS'(0) + \frac{x^2}{2} S''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} S^{(n)}(0) + \cdots \tag{4.8}$$

Une fonction *analytique* est une fonction développable en série de Taylor-Maclaurin, c'est-à-dire telle qu'on peut écrire (4.8) avec un membre de droite convergent. On vient de démontrer que, dans l'intérieur de son intervalle de convergence, toute série entière a pour somme une fonction analytique.

• *Séries de Taylor.* Soit f une fonction de la variable réelle x, indéfiniment dérivable au voisinage de 0. On peut donc écrire son développement de Taylor-Maclaurin

$$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots$$

Le double problème est le suivant : (1) cette série entière converge-t-elle ? (2) si oui, sa somme est-elle $f(x)$? En d'autres termes, à quelles conditions la fonction f est-elle analytique ?

Nous ne poursuivrons pas plus loin la discussion de ce problème important, qui prend tout son sens avec l'étude du comportement de la série et des singularités de la fonction pour des valeurs complexes de la variable x.

Insistons seulement sur le caractère nécessaire de l'existence (et donc de la continuité) de toutes les dérivées de f en 0 ("f est de classe C^∞"). Par exemple, les fonctions $\sqrt{x}$, ou $|x|$, ou $x^3|x|$, ne *peuvent*

pas être analytiques ! En étudiant le reste de la formule de Taylor, on peut aussi trouver des conditions suffisantes d'analyticité.

Les fonctions élémentaires précédemment rencontrées sont analytiques dans l'intérieur de leur disque de convergence. C'est le cas de e^x, $\sin x$ et $\cos x$, de rayon de convergence $R = \infty$; de $\ln(1 \pm x)$, $R = 1$ comme on a déjà vu; de $\mathrm{Arc}\tan x$, $R = 1$; etc.

Inversement, le développement de Taylor de f peut avoir un rayon de convergence non nul mais ne pas représenter la fonction f. Considérons la fonction définie par $f(0) = 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$. Comme $e^{-\frac{1}{x^2}}$ tend vers zéro plus vite que toute puissance de x, c'est-à-dire $\lim \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} = 0$ pour tout p, la fonction f est continue et indéfiniment dérivable en 0 et toutes ses dérivées y sont nulles ! Il est clair que son développement de Taylor ($\sum 0.x^n$) est convergent vers 0 pour toute valeur de x, mais que ce développement ne converge nulle part vers $f(x)$ sauf en $x = 0$. Cela est dû au comportement très singulier de la fonction en 0. Pour le voir, effectuons une petite incursion dans le plan complexe : pour $x = it$, la fonction vaut $e^{\frac{1}{t^2}}$ qui explose au voisinage de 0 ! On parle de singularité essentielle ...

Chapitre 2. Équations différentielles

1. Généralités sur les équations différentielles

1.1. Définitions et exemples

On appelle *équation différentielle d'ordre n* une équation reliant une fonction inconnue $y(x)$ et les n premières de ses dérivées, avec éventuellement une dépendance explicite dans la variable x, donc de la forme générale

$$F(y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}; x) = 0\,. \tag{1.1}$$

Une *solution* de cette équation est une fonction $y(x)$ telle que (1.1) soit satisfaite pour tout x (dans un ensemble de définition donné). Le problème consiste à trouver *la* ou *les* solutions d'une telle équation, éventuellement complétée par des informations supplémentaires, comme on va voir.

Un cas particulier de la forme (1.1) est celui qui s'écrit

$$y^{(n)} = f(y, y', \cdots, y^{(n-1)}; x)\ , \tag{1.2}$$

c'est-à-dire où $y^{(n)}$ a été explicitement exprimée en fonction de y et de ses $n-1$ premières dérivées. La forme (1.2), bien que moins générale, facilite souvent la discussion de l'existence des solutions et leur construction.

Exemples d'équations d'ordre 1 :

$y'^2 + \omega^2 y^2 = C$: oscillateur mécanique ou électrique non amorti, non excité, cf Chap. 4 ;

$\frac{1}{2}y'^2 - \omega^2 \cos y = C$: équation du pendule simple ;

$y' + Ay = B$: chute d'un corps pesant freiné par une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse, (cf TD3 et Chapitre 4), décharge d'un condensateur dans une résistance, désintégration d'un isotope (Chap. 6), etc ;

$y' + Ay = By^2$: équation d'évolution de populations (biologiques, chimiques, etc), cf chapitres 5 et 6 ;

$y' + y^2 = x$: équation de Riccati ;

$y' - y^2 = C$: équation décrivant par exemple la chute d'un corps freiné par une force quadratique dans la vitesse, etc

Équations d'ordre 2 :

$y'' + Ay' + ky = \sin \omega x$: oscillateur harmonique amorti et excité, (Chap. 4)

$y'' + k^2 y = 0$: cordes vibrantes, cf TD 5 et ci-dessous ;

$y'' = xy$: équation d'Airy, qui intervient en optique, en mécanique quantique...

etc, etc.

Comme l'indiquent les commentaires en regard des équations, on rencontre très fréquemment de telles équations en physique et plusieurs des exemples ci-dessus interviennent effectivement dans des problèmes simples que nous retrouverons plus loin dans le cours ou les TD...

Ces exemples montrent aussi que la nature de la fonction inconnue et celle de la variable peuvent changer d'un problème à l'autre : x peut représenter la variable de temps, c'est le cas dans les équations dynamiques, (telle l'équation du mouvement), où l'équation régit la variation temporelle d'une variable dynamique y, position, température, pression, courant ou charge électrique, nombre de particules, etc. Mais x peut aussi représenter une variable spatiale. C'est par exemple le cas des ondes stationnaires dans une corde vibrante : si y désigne le déplacement transverse d'une corde tendue entre deux points d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, et vibrant dans le mode de longueur d'onde λ, $y(x)$ obéit à l'équation $y'' + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y = 0$ pour $0 \leq x \leq L$. D'autres exemples seront étudiés en TD (équation barométrique, onde thermique, ...).

1.2. Systèmes d'équations différentielles

Plutôt qu'une équation différentielle sur une fonction inconnue, on peut aussi avoir à traiter des équations différentielles couplées, formant un *système d'équations différentielles.* C'est par exemple le cas pour

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n; x) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n; x) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(y_1, y_2, \cdots, y_n; x) \ , \end{aligned} \tag{1.3}$$

qui est un système de n équations du premier ordre.

Il est bon d'observer que toute équation différentielle du n-ième ordre de la forme (1.2) peut se mettre sous la forme d'un système de n équations du premier ordre. Il suffit de définir $y_1 := y,\ y_2 := y',\ \cdots, y_n := y^{(n-1)}$. On vérifie aisément (par récurrence par exemple) que $y_1' = y_2\,,\ y_2' = y_3\,,\ \cdots,\ y_{n-1}' = y_n\,,\ y_n' = f(y_1, y_2, \cdots, y_n; x)$, qui est bien un système de la forme (1.3).

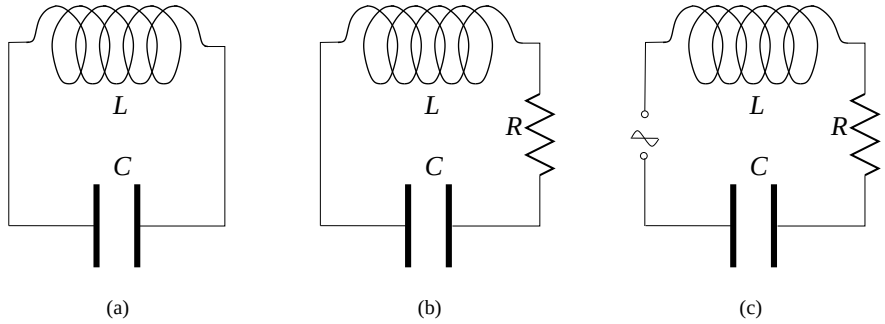


Fig. 1: Circuits LC et LRC, isolés ou couplés à une tension extérieure.

Un exemple familier qui conduit à un système d'équations différentielles couplées est fourni par le circuit électrique LC constitué d'une bobine dotée d'une inductance L et d'un condensateur de capacité C (figure 1(a)). Rappelons brièvement l'analyse de ce système. La tension aux bornes du condensateur portant une charge Q est $V_C = \frac{Q}{C}$ tandis que celle aux bornes de la bobine est $V_L = -L\frac{dI}{dt}$, où $I = -\frac{dQ}{dt}$ est le courant de décharge du condensateur. En écrivant que $V_C + V_L = 0$, on trouve le système différentiel

$$\begin{aligned} -L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \\ I + \frac{dQ}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

et en "éliminant" I entre ces deux équations, on a pour Q une équation du second ordre :

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{1.5}$$

Quelle équation obtient-on en éliminant Q dans (1.5) ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ? Quelle équation décrit la situation de la figure 1(b) où la bobine a aussi une résistance interne, ou celle de la figure 1(c), où le circuit est couplé à une tension extérieure V_e ?

2. Conditions initiales. Théorème de Cauchy. Conditions aux limites

2.1. Existence et unicité des solutions

Considérons un problème de mécanique élémentaire, celui du mouvement d'un point matériel soumis à la seule gravité. Sa coordonnée $z(t)$ verticale le long d'un axe orienté vers le haut satisfait donc l'équation

$$\ddot{z} = -g \ , \tag{2.1}$$

comme conséquence du principe fondamental de la dynamique. Cette équation différentielle se résout par deux *quadratures* (c'est-à-dire deux intégrations) successives ; on a d'abord

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -g\int_0^t dt \Longrightarrow \dot{z}(t) = -gt + v_0$$

où $v_0 := \dot{z}(0)$ est la vitesse à l'instant $t = 0$. Puis une nouvelle quadrature fournit

$$z(t) - z(0) = \int_0^t dt(-gt + v_0) \Longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \tag{2.2}$$

où $z_0 := z(0)$ est la position à l'instant $t = 0$. On trouve donc que la solution est complètement déterminée, à la donnée de deux constantes z_0 et v_0 près. Ou encore, la donnée de ces deux *conditions initiales* (au temps $t = 0$) détermine complètement et uniquement la solution $z(t)$. Bien sûr, plutôt que le temps $t = 0$, on aurait pu choisir des conditions initiales à n'importe quel temps donné.

Ce principe que la solution d'une équation différentielle **existe et est unique** si on se donne des conditions initiales appropriées est en fait très général. Pour une large classe d'équations du type (1.2), on peut montrer que la donnée de la valeur en un point x_0 de y et de ses $n-1$ premières dérivées, $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, détermine une et une seule solution, pourvu que la fonction f apparaissant au second membre soit une fonction suffisamment régulière de ses n arguments ; autrement dit que $f(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}; x)$ soit suffisamment régulière en $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, x$ dans un intervalle contenant le point $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, x_0)$. C'est le théorème de Cauchy, et les valeurs des $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0)$ sont appelées *conditions de Cauchy* (ou conditions initiales). Nous ne préciserons pas ici les conditions exactes de ce théorème. Dans tous les exemples rencontrés dans ce cours, ces conditions seront supposées satisfaites, et moyennant la donnée des conditions initiales, la solution existera donc et sera unique.

Cette propriété n'a rien d'évident et on peut construire des exemples d'équations dont la solution n'est pas unique, à conditions initiales fixées. Considérons ainsi l'équation

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \ ,$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$. On vérifie immédiatement qu'elle admet *deux* solutions, $y(x) = 0$ et $y(x) = x^3$. C'est la singularité de la fonction $y^{\frac{2}{3}}$ (sa non-dérivabilité par rapport à y en $y = 0$) qui est responsable de cette non-unicité.

Noter que ce théorème d'existence et d'unicité ne nous donne pas d'information sur la solution, ni sur la méthode pour la déterminer ! De fait, la résolution effective d'une équation différentielle est en général un problème difficile, qui n'admet que rarement une solution explicite en termes de "fonctions simples". Il faut bien souvent recourir à des approximations numériques ou analytiques (développement en approximations successives). Dans la suite, nous allons nous borner à considérer des cas suffisamment simples pour être complètement solubles et en même temps suffisamment intéressants pour la physique.

2.2. Conditions initiales et conditions aux bords

Dans les exemples précédents, on a supposé donnée(s) une ou des condition(s) initiale(s) sur la fonction cherchée $y(x)$ pour une valeur x_0 donnée. En physique, c'est typiquement le type de données dont on dispose dans un problème de dynamique : par exemple la vitesse et le position du mobile, (deux vecteurs à 3 dimensions s'il s'agit d'un point matériel dans l'espace ordinaire), sont connues à l'"instant initial" ; ou encore, la charge portée par le condensateur et l'intensité circulant dans un circuit LRC sont connues au temps 0, etc. Mais il existe d'autres types de problèmes où la fonction cherchée est contrainte pour deux valeurs différentes de la variable x.

Exemples

Reprenons l'étude du point matériel soumis à la gravité et obéissant à (2.1). Quelle est sa trajectoire passant par l'origine $z_0 = 0$ au temps $t_0 = 0$ et par la position z_1 au temps t_1 ? Réponse : la loi du mouvement (2.2) dépend des deux constantes v_0 et z_0 qui sont déterminées par les deux conditions ci-dessus : $z_0 = 0$ et v_0 solution de $-\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 = z_1$. La résolution de cette dernière équation nous indique avec quelle vitesse initiale v_0 le corps doit être mis en mouvement à l'instant $t = 0$ pour atteindre le point z_1 à l'instant requis. La connaissance de z_0 et v_0 détermine complètement la solution. La donnée des *conditions aux limites* $z(0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$ a donc suffi à déterminer de façon unique la solution de l'équation différentielle.

Il faut noter toutefois que la donnée de conditions aux limites ne conduit pas toujours à un problème bien posé, admettant une solution et une seule. Examinons par exemple le cas de la corde vibrante obéissant à $y'' + k^2 y = 0$. La corde étant supposée attachée à ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = l$, son déplacement transverse s'annule à ces deux points. On cherche donc des solutions de l'équation différentielle satisfaisant $y(0) = y(l) = 0$. Puisque la solution la plus générale de l'équation s'écrit

$$y(x) = A\cos kx + B\sin kx \ ,$$

(comme on sait bien et comme on va le revoir plus bas), les deux conditions aux limites imposent

$$y(0) = 0 \implies A = 0 \quad ; \quad y(l) = B\sin kl = 0 \ .$$

Si on écarte la solution triviale $B = 0$ où la corde reste au repos, la deuxième condition impose donc que $kl = n\pi$, ce qui contraint un coefficient de l'équation différentielle, mais ne détermine pas le coefficient arbitraire restant B ! Physiquement, le "mode" dans lequel

la corde peut vibrer (la longueur d'onde de ses oscillations) n'est pas arbitraire, elle est (partiellement) déterminée par la géométrie (la longueur de la corde). Dans ce cas, la donnée de deux conditions aux bords ne suffit pas à déterminer uniquement la solution mais a plutôt pour effet de restreindre les paramètres de l'équation pour qu'elle admette une solution satisfaisant aux conditions requises. Donc ici, le problème n'est bien déterminé qu'avec la donnée d'une condition supplémentaire, par exemple, l'amplitude maximale de la corde, qui fixe le coefficient B.

Dans une autre classe de problèmes physiques, les conditions aux limites sont remplacées par des *conditions asymptotiques*. C'est le cas de l'équation

$$y'' = k^2 y$$

dont la solution la plus générale, comme on va le revoir plus bas, est

$$y(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \ .$$

Supposons qu'on s'intéresse au comportement à grand $x > 0$ de $y(x)$ et que telle ou telle contrainte physique (ou tout simplement le bon sens !) impose à y de rester borné (c'est-à-dire de ne pas tendre vers l'infini) quand x croît. (Nous rencontrerons cette situation dans l'étude de la propagation de la chaleur, cf TD 5.) Cette condition asymptotique implique que $A = 0$ et la solution est donc de la forme $y(x) = Be^{-kx}$, ce qu'on peut encore récrire $y(x) = y_0 e^{-kx}$ où y_0 est la valeur en $x = 0$. Dans ce cas, la condition asymptotique plus la condition initiale ou au bord $y(0) = y_0$ détermine complètement et uniquement la solution.

3. Équations différentielles linéaires

3.1. Propriétés générales

Nous allons nous intéresser tout spécialement à des équations différentielles du n-ième ordre du type suivant

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) y^{(k)}(x) = \phi(x) \ , \tag{3.1}$$

ce que nous récrivons encore sous la forme

$$\mathcal{L}(y(x)) := \left(\sum_{k=0}^{n} C_k(x) \frac{d^k}{d\,x^k} \right) y(x) = \phi(x) \tag{3.2}$$

où $\phi(x)$ est une fonction donnée, les $C_k(x)$ sont des fonctions données de x, et on cherche à déterminer la fonction inconnue $y(x)$, sujette à n conditions initiales, à $x = 0$ par exemple. La fonction ϕ représente la "source" (une action extérieure), qui "excite" le système représenté par y, et on cherche à calculer la "réponse" y à ϕ.

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus a la propriété fondamentale d'être *linéaire* en y : y ou ses dérivées n'y apparaît qu'à la puissance 1. C'est ce que nous avons souligné par la notation $\mathcal{L}$ pour l'*opérateur différentiel* apparaissant au membre de gauche. La propriété de linéarité exprime que pour toute paire de fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$ et pour tous coefficients réels λ_1 et λ_2 (constants, indépendants de x)

$$\mathcal{L}(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) = \lambda_1 \mathcal{L}(y_1(x)) + \lambda_2 \mathcal{L}(y_2(x)) \ . \tag{3.3}$$

Cela a pour conséquence que si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de (3.2) respectivement pour deux "sources" $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$, c'est-à-dire $\mathcal{L}y_1 = \phi_1$, $\mathcal{L}y_2 = \phi_2$, alors, quelles que soient les *constantes* λ_1 et λ_2, $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ est solution de l'équation pour la source $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$, autrement dit $\mathcal{L}(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) = \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x)$. Nous utiliserons ce principe dans la résolution d'équations par décomposition en modes de Fourier, au chapitre 3.

Avant d'aller plus loin, il convient de dire que les *systèmes linéaires*, c'est-à-dire régis par des équations différentielles linéaires jouent un rôle fondamental en physique et dans toutes les sciences exactes. Nous leur consacrerons le chapitre 4 de ce cours.

3.2. Équations linéaires homogènes, équations linéaires inhomogènes.

On appelle équation différentielle linéaire *homogène* une équation du type (3.2) dans laquelle $\phi(x) = 0$

$$\textbf{équation homogène} \qquad \mathcal{L}(y(x)) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_k(x) \frac{d^k}{d\,x^k} \right) y(x) = 0 \ . \tag{3.4}$$

Inversement, on appelle équation différentielle linéaire *inhomogène*, ou *avec second membre*, une équation du type (3.2) dans laquelle $\phi(x) \neq 0$.

Indépendance linéaire de n fonctions

La propriété de linéarité implique qu'étant données deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation homogène, une combinaison linéaire $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ à coefficients constants est aussi solution. Bien sûr, choisir y_2 proportionnelle à y_1 est possible mais n'apporte aucune information nouvelle. Pour se prémunir contre cela, on dira que les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont *linéairement dépendantes* si on peut trouver deux constantes λ_1 et λ_2 non toutes deux nulles telles que, **pour tout** x, on ait $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$. Si cette condition est réalisée, avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on a

$$\forall x \qquad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_2(x) \tag{3.5}$$

et y_1 et y_2 sont proportionnelles. Inversement on dit que deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont *linéairement indépendantes* si la condition $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ est impossible à réaliser avec deux constantes λ_1 et λ_2 non nulles. Plus généralement, on dira que n fonctions $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ sont linéairement indépendantes si on ne peut pas trouver n constantes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non toutes nulles telles que $\forall x$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x) = 0$. Autrement dit,

$$\text{Si } y_i(x) \text{ linéairement indépendantes,} \quad \forall x \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\,. \tag{3.6}$$

(Montrer que dans le cas contraire, on pourrait toujours exprimer l'une de ces fonctions comme combinaison linéaire des $n-1$ autres.) Par exemple, on démontre que les fonctions $\cos \omega_i x$ et $\sin \omega_i x$, pour tout ensemble de n nombres positifs ω_i distincts, sont linéairement indépendantes. Ou encore, les fonctions $\exp(k_i x)$, pour tout ensemble de n nombres k_i réels ou complexes distincts, sont linéairement indépendantes.

Exercices : (1) en appliquant le critère ci-dessus, démontrer que les fonctions e^{kx} et xe^{kx} sont linéairement indépendantes. Les fonctions e^{ikx}, $\cos kx$ et $\sin kx$ sont-elles indépendantes ? (Ici on admet dans (3.6) des coefficients λ_i complexes.) (2) Montrer que deux fonctions dérivables y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si leur *wronskien* $W(y_1, y_2) := y_1' y_2 - y_2' y_1$ n'est pas identiquement nul.

(3) Plus généralement, on définit le wronskien de n fonctions $y_i(x)$, $i = 1, \cdots n$ supposées $(n-1)$ fois dérivables comme le *déterminant* (cf. cours d'Algèbre)

$$W(x) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}\,. \tag{3.7}$$

Si les fonctions y_i sont linéairement dépendantes, il existe n constantes non toutes nulles λ_i telles que $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x) = 0$, et cette relation est aussi vérifiée par les dérivées successives des y_i, donc $\forall p = 0, \cdots n-1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^{(p)}(x) = 0$. Les n colonnes du déterminant sont donc linéairement dépendantes et le déterminant $W(x)$ est nul pour tout x. Inversement, il suffit que le wronskien $W(x)$ soit non nul en un point x_0 pour qu'on puisse conclure que les fonctions y_i sont linéairement **in**dépendantes. L'étude du wronskien offre donc un moyen pratique d'étudier l'indépendance linéaire de n fonctions.

Ces définitions étant acquises, on peut démontrer deux théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles linéaires.

Théorème 1 (équations homogènes). *Si les fonctions C_k, $(k = 0, \cdots, n)$, sont continues dans un même intervalle I, avec $C_n(x)$ ne s'annulant pas dans cet intervalle, il existe n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène (3.4) dans I, et la solution la plus générale est une combinaison à coefficients constants arbitraires de ces n fonctions. En outre, il existe une unique solution de (3.4) satisfaisant à des conditions initiales $y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, avec $x_0 \in I$.*

Théorème 2 (équations inhomogènes). *Avec les mêmes hypothèses sur les fonctions C_k qu'au Théorème 1, et ϕ étant supposée en outre continue dans I, la solution générale dans I de l'équation inhomogène (3.2) est la somme d'une solution particulière de (3.2) et de la solution générale de l'équation homogène (3.4). Il existe une unique solution de (3.2) satisfaisant à des conditions initiales $y(x_0) = a_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, avec $x_0 \in I$.*

En d'autres termes, ces théorèmes nous affirment l'existence de familles de solutions dépendant de n paramètres. Pour l'équation homogène, c'est la combinaison linéaire à coefficients constants $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x)$ annoncée par le Th. 1. Pour l'équation inhomogène, cette même combinaison linéaire est la "solution générale de l'équation homogène" mentionnée au Th. 2. Dans l'un et l'autre cas, les constantes arbitraires λ_i sont déterminées de façon unique par la donnée des conditions initiales.

L'existence de n solutions indépendantes de (3.4) selon le Théorème 1 n'est pas aisée à démontrer et nous l'admettrons en général, mais nous la démontrerons pour des coefficients constants au paragraphe suivant. Le Théorème 2, lui, se démontre aisément : supposons qu'on connaisse une solution particulière $\tilde{y}(x)$ de (3.2). Alors pour toute autre solution $y(x)$ de (3.2), en soustrayant membre à membre les deux équations différentielles satisfaites par $y(x)$ et par $\tilde{y}(x)$, on trouve que la différence $y(x) - \tilde{y}(x)$ est une solution de l'équation *homogène* : en invoquant alors le Théorème 1, ceci montre bien que la solution générale y de (3.2) est la somme d'une solution particulière $\tilde{y}(x)$ et d'une solution quelconque ("générale") de (3.4). La réciproque est évidente : on obtient bien une solution de (3.2)

en ajoutant à $\tilde{y}(x)$ (= une solution particulière) une solution quelconque de l'équation homogène. Noter que là encore, ces théorèmes énoncent l'existence et l'unicité de solutions sans nous dire comment les construire...

3.3. Quelques cas solubles d'équations linéaires

Bornons à quelques indications sur quelques cas où la solution de l'équation linéaire peut être obtenue explicitement.

Pour toute équation linéaire homogène du premier ordre, écrite comme

$$y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{3.8}$$

la solution générale s'obtient facilement par une quadrature, c'est-à-dire à l'aide d'un calcul de primitive de $q(x)$:

$$y(x) = A \exp\left(-\int^x q(x')dx'\right) . \tag{3.9}$$

La définition à une constante additive près de la primitive de $q(x)$ introduit-elle un nouvel arbitraire ?

Dans certains cas, une équation linéaire à coefficients non constants peut se ramener à une équation à coefficients constants, qu'on sait résoudre assez aisément, voir le paragraphe suivant. C'est par exemple le cas des équations dites d'Euler, $\sum C_k x^k y^{(k)}(x) = 0$, étudiée pour $x > 0$, avec les C_k constants. Montrer que le changement de *variable* $x \mapsto t = \ln x$ permet de se ramener à une équation différentielle en t, linéaire et à coefficients constants.

3.4. Équations linéaires à coefficients constants

• *Résolution de l'équation homogène*

Considérons maintenant un cas particulièrement important d'équations différentielles linéaires homogènes, celui où les coefficients C_k de l'équation sont des constantes

$$\sum_{k=0}^{n} C_k y^{(k)}(x) = 0 . \tag{3.10}$$

Cherchons des solutions sous la forme exponentielle $y(x) \stackrel{?}{=} e^{\alpha x}$, où α peut être *a priori* réel ou complexe. Une telle fonction est effectivement solution à condition que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_k \alpha^k\right) e^{\alpha x} = 0 ,$$

et donc que α satisfasse l'équation polynomiale, dite *équation caractéristique*

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \alpha^k = 0 . \tag{3.11}$$

Or le théorème fondamental de l'algèbre énonce que tout polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k$ de degré n admet n *racines*, réelles ou complexes, qui sont les n solutions de l'équation $P(z) = 0$. Si nous supposons d'abord que ces n racines α_i, $i = 1, \cdots, n$, sont distinctes, nous

avons trouvé n solutions $\exp(\alpha_i x)$, et ces n fonctions sont bien linéairement indépendantes, selon une remarque faite plus haut. Donc dans ce cas, nous savons construire explicitement un système (on dit une *base*) de n solutions indépendantes, dont toute autre solution est une combinaison linéaire. Dans le cas où une racine est multiple, par exemple α_1 racine double, on vérifie aisément que $\exp(\alpha_1 x)$ et $x\ \exp(\alpha_1 x)$ sont deux solutions indépendantes.

Indication : se rappeler que si α_1 est racine double d'un polynôme $P(\alpha)$, alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^2 Q(\alpha)$, et donc $P'(\alpha_1) = 0$.

Finalement on a bien n solutions indépendantes, la solution générale est selon le Théorème 1 une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i x}$ de ces fonctions, et les constantes A_i sont déterminées par les n conditions initiales.

• *Équation du second ordre à coefficients constants*

Examinons plus en détail le cas de l'équation du second ordre, que nous retrouverons au Chapitre 4 dans différents contextes physiques. Nous la récrivons sous la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \tag{3.12}$$

avec a, b, c et y réels, $a \neq 0$. Son équation caractéristique est donc simplement

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \ . \tag{3.13}$$

La solution de (3.13) est familière, elle dépend du signe de $\Delta := b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, les racines sont
$$\alpha_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
et les deux fonctions $e^{\alpha_\pm x}$ forment une base de solutions, ce qui veut dire que la solution générale de (3.12) est
$$y(x) = A_+ e^{\alpha_+ x} + A_- e^{\alpha_- x} \ , \tag{3.14}$$
avec deux constantes arbitraires $A_\pm$ fixées par les conditions initiales.
- Si $\Delta < 0$, les racines sont complexes
$$\alpha_\pm = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \ .$$
Comme base de solutions, on peut choisir soit les deux exponentielles oscillantes $e^{\alpha_\pm x}$, soit encore
$$\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) e^{-\frac{bx}{2a}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) e^{-\frac{bx}{2a}} \ .$$

La solution générale de l'équation (3.12) peut donc s'écrire sous différentes formes équivalentes

$$\begin{aligned} y(x) &= B_+ e^{\alpha_+ x} + B_- e^{\alpha_- x} \qquad\qquad \alpha_+ \text{ et } \alpha_- \text{ complexes conjugués} \\ \text{ou encore} \quad &= \left(A_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x + A_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x \right) e^{-\frac{bx}{2a}} \\ \text{ou encore} \quad &= A \cos \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x + \varphi \right) e^{-\frac{bx}{2a}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec des paires de constantes B_+ et B_-, A_1 et A_2, ou A et φ. Sous la première forme, $B_\pm$ sont complexes, et en fait complexes conjugués pour assurer que $y(x)$ est réel, $B_+ = B_-^*$. Les constantes A_1 et A_2, ou A et φ sont, elles, réelles.

- Si $\Delta = 0$, la racine $\alpha_0 = -\frac{b}{2a}$ est double et on vérifie immédiatement que

$$e^{\alpha_0 x} \quad \text{et} \quad x e^{\alpha_0 x}$$

sont deux solutions, donc que la solution générale de l'équation (3.12) s'écrit

$$y(x) = (Ax + B) e^{\alpha_0 x} \tag{3.16}$$

avec deux constantes A et B.

Dans tous les cas, on a trouvé une solution générale dépendant de *deux* constantes réelles, $A_\pm$, ou $B_+ = B_-^*$, ou A_1 et A_2, ou A et φ, ou A et B. Ces deux constantes sont déterminées de façon unique par *deux* conditions initiales, par exemple la donnée de $y(x_0)$ et $y'(x_0)$.

• *Équation linéaire inhomogène à coefficients constants*

Pour une équation linéaire à coefficients constants, on sait donc de façon générale construire les n solutions indépendantes du Théorème 1, et résoudre complètement l'équation homogène. En ce qui concerne l'équation inhomogène à coefficients constants, sa solution repose sur la connaissance d'*une* solution particulière, selon le Théorème 2.

Dans le cas d'une équation du premier ordre, il existe une méthode générale pour construire une solution particulière de l'équation inhomogène, c'est la *méthode de variation de la constante*. Considérons une équation de la forme

$$C_1 y'(x) + C_0 y(x) = \phi(x) \ . \tag{3.17}$$

L'équation homogène admet selon la discussion précédente la solution générale $y(x) = A\exp(\alpha x)$, où α est solution de $C_1\alpha + C_0 = 0$. Il est suggéré de chercher une solution de (3.17) de la forme $y \stackrel{?}{=} A(x)\exp(\alpha x)$, avec une fonction $A(x)$ à déterminer. En reportant dans (3.17), on trouve

$$(C_1(A'(x) + \alpha A(x)) + C_0 A(x))\, e^{\alpha x} = \phi(x)$$

qui se simplifie, en vertu de la condition satisfaite par α, en

$$C_1 A'(x) = \phi(x) e^{-\alpha x}$$

et le problème de trouver une solution particulière est donc réduit à une "quadrature", trouver une primitive de la fonction $\phi(x)e^{-\alpha x}$:

$$A(x) = C_1^{-1} \int^x \phi(x')e^{-\alpha x'} dx' \ .$$

3.5. Systèmes d'équations différentielles linéaires

Comme on l'a déjà fait remarquer, les équations différentielles peuvent venir sous forme de systèmes d'équations différentielles couplées portant sur différentes fonctions $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p$. Le cas de systèmes d'équations linéaires couplées est particulièrement intéressant.

Considérons par exemple le système linéaire de deux équations du premier ordre

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + by_2 \\ y_2' &= cy_1 + dy_2 \end{aligned} \ . \tag{3.18}$$

1) En dérivant la première équation par rapport à x et en y reportant l'expression de y_2' donnée par la seconde, (c'est-à-dire en *éliminant* y_2' entre ces deux équations), on obtient la paire d'équations

$$\begin{aligned} y_1'' &= ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \\ y_1' &= ay_1 + by_2 \end{aligned} \ . \tag{3.19}$$

Entre ces deux équations, on peut cette fois éliminer y_2, ce qui conduit à

$$y_1'' = (a+d)y_1' + (bc - ad)y_1 \ . \tag{3.20}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, qui tombe donc sous le coup de l'analyse menée plus haut : la solution générale en $y_1(x)$ (et de même en $y_2(x)$) est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $e^{\alpha_1 x}$ et $e^{\alpha_2 x}$, où α_1 et α_2 sont solutions de l'équation

$$\alpha^2 - (a+d)\alpha + (ad - bc) = 0 \ . \tag{3.21}$$

En résumé, le système de deux équations linéaires du premier ordre à coefficients constants (3.18) est donc équivalent à une équation linéaire du second ordre.

2) Discutons maintenant une autre méthode : en effectuant des combinaisons linéaires des deux équations de (3.18) avec des coefficients λ et μ quelconques, on trouve que

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' = (a\lambda + c\mu)y_1 + (b\lambda + d\mu)y_2 \ . \tag{3.22}$$

Supposons qu'on sache trouver λ et μ tels que

$$\begin{aligned} a\lambda + c\mu &= \alpha\lambda \\ b\lambda + d\mu &= \alpha\mu \end{aligned} \ , \tag{3.23}$$

pour un certain nombre α. Alors, en reportant (3.23) dans (3.22), on voit que l'équation (3.22) est une équation différentielle linéaire du premier ordre particulièrement simple pour la fonction $y := \lambda y_1 + \mu y_2$

$$y' = \alpha y \ , \tag{3.24}$$

ce qui s'intègre immédiatement en $y = Ce^{\alpha x}$. Or le système (3.23), qui est un système d'équations algébriques du premier degré à deux variables, se résout aisément. En éliminant par exemple μ entre les deux équations, on trouve que

$$c\mu = (\alpha - a)\lambda \ , \qquad ((d-\alpha)(a-\alpha) - bc)\lambda = 0 \tag{3.25}$$

qui n'admet de solution non nulle en λ que si α satisfait l'équation du second degré

$$(d-\alpha)(a-\alpha) - bc = 0 \tag{3.26}$$

qui admet elle-même deux solutions, réelles ou complexes, distinctes ou confondues. Supposons les distinctes, il existe donc deux valeurs de α, donc aussi deux paires de (λ, μ) (à un facteur global près) remplissant les conditions ci-dessus, c'est-à-dire conduisant à une équation du type (3.24) pour la combinaison linéaire correspondante. Chacune de ces deux

combinaisons linéaires est appelée un *mode propre* du système initial (3.18). Par les combinaisons algébriques que nous avons effectuées, nous avons donc réduit le système initial, équivalent à une équation du second ordre selon la discussion du point 1) ci-dessus, à la solution de deux équations du premier ordre découplées. On note que les deux approches ont en commun de faire jouer un rôle central à l'équation "caractéristique" (3.21)-(3.26).

3) On peut se demander si ceci se généralise à des systèmes impliquant plus de fonctions ou des équations d'ordres plus élevés. La réponse est oui, et les méthodes de l'algèbre linéaire, matrices et déterminants, sont celles qui sont le mieux adaptées à cette discussion. Récrivons le système linéaire (3.18) sous une forme matricielle

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

ou en définissant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\frac{d}{dx}Y = AY \ . \tag{3.28}$$

Supposons maintenant que la matrice A puisse se diagonaliser par un changement de base $A = W^{-1}\tilde{A}W$, $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 indépendante de x, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ une matrice "diagonale", où α_1 et α_2 sont les *valeurs propres* de A. Redéfinissant le vecteur colonne $\tilde{Y} = WY = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2 \\ \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2 \end{pmatrix}$, on a en multipliant les deux membres de l'équation matricielle (3.28) par W

$$\frac{d}{dx}\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{Y}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1' \\ \tilde{y}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

c'est-à-dire deux équations découplées

$$\tilde{y}_1' = \alpha_1 \tilde{y}_1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}_2' = \alpha_2 \tilde{y}_2 \ . \tag{3.30}$$

La démarche reproduit celle suivie au point 2). Les valeurs propres α_1 et α_2 sont les racines de l'équation (3.26) ; la diagonalisation de la matrice, c'est-à-dire l'existence d'une matrice W, est assurée par l'hypothèse que ces deux racines sont distinctes ; et les combinaisons $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ sont les deux "modes propres" définis en 2).

L'avantage de cette méthode matricielle est sa puissance et sa généralité. Elle s'étend sans difficulté à des systèmes d'équations différentielles de dimension et/ou d'ordre plus élevés.

4. Autres classes d'équations différentielles simples. Autres méthodes

4.1. Intégrales premières

Il existe des situations où on peut réduire l'ordre de l'équation différentielle en effectuant explicitement une intégration. C'est ce qui se produit par exemple dans l'étude du pendule.

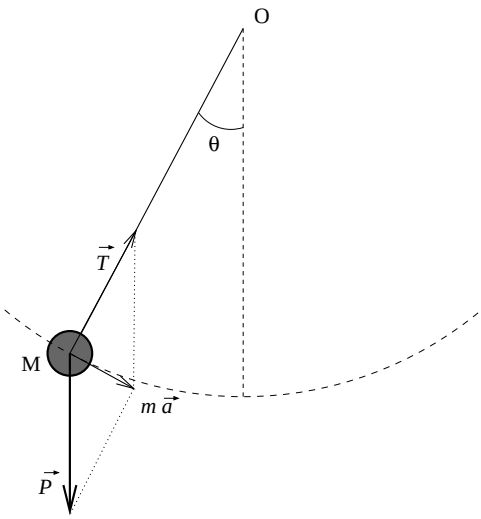


Fig. 2: Pendule simple.

Considérons un pendule simple, constitué d'une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable de longueur ℓ. Le pendule oscille dans un plan vertical. Il effectue son mouvement sous la seule action de la gravité (son poids $\vec{P} = -mg\hat{z}$, où $\hat{z}$ désigne un vecteur unité dirigé selon l'axe vertical vers le haut) et de la tension du fil $\vec{T}$, et selon l'équation fondamentale de la dynamique, $m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} - mg\hat{z}$. On se débarrasse de la tension inconnue $\vec{T}$ par projection de l'équation sur une direction tangente à sa trajectoire circulaire et on a alors

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \ . \tag{4.1}$$

Multiplions cette équation par $\dot{\theta}$ et reconnaissons dans $\ddot{\theta}\dot{\theta}$ la dérivée de $\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2$ et dans $-\dot{\theta}\sin\theta$ celle de $\cos\theta$. L'équation (4.1) s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ell m\dot{\theta}^2 - gm\cos\theta\right) = 0 \tag{4.2}$$

qui s'intègre en

$$\frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2 = mg(\cos\theta - \cos\theta_m) \ , \tag{4.3}$$

où θ_m est une constante d'intégration. Pour $\theta = \pm\theta_m$, le membre de droite s'annule, donc celui de gauche aussi : la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ s'annule quand $\theta = \pm\theta_m$ et l'interprétation de $|\theta_m|$ est donc que c'est l'amplitude maximale d'oscillation du pendule.

Récrivons l'équation précédente (multipliée par ℓ) sous la forme

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_m =: E \ , \tag{4.4}$$

avec E indépendante du temps. Sur le plan mathématique, nous avons réduit notre équation de départ du second ordre (4.1) à une équation du premier ordre, ce qui est un progrès substantiel. Sur le plan physique, ce que cette "constante du mouvement" (ou "intégrale première") de l'équation initiale exprime est bien sûr la loi de conservation de l'énergie du système isolé. La somme de l'énergie cinétique (le premier terme du membre de gauche) et de l'énergie potentielle de la masse du pendule (le second) est constante dans le temps et vaut E, énergie totale, déterminée par les conditions initiales

$$E = -mg\ell \cos\theta_m \tag{4.5}$$

si à l'instant initial on a lâché le pendule avec une vitesse nulle et une amplitude angulaire de $-\theta_m \leq 0$ (le choix du signe devant $-\theta_m$ est pour la commodité de la suite).

4.2. Équations à variables séparées

En général, on appelle *équation à variables séparées*, une équation différentielle du premier ordre $F(y, y', x) = 0$ qui peut se mettre sous la forme $f(y)dy = g(x)dx$ et donc s'intégrer en

$$\int^y f(y')dy' = \int^x g(x')dx' + \text{constante} \ . \tag{4.6}$$

Exemples

1. On rencontrera au chapitre 5, dans l'étude de systèmes dynamiques l'équation $\dot{x} = -\alpha^2 - x^2$. Montrer qu'elle est à variables séparées. En chercher les solutions.

2. Autre exemple : on suppose qu'un corps en chute libre est freiné par une force proportionnelle au carré de sa vitesse (parachute). Montrer que son équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{z} = k\dot{z}^2 - g$$

et que l'équation différentielle satisfaite par $\dot{z}$ ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent (cf TD3).

3. Examinons l'équation du pendule simple que nous avons obtenue au paragraphe précédent

$$\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 = g(\cos\theta - \cos\theta_m) \ . \tag{4.7}$$

Puisque $|\theta_m|$ désigne l'angle maximal atteint par le pendule (position où sa vitesse s'annule), $|\theta| < \theta_m$ et le signe du membre de droite est bien positif. Cette équation se récrit

$$\frac{|d\theta|}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}dt$$

où toute la dépendance dans la variable θ a été mise au membre de gauche, toute celle en t (ici triviale) au membre de droite. Comme au paragraphe précédent, supposons le pendule lâché à l'instant $t = 0$ avec une vitesse nulle et une amplitude angulaire $-\theta_m \leq 0$. Dans la première demi-oscillation du pendule, tant que θ croît, c'est-à-dire que $\mathrm{d}\theta \geq 0$, (ou $\dot{\theta}$ ne change pas de signe), on peut intégrer l'équation en calculant une primitive de chaque membre

$$\int_{-\theta_m}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}t \ . \tag{4.8}$$

Il reste à calculer effectivement l'intégrale du membre de gauche et à en extraire la fonction cherchée $\theta(t)$. Cette intégration mène à des fonctions non élémentaires, dites fonctions elliptiques, et nous ne la poursuivrons pas ici.

4.3. Changement de la fonction inconnue

Il existe de nombreux cas où un changement judicieux de la fonction inconnue, solution cherchée de l'équation différentielle, simplifie considérablement la discussion. Il s'agit donc, étant donnée une équation différentielle satisfaite par une fonction $y(x)$, d'écrire et d'étudier l'équation différentielle qui en résulte pour la nouvelle fonction $z(x) = F(y(x))$.

C'est le cas par exemple de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0 \ . \tag{4.9}$$

Supposons qu'on connaisse une solution $y_0(x)$ et posons

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$$

avec une nouvelle fonction inconnue $z(x)$. En reportant cette expression dans (4.9) et en utilisant le fait que $y_0(x)$ satisfait elle-même (4.9), on obtient

$$-\frac{z'}{z^2} + a(2\frac{y_0}{z} + \frac{1}{z^2}) + \frac{b}{z} = 0$$

(toutes les dépendances en x sont sous-entendues), soit l'équation *linéaire*

$$-z' + a(2y_0 z + 1) + bz = 0 \ , \tag{4.10}$$

à laquelle on applique les théorèmes et méthodes du § 3.

Un autre exemple, celui de l'équation de Bernoulli, sera étudié en TD.

4.4. Résolution d'une équation différentielle par une série entière

Considérons, à titre d'exemple, le cas de l'équation d'Airy

$$f''(x) = xf(x) \tag{4.11}$$

et cherchons-en une solution sous forme d'une série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

En dérivant terme à terme et en insérant dans (4.11), on trouve

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1}\right] x^n = 0 \ ,$$

soit, en identifiant à zéro le coefficient de chaque terme x^n,

$$a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \ \text{pour } n \geq 1 \ .$$

Cela fournit une relation de récurrence entre les a_n, qui, complétée par la donnée de $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$, deux conditions initiales indispensables à la résolution de l'équation du second ordre (4.11), permettent de déterminer tous les a_n. Comme a_n se comporte comme $1/(n!)^{2/3}$, le rayon de convergence de la série (cf chap.1, § 4.5) est infini : la série converge pour tout x.

Les deux solutions de base notées $\mathrm{Ai}(x)$ et $\mathrm{Bi}(x)$ sont distinguées par leur comportement à l'infini : $\mathrm{Ai}(x) \to 0$ et $\mathrm{Bi}(x) \to \infty$.

La fonction d'Airy intervient dans des problèmes de physique telle la description quantitative de l'arc-en-ciel ...

Inversement, connaître l'équation différentielle satisfaite par la somme d'une série entière permet parfois de calculer cette somme. Considérons par exemple la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \ . \tag{4.12}$$

On démontre aisément qu'elle est convergente (le vérifier !). Pour calculer sa somme, construisons la série entière

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^8}{16}\right)^k \left(\frac{4x}{8k+1} - \frac{2x^4}{8k+4} - \frac{x^5}{8k+5} - \frac{x^6}{8k+6}\right) \ . \tag{4.13}$$

Vérifier que

a) la série converge pour $|x| < \sqrt{2}$;
b) la fonction $S(x)$ satisfait $S'(x) = (4 - 2x^3 - x^4 - x^5)/(1 - x^8/16)$ et $S(0) = 0$;
c) la fonction $\varphi(x) := -4\mathrm{Arc}\tan(1-x) + 2\ln(2-x^2) - 2\ln(x^2 - 2x + 2)$ satisfait la même équation différentielle et $\varphi(0) = -\pi$.

En conclure que $S(x) = \varphi(x) + \pi$, donc la somme (4.12) cherchée est $S(1) = \varphi(1) + \pi = \pi$. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel comme Maple pour vérifier le point c).

⋆ ⋆

⋆

Ce chapitre n'a fait qu'effleurer le très vaste sujet des équations différentielles, d'importance immense pour le physicien ou l'ingénieur. Nous y reviendrons au Chapitre

4, où des “systèmes linéaires”, c’est-à-dire régis par des équations dynamiques linéaires, seront étudiés plus en détail. Nous y reviendrons à nouveau au Chapitre 5, où le monde des équations *non-linéaires* sera brièvement évoqué et illustré sur quelques exemples.

Ce cours ne dira rien des “équations aux dérivées partielles”, une classe d’équations portant sur des fonctions de plusieurs variables. Des exemples que nous rencontrerons en TD sont ceux des équations des ondes ou l’équation de la chaleur... D’autres équations d’importance capitale en physique, telles les équations de Maxwell de l’électromagnétisme, ou les équations de Navier-Stokes de l’hydrodynamique, sont des équations aux dérivées partielles.

Chapitre 3. Séries de Fourier

0. Préambule sur les fonctions périodiques

Une fonction $f(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un T tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(x+T) \ . \tag{0.1}$$

Si l'équation (0.1) est satisfaite pour T, elle l'est aussi pour tout multiple entier de T. On appellera donc *période* le plus petit $|T|$ tel que (0.1) soit satisfaite. Par exemple, la période de $\sin x$ ou de $\cos x$ est 2π, celle de $\tan x$ est π.

La fonction est complètement définie par sa donnée sur une période quelconque, c'est-à-dire sur tout intervalle $[a, a+T[$ de longueur T. Si la fonction est dérivable, sa dérivée est aussi périodique de même période. Si la fonction est intégrable, son intégrale sur une période ne dépend pas de cette période

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ne dépend pas de } a \ . \tag{0.2}$$

La preuve est élémentaire : comparons $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et dans le dernier terme, le changement de variable $x = x' + T$ permet d'écrire

$$\int_{b+T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x')\,\mathrm{d}x' = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On va utiliser fréquemment cette propriété, en choisissant la période la plus propice, c'est-à-dire rendant le calcul le plus simple. Par exemple, si la fonction est périodique et impaire, $\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, et donc $\forall a$, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Les fonctions périodiques interviennent de façon très courante dans la description des phénomènes physiques, oscillants ou ondulatoires, biologiques (battements du cœur, rythmes circadiens ou saisonniers, ...), naturels (marées, période journalière ou annuelle), etc. Dans la plupart de ces exemples, la période est de nature temporelle : c'est le temps

au bout duquel le phénomène considéré se reproduit égal à lui-même. Mais une période peut aussi être de nature spatiale : c'est, par exemple, la longueur d'onde d'un phénomène ondulatoire, ou la maille d'un réseau cristallin, etc. Bien sûr, dans un système physique réel, il n'est pas possible d'effectuer des translations arbitrairement grandes du temps ou d'une coordonnée d'espace. La notion de fonction périodique est une idéalisation de la réalité physique, quand le temps d'observation ou les dimensions de l'échantillon sont beaucoup plus grands que les périodes observées.

Les fonctions trigonométriques $\cos nx$ et $\sin nx$ sont évidemment des fonctions périodiques de période $T = 2\pi$. C'est le cas plus généralement de tout *polynôme trigonométrique*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ . \tag{0.3}$$

Le but de ce chapitre est d'étudier la propriété réciproque. Peut-on représenter toute fonction périodique (de période 2π) sous la forme (0.3), avec $N \to \infty$, c'est-à-dire sous forme d'une série trigonométrique ou *série de Fourier* ?

1. Représentation de Fourier d'une fonction périodique

1.1. Le développement de Fourier; sa convergence.

Soit f une fonction réelle définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. On suppose la fonction périodique de période 2π et on la prolonge alors par périodicité à tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction peut admettre un nombre fini de discontinuités finies : en un nombre fini de points $x^{(k)} \in]-\pi, \pi[$, $f(x_+^{(k)}) - f(x_-^{(k)}) \neq 0$ (mais est fini) ; de même, $f(\pi_-)$ peut différer de $f(-\pi_+)$, ce qui fait que la fonction périodique sera discontinue en π (et en tous ses translatés par 2π). On désire écrire

$$f(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ . \tag{1.1}$$

Trois questions se posent alors : a) que sont les coefficients a_n et b_n ? b) y-a-t-il convergence du membre de droite de (1.1) ? c) si oui, la somme de la série est-elle égale à la fonction $f(x)$?

▷ *Convergence de la série trigonométrique*

Supposons d'abord les coefficients a_n et b_n connus, et examinons la question b).

(1) Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, comme $|\cos nx|$ et $|\sin nx|$ sont ≤ 1, le membre de droite de (1.1) est absolument et uniformément convergent sur tout l'intervalle et sa somme est une fonction continue. Cette propriété que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ soient absolument convergentes est vérifiée en particulier si

$$|a_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad |b_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \qquad \alpha, \beta > 1 \ . \tag{1.2}$$

La somme de la série est éventuellement dérivable terme à terme, si les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ sont elles-mêmes absolument convergentes. Autrement dit, on peut alors écrire

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \ , \tag{1.3}$$

avec une série convergente au membre de droite. Par exemple, si $\alpha, \beta > 2$ dans (1.2), la somme de la série (1.1) est continue et dérivable, et sa dérivée, donnée par (1.3), est elle-même continue.

(2) Quelles que soient les suites a_n, b_n décroissantes et tendant vers zéro, la série trigonométrique converge pour tout $x \neq 2\ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$. (Par contre pour $x = 0 \bmod 2\pi$, on ne peut rien dire.)

Ceci est une conséquence du théorème d'Abel, cf chap.1, §4.4. On peut écrire $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{i(n+1)x/2}\sin(nx/2)/\sin(x/2)$ pourvu que $\sin x/2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 2\ell\pi$. On a alors $|\sum_{k=1}^{n} \cos kx| < |\sin(x/2)|^{-1}$, $|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| < |\sin(x/2)|^{-1}$, et l'hypothèse du théorème d'Abel est satisfaite.

Exemple, $a_n = \frac{1}{n}$, $\sum a_n \cos nx$ et $\sum a_n \sin nx$ convergent si $x \neq 2\ell\pi$, en particulier pour $x = \pi$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. Mais pour $x = 0$, $\sum a_n \cos 0$ diverge, $\sum a_n \sin 0 = 0$ converge.

(3) Si la série trigonométrique converge sur l'intervalle, elle définit une fonction périodique de période 2π. Si la convergence est uniforme, la somme est continue.

▷ *Détermination des coefficients a_n et b_n.*

Revenons maintenant à la question a) ci-dessus. Supposons que le développement (1.1) existe pour la fonction f. Nous allons alors faire usage des formules d'intégration, pour $m \geq 0$ et $n > 0$ entiers(*)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x &= \pi\delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x &= \pi\delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, \mathrm{d}x &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

(*) Si $n = 0$, la seule intégrale non nulle est $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x = 2\pi\delta_{m0}$.

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker $= 0$ ou 1 selon que $m \neq n$ ou $m = n$. Ces formules découlent des formules d'addition des sinus et cosinus ; elles s'obtiennent aussi à partir de l'intégration de l'exponentielle

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx}\,\mathrm{d}x = \delta_{p0}\ . \tag{1.5}$$

En multipliant les deux membres de (1.1) par $\cos nx$ ou $\sin nx$ et en intégrant à l'aide de ces formules, on tire

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ .} \tag{1.6}$$

Ces expressions impliquent que si f est paire, tous les b_n sont nuls. Si f est impaire, tous les a_n (y compris a_0) s'annulent. Noter que selon la remarque du paragraphe précédent, le choix de la période d'intégration dans (1.4) ou (1.6) est arbitraire. Plutôt que $(-\pi, \pi)$, on peut choisir $(0, 2\pi)$ ou tout autre intervalle de longueur 2π.

▷ *Théorèmes de convergence.*

Les a_n et b_n étant déterminés à partir de la fonction f, la question est maintenant de savoir (1) si le développement converge; (2) si oui, s'il converge vers $f(x)$.

Théorème de Dirichlet. *Si $f(x)$ est définie sur $[-\pi, \pi]$ et n'y a qu'un nombre fini de discontinuités finies et a ailleurs une dérivée continue, (fonction "C^1 par morceaux"), alors le développement converge pour tout $x \in [-\pi, \pi]$; sa somme est $\frac{1}{2}\big(f(x_-) + f(x_+)\big)$ en tout point de $]-\pi, \pi[$, et $\frac{1}{2}\big(f(-\pi_+) + f(\pi_-))\big)$ en $\pm\pi$. Dans tout sous-intervalle où la fonction f est continue, la convergence de la série de Fourier vers f est uniforme.*

On va voir de nombreux exemples dans la suite.

Aux conditions du théorème précédent, on préfère parfois celles-ci, plus générales :

(i) $f(x)$ n'a sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ qu'un nombre fini de discontinuités finies et a ailleurs une dérivée bornée,

ou bien encore

(ii) elle est bornée et n'a qu'un nombre fini de minima et de maxima dans cet intervalle.

Sous ces conditions, (« conditions de Dirichlet »), la conclusion précédente que la série converge en tout point vers $\frac{1}{2}\big(f(x_-) + f(x_+)\big)$ est encore vraie.

Il existe des conditions plus faibles assurant la convergence (conditions suffisantes). La version suivante, due à Jordan, semble la meilleure.

Théorème de Jordan. *Si une fonction est à variation bornée sur l'intervalle période, la série de Fourier converge en tout point vers la demi-somme* $\frac{1}{2}\big(f(x_-)+f(x_+)\big)$.

Une fonction à variation bornée est définie comme suit. Pour une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ on considère une subdivision arbitraire de $[a,b]$, c'est-à-dire un choix de points $x_0=a<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ et on calcule la *variation* correspondante $\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i+1}|$. La fonction est à variation bornée ssi cette variation est bornée par un B indépendant de la subdivision. Une fonction monotone bornée est à variation bornée. (On démontre que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes bornées.) Une fonction bornée n'ayant qu'un nombre fini de maxima ou minima sur $[a,b]$ est à variation bornée. Une fonction continue et à dérivée bornée est à variation bornée. (Cette grande variété de cas impliquant la propriété d'être à variation bornée explique la multiplicité de conditions suffisantes de convergence des séries de Fourier rencontrées dans la littérature...)

Voici l'exemple donné par Picard d'une fonction continue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$, mais dont la série de Fourier ne converge pas. Soit

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sin(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\ ,$$

et

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } 0<x<\pi \\ f(-x) & \text{si } -\pi<x<0 \end{cases}\ .$$

Pour tout x la série converge uniformément, donc la somme $f(x)$ est bien continue, donc bornée, et $f(0)=0$. La fonction F est aussi continue et bornée. (Par contre, en raison de ses rapides oscillations, la fonction n'est pas à variation bornée.) On considère la série de Fourier de F, seuls les cosinus apparaissent pour cette fonction paire

$$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots$$

Soit $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ la somme partielle de cette série de Fourier en $x=0$. En choisissant $n=2^{p'^3}-1$, Picard montre que $S_{2^{p'^3}-1}>\frac{1}{2\pi}\frac{1}{p'^2}\log(2^{p'^3}+1)$. Pour p' grand, $\log(2^{p'^3}+1)\sim p'^3\log 2$, donc $S_{2^{p'^3}-1}>\frac{p'\log 2}{2\pi}$ qui croît sans limite. La suite des sommes partielles S_n ne peut donc converger : la série de Fourier de F en $x=0$ diverge !
Réf. : É. Picard, *Traité d'Analyse*, J. Gabay. L'exemple est emprunté à Fejér.

Autrement dit, sous les conditions du théorème, la somme de Fourier existe et converge vers f sauf aux points de discontinuité et peut-être (si $f(-\pi_+)\neq f(\pi_-)$) aux extrémités du segment. Nous admettrons ce théorème, en nous bornant à quelques indications.

Pour une fonction satisfaisant les conditions du théorème de Dirichlet, les coefficients a_n, b_n décroissent en valeur absolue au moins comme $|a_n|\sim 1/n$, $|b_n|\sim 1/n$ pour n grand, ce qui n'assure pas en général la convergence absolue de la série de Fourier, mais n'exclut pas la convergence simple pour certaines valeurs de x. Ces coefficients peuvent décroître plus rapidement, si la fonction est plus régulière. En fait on peut démontrer le

Théorème de Stokes. *Si* $f^{(k)}$ *est la première des dérivées de* f *à avoir une discontinuité (ou un nombre fini de discontinuités) alors* $|a_n|,\ |b_n|\sim\frac{1}{n^{k+1}}$.

Ceci implique que la convergence est moins bonne pour les dérivées successives : les coefficients de la dérivée ℓ-ième de la série de Fourier sont $n^\ell a_n$ et $n^\ell b_n$, qui décroissent moins vite. En fait, la dérivation terme à terme du développement de Fourier de $f(x)$ ne donne pas le développement de Fourier de $f'(x)$ si f est discontinue. Un exemple est donné par

la fonction $f(x)$ périodique et valant x sur sa période $(-T/2, T/2)$, dont le développement de Fourier non trivial sera donné à la section suivante. Sa dérivée terme à terme est également non triviale et ne s'identifie pas au développement de Fourier de $f'(x) = 1$ qui se réduit au terme constant ! À l'inverse, la convergence est meilleure pour l'intégrale de $f(x)$ (convergence en moyenne).

Qu'en est-il de la convergence uniforme ? Retenons aussi du théorème de Dirichlet que pour une fonction continue et périodique sur $[-\pi, \pi]$, la série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$.

▷ *Remarques.*

1. On a raisonné sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ mais il est aisé de transposer toute la discussion à une fonction périodique de période T. Une série de Fourier pour une telle fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T} \ , \tag{1.7}$$

avec des coefficients donnés par des formules généralisant (1.6)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_I f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_I f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

où I est un intervalle quelconque de longueur T.

2. On peut regrouper agréablement les deux types de termes de la série de Fourier en écrivant

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx - \varphi_n)$$

avec $a_0 = c_0$, $\varphi_0 = 0$ et si $n > 0$, $a_n = c_n \cos\varphi_n$, $b_n = c_n \sin\varphi_n$. On peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} \tag{1.9}$$

ce qui est une notation naturelle pour

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{inx} + A_{-n}e^{-inx}) \ .$$

On identifie donc avec (1.1) en prenant $a_n = A_n + A_{-n}$, $b_n = i(A_n - A_{-n})$, soit encore

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \ , \tag{1.10}$$

qu'on retrouve aussi directement comme conséquence de (1.5). Supposons que la fonction f soit réelle, comme nous le faisons en général dans ce cours. Écrivant $f(x) = f^*(x) = \sum A_n^* e^{-inx}$ et identifiant terme à terme avec le développement (1.9), on voit que $A_n^* = A_{-n}$. La propriété de réalité implique donc que $A_{-n} = A_n^*$, donc que $a_n = 2\Re e\, A_n$, $b_n = -2\Im m\, A_n$.

3. L'ensemble des coefficients (a_n, b_n) ou (c_n, φ_n) ou A_n constitue le *spectre de Fourier* de la fonction f. On peut voir la donnée de ces coefficients comme une façon de représenter la fonction en termes de fonctions périodiques de base, ou plus précisément considérer les a_n, b_n (ou les A_n) comme des coordonnées sur les fonctions *orthogonales* $\cos mx$ et $\sin nx$ (ou les e^{inx}), (cf les relations (1.4), (1.5) vues comme les produits scalaires des vecteurs d'un repère rectangulaire). L'idée de décomposer une fonction sur une *base* de fonctions bien choisies est une idée qui va réapparaître dans de nombreuses situations.

Exemples :

1. Soit la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, prolongée par périodicité de période 2π au delà. On calcule aisément $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$ et après deux intégrations par parties, $A_n = \frac{2(-1)^n}{n^2}$ pour $n \neq 0$. On a donc, puisque f est continue

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \ .$$

Les deux séries convergent absolument et uniformément. On voit sur la figure suivante que le pic en $\pm\pi$ est de mieux en mieux représenté quand la série est tronquée à un ordre plus élevé. Ceci reflète bien le fait que les hautes fréquences (grands "harmoniques", c'est-à-dire modes à n grand) donnent les détails fins de la fonction.

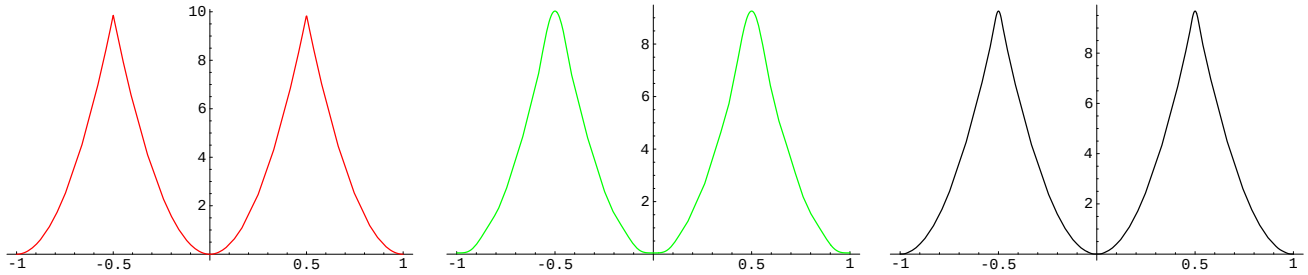


Fig. 1: La fonction périodique valant x^2 sur sa période $[-\pi, \pi]$, à gauche, puis représentée par sa série de Fourier avec 6 (au milieu) et 20 (à droite) termes. En abscisse est portée la variable $x/(2\pi)$.

En TD

2. Soient u et x deux variables réelles. En prenant les parties réelle et imaginaire de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} u^n e^{inx} = \frac{1}{1-ue^{ix}}$, absolument convergente pour $|u| < 1$ et tout x (donc uniformément convergente), on obtient deux séries de Fourier uniformément convergentes

$$\begin{aligned} \frac{1 - u\cos x}{1 - 2u\cos x + u^2} &= \sum_{0}^{\infty} u^n \cos nx \\ \frac{u\sin x}{1 - 2u\cos x + u^2} &= \sum_{1}^{\infty} u^n \sin nx \end{aligned} \tag{1.11}$$

De même, en prenant partie réelle et imaginaire de $\log(1 - ue^{ix})$, on trouve

$$\begin{aligned} \log(1 - 2u\cos x + u^2) &= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \cos nx \\ \operatorname{Arc\,tan} \frac{u\sin x}{1 - u\cos x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \sin nx \ . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Montrer qu'on passe de (1.12) à (1.11) par dérivation par rapport à u.

3. Autre exemple : $f(x) = \cos ax$, pour a non entier, $-\pi \leq x \leq \pi$. La série de Fourier est

$$\frac{\sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2a\cos nx}{a^2 - n^2} \right) \ .$$

La série converge vers $f(x)$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$.

On verra d'autres exemples de séries de Fourier dans la suite.

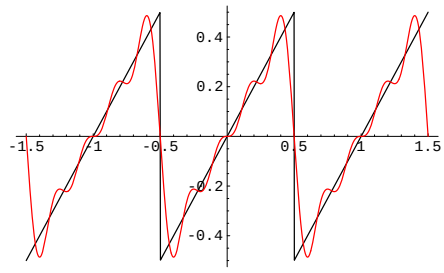
1.2. Phénomène de Gibbs

Que se passe-t-il au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction f ?

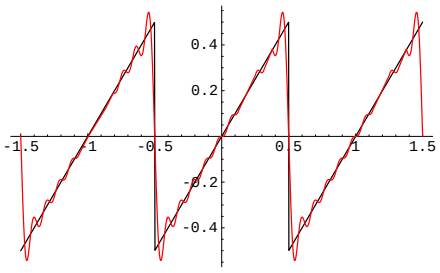
Considérons par exemple la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. (Noter que cette fonction est, à un changement d'échelle près, la dérivée de la fonction de l'Exemple 1 du § 1.1.) On montre aisément (TD) que son développement de Fourier s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

et selon le théorème, ce développement converge vers f dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, tandis qu'il vaut $0 = f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$ en $\pm\frac{1}{2}$.



$N = 4$



$N = 10$

Représentons le développement tronqué à la N-ième harmonique $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$. On voit que quelques harmoniques reproduisent déjà très bien la discontinuité de la fonction en π. Conformément au théorème, quand on augmente le nombre de termes, la série de Fourier approxime de mieux en mieux la fonction en dehors de ses discontinuités, mais on voit qu'elle exagère la valeur de la discontinuité. Plus précisément, la position du maximum (ou minimum) tend vers le point de discontinuité $x^{(0)}$, mais la valeur à ce maximum ou minimum ne tend pas vers la valeur de $f\left(x^{(0)}_{\pm}\right)$. C'est le *phénomène de Gibbs*. On peut calculer l'excédent et on trouve qu'il tend vers environ 18% de la discontinuité (cf TD). A l'évidence, la série de Fourier ne converge pas uniformément !

Autre exemple : la fonction créneau, périodique de période 2π, valant $f(x) = -1$ si $x \in]-\pi, 0[$, et $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$. Sa série de Fourier n'a que les termes en sinus, et un calcul simple conduit à

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x \ .$$

La convergence est lente, en $1/n$, reflétant la présence d'une discontinuité, et on observe à nouveau le phénomène de Gibbs, voir Figure 2.

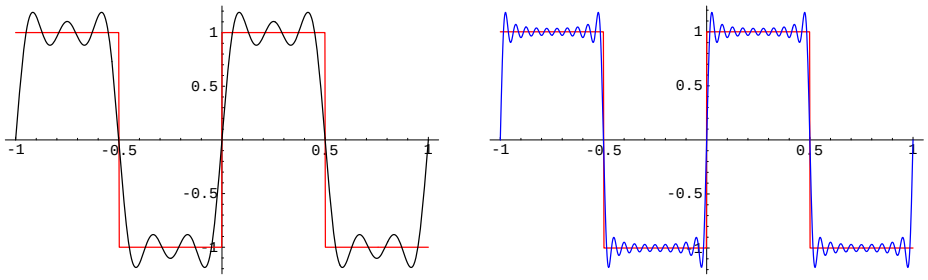


Fig. 2: La fonction périodique valant signe(x) sur sa période $[-\pi, \pi]$, ("fonction créneau"), superposée à sa série de Fourier avec 6 (à gauche) et 20 (à droite) termes. En abscisse est portée la variable $x/(2\pi)$.

2. Équations différentielles linéaires avec source périodique

2.1. Découplage des modes de Fourier

On considère une équation différentielle du ℓ-ième ordre à coefficients constants du type étudié au chapitre précédent

$$\mathcal{L}(y(x)) := \sum_{k=0}^{\ell} C_k \frac{d^k}{d\,x^k} y(x) = \phi(x) \tag{2.1}$$

où $\phi(x)$ est une fonction périodique de x, de période T, supposée satisfaire les hypothèses du théorème de Dirichlet. On peut alors représenter ϕ par son développement de Fourier

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega n x} \ , \tag{2.2}$$

où, selon l'usage, on note $\omega = \frac{2\pi}{T}$, et il est suggéré d'en faire autant pour $y(x)$

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{i\omega n x} \ . \tag{2.3}$$

Si on suppose $y(x)$ suffisamment régulière (cf section précédente), on peut dériver terme à terme le développement de $y(x)$, et dériver k fois revient à multiplier le n-ième "mode" (la n-ième composante de Fourier) par $(in\omega)^k$: $y^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n (in\omega)^k e^{in\omega x}$.

La propriété de linéarité implique que l'action de $\mathcal{L}$ sur les différents modes de $y(x)$ s'écrit

$$\mathcal{L}(y(x)) = \sum_n \sum_{k=0}^{\ell} C_k (in\omega)^k y_n e^{in\omega x} \tag{2.4}$$

et qu'on obtient *une solution particulière* de (2.1) en sommant une solution pour chacun des modes, $\sum_{k=0}^{\ell} C_k (in\omega)^k y_n = A_n$, soit

$$y_n = \frac{A_n}{\sum_{k=0}^{\ell} C_k (in\omega)^k} \qquad y(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\sum_{k=0}^{\ell} C_k (in\omega)^k} e^{in\omega x} \ . \tag{2.5}$$

Le n-ième mode de y ne "répond" qu'au n-ième mode de ϕ. On dit qu'il y a "découplage" des différents modes de Fourier. L'ensemble $\{Z_n\}$ des coefficients de proportionnalité entre le n-ième mode A_n de la source et le n-ième mode de la réponse y_n,

$$Z_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\ell} C_k (in\omega)^k} \ , \tag{2.6}$$

constitue ce qu'on appelle l'*impédance* ou la *susceptibilité* du système (cf Chapitre 4, § 4).

La fonction (2.5) est-elle la solution générale de (2.1) ? La théorie générale des équations différentielles linéaires nous permet d'affirmer que la solution générale de l'équation (2.1) est la somme de (2.5) et de la solution générale de l'équation sans second membre. Mais cette dernière est en général une fonction qui s'annule rapidement (on suppose ici que la variable x est en fait une variable de temps), et qu'on néglige après un régime transitoire. Par exemple, au chapitre 4, nous étudierons le cas du pendule amorti excité par une source extérieure : après une période transitoire où son mouvement propre s'amortit, le pendule ne répondra qu'à cette source (et de façon linéaire), en ayant oublié les conditions initiales, telles l'angle et la vitesse avec lesquels on l'a lâché au temps $t = 0$.

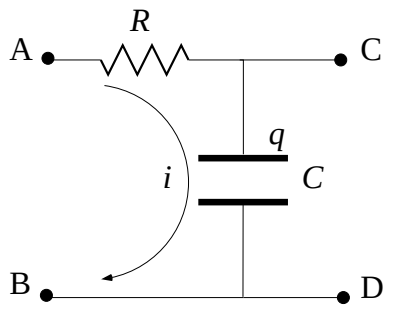


Fig. 3: Filtre RC.

2.2. Filtre RC

A titre d'exemple des considérations précédentes, considérons le circuit électrique représenté sur la figure 3.

Soit V_e le signal d'entrée (tension entre A et B), V_s le signal de sortie (entre C et D). On a $V_A - V_C = Ri = R\dot{q}$, $V_s = V_C - V_D = V_C - V_B = q/C$ et $V_e = V_A - V_B = R\dot{q} + \frac{1}{C}q$. Si le signal d'entrée $V_e(t)$ est donné, le signal de sortie $V_s(t) = q(t)/C$ est donc solution de l'équation différentielle

$$RC\dot{V}_s(t) + V_s(t) = V_e(t) \ . \tag{2.7}$$

Si $V_e(t)$ est un signal périodique de période $T = 2\pi/\omega$, on introduit sa série de Fourier $V_e(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n e^{in\omega t}$ et on procède comme au § 2.1. Pour chaque mode $V_n e^{in\omega t}$, on cherche une solution particulière de (2.7) de la forme $Z_n V_n e^{in\omega t}$, d'où $(iRCn\omega + 1)Z_n = 1$, soit[1]

$$Z_n = \frac{1}{1 + iRCn\omega} = \frac{1}{1 + i\frac{n\omega}{\omega_0}} \ , \tag{2.8}$$

avec $\omega_0 := 1/RC$ (qui a bien la dimension d'une fréquence). La solution particulière de (2.7) qu'on vient de construire

$$\hat{V}_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} Z_n V_n e^{in\omega t} \tag{2.9}$$

est la transformée du signal d'entrée $V_e(t)$ par le circuit ou "filtre" RC.

[1] Noter que les Z_n, ici des rapports de tensions, sont sans dimension, au contraire des impédances, rapports tension/intensité, mesurés en V/A=Ohm.

Si $\omega \gg \omega_0$ et donc que le signal d'entrée est à haute fréquence (par rapport à la fréquence caractéristique ω_0 du circuit), on peut approximer $Z_n \approx \frac{\omega_0}{in\omega}$. Le circuit RC a alors pour effet d'*intégrer* le signal d'entrée (à la multiplication par un facteur ω_0 près

$$\hat{V}_s(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{in\omega} V_n e^{in\omega t} = \omega_0 \int^t V_e(t')dt' \ , \tag{2.10}$$

(qui est une primitive de $V_e(t)$). Il est donc légitime d'appeler ce filtre RC un *intégrateur*.

Si par contre $\omega \ll \omega_0$, pour les petites valeurs de n (pour n tel que $n\omega \ll \omega_0$), on peut approximer $Z_n \approx 1$, et le signal de sortie $\hat{V}_s$ aux basses fréquences ne diffère pas beaucoup de celui d'entrée V_e. On dit que le circuit RC est alors un *filtre passe-bas*.

• *Signal d'entrée en créneaux*

Prenons un cas concret, celui d'un signal d'entrée donné par la "fonction créneau" V_e^{cr}, de période T, valant $-V$ sur $[0, T/2]$ et $+V$ sur $[T/2, T]$, étudiée à de petites modifications de notations près au § 1.2. Sa série de Fourier s'écrit

$$V_e^{cr}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4V}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)\omega t \ . \tag{2.11}$$

(En fait il n'y a convergence du membre de droite vers la fonction créneau, et donc égalité des deux membres de cette relation, qu'aux points autres que les points de discontinuité.)

Si $\omega \gg \omega_0$, le filtre transforme ce signal en

$$\hat{V}_s^{cr}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\omega_0 V}{\pi\omega(2n+1)^2} \cos(2n+1)\omega t \ , \tag{2.12}$$

qui doit donc être la série de Fourier d'une primitive de $V_e^{cr}(t)$, c'est-à-dire d'une fonction linéaire par morceaux, valant $C' - t$ sur $[0, T/2]$ et $C' - \frac{T}{2} + t$ sur $[T/2, T]$, avec une constante C' déterminée par les conditions initiales. C'est une "fonction triangle" (du type de celle étudiée au TD4, (I B1), à de petits changements de variable et de période près, et à une constante additive près). En $t = 0$, la série a pour somme

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\omega_0 V}{\pi\omega(2n+1)^2} = \frac{\pi\omega_0}{2\omega} V = \frac{T\omega_0}{4} V$$

(cf TD4, IB3 eq. (4)). La tension de sortie s'annulant en $t = 0$ est donc la fonction $\hat{V}_s^{cr}(t) - C$.

• *Solution générale de l'équation différentielle (2.7)*

Selon la théorie générale des équations différentielles linéaires, à la solution particulière $\hat{V}_s(t)$ de (2.9), on doit ajouter la solution générale de l'équation sans second membre $\dot{V}_s^{(0)} + \omega_0 V_s^{(0)} = 0$, soit $V_s^{(0)}(t) = V_1 e^{-\omega_0 t}$. La solution générale de (2.7) est donc $V_s(t) = \hat{V}_s(t) + V_1 e^{-\omega_0 t}$, avec V_1 une constante déterminée par les conditions initiales. Mais le deuxième terme s'atténue très rapidement, avec une échelle de temps caractéristique $t_1 = 1/\omega_0$: au bout de ce temps t_1, la fonction $V_s^{(0)}(t)$ a décru d'un facteur e, au bout de $2t_1$, elle a décru de e^2, etc. On conçoit donc qu'après une période transitoire, ce terme est négligeable devant la solution périodique $\hat{V}_s^{cr}(t)$, qui décrit le *régime permanent* du système.

Pour bien étudier le régime transitoire, examinons plus en détail le signal de sortie $V_s(t)$ pour un signal d'entrée donné par la fonction créneau $V_e^{cr}(t)$. Autrement dit, étudions le circuit auquel on applique la tension $-V$ aux bornes A et B du circuit pendant le temps $T/2$, puis la tension opposée V pendant la deuxième demi-période, etc. Supposons par exemple qu'à l'instant $t = 0$, le potentiel $V_s = V$.

On doit donc résoudre l'équation (2.7) avec un $V_e(t) = \mp V$ selon qu'on est dans une demi-période $t \in [nT, (n + \frac{1}{2})T]$ ou dans $t \in [(n + \frac{1}{2})T, (n + 1)T]$

$$\omega_0^{-1}\dot{V}_s + V_s = \begin{cases} -V & \text{si } t \in [nT, (n + \frac{1}{2})T] \quad (2.13a) \\ +V & \text{si } t \in [(n + \frac{1}{2})T, (n + 1)T] \ . \quad (2.13b) \end{cases}$$

Dans chacun de ces intervalles, la solution est comme toujours de la forme : solution particulière de l'équation, soit ici $\mp V$, + une solution générale de l'équation sans second membre, $\dot{V}_s + \omega_0 V_s = 0$, et donc une fonction proportionnelle à $\exp -\omega_0 t$

$$V_s(t) = \begin{cases} A_n e^{-\omega_0 t} - V & \text{si } t \in [nT, (n + \frac{1}{2})T] \quad (2.14a) \\ B_n e^{-\omega_0 t} + V & \text{si } t \in [(n + \frac{1}{2})T, (n + 1)T] \ . \quad (2.14b) \end{cases}$$

Le coefficient A_0 est déterminé par la condition initiale $V_s(0) = V$, d'où $A_0 = 2V$, puis les autres coefficients B_n et A_n sont déterminés en imposant la continuité de la charge q, donc de $V_s(t)$ à la fin de chaque demi-période $t = (n + \frac{1}{2})T$ ou $t = nT$. Par exemple à l'instant $t = T/2 = \pi/\omega$, la continuité entre les deux formes (2.14a) et (2.14b) ci-dessus donne

$$B_0 e^{-\omega_o \pi/\omega} = 2V(1 - e^{-\omega_o \pi/\omega}) \ .$$

Notant

$$\varepsilon := e^{-\omega_0 \pi/\omega} \ ,$$

donc un nombre réel < 1, on vérifie par récurrence que

$$A_n = 2V(1 - \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} - \cdots + \varepsilon^{-2n}) = 2V\frac{1 + \varepsilon^{-2n+1}}{1 + \varepsilon^{-1}}$$
$$B_n = 2V(1 - \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} - \cdots - \varepsilon^{-2n-1}) = 2V\frac{1 - \varepsilon^{-2n-2}}{1 + \varepsilon^{-1}}$$

et donc

$$V_s((n + \tfrac{1}{2})T) = -V + A_n\varepsilon^{2n+1} = -V + 2V\frac{\varepsilon + \varepsilon^{2n+2}}{1 + \varepsilon} = -V\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} + \mathrm{O}(\varepsilon^{2n+2})$$
$$V_s((n + 1)T) = V + B_n\varepsilon^{2n+2} = V\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} + \mathrm{O}(\varepsilon^{2n+3}) \ .$$

Si on néglige les termes $\mathrm{O}(\varepsilon^{2n+2})$, on voit que V_s prend aux demi-périodes la valeur $\pm V_\infty$ où

$$V_\infty = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\ .$$

L'interprétation est qu'après un temps nT, plus ou moins long selon la valeur du rapport ω_0/ω, le terme $e^{-\omega_0 \pi T} = \varepsilon^{2n}$ est devenu négligeable. C'est la fin du régime transitoire mentionné plus haut. Le système est alors dans un régime périodique où le condensateur se charge et se décharge, avec une tension à ses bornes oscillant entre les valeurs $\pm V_\infty$.

Examinons les deux cas limites où ω_0/ω est petit ou grand :

(1) $\omega/\omega_0 \gg 1$, c'est-à-dire on excite le filtre à de hautes fréquences par rapport à ω_0. D'une part, le régime transitoire dure assez longtemps, car ε est proche de 1. De l'autre, on peut approximer la fonction $V_s(t)$ par une fonction linéaire par morceaux, et on retrouve notre fonction triangle et le circuit intégrateur.

(2) $\omega/\omega_0 \ll 1$, le régime transitoire est beaucoup plus bref, car $\varepsilon \ll 1$, mais on ne peut plus linéariser $V_s(t)$. Dans la limite $\omega/\omega_0 \to 0$, on retrouve une fonction créneau : le filtre à basse fréquence est presque "transparent", c'est un filtre passe-bas. Noter que les discontinuités de la fonction créneau ont été adoucies : la fonction est continue.

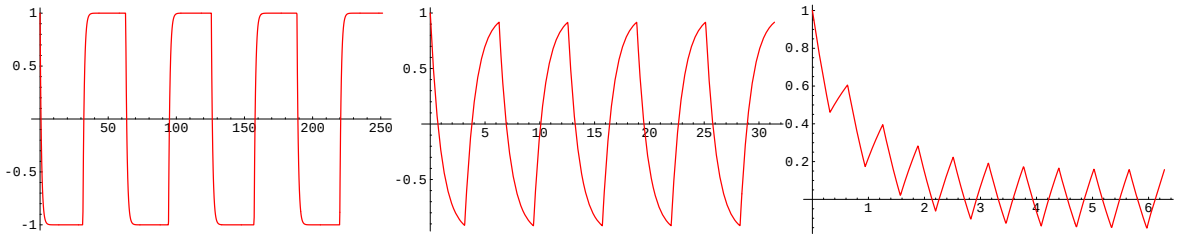


Fig. 4: Courbe $V_s(t)$ pour $\omega/\omega_0 = .1,\ 1.\ 10$. On a pris $V = 1$, $\omega_0 = 1$.

Exercice complémentaire, à résoudre par exemple à l'aide de Maple. Quel est l'effet d'une condition initiale $V(0)$ différente de celle choisie plus haut ? Par exemple, si $V(0) = \frac{1}{2}V$, ou $V(0) = -V$, tracer la courbe de $V_s(t)$ pour $\omega/\omega_0 = 0.1,\ 1,\ 10$. Montrer qu'au bout d'un temps fini, qui dépend de ce rapport ω/ω_0, les courbes reproduisent celles de la figure 4.

2.3. Autres exemples

Le fait qu'un système linéaire découple les différents modes de Fourier sera illustré au chapitre suivant par le cas de l'oscillateur harmonique couplé à une source périodique, avec applications à des systèmes très variés, mécaniques (systèmes oscillants), électriques (circuits LRC, filtres...) et même (sub)-atomiques (interaction atome-rayonnement).

À l'inverse, un système *non-linéaire* peut donner lieu à des phénomènes inédits dans le régime linéaire : couplage de modes, générations d'harmoniques, de sous-harmoniques, etc. Par exemple, un gaz rare comme le néon traversé par le faisceau d'un laser intense peut réémettre des harmoniques impairs. On rencontrera des systèmes de ce genre (oscillateurs à relaxation) au chapitre 5.

3. Analyse d'un système périodique avec une bande passante finie.

En pratique, le développement (1.1) (ou (1.9)) est rarement utilisé ou connu dans son intégralité. Ou bien, parce qu'on ne connaît qu'un nombre fini de termes, il est tronqué à un nombre de modes fini, la somme sur n courant de 0 à N (ou de $-N$ à N dans (1.9)). Ou bien, comme c'est le cas souvent en physique, la fonction représente un signal qui a pu être déformé lors de sa réception ou de son traitement, affectant ainsi les coefficients des différentes harmoniques, et tronquant éventuellement les basses ou les hautes fréquences. (On parle de *filtre passe-haut*, resp. *passe-bas*, pour un dispositif qui "coupe" les basses, resp. les hautes, fréquences.) On dira qu'on analyse la fonction f avec une *bande passante* finie si les hautes fréquences sont coupées ou fortement atténuées. Quel en est l'effet sur la reproduction de la fonction ?

On a vu au § 1.2 l'effet d'une coupure des harmoniques élevés sur les fonctions x^2, x et signe(x) périodiques : les détails fins de la fonction sont mal reproduits. En général, si les coefficients de la série décroissent lentement (par exemple, décroissance en $1/n$ des coefficients de Fourier des fonctions discontinues), il est clair que la somme sera sensible à une coupure des hautes fréquences. Pour ces fonctions, dont les premiers "modes" de Fourier sont d'ordre 1, il est clair aussi qu'une coupure des basses fréquences n'est pas anodine...

Pour analyser la chose autrement, examinons un exemple caractéristique. Considérons la fonction paire

$$f(x) = e^{-\Gamma|x|}$$

définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, ou si on préfère, pour tout x réel, en répétant l'intervalle $[-\pi, \pi]$ périodiquement. Pour Γ petit, la fonction est étalée autour de 0, et son pic se rétrécit quand Γ croît.

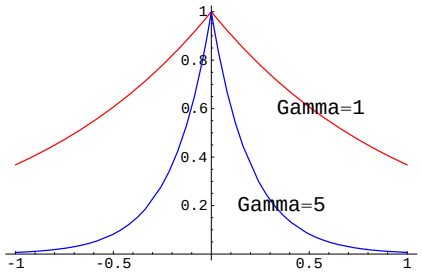


Fig. 5: La fonction $e^{-\Gamma|x|}$ pour deux valeurs $\Gamma = 1$ et $\Gamma = 5$.

La fonction ainsi définie est continue et périodique, selon les théorèmes précédents, son développement de Fourier doit converger. On calcule aisément les coefficients

$$a_n = \frac{2\Gamma}{\pi}\frac{(1-(-1)^n e^{-\Gamma\pi})}{\Gamma^2+n^2} \quad \text{et en particulier} \quad a_0 = \frac{2}{\pi\Gamma}\left(1-e^{-\Gamma\pi}\right) \ , \tag{3.1}$$

tandis que $b_n = 0$ (fonction paire). Pour $\Gamma\pi \gg 1$, on peut approximer par $a_n \approx \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma}{\Gamma^2+n^2}$ qui est une fonction "lorentzienne" (Fig. 4). Son graphe est une courbe en cloche plus étalée qu'une gaussienne[2] , dont on peut mesurer l'étalement en calculant la valeur de n où on atteint la demi-hauteur du maximum, soit $\frac{2\Gamma}{n^2+\Gamma^2} \approx \frac{1}{\Gamma}$, donc $|n| \approx \Gamma$.

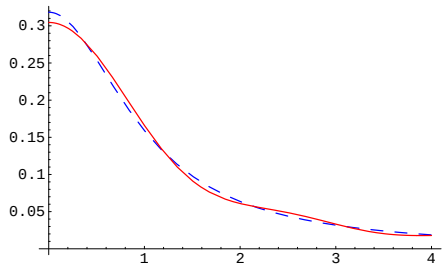


Fig. 6: Les coefficients de Fourier de la fonction f, par la formule (3.1) (trait plein) et par l'approximation lorentzienne (ligne brisée). Ici $\Gamma = 1$.

La conclusion de ce simple calcul, qu'on pourrait répéter avec d'autres fonctions, est qu'à une fonction $f(x)$ "piquée", respectivement étalée, correspond une distribution large, resp. étroite, de ses coefficients de Fourier. En particulier, dans notre exemple, à grand Γ (fonction f très piquée), on doit utiliser beaucoup d'harmoniques ($|n| \sim \Gamma$) pour reproduire correctement la fonction. Inversement une bande passante étroite (une limite basse sur les n) interdit de "voir" des détails fins de la fonction f. La bande passante doit être d'autant plus large que les détails de la fonction sont plus fins. Il s'agit là d'un **aspect fondamental de l'analyse de Fourier**, qu'on a déjà rencontré en Optique : avoir une bonne résolution spatiale, c'est-à-dire pouvoir discerner des détails fins, impose d'utiliser des petites longueurs d'onde (c'est-à-dire des grandes fréquences). Ce même principe va réapparaître sous des habits variés dans des situations multiples, telles les relations d'incertitude de la Mécanique Quantique.

[2] Rappelons que la fonction gaussienne $G(x) = e^{-\alpha x^2}$ a pour graphe une courbe en cloche, chère aux statisticiens. Voir aussi l'exercice sur la distribution de Maxwell, TD2.

4. Diffusion cohérente par un réseau

L'un des aspects les plus importants et les plus courants de l'interaction entre un rayonnement électromagnétique (lumière visible, ultra-violette, rayons X etc) et la matière est le phénomène de diffusion. À l'échelle microscopique, un photon de l'onde électromagnétique incidente excite un électron d'un atome du matériau considéré. L'atome excité réémet ensuite un photon. Nous allons nous intéresser aux aspects coopératifs de ce phénomène, quand plusieurs centres diffuseurs agissent de concert, de façon cohérente. Des phénomènes d'interférence, constructive ou destructive, peuvent alors avoir lieu. Le cas le plus simple est obtenu avec des centres diffuseurs régulièrement espacés, formant ainsi un *réseau*. Comme on va le voir, les phénomènes de diffusion cohérente se produisent quand la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la distance entre les centres diffuseurs de ce réseau. Il peut s'agir d'un réseau naturel, tel ceux constitués par les réseaux cristallins tridimensionnels, et le rayonnement électromagnétique intéressant sera alors fait de rayons X (longueur d'onde typique 0,1 Å$< \lambda <$ 100 Å)*. Pour observer le phénomène en lumière visible, (longueur d'onde 4000 Å$< \lambda <$ 8000 Å) il faut plutôt utiliser des réseaux artificiels. Les réseaux "linéaires" peuvent être obtenus par gravure d'une surface par des traits microscopiques régulièrement espacés : il faut alors se représenter la surface exposée au rayonnement comme une tôle ondulée, avec des ondulations de profil quelconque mais dotées d'une période spatiale très bien fixée.

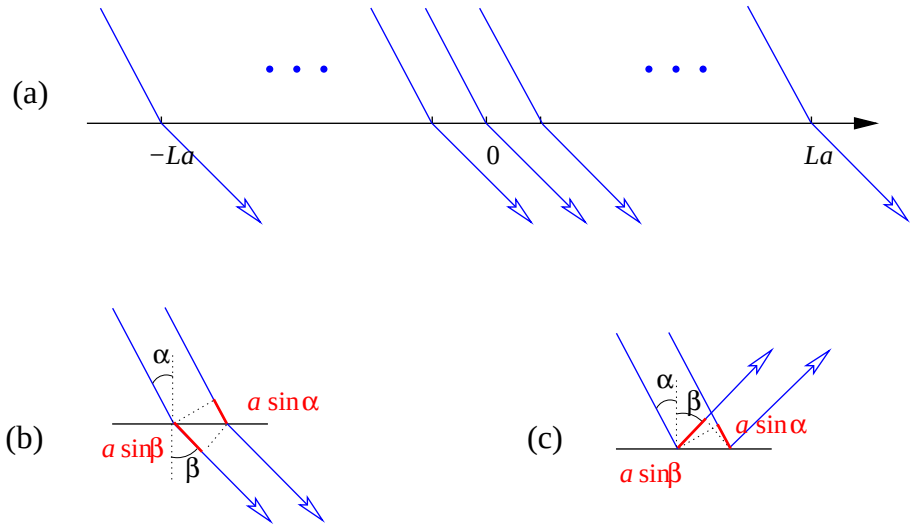


Fig. 7: (a) Diffusion par un réseau fini fait de $2L+1$ centres diffuseurs. (b-c) Différence de chemin optique entre deux rayons lumineux adjacents observés en transmission (b) ou en réflexion (c).

4.1. Réseau fini

On considère une onde lumineuse plane monochromatique, représentée par une amplitude complexe $Ae^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}$: $\vec{k}$ est le vecteur d'onde de longueur $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ et dirigé selon la direction de propagation de l'onde, λ sa longueur d'onde, $\omega = 2\pi\nu$, où ν est la fréquence de l'onde, et (dans le vide) $k = \omega/c$.

Cette onde est incidente selon un angle α sur un réseau linéaire de centres diffuseurs équidistants entre eux d'une distance a, et on l'observe dans la direction β, dans le plan déterminé par $\vec{k}$ et la ligne de diffuseurs, voir figure 7. On suppose que l'onde diffusée a la même longueur d'onde λ (diffusion élastique).

Dans un premier temps on suppose ce réseau fini, les coordonnées des centres courant de $-La$ à La, voir figure 7(a). L'amplitude totale est la superposition de l'amplitude incidente et de l'amplitude diffusée. Cette dernière est la somme des contributions de chacun des centres diffuseurs (dans l'approximation où on néglige la diffusion multiple). La contribution du ℓ-ème centre diffuseur, mesurée à la distance r_ℓ

* On rappelle la définition de l'Angström 1 Å$= 10^{-10}$m.

est de la forme $B(r_\ell)e^{i(\omega t-kr_\ell)}$. Si on suppose toutes les distances r_ℓ grandes par rapport aux distances entre centres, $r_\ell \approx r$, on peut négliger les variations de la fonction B : $B(r_\ell) \approx B(r)$, et ne garder que la dépendance de la phase e^{-ikr_ℓ} dans la distance r_ℓ, c'est-à-dire ne prendre en compte que la différence entre les "chemins optiques" des rayons lumineux diffusés par les différents centres. Or la différence de chemins optiques entre deux rayons lumineux incidents sur deux centres adjacents est égale à $\Delta = a(\sin\alpha - \sin\beta)$, voir figure 7(b-c). L'amplitude totale, somme des amplitudes des contributions des ondes diffusées par chaque centre, est donc égale à $B(r)e^{i(\omega t-kr)}$ multipliée par un facteur $\sum_{\ell=-L}^{L} e^{ik\ell\Delta}$. Mais on calcule aisément (série géométrique finie)

$$\sum_{\ell=-L}^{L} e^{i\ell x} = \frac{e^{i(L+1)x} - e^{-iLx}}{e^{ix}-1} = \frac{\sin(2L+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \ . \tag{4.1}$$

Le facteur multiplicatif de notre onde est donc

$$\frac{\sin((2L+1)k\frac{\Delta}{2})}{\sin(k\frac{\Delta}{2})} \ .$$

L'effet d'interférence est maximalement constructif quand la différence de chemin optique est un multiple entier de λ, donc $k\Delta$ un multiple entier de 2π. En effet quand $x \to 2K\pi$ dans (4.1), avec K entier, la somme approche $(2L+1)$. Pour toute autre valeur, elle est très proche de zéro, et ce d'autant plus que L est plus grand, voir figure.

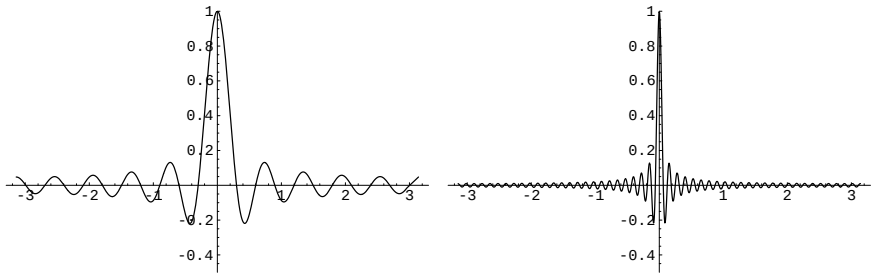


Fig. 8: La fonction $\sin(2L+1)\frac{x}{2}/[(2L+1)\sin\frac{x}{2}]$ entre $-\pi$ et π pour deux valeurs de $L = 10$ et $L = 50$. On voit que la fonction n'est d'ordre 1 que dans un intervalle $|\Delta x| \approx \mathrm{O}(\frac{1}{L})$ autour de chaque multiple de 2π.

On rappelle que l'*intensité* lumineuse (la grandeur physiquement –et physiologiquement !– observée) est égale au module carré de l'amplitude. C'est donc par un facteur $(2L+1)^2$ que l'effet d'interférence constructive se fait sentir.

On note que l'intensité, maximale en $k\Delta = K2\pi$, s'annule pour une valeur très voisine de l'angle β, telle que $k\Delta = K2\pi \pm \frac{2\pi}{2L+1}$. Cet intervalle angulaire $\delta\beta$ entre le maximum de brillance de la raie et son extinction définit la largeur de la raie d'interférence

$$\delta\beta = \frac{\lambda}{(2L+1)a\cos\beta} \ .$$

Les raies sont d'autant plus fines que le réseau est plus large (L plus grand). À cet effet de taille finie du réseau diffuseur viennent s'en ajouter bien d'autres qui contribuent à l'élargissement des raies : par exemple, dans le cas de la diffusion par un réseau cristallin, l'agitation thermique, les dislocations, la dispersion de la lumière pas strictement monochromatique...

Si deux ondes de longueurs d'onde λ et $\lambda' = \lambda+\delta\lambda$ sont envoyées sur le réseau, peut-on les discriminer, les "séparer" par leurs raies ? Si β correspond à un maximum d'intensité pour la K-ième raie de la longueur

d'onde λ, l'angle est déplacé de $\delta\beta = \frac{K}{a\cos\beta}\delta\lambda$ pour λ'. Cet angle sera observable s'il est supérieur à la largeur de raie précédemment calculée , soit

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{K(2L+1)} \ .$$

Le pouvoir séparateur est d'autant plus grand (c'est-à-dire $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ plus petit) que le réseau est plus large et la raie d'ordre plus élevé.

4.2. Réseau infini. Peigne de Dirac

Dans la limite où le nombre de diffuseurs tend vers l'infini, le facteur apparaissant dans l'amplitude devient de plus en plus "piqué" et grand au voisinage de toute valeur $2K\pi$ de x. La limite (dans un sens qui devrait être précisé) est donc infinie en tout point $2K\pi$, nulle ailleurs. On notera $\delta_P(x)$ cette limite, où l'indice "P" rappelle sa nature périodique, de période 2π

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ipx} = 2\pi\delta_P(x) \ . \tag{4.2}$$

Il s'agit d'un objet mathématique assez singulier, qu'on ne peut appeler "fonction" au sens usuel. Noter que si sa valeur est infinie en tout point multiple entier de 2π, l'intégrale de δ_P sur tout intervalle de longueur 2π est finie et vaut 1. En effet,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ipx}\,\mathrm{d}x = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta_{p0} = 1 \ , \tag{4.3}$$

où δ_{p0} désigne le symbole de Kronecker usuel, à ne pas confondre avec le nouvel objet δ_P. Plus généralement, soit f est une fonction suffisamment régulière (on dit "lisse"), et considérons l'intégrale de $f(x)\delta_P(x)$ sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Les valeurs de f en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de l'origine sont effacées par δ_P et finalement on s'attend à trouver

$$\int_{-\pi}^{\pi}\delta_P(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\int_{-\pi}^{\pi}\delta_P(x)\,\mathrm{d}x = f(0) \ , \tag{4.4}$$

ou plus généralement

$$\int_{-(2k+1)\pi}^{(2m+1)\pi}\delta_P(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\ell=-k}^{m} f(\ell) \ . \tag{4.5}$$

Il est clair qu'on a procédé de façon "heuristique", en échangeant hardiment intégration et sommation sur des objets mal définis mathématiquement. La "fonction" δ_P, aussi surnommée le "peigne de Dirac", est ce que les mathématiciens appellent une *distribution*. On peut isoler ses contributions au voisinage des entiers successifs en écrivant $\delta_P(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(x-p)$, où $\delta(x)$, localisée en 0, est la "fonction", ou distribution, delta de Dirac.

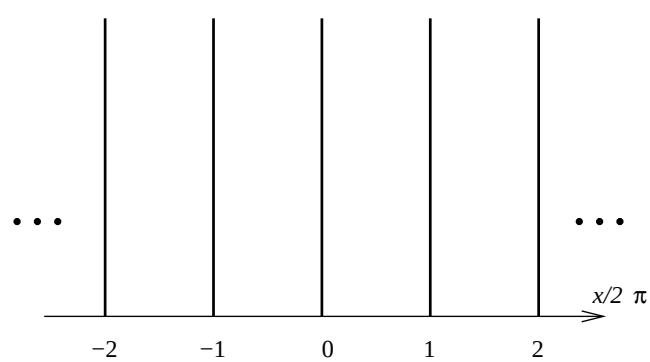


Fig. 9: Le "peigne de Dirac"

La théorie des distributions est un important développement de l'analyse du XXième siècle, auquel le mathématicien français L. Schwartz a largement contribué. Les distributions sont rencontrées fréquemment en physique, en particulier en Mécanique Quantique (même si le physicien a tendance à glisser sur les difficultés et subtilités inhérentes à ces objets...).

4.3. Réseau tridimensionnel. Condition de Bragg

Généralisons maintenant la discussion au cas où l'onde est incidente sur un réseau infini de centres diffuseurs selon une direction spécifiée par le vecteur d'onde $\vec{k}$ et est observée dans une direction spécifiée par le vecteur $\vec{k}'$. Par généralisation de la discussion précédente, on peut montrer que la condition de cohérence est $(\vec{k}-\vec{k}').\vec{a} = 2\ell\pi$ où $\vec{a}$ désigne tout vecteur du réseau cristallin diffuseur, et $\ell \in \mathbb{Z}$ est un entier arbitraire. Le propre d'un réseau cristallin ("de Bravais") $\mathcal{R}$ est d'être engendré par trois vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, en ce sens que pour toute paire de points M et M' de $\mathcal{R}$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de ces périodes $\overrightarrow{MM'} = \sum \alpha_i \vec{a}_i$. Il suffit donc d'assurer que $(\vec{k}-\vec{k}').\vec{a}_i = 2\ell_i\pi$ pour chacun de ces vecteurs. On montre que cette condition implique que $\vec{k}-\vec{k}'$ est parallèle à un plan du réseau (c'est-à-dire passant par trois points de $\mathcal{R}$). Tout se passe comme s'il y avait *réflexion* dans ce plan. En outre la condition fixe l'angle d'incidence (égal à celui de réflexion) à des valeurs bien déterminées, comme dans le cas unidimensionnel.

Chapitre 4. Dynamique des systèmes linéaires

1. Généralités sur les systèmes linéaires. L'oscillateur harmonique

1.1. Équations différentielles linéaires.

On va étudier des systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes dont la dynamique est définie par une équation différentielle linéaire dans la variable temps t, ou par un système de telles équations. Le cas le plus simple est celui d'une équation d'ordre 2

$$\ddot{x}(t) + A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = C(t) \tag{1.1}$$

où les fonctions A, B, C sont données et indépendantes de la variable dynamique x. L'intérêt de ce système est de bien représenter la physique de nombreux phénomènes vibratoires, mécaniques ou électriques, mais aussi de bien d'autres systèmes. Ainsi un solide peut être décrit comme composé d'atomes sujets à des forces de cohésion, un atome est soumis à des forces agissant sur ses électrons, et leur dynamique autour de leur position d'équilibre est bien décrite par (1.1) et ses généralisations... En général, l'oscillateur harmonique et ses généralisations à plusieurs degrés de liberté sont une bonne façon de décrire la dynamique d'un système au voisinage d'un point d'équilibre, comme on le verra plus bas.

Les théorèmes généraux que nous avons énoncés au Chapitre 2 sur les équations différentielles linéaires vont nous être utiles dans l'étude de (1.1) et de ses généralisations.

1.2. Oscillateur harmonique

On va étudier de façon détaillée le cas où les coefficients A et B de l'équation (1.1) sont constants, indépendants du temps. Après changement de notations, on l'écrit sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = C(t) \ . \tag{1.2}$$

et on parle d'un oscillateur harmonique amorti et excité.

On est familier avec l'oscillateur harmonique non-amorti et non excité, régi par l'équation

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{1.3}$$

Rappelons d'abord l'importance physique et les propriétés majeures de ce cas. Il décrit le mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel proportionnel au déplacement par rapport à la position d'équilibre :

$$m\ddot{x} = -kx \ . \tag{1.4}$$

C'est le cas pour un point attaché à un ressort qui exerce une force $F = -kx$ proportionnelle et opposée à son élongation (positive ou négative) x par rapport à sa position d'équilibre ; $k > 0$ est la "raideur" du ressort. L'équation différentielle s'intègre de diverses façons :

- On vérifie aisément que $x_1(t) = \sin\omega_0 t$ et $x_2(t) = \cos\omega_0 t$ sont deux solutions linéairement indépendantes. Une combinaison linéaire de ces deux solutions $\lambda_1 \sin\omega_0 t + \lambda_2 \cos\omega_0 t$ peut se récrire sous la forme

  $$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \ . \tag{1.5}$$

  C'est bien la solution générale de (1.3), avec deux constantes A et ϕ déterminées par les conditions initiales : au temps $t = 0$, $x(0) = A\sin\phi = x_0$, $\dot{x}(0) = \omega_0 A\cos\phi = v_0$, x_0 et v_0 donnés. $x(t)$ a un mouvement oscillant, dont A est l'amplitude et ϕ le déphasage*. La période est $2\pi/\omega_0$, sa fréquence est $\omega_0/2\pi$. La grandeur $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est appelée selon le contexte pulsation, ou fréquence angulaire, etc; on l'appellera aussi par abus de langage *fréquence*, chaque fois que cela ne risquera pas de causer d'ambiguïté. L'indice 0 sur ω_0 se refère à la situation présente de l'oscillateur non amorti et non excité.
- On peut aussi intégrer (1.4) en la multipliant par $\dot{x}$ et en reconnaissant dans $\ddot{x}\dot{x}$ et dans $\dot{x}x$ les dérivées par rapport à t de $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ et $\frac{1}{2}x^2$ respectivement. On récrit donc (1.4) comme

  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2\right) = 0 \tag{1.6}$$

  qui s'intègre en

  $$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E \ = \ \text{constante} \ . \tag{1.7}$$

  Ce que cette "constante du mouvement" (ou "intégrale première") de l'équation initiale exprime est bien sûr la loi de conservation de l'énergie du système isolé. La somme de l'énergie cinétique (le premier terme) et de l'énergie potentielle du ressort

* Noter que ce déphasage ϕ n'a pas ici un sens intrinsèque : il peut être absorbé dans un changement de l'origine des temps.

(le second) est constante dans le temps et vaut E, énergie totale, déterminée par les conditions initiales

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{2}x_0^2 \ . \tag{1.8}$$

La discussion se poursuit en récrivant l'équation (1.7) comme

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 \left(\frac{2E}{k} - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui s'intègre à son tour par changement de la variable $x = \left(\frac{2E}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \sin u$, d'où

$$\frac{du}{dt} = \omega_0 \tag{1.9}$$

donc finalement $x(t) = \left(\frac{2E}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega_0 t + \phi)$, avec une constante d'intégration ϕ. Le résultat est bien identique à ce qu'on a obtenu plus haut, compte tenu de $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{k}{2}A^2$.

Remarques.

1. Il y avait a priori un arbitraire de signe dans l'extraction de la racine carrée dans $dx/dt = \omega_0(\cdots)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que le signe opposé aurait conduit à la même expression finale, à une redéfinition de ϕ près.

2. Retournant aux énergies cinétique et potentielle, on trouve pour elles les expressions

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \quad , \qquad E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \ . \tag{1.10}$$

Considérons la *moyenne* de ces quantités sur un temps long par rapport à leur période (ou sur une période précisément, ce qui revient au même, pourquoi?)

$$\langle E_{\substack{\text{cin}\\ \text{pot}}} \rangle := \frac{1}{T}\int_0^T E_{\substack{\text{cin}\\ \text{pot}}}(t)\,\mathrm{d}t \ . \tag{1.11}$$

Se rappelant que les fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ moyennées sur leur période valent $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}$, on conclut que les énergies cinétique ou potentielle moyennées sur une période sont égales. Cette *équipartition* de l'énergie moyenne entre énergie cinétique et énergie potentielle constitue une des particularités de l'oscillateur harmonique.

La physique de l'oscillateur harmonique dépasse largement le cas du ressort évoqué plus haut. Considérons un pendule simple, constitué d'une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable de longueur ℓ. Le pendule oscille dans un plan vertical.

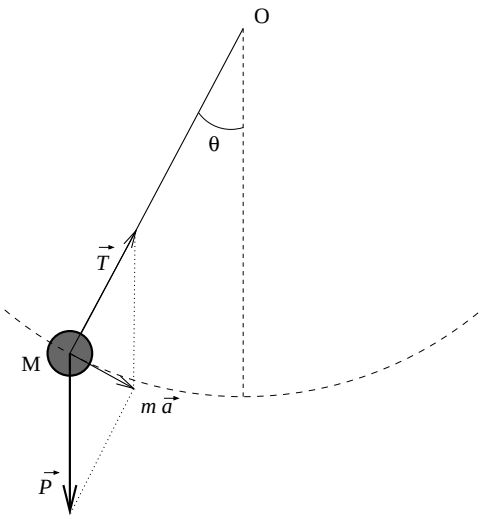


Fig. 1: Pendule simple.

Il effectue son mouvement sous la seule action de la gravité (son poids $\vec{P} = -mg\hat{z}$, où $\hat{z}$ désigne un vecteur unité dirigé selon l'axe vertical vers le haut) et de la tension du fil $\vec{T}$, et selon l'équation fondamentale de la dynamique, $m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} - mg\hat{z}$. On se débarrasse de la tension inconnue $\vec{T}$ par projection de l'équation sur une direction tangente à sa trajectoire circulaire et on a alors

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \ . \tag{1.12}$$

Cette équation peut s'étudier telle quelle, cf TD et TP. En particulier, elle admet à nouveau une intégrale première, obtenue en multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant, qui exprime la conservation de l'énergie, cf chapitre 4, §3.2. Mais dans un premier temps, nous allons supposer les oscillations du pendule petites, donc $\theta \ll 1$ ce qui nous autorise à *linéariser* le problème en remplaçant $\sin\theta$ par le premier terme de son développement limité

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta \ . \tag{1.13}$$

Identifiant $\omega_0^2 = g/\ell$, on a retrouvé l'équation (1.3) !

Une autre façon de procéder est d'écrire l'équation de variation du moment cinétique par rapport à O, $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$, où $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \text{ couple des forces extérieures } = \vec{r} \times \vec{F} \ . \tag{1.14}$$

En projetant sur un axe horizontal, on trouve

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$$

qui n'est autre que (1.12).

Le pendule simple, dans l'approximation des petites oscillations ($\theta \ll 1$) que nous avons faite, a la propriété remarquable d'*isochronisme* : la période des oscillations est indépendante de leur amplitude, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Cette propriété n'est vraie que dans l'approximation des petites oscillations, et on doit lui apporter des corrections dès que θ croît.

La discussion qui précède s'applique à une classe beaucoup plus large de systèmes mécaniques que le ressort ou le pendule simple. Considérons un système soumis à une force "dérivant d'un potentiel" $m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}$. Supposons que le potentiel (énergie potentielle) $U(x)$ a un minimum en $x = 0$ et qu'on développe U au deuxième ordre au voisinage de ce point : $U(x) = U(0) + xU'(0) + \frac{x^2}{2}U''(0) + \cdots$. Mais le terme en x s'annule puisqu'on est à un minimum de U : $U'(0) = 0$, et on approxime donc $U(x) \approx U(0) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$: on est bien ramené à notre oscillateur harmonique, avec une pulsation propre ω_0 donnée par la courbure $U''(0)$ du potentiel.

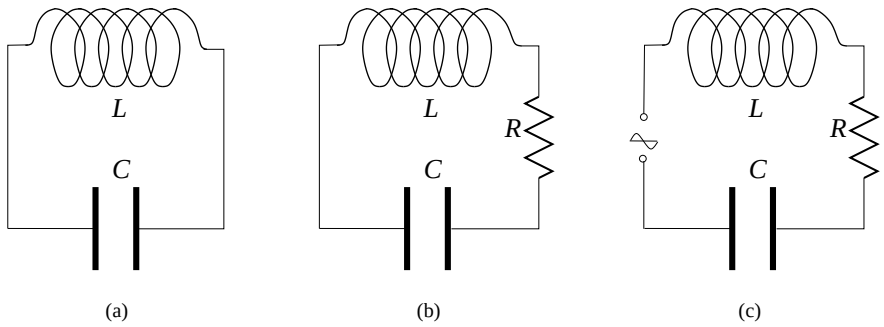


Fig. 2: Circuits LC et LRC, isolés ou couplés à une tension extérieure.

Un autre système physique décrit par l'équation (1.3) est le circuit électrique LC constitué d'une bobine dotée d'une inductance L et d'un condensateur de capacité C (figure 2(a)), déjà évoqué au Chapitre 2, où nous avons trouvé pour la charge Q une équation du second ordre :

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{1.15}$$

qui s'identifie avec (1.4) si on change $Q \mapsto x$, $L \mapsto m$ et $\frac{1}{C} \mapsto k$. La charge oscille donc selon (1.5) avec une fréquence $\omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}$. Il en est de même de l'intensité du courant I ou de la tension aux bornes du condensateur.

On peut se demander comment prendre en compte la résistance, négligée dans ce qui précède, mais toujours présente dans un circuit électrique. Son rôle est d'introduire un terme dissipatif dans l'oscillateur harmonique, c'est ce que nous allons étudier maintenant.

2. Amortissement

2.1. Frottement fluide

On imagine maintenant que le système mécanique étudié est soumis à une force de friction proportionnelle (et opposée) à sa vitesse. Il s'agit là d'une bonne description du "frottement fluide", auquel est soumis un corps solide en déplacement à faible vitesse dans un fluide. Par exemple, une sphère de rayon r se déplaçant dans un fluide en reçoit une force $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où η est la *viscosité* du fluide (loi de Stokes). D'une façon générale, il est utile d'écrire cette force de frottement sous la forme $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$, avec un paramètre τ qui a la dimension d'un temps et qui va fournir une échelle de temps importante dans les phénomènes étudiés dans la suite.

C'est ainsi que la vitesse d'un corps en chute libre (une goutte de pluie tombant dans l'air ...) obéit à l'équation $\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = g$, dont la solution est $v(t) = g\tau + Ae^{-t/\tau}$, (avec un axe des vitesses dirigé vers le bas), avec une constante A déterminée par les conditions initiales. La vitesse limite est donc $g\tau$ (cf TD 3).

Il existe d'autres types de forces de frottement. Le "frottement solide", une force constante indépendante de la vitesse et de l'amplitude, décrit la force qui s'exerce dans un contact entre deux solides rugueux. A l'inverse, aux grandes vitesses, un fluide peut exercer une force quadratique dans la vitesse sur un corps solide (cf étude du parachute au TD 3). D'autres formes de frottement, dépendantes de l'amplitude, peuvent aussi se manifester... On reviendra dans la suite sur certaines d'entre elles.

Une autre situation physique décrite par un terme de "frottement fluide" est le circuit LRC, comme on l'a mentionné plus haut, cf figure 2(b). Dans la discussion ci-dessus, un terme de résistance introduit une différence de potentiel supplémentaire égale à RI, selon la loi d'Ohm, donc l'équation (1.15) est à modifier en

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \ . \tag{2.1}$$

Faut-il rappeler l'importance pratique de l'amortissement, et ses aspects néfastes ou utiles ? Il faut lutter contre lui dans l'entretien des oscillations d'un (ou d'une) pendule; par contre, il est le bienvenu dans les amortisseurs des automobiles ou des bateaux, il permet de lire rapidement le résultat du galvanomètre, etc.

2.2. Oscillateur harmonique amorti

L'oscillateur harmonique sujet à cette force de friction obéit donc à l'équation (1.2) avec un membre de droite nul

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{2.2}$$

On va chercher la solution générale de cette équation sous la forme d'une exponentielle $x(t) = e^{\alpha t}$ avec α éventuellement **complexe**. La dérivation d'une telle exponentielle

revenant à sa multiplication par α, on voit que (2.2) est satisfaite à condition que α soit racine de

$$\alpha^2 + \frac{1}{\tau}\alpha + \omega_0^2 = 0 \ , \tag{2.3}$$

une équation du second degré qui a deux solutions soit réelles, soit complexes conjuguées. La solution générale de (2.2) est une combinaison linéaire des deux exponentielles correspondantes. Les deux cas décrivent deux situations physiques différentes.

(a) Si $\omega_0\tau > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, les deux racines sont complexes conjuguées : $\alpha_\pm = \frac{1}{2\tau}(-1 \pm i\sqrt{4\omega_0^2\tau^2 - 1})$. La solution générale de (2.2) est de la forme

$$x(t) = B_+ e^{-t/2\tau} e^{\frac{it}{2\tau}\sqrt{4\omega_0^2\tau^2-1}} + B_- e^{-t/2\tau} e^{-\frac{it}{2\tau}\sqrt{4\omega_0^2\tau^2-1}}$$

avec deux constantes $B_\pm$ a priori complexes. La solution $x(t)$ devant être réelle, $B_\pm$ doivent en fait être complexes conjuguées, ce qu'il est utile d'écrire sous la forme

$$B_\pm = e^{\pm i(\phi - \frac{\pi}{2})}\frac{A}{2} \ ,$$

avec deux nouvelles constantes réelles A et ϕ à déterminer en fonction des conditions initiales. On peut alors récrire

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau}\sin(\tilde{\omega}_0 t + \phi) \tag{2.4}$$

avec

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 1/(4\tau^2)} \ . \tag{2.5}$$

Quand $\tau \to \infty$, $\tilde{\omega}_0 \to \omega_0$ et on retrouve bien sûr (1.5). Le mouvement décrit par (2.4) est un mouvement oscillant amorti, avec une "fréquence" $\tilde{\omega}_0$ plus petite que ω_0 (est-ce intuitif ?) et une amplitude décroissant exponentiellement.

(b) Si $\omega_0\tau < \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est positif, les deux racines $\alpha_\pm$ de (2.3) sont réelles et négatives $\alpha_\pm = \frac{1}{2\tau}(-1 \pm \sqrt{1 - 4\omega_0^2\tau^2})$. La solution générale de (2.2) est donc

$$x(t) = A_+ e^{-t/2\tau} e^{\frac{t}{2\tau}\sqrt{1-4\omega_0^2\tau^2}} + A_- e^{-t/2\tau} e^{-\frac{t}{2\tau}\sqrt{1-4\omega_0^2\tau^2}} \ , \tag{2.6}$$

somme de deux termes montrant un amortissement exponentiel mais ne présentant plus de caractère oscillant. Si $A_+ \neq 0$ et si $\sqrt{1 - 4\omega_0^2\tau^2}$ n'est pas petit, le premier terme s'amortit beaucoup moins vite que le second et domine donc rapidement. Dans tous les cas, l'amortissement fort ($\frac{1}{\tau} > 2\omega_0$) a supprimé les oscillations. Pour cette

raison, on se réfère à ce cas (b) comme le **régime sur-amorti**, le cas (a) étant le **régime sous-amorti**. Voir la figure pour une illustration de ces deux cas.

(c) Pour être complet, discutons rapidement le cas limite où $\omega_0\tau = \frac{1}{2}$, le discriminant s'annule, les deux racines coïncident, $\alpha_\pm = -\frac{1}{2\tau}$, et les deux solutions qui leur sont attachées ne sont plus linéairement indépendantes. On sait toutefois que dans ce cas les fonctions $e^{-t/2\tau}$ et $te^{-t/2\tau}$ sont deux solutions linéairement indépendantes. La solution $x(t)$, superposition linéaire de ces deux fonctions, présente donc à nouveau un amortissement sans oscillations.

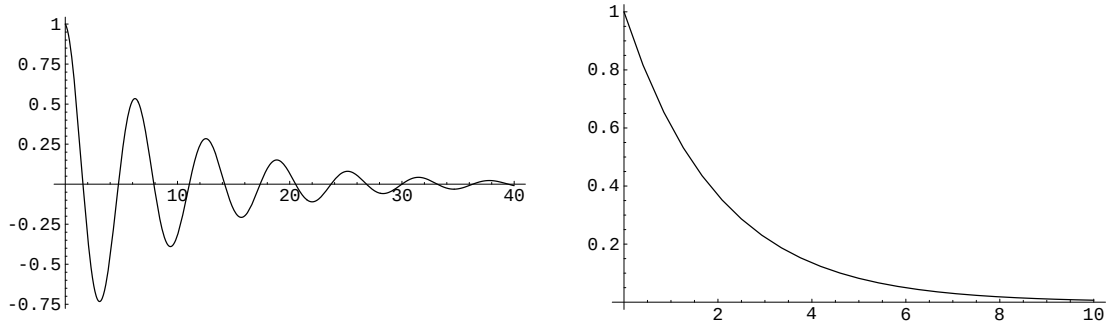


Fig. 3: Régimes sous- et sur-amortis. On a pris $\omega_0 = 1$, $\tau = 5$ dans le premier cas, $\omega_0 = 1$, $\tau = .4$ dans le deuxième, où on n'a gardé que la première exponentielle de (2.6).

Dans tous les cas, dès que $\tau > 0$, on voit que le système s'amortit, plus ou moins vite, mais inexorablement. Il est d'usage de définir le **temps de relaxation** τ_r comme le temps au bout duquel les variables x^2, ou $\dot{x}^2$ (ou encore l'énergie, qui est quadratique en x) ont décru par un facteur e. On trouve dans les deux cas d'amortissement faible et fort que

$$\tau_r = \begin{cases} \tau & \text{si } \tau\omega_0 > \frac{1}{2} \qquad \text{sous-amorti} \\ \frac{\tau}{1-\sqrt{1-4\omega_0^2\tau^2}} \approx \frac{1}{2\omega_0^2\tau} & \text{si } \tau\omega_0 \ll \frac{1}{2} \qquad \text{très sur-amorti .} \end{cases}$$

Pour un système de ce type mais excité par une source extérieure (le terme $C(t)$ dans (1.2)), la solution générale, comme on sait, est somme d'une solution particulière et de la solution amortie qu'on vient de décrire. Le fait qu'au bout d'un temps τ_r les variables dynamiques de cette solution amortie aient été atténuées exponentiellement signifie que le système est alors complètement piloté par la source excitatrice et a "oublié" ses conditions initiales. C'est ce que nous verrons en détail au paragraphe suivant.

2.3. Bilan d'énergie, facteur Q.

On a vu au paragraphe précédent que dans un oscillateur non amorti, on avait équipartition de l'énergie entre énergie cinétique et énergie potentielle. Qu'en est-il en présence d'amortissement ? Pour simplifier le calcul, supposons que les conditions initiales sont telles que $A = x_0$ et $\phi = 0$ dans (2.4) et bornons nous au cas d'un amortissement faible, $\omega_0\tau \gg \frac{1}{2}$, et donc, dans la solution (2.4), $\tilde{\omega}_0 \approx \omega_0$. On calcule alors

$$\dot{x}(t) = x_0 e^{-t/2\tau}\left(\tilde{\omega}_0 \cos\tilde{\omega}_0 t - \frac{1}{2\tau}\sin\tilde{\omega}_0 t\right) .$$

Dans le calcul des moyennes de $x^2(t)$ et de $\dot{x}^2(t)$ sur une période, apparaissent des termes $e^{-t/\tau}\cos^2\tilde{\omega}_0 t$ etc. Mais puisqu'on a supposé $\omega_0 \gg \frac{1}{2\tau}$, l'exponentielle $e^{-t/\tau}$ varie très peu sur une période, et on peut la sortir de l'intégrale. On se ramène de la sorte aux intégrales déjà considérées et on calcule aisément

$$\begin{aligned}\langle E_{\text{cin}}(t)\rangle &\approx \frac{mx_0^2}{4}\left(\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2\right)e^{-t/\tau} \approx \frac{1}{4}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\\ \langle E_{\text{pot}}(t)\rangle &= \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle e^{-t/\tau}\sin^2\tilde{\omega}_0 t\rangle \approx \frac{1}{4}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} .\end{aligned}$$

On note que si on a bien encore (dans cette approximation) équipartition entre énergie cinétique et énergie potentielle, leur somme $E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$ dépend du temps : l'énergie du système n'est plus conservée, elle est *dissipée* en raison de l'amortissement. La puissance dissipée P est elle-même fonction du temps

$$P(t) := -\frac{d}{dt}\langle E(t)\rangle = \frac{1}{2\tau}\left(m\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\right) = \frac{\langle E(t)\rangle}{\tau} .$$

On vérifie que cette énergie dissipée est égale (au signe près) au travail de la force de frottement. Sur une période $W_{\text{frott.}} = \int_t^{t+T}\left(-\frac{m}{\tau}v\right)v\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\tau}\int\frac{mv^2}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{T}{\tau}\langle E\rangle = -TP(t)$.

Facteur de qualité Q. Il est habituel de définir le *facteur de qualité* d'un système oscillant sujet à un amortissement par

$$Q := 2\pi\frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie dissipée par période}} . \tag{2.8}$$

Q est donc une mesure de l'amortissement, une valeur élevée de Q signalant un amortissement *faible*. Ici nous avons

$$Q = \frac{2\pi E}{P\frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}} = \frac{E\tilde{\omega}_0}{P} \approx \omega_0\tau .$$

(Dans l'approximation d'amortissement faible que nous avons faite, E ne varie pas de façon appréciable sur une période.) Noter que Q est aussi (2π fois) le nombre d'oscillations pendant le temps de relaxation $\tau_r = \tau$.

Pour fixer les idées, voici quelques valeurs typiques de Q pour différentes situations physiques de corps vibrants

- Terre (ondes sismiques) $Q \approx 250 - 1500$
- Corde de piano ou de violon $Q \approx 10^4$
- Atome excité $Q \approx 10^7$ etc.

3. Oscillateur excité par une source périodique

On considère maintenant que l'oscillateur harmonique amorti est soumis à une force périodique dans le temps. Selon le principe de superposition linéaire et celui de la décomposition de cette force en série de Fourier, on peut toujours la supposer sinusoïdale, et l'équation à résoudre s'écrit donc

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \ . \tag{3.1}$$

Attention aux notations ! $\omega > 0$ désigne maintenant la fréquence connue de la source externe.

Dans sa réalisation électrique, l'équation décrit le circuit LRC de la figure 2(c) excité par une tension sinusoïdale de fréquence ω.

On applique une fois encore le principe de superposition linéaire : la solution générale de l'équation (3.1) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre, telle qu'on l'a étudiée au paragraphe précédent. Pour trouver une solution particulière de (3.1), on complexifie le problème, en cherchant une solution $\tilde{x}$ de $\ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{\tau}\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = Ae^{i\omega t}$, étant entendu qu'on doit en prendre la partie réelle $x = \Re e(\tilde{x})$ pour retrouver le $\cos\omega t$, à la fin du calcul. Il est suggéré de chercher une solution de la forme $\tilde{x}(t) = Be^{i(\omega t-\theta)}$, ($B$, θ réels), et on trouve que θ et B doivent satisfaire

$$Be^{-i\theta} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} \ . \tag{3.2}$$

A et B étant réels (et de même signe, par convention) ; θ est la phase du dénominateur, $\tan\theta = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}$, avec $\sin\theta \propto \omega/\tau > 0$, avec un coefficient de proportionnalité positif, donc $\sin\theta > 0$, ce qui fixe la détermination de l'Arc tan [1],

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Arc}\tan\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2} & \text{si } \omega_0 \geq \omega \\ \pi - \operatorname{Arc}\tan\frac{\omega/\tau}{\omega^2-\omega_0^2} & \text{si } \omega_0 \leq \omega \end{cases} \tag{3.3}$$

et finalement en revenant à des valeurs réelles

$$x_{\text{perm}}(t) = B\cos(\omega t - \theta(\omega)) = \frac{A}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}]^{\frac{1}{2}}}\cos(\omega t - \theta(\omega)) \tag{3.4}$$

est une solution particulière de l'équation. L'indice "perm" va être expliqué.

La solution générale est donc la somme de (3.4) et de l'une ou l'autre des solutions (2.4) ou (2.6) de l'équation sans second membre, selon la valeur de l'amortissement. Comme cette dernière s'atténue au bout d'un temps d'ordre τ_r, on va négliger ce régime transitoire et se concentrer sur le régime *permanent* décrit par (3.4). C'est le résultat qui avait été annoncé plus haut : après un régime transitoire d'une durée d'ordre τ_r, le système entre dans un régime permanent où il est couplé à la source extérieure, subit des *oscillations forcées* et a oublié ses conditions initiales.

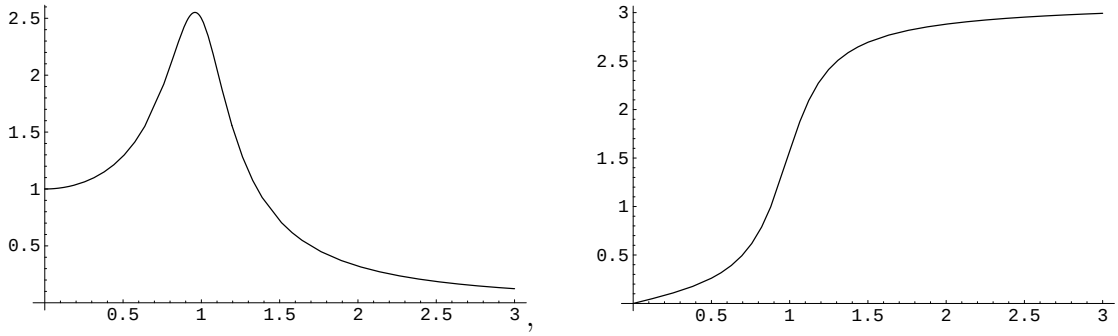


Fig. 4: Amplitude B/A et déphasage θ d'un oscillateur excité, en fonction de ω. On a pris $\omega_0 = 1$, $\tau = 2.5$.

[1] On rappelle que par définition de la fonction inverse Arc tan, $-\frac{1}{2}\pi \leq \operatorname{Arc}\tan \leq \frac{1}{2}\pi$, et que la résolution de $\tan\alpha = \tan\beta$ donne $\alpha = \beta$ à un multiple entier de π près.

Examinons donc de plus près ce régime permanent. Tout d'abord, notons que l'angle θ a maintenant un sens physique intrinsèque, (au contraire de ce qui se passait dans le cas non excité, où il pouvait être absorbé dans une redéfinition de l'origine du temps t). Cet angle décrit en effet le déphasage entre la force excitatrice et la réponse du système. Comme on a noté que $\sin\theta > 0$, donc $\theta \in [0, \pi]$, on voit que la réponse est toujours en *retard* sur l'excitation. Ce déphasage est entre 0 et $\pi/2$ pour $\omega < \omega_0$, il est entre $\pi/2$ et π pour $\omega > \omega_0$. (Voir la figure 4 pour les courbes du rapport des amplitudes B/A et du déphasage θ.) Une autre façon de dire les choses consiste à regarder la vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$. À un coefficient près, $v(t) \sim -\sin(\omega t - \theta) = \cos(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2})$. Son déphasage par rapport à la source excitatrice est donc $\frac{\pi}{2} - \theta$. La vitesse est donc en avance sur la source pour $\omega < \omega_0$, et en retard pour $\omega > \omega_0$.

Rapport des amplitudes. Résonance.

Revenons au rapport des amplitudes de la réponse et de la source

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}]^{\frac{1}{2}}} \ . \tag{3.5}$$

Quand $\omega \ll \omega_0$, $\theta \approx 0$ et $B/A \approx \frac{1}{\omega_0^2}$; quand $\omega \gg \omega_0$, $\theta \approx \pi$ et $B/A \approx \frac{1}{\omega^2}$; entre ces deux comportements limites, le rapport B/A, c'est-à-dire la réponse du système, peut être forte. On vérifie aisément (cf TD 6) que le rapport d'amplitudes B/A a un maximum pour

$$\omega = \omega_m := \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}} \ , \tag{3.6}$$

à condition que $2\omega_0^2\tau^2 > 1$, c'est-à-dire pour un amortissement pas trop grand. Dans le cas contraire, si $2\omega_0^2\tau^2 \leq 1$, le rapport B/A est maximum en $\omega = 0$.

On note que la valeur de ω_m qu'on vient de calculer en (3.6) est toujours inférieure à ω_0 et qu'elle est d'autant plus proche de ω_0 que τ est grand (amortissement faible). Le maximum de B/A en ω_m est d'autant plus élevé que τ (ou le facteur de qualité Q) est plus grand, puisque $(B/A)|_{\omega=\omega_m} = \frac{2\tau^2}{(4\omega_0^2\tau^2-1)^{\frac{1}{2}}}$, qui est $\approx \frac{\tau}{\omega_0}$ pour $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$, c'est-à-dire $Q \gg 1$. On vérifie aussi que quand τ est grand, le pic de B/A est étroit, voir figure 5 et TD 6. Ce pic très marqué (haut et étroit) de la réponse du système pour τ grand et $\omega \approx \omega_0$ est le phénomène de *résonance*. Il se manifeste aussi sur le déphasage dont la pente en ω_m est de plus en plus marquée quand Q croît. (Exercice : tracer le graphe de θ en fonction de ω pour diverses valeurs de Q.)

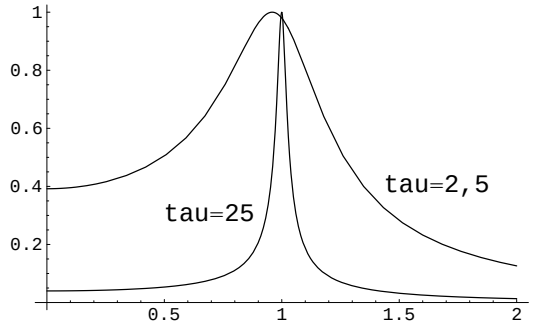


Fig. 5: Courbes de $B(\omega)/B(\omega_m)$, c'est-à-dire de l'amplitude de l'oscillation forcée normalisée par sa valeur au maximum ω_m, en fonction de ω ; les deux courbes correspondent à deux valeurs de $\tau = 2,5$ et 25, soit $Q = 2,5$ et 25 (on a pris $\omega_0 = 1$).

À nouveau, on peut rappeler l'importance pratique du phénomène de résonance : il est utile au sonneur de cloche, à l'enfant sur sa balançoire, ... Il permet une amplification importante d'un signal électrique par un circuit LRC, dans une étroite bande de fréquence autour de la fréquence propre. En revanche, il peut occasionner des vibrations ou oscillations d'amplitude croissante pouvant aller jusqu'à la brisure, comme on l'illustre sur un verre de cristal, qu'on peut exciter jusqu'à la cassure. Plus dramatique est l'effondrement de ponts sous l'effet d'une excitation résonnante.

Chaque pays semble avoir son folklore en la matière. Les anglo-saxons se réfèrent au pont de Tacoma, (état de Washington, USA), qui s'est effondré en 1940, suite à des oscillations provoquées par le vent (voir les images spectaculaires sur le site `http://www.ketchum.org/bridgecollapse.html`). Quant aux français, ils citent encore l'épisode suivant : « Le 1er Avril 1850, par grand vent, une troupe de 500 soldats marchait au pas cadencé sur un pont suspendu au-dessus de la Maine, à Angers. Par résonance entre la période propre d'oscillation du pont et celle du pas, le pont prit une telle amplitude de vibration qu'il céda, et les militaires furent précipités dans le fleuve. Près de la moitié périrent. » Cet événement jeta une grande suspicion (injustifiée !) sur la toute nouvelle technique des ponts suspendus...

• Calcul de la bande passante, etc : TD 6.

• Bleu du ciel. Les considérations qui précèdent trouvent une application inattendue dans l'explication d'un phénomène naturel : le bleu du ciel. La lumière du Soleil est diffusée par les molécules de l'atmosphère, et une modélisation simple consiste à considérer chacune de ces molécules comme un petit oscillateur excité par cette lumière. Un tel oscillateur a une fréquence propre ω_0 est dans l'ultraviolet lointain. En lumière visible, il est donc excité à une fréquence $\omega \ll \omega_0$ et vibre selon la loi (3.4), et selon les calculs qui précèdent, le rapport B/A dépend faiblement de ω pour $\omega \ll \omega_0$. Cependant, selon la théorie électromagnétique, l'oscillateur réémet lui-même une onde lumineuse d'amplitude proportionnelle à son *accélération*. L'amplitude de l'onde émise est donc proportionnelle à ω^2, et l'*intensité* diffusée proportionnelle à ω^4. De ce simple fait, l'intensité diffusée est proportionnelle à $1/\lambda^4$, c'est-à-dire la puissance inverse quatrième de la longueur d'onde, découle que la lumière bleue ($\lambda \approx 4000$ Å) domine sur le rouge ($\lambda \approx 8000$ Å)*. C'est la couleur du ciel pur. (Il existe d'autres effets, la dépendance de l'indice de réfraction dans la longueur d'onde, etc, qui contribuent, mais celui que nous venons de discuter est le plus marqué.)

4. Susceptibilité

Pour une fréquence donnée ω, on appelle *susceptibilité* $\chi(\omega)$ le coefficient de proportionnalité complexe entre les amplitudes A et $Be^{-i\theta}$, tel qu'il apparaissait dans (3.2)

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} \ . \tag{4.1}$$

* On rappelle la définition de l'Angström 1 Å$= 10^{-10}$m.

En électricité et magnétisme, on réserve le nom de susceptibilité (électrique, resp. magnétique) à la réponse du système par l'apparition d'un moment (électrique, resp. magnétique) à un champ extérieur (électrique, resp. magnétique) et on donne le nom d'admittance (resp. d'impédance) au coefficient de proportionnalité intensité/tension (resp. tension/intensité) telle qu'on l'observe dans un circuit de type LRC.

Il est traditionnel de noter $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$ les parties réelles et imaginaire de χ [2]

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) = \Re e\, \chi(\omega) &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \\ \chi''(\omega) = \Im m\, \chi(\omega) &= \frac{-\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

La variable physique ω (pulsation) est par définition réelle positive. Nous observons cependant que la fonction $\chi(\omega)$ satisfait la propriété suivante

$$\chi(\omega)^* = \chi(-\omega) \tag{4.3}$$

si on considère que ω peut prendre aussi des valeurs négatives. Donc $\chi'(\omega)$ se prolonge en une fonction paire et $\chi''(\omega)$ en une fonction impaire de ω. Cela reflète une propriété de réalité (cf au Chapitre 2 une propriété analogue pour les modes de Fourier).

Signe de χ'', relation avec la puissance absorbée ou dissipée.
Dans l'esprit des calculs de bilan énergétique effectués aux paragraphes 2 et 3, calculons le travail de la force extérieure pendant une période, entre les instants t et $t+T$. La force est $mA\cos\omega t$, la vitesse $-B\omega\sin(\omega t - \theta)$, donc

$$\begin{aligned} W &= -\int_t^{t+T} mAB\omega\cos\omega t\sin(\omega t - \theta)dt \\ &= -\frac{mAB\omega}{2}\int_t^{t+T} \big(\sin(\omega t + \omega t - \theta) + \sin(-\omega t + \omega t - \theta)\big)dt \\ &= -\frac{mAB\omega}{2}\int_t^{t+T} (\sin(2\omega t - \theta) - \sin\theta)dt \\ &= \frac{mAB\omega T}{2}\sin\theta \end{aligned} \tag{4.4}$$

qui est *positif*, puisqu'on a vu que $\sin\theta > 0$ (et que $AB > 0$). L'interprétation de ce signe important est que le système *pompe* de l'énergie dans la source pour compenser (dans le régime permanent qu'on étudie) l'énergie dissipée par la force de frottement.

Reprenons le calcul en notations complexes en n'utilisant que la forme générale de proportionnalité entre force et vitesse. La force est $\Re e\,(Ame^{i\omega t}) = \frac{mA}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$, la

[2] **Attention** χ' et χ'' **ne sont pas** les dérivées première et seconde de la fonction χ.

vitesse $\Re e\,(i\omega A\chi(\omega)e^{i\omega t}) = \frac{\omega A}{2}(i\chi(\omega)e^{i\omega t} - i\chi^*(\omega)e^{-i\omega t})$, et dans le calcul de l'intégrale sur une période, les termes du produit en $e^{\pm 2i\omega t}$ ne contribuent pas. Seuls les "termes croisés" en $e^{i\omega t} \times e^{-i\omega t}$ subsistent. Et finalement

$$W = -\frac{Tm}{2}\omega\chi''(\omega)A^2 \ . \tag{4.5}$$

Le mérite de ce dernier calcul est qu'il n'utilise pas les formules explicites trouvées pour l'oscillateur harmonique. Néanmoins, on s'attend toujours à ce que ce travail de la force extérieure soit positif (sans quoi le système fournirait "gratuitement" du travail à l'extérieur !) donc en toute généralité, pour un système linéaire qui dissipe de l'énergie,

$$\omega\chi''(\omega) < 0 \ . \tag{4.6}$$

Il est utile de considérer χ comme une fonction de la variable complexifiée $\omega = \omega' + i\omega''$: il faut penser à la partie imaginaire de ω comme décrivant l'atténuation ou la croissance d'une onde excitatrice de la forme $\Re e(e^{i\omega t}) = e^{-\omega'' t}\cos\omega' t$. On constate sur l'expression explicite de (4.1) que χ a deux *pôles*, c'est-à-dire que son dénominateur a deux zéros dans le plan complexe,

$$\text{Pôles :} \qquad \omega_\pm = \frac{i}{2\tau} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \tag{4.7}$$

dont on voit qu'ils se situent toujours dans le demi-plan supérieur ($\Im m\,\omega > 0$), que le système soit sous- ou sur-amorti. Cette remarque d'apparence anodine cache en fait une propriété importante, générale pour tout système linéaire : en vertu du **principe de causalité**, fondamental en Physique, selon lequel les effets ne peuvent précéder leur cause, on peut montrer en effet que la fonction $\chi(\omega)$ ne peut avoir de singularité (comme un pôle) dans le demi-plan inférieur.

Ces deux pôles sont d'autant plus proches de l'axe réel que τ (ou Q) est plus grand. Ainsi on comprend mieux l'apparition de la résonance : la susceptibilité $\chi(\omega) = \frac{-1}{(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)}$ a un dénominateur petit quand ω réel passe au voisinage de l'une des valeurs $\omega_\pm$, et l'amplitude, proportionnelle au module de χ, a un maximum marqué.

5. Oscillateurs couplés (traités en TD)

5.1. Cas de deux oscillateurs couplés

Considérons maintenant le cas d'un système à deux degrés de liberté, c'est-à-dire décrit par deux variables dynamiques $x_1(t)$ et $x_2(t)$, dotées de masses m_1 et m_2, et soumises à des forces dérivant d'un potentiel $U(x_1, x_2)$. Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ m_2\ddot{x}_2 &= -\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{5.1}$$

ce qu'on va noter de façon plus compacte

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_i} \ . \tag{5.2}$$

C'est en particulier le cas pour un potentiel quadratique en x_1 et x_2 (on dit alors que U est une *forme quadratique* en x_1 et x_2.)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_{22} x_2^2 \\ m_1 \ddot{x}_1 &+ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 &+ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = 0 \ , \end{aligned} \tag{5.3}$$

ou encore, avec les notations compactes (et la convention que $a_{12} = a_{21} = $)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j \\ m_i \ddot{x}_i &+ \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j = 0 \, , \end{aligned} \tag{5.4}$$

(l'intérêt de ces notations compactes étant d'alléger les écritures et de faciliter le passage de 2 à n variables).

Nous imposons à la forme quadratique $U(x_1, x_2)$ l'importante condition d'être *définie positive*, ce qui signifie que *pour tous x_1 et x_2 réels non tous deux nuls, $U(x_1, x_2) > 0$.* Cela exprime la stabilité de l'équilibre décrit par la position au repos $x_1 = x_2 = 0$: tout déplacement à partir de cette position accroît l'énergie potentielle.

On va supposer pour simplifier dans la suite de la discussion que x_1 et x_2 jouent des rôles identiques avec la même masse et des couplages homologues égaux. On récrit (5.3) sous la forme

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} K (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \\ m \ddot{x}_1 &= -K x_1 - k (x_1 - x_2) \\ m \ddot{x}_2 &= -K x_2 - k (x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ou encore, avec $k = m\omega_0^2$ et $K = m\Omega_0^2$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2) x_1 - \omega_0^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2) x_2 - \omega_0^2 x_1 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

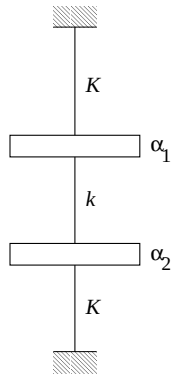


Fig. 6: Un pendule de torsion. Quand le premier disque tourne de α_1 et le second de α_2, le premier est soumis à un couple $-K\alpha_1$ par le fil supérieur, et à un couple $-k(\alpha_1 - \alpha_2)$ par le fil intermédiaire. On a des formules analogues pour le second.

Exemple Un exemple de cette situation est fourni par le cas de deux ressorts ou de deux pendules couplés. Pour varier les exemples, décrivons le cas de deux pendules de torsion, tels des disques à symétrie cylindrique, identiques, de moments d'inertie $I_1 = I_2 = I$, reliés par des fils de torsion dont les constantes de torsion sont K et k (voir figure 6). Les équations du mouvement des deux disques sont

$$\begin{aligned} I\ddot{\alpha}_1 &= -K\alpha_1 + k(\alpha_2 - \alpha_1) \\ I\ddot{\alpha}_2 &= -K\alpha_2 + k(\alpha_1 - \alpha_2) \ . \end{aligned}$$

Vérifier que ces équations sont bien du type juste décrit.

Pouvons-nous résoudre ces équations différentielles couplées (5.3), (complétées comme d'habitude par des conditions initiales, par exemple, la valeur de x_1 et x_2 et de leurs dérivées au temps $t = 0$) ? La symétrie du système suggère d'introduire les combinaisons paire et impaire des grandeurs x_1 et x_2

$$\xi_\pm = x_1 \pm x_2 \tag{5.7}$$

qui satisfont aux équations différentielles

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_+ + \Omega_0^2 \xi_+ &= 0 \\ \ddot{\xi}_- + (\Omega_0^2 + 2\omega_0^2)\xi_- &= 0 \ . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ces équations sont maintenant *découplées* : pour chacune des variables $\xi_\pm$, c'est une équation d'oscillateur harmonique simple ! (Noter que dans le cas des ressorts ou pendules couplés, ξ_- est la coordonnée relative, ξ_+ celle du centre de masse.) Les deux *fréquences propres* du système apparaissent donc

$$\omega_+ = \Omega_0 \qquad \omega_- = \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} \ , \tag{5.9}$$

les deux *modes propres* obéissent à une loi du mouvement

$$\xi_\pm = A_\pm \cos(\omega_\pm t + \phi_\pm) \tag{5.10}$$

et les coordonnées initiales s'expriment comme

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_+ + \xi_-) \qquad x_2 = \frac{1}{2}(\xi_+ - \xi_-)\ , \tag{5.11}$$

les quatre constantes $A_\pm$ et $\phi_\pm$ étant finalement déterminées par les conditions initiales sur x_1 et x_2.

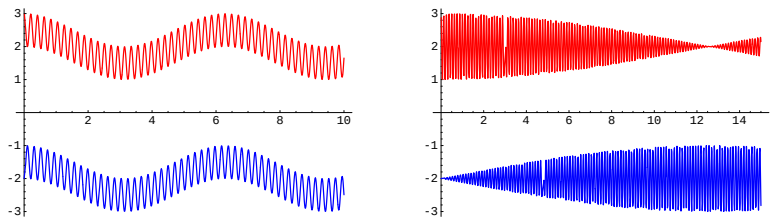


Fig. 7: On a porté verticalement $x_1 + \Delta$ (en rouge) et $x_2 - \Delta$ (en bleu), en prenant $\Delta = 2$. On a pris l'amplitude initiale $a = 1$. A gauche, couplage fort : $\omega_0 = 30$, $\Omega_0 = 1$; à droite, couplage faible, $\omega_0 = 5$, $\Omega_0 = 50$.

Supposons par exemple que le système au temps $t = 0$ est tel que seule la coordonnée x_1 est non nulle, $x_1(0) = a$, tandis que $x_2(0) = 0$ et que les vitesses initiales sont nulles $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a}{2}(\cos\omega_+ t + \cos\omega_- t) = a\cos(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t)\cos(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t) \\ x_2(t) &= \frac{a}{2}(\cos\omega_+ t - \cos\omega_- t) = a\sin(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t)\sin(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t) \end{aligned} \tag{5.12}$$

dont on peut dessiner le graphe, voir figure 7. Dans le cas d'un couplage fort, $\omega_0 \gg \Omega_0$, (ressort ou fil de tension du milieu dur), $\omega_- \approx \omega_0\sqrt{2} \gg \omega_+ = \Omega_0$, les deux oscillateurs oscillent ensemble, avec des oscillations rapides (de fréquence $\omega_-/2\pi$ élevée) et d'amplitude $a/2$ autour de leur mouvement d'oscillation lent (de fréquence $\Omega_0/2\pi$ basse). Dans le cas d'un couplage faible, $\omega_0 \ll \Omega_0$, $\omega_- \approx \omega_+ = \Omega_0$, $\omega_- - \omega_+ \approx \omega_0^2/\Omega_0 \ll \omega_0$, les oscillations du premier se transmettent peu à peu au deuxième, puis inversement. Les deux oscillateurs semblent être synchronisés à la fréquence $\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$, en quadrature de phase (déphasage de $\pi/2$), mais leur amplitude varie lentement (puisque $\omega_- - \omega_+ \ll \Omega_0$) comme $\cos(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t)$ ou $\sin(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t)$. Il y a donc des battements, eux aussi en quadrature. Il y a transfert d'énergie alternativement d'un oscillateur à l'autre.

5.2. Modes propres

Dans le cas symétrique qu'on vient d'étudier, on a vu que les combinaisons $x_1 \pm x_2$ se comportent simplement, puisqu'elles n'oscillent que selon l'une ou l'autre des deux fréquences ω_+ et ω_-. Peut-on dans le cas général trouver des combinaisons de x_1 et x_2 dotées de telles propriétés ? La réponse est positive. Les combinaisons représentent ce qu'on appelle les *coordonnées normales*, décrivant les *modes propres* du système d'oscillateurs couplés, cf. Chapitre 2, §3.4-2.

5.3. Chaîne de boules et de ressorts

On considère un système constitué de particules massives identiques ("boules") équidistantes de a sur une ligne droite, telle que chaque particule n'agisse que sur chacune de ses deux voisines par une force de rappel proportionnelle à leur écart à la position d'équilibre. Soit x_n la position de la n-ième particule, son équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x}_n = K(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) \ . \tag{5.13}$$

Pour une chaîne très longue, (ce qui nous évite pour le moment d'avoir à spécifier les conditions aux limites), existe-t-il des excitations pouvant être assimilées à des ondes se propageant avec une fréquence et une longueur d'onde données ? Autrement dit, nous cherchons une solution de la forme

$$x_n = A\cos(\omega t - n\phi) \ . \tag{5.14}$$

Noter que le déphasage étant linéaire en n, la position discrète sur la chaîne, l'argument du cosinus peut s'écrire aussi $\omega t - 2\pi\frac{na}{\lambda} = \omega t - k(na)$, avec $\phi = 2\pi a/\lambda$, $k = \phi/a = 2\pi/\lambda$, ce qui le met sous une forme familière dans la description des ondes. L'équation est satisfaite à condition que $m\omega^2 = 2K(1-\cos\phi)$. Posons $\omega_0^2 = K/m$, ω_0 est la fréquence propre de chaque ressort. A chaque valeur de ϕ, c'est-à-dire de la longueur d'onde λ, correspond une fréquence ω d'une «onde». À basse fréquence, $\omega \ll \omega_0$, on a $\phi \ll 1$, on peut développer $1-\cos\phi$ pour trouver $\phi \approx \omega/\omega_0$, donc un nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda = \omega/(a\omega_0)$. Le nombre d'onde est proportionnel à la fréquence, comme dans une onde électromagnétique.

.

Chapitre 5. Dynamique des systèmes non-linéaires

Les chapitres précédents nous ont familiarisés avec les propriétés des systèmes linéaires : réponse linéaire, découplage des modes, etc. Mais la linéarité d'un système physique n'est le plus souvent qu'une première approximation de sa description. Dans ce chapitre, on va explorer quelques-unes des nouveautés que réserve l'étude des systèmes non-linéaires, c'est-à-dire des systèmes régis par des équations –différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, ou aux différences finies– non linéaires.

Nous avons déjà rencontré des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Une équation aux différences finies est par exemple une équation de la forme $y(t+\Delta t) - y(t) = F(y(t), t)$, où F est une fonction donnée. On peut penser à une telle équation comme une version discrétisée de l'équation différentielle $\dot{y}(t) = F(y(t), t)$. Si F n'est pas de degré 1 en y, l'équation est non-linéaire.

Une équation intégrale est une équation qui relie la fonction inconnue $y(t)$ à une intégrale dépendant de y, par exemple portant sur les valeurs de y aux temps antérieurs à t. Ainsi l'équation intégrale $y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t,t')y(t')\,\mathrm{d}t'$ avec un *noyau* $K(t,t')$ donné, est linéaire, tandis que l'équation $\ddot{y}(t) + \left(a - 2\int_0^1 y^2(t')\,\mathrm{d}t'\right) y(t) = 0$ est non-linéaire.

L'étude des systèmes non-linéaires est un domaine immense, très actif actuellement –on parle aussi de "systèmes dynamiques"–, qui a des applications dans d'innombrables domaines, des sciences physiques aux sciences du vivant et humaines. Pour citer quelques exemples, la mécanique céleste (instabilité des trajectoires des corps célestes), la chimie (réactions chimiques auto-catalysées[1]...), la physique (bien sûr !), les sciences de la Terre (météorologie, climatologie, sismicité...) et les sciences de l'ingénieur (turbulence, instabilités mécaniques ou électromagnétiques...) sont confrontées à des problèmes non-linéaires. Les sciences de la vie (contrôle des gènes, battements du cœur, populations bactériennes, ...), l'économie, la démographie sont aussi concernées. Il est clair que ce cours ne pourra donner que quelques aperçus sur ce vaste et passionnant domaine.

Exemples : Équation du pendule au delà de l'approximation des petites oscillations, $\ddot{\theta}+\omega_0^2 \sin\theta = 0$, oscillateur harmonique modifié par un terme "anharmonique" $\ddot{x} = ax - bx^3$, ou par un terme de friction non linéaire (équation de van der Pol) $\ddot{x}+(1-\alpha x^2)\dot{x}/\tau+\omega_0^2 x = 0$. Équations du premier ordre non linéaires, telles $\dot{x} = a - bx^2$, $\dot{x} = ax - bx^3$ (Landau), qu'on va discuter plus bas, etc. Autre type d'équations, les équations aux différences finies, telle $N_{n+1} = aN_n - bN_n^2$ avec $b > 0$ décrivant la variation de la population d'une espèce (N_n est l'effectif de la génération n, le terme aN_n décrit sa reproduction, bN_n^2 la limitation due aux ressources alimentaires etc) ...

[1] en particulier la très spectaculaire réaction de Belousov-Zhabotinsky, voir une video sur le site http://www.ac-poitiers.fr/sc_phys/cyberlab/cyberter/fete_chi/BZ/bz.htm

1. Richesse et spécificités des systèmes non-linéaires. Bifurcations

Une des particularités des systèmes non-linéaires est la suivante : une petite variation d'une condition aux limites ou d'un paramètre peut induire un grand effet. L'effet peut être une transition d'un régime stable à un régime instable, un effect irréversible (telle une cassure), un changement de phase avec ou sans changement de symétrie du système, un phénomène de "seuil", etc. Les exemples qui vont suivre vont illustrer quelques-unes de ces possibilités. On appelle *bifurcation* un changement qualitatif de comportement quand un paramètre ou une condition initiale est modifié.

Par exemple, l'analyse qui nous a conduit au chapitre 4 à décrire un système physique simple, mécanique par exemple, à l'aide d'un système *linéaire* a consisté à développer léquation fondamentale de la dynamique au voisinage d'un minimum du potentiel. Que se passe-t-il quand ce potentiel admet plusieurs minima ? Que se passe-t-il quand le minimum de ce potentiel se change en maximum ? Plus généralement que se passe-t-il si le système considéré admet plusieurs solutions indépendantes du temps ? Se qualifient-elles également comme positions d'équilibre ? On va examiner quelques exemples de ce phénomène.

1.1. Stabilité et instabilité

Soit un système dynamique décrit par une équation différentielle. Cette équation peut être du premier ordre, $\dot{x}(t) = f(x(t))$, ou d'ordre plus élevé, être linéaire ou non-linéaire. Soit x_s une solution statique, c'est-à-dire indépendante du temps [2], de cette équation. On dit que cette solution décrit une solution (ou une position) d'*équilibre stable* du système si sous l'effet d'une petite perturbation de cette solution au temps t_0, le mouvement reste confiné au voisinage de $x = x_s$ à tout temps $t > t_0$, c'est-à-dire $|x(t) - x_s|$ reste borné pour tout t par une quantité qui tend vers 0 avec la perturbation.

On exprime en général cette propriété par la condition suivante : si $x_0 = x(t_0)$ est la condition initiale

$$\forall\epsilon\ \exists\delta(\epsilon) \text{ tel que } \quad \forall t > t_0\ \forall x_0\ : |x_0 - x_s| < \delta \Rightarrow\ |x(t) - x_s| < \epsilon\ . \tag{1.1}$$

C'est donc une condition uniforme en t et en x_0.

Considérons par exemple un système *linéaire* décrit par l'équation

$$\ddot{x}(t) = ax(t)\ . \tag{1.2}$$

Si $a < 0$, c'est notre bon vieil oscillateur harmonique, avec sa force de rappel proportionnelle au déplacement. La solution statique $x_s = 0$ décrit un équilibre stable, toute

[2] On dit aussi "solution stationnaire", ou "point fixe" ...

autre solution décrivant des oscillations autour de x_s. Mais si $a > 0$, la situation physique change dramatiquement. L'équation se résout encore aisément, et $x(t)$ est une combinaison linéaire des deux solutions $e^{\pm\sqrt{a}t}$ avec des coefficients constants déterminés par les conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0)$

$$x(t) = x_1 e^{\sqrt{a}t} + x_2 e^{-\sqrt{a}t}$$

avec $x_0 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_0 = \sqrt{a}(x_1 - x_2)$. La fonction $e^{\sqrt{a}t}$ croît rapidement quand $t \to \infty$, physiquement cette solution n'est pas satisfaisante. Si on ajuste les conditions initiales pour éliminer cette solution, en faisant en sorte que $x_1 = 0$, soit

$$x_0 = -\dot{x}_0/\sqrt{a} \ , \tag{1.3}$$

on obtient une solution d'apparence satisfaisante,

$$x(t) = x_0 e^{-\sqrt{a}t} \ .$$

Cependant, la moindre variation des conditions initiales $(\delta x_0, \delta \dot{x}_0)$ qui ne respecte pas la condition (1.3) va réintroduire la fonction indésirable $e^{\sqrt{a}t}$ et le comportement non physique de $x(t)$.

Montrer qu'une réalisation mécanique de cette situation où $a > 0$ est la suivante : étant donné un potentiel de forme parabolique tournant sa concavité vers le bas, on cherche à envoyer un mobile de position et vitesse initiales $(x_0, \dot{x}_0)$ sur le *sommet* du potentiel (en $x = 0$). Il est clair qu'une telle opération nécessite un ajustement très soigneux de $\dot{x}_0$ en terme de x_0, (selon (1.3)), et que la moindre erreur conduira à "rater" la cible et donc à "tomber" à gauche ou à droite vers $\pm\infty$.

L'interprétation de cette discussion est qu'on est en présence d'une *instabilité*. Sous l'influence d'une modification, si infime soit elle, des conditions initiales, le système bascule dans un régime où la fonction $x(t)$ croît sans limite (et où l'approximation qui a conduit à l'équation (1.2) est à reconsidérer). La valeur $a = 0$ du paramètre a marque donc la frontière entre un régime $a < 0$ où le système a une position statique autour duquel il peut effectuer des petites oscillations et un régime $a > 0$ où toute solution sous l'effet d'une petite perturbation finit par croître sans limite. Dans le premier cas, on parle d'équilibre stable en $x = 0$, dans le second, $x = 0$ est une position d'équilibre instable, et la valeur $a = 0$ du *paramètre de contrôle* a marque une *bifurcation*.

Cette situation apparaît couramment dans les systèmes non-linéaires. Considérons le cas de l'équation

$$\dot{x} = a - x^2 \ . \tag{1.4}$$

Ses solutions statiques satisfont $x_s^2 = a$. Pour $a < 0$, il n'existe pas de solution ; si $a > 0$, il y en deux, $x_s = \pm\sqrt{a}$. Le système a une bifurcation pour la valeur 0 de son paramètre de contrôle a. On discutera plus bas la stabilité des deux solutions statiques $x_s = \pm\sqrt{a}$.

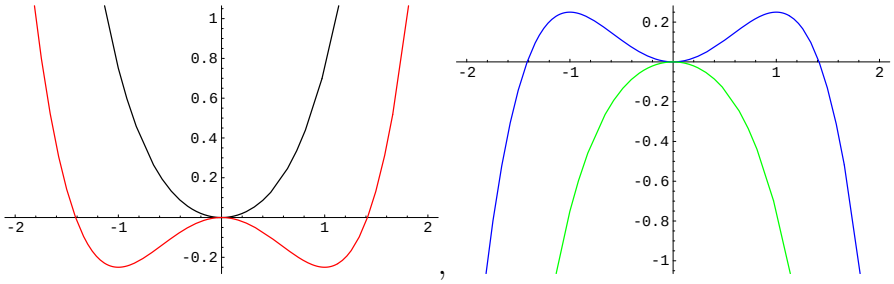


Fig. 1: Le potentiel $U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$ pour $a = \pm 1$, $b = \pm 1$. Compléter la figure en identifiant les signes de a et b pour chaque courbe.

1.2. Brisure de symétrie.

Considérons maintenant l'oscillateur *an*harmonique

$$\ddot{x}(t) = ax - bx^3 \ . \tag{1.5}$$

C'est par exemple un point matériel soumis à une force dérivant d'un potentiel $m\ddot{x} = -dU(x)/dx$, avec $m^{-1}U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$. Une position d'équilibre stable pour la variable x, $x(t) = x_0$ pour tout t, est, comme l'intuition mécanique nous le souffle et comme l'analyse du § 2 le confirmera, un *minimum (local)* de ce potentiel[3]. Il est donc solution de $-dU(x)/dx = ax - bx^3 = 0$, donc

$$x = 0 \quad \text{ou si} \quad a.b > 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}} \ .$$

Si $a < 0$, le point $x = 0$ est bien un minimum du potentiel. C'est le seul, c'est la position d'équilibre stable du système, voir figure 1. Par contre, si $a > 0$, $x = 0$ est instable au sens où on l'a discuté plus haut, tandis que les deux autres solutions $x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ (on suppose $b > 0$) deviennent des positions d'équilibre stable possibles, comme on le vérifie. Intuitivement, les choses sont claires : le point matériel se place au fond d'un creux (concave) du potentiel, voir la figure 1 de gauche.

La question est maintenant, si $a > 0$, $b > 0$, laquelle des deux positions d'équilibre le point matériel choisit-il ? On est dans un cas de *bistabilité*, où deux minima du potentiel sont également acceptables comme positions d'équilibre. Revenant à l'équation

[3] Par minimum *local* d'une fonction $f(x)$, on entend un point x_0 tel que, *au voisinage de* x_0, $f(x)$ soit supérieure à $f(x_0)$. Le minimum est *global* ou *absolu* si $\forall x,\ f(x) > f(x_0)$. Vérifier, en en dessinant le graphe, que la fonction $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ admet un minimum local mais pas global en $x = 0$.

(1.5), on voit qu'elle jouit d'une propriété de symétrie par le changement de x en $-x$. Plus précisément, si $x(t)$ est solution, $-x(t)$ en est une autre. L'*ensemble des solutions* de l'équation est invariant par cette transformation $x \mapsto -x$. Mais rien n'impose à une solution donnée de l'être. En particulier, les solutions d'équilibre, $x =$ constant, peuvent être non invariantes par la symétrie, en l'occurrence, être non nulles. On parle de *brisure spontanée de symétrie*, le mot *spontanée* se référant au fait que le choix de la solution dépend du choix des conditions initiales, ou d'une perturbation extérieure brisant la symétrie.

Dans le cas (1.5) (avec $a, b > 0$) qui nous occupe et dans son interprétation mécanique d'un point matériel initialement en $x_0 = 0$ au sommet du maximum local du potentiel, c'est la vitesse initiale $v_0 = \dot{x}|_{t=0}$ qui, si petite soit-elle, va déterminer si le point matériel va basculer vers le minimum du potentiel de gauche ou de droite. Cela est une illustration simple du phénomène mentionné plus haut d'extrême sensibilité à une condition initiale.

Le phénomène de brisure spontanée de symétrie est d'importance capitale en physique : les théories du ferromagnétisme ou de la superfluidité, les théories modernes de physique des particules, et bien d'autres encore, y font appel.

1.3. Bifurcation de Hopf

On considère le système d'équations différentielles non-linéaires et couplées

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + (a - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} &= x + (a - x^2 - y^2)y \end{aligned} \quad , \tag{1.6}$$

qu'on récrit plus agréablement en termes de la variable complexe $z = x + iy$,

$$\dot{z} = iz + (a - |z|^2)z \ , \tag{1.7}$$

ou encore en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, sous la forme $\dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta} = (i + a - r^2)re^{i\theta}$. Après simplification par $e^{i\theta}$ et en identifiant parties réelle et imaginaire,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (a - r^2)r \\ r\dot{\theta} &= r \end{aligned} \quad . \tag{1.8}$$

Une solution statique est $r(t) = 0$. Si on écarte cette solution (c'est-à-dire qu'on suppose $r \neq 0$), on peut diviser par r l'équation en $\dot{\theta}$ et le système se réduit à

$$\dot{r} = (a - r^2)r \qquad \dot{\theta} = 1 \ . \tag{1.9}$$

Le mouvement s'effectue à vitesse angulaire constante, $\theta(t) = \theta(0) + t$. L'analyse de l'équation en r ressemble à celle de (1.4). Si $a < 0$, la seule solution statique est $r_s = 0$, si $a > 0$, il y a deux solutions *permanentes*, $r_s = 0$ et $r_s = \sqrt{a}$, cette dernière décrivant une trajectoire circulaire parcourue à vitesse constante. On discutera plus bas la stabilité de ces solutions et on montrera que la solution stable est $r_s = 0$ si $a < 0$ et $r_s = \sqrt{a}$ si $a > 0$. La valeur $a = 0$ marque donc une bifurcation entre ces deux régimes, avec passage d'une solution statique $x = y = 0$ à une solution périodique $r =$ constante.

2. Analyse de stabilité : méthode graphique et linéarisation.

2.1. Flot de $x(t)$. Interprétation graphique du critère $\rho < 0$ de stabilité.

On a vu plus haut qu'une solution statique x_s est dite stable si une solution voisine de x_s au temps t_0 en reste proche à tout temps ultérieur. Pour une équation du premier ordre

$$\dot{x} = f(x, a) \tag{2.1}$$

il existe une méthode graphique simple permettant de discuter la stabilité des solutions statiques, et plus généralement le *flot* de la solution $x(t)$.

Dessinons le graphe de $f(x, a)$ en fonction de x à a fixé. Les points d'intersection de ce graphe avec l'axe des abscisses (l'axe des x) sont les solutions statiques $x_s^{(i)}$, $i = 1, 2 \cdots$.

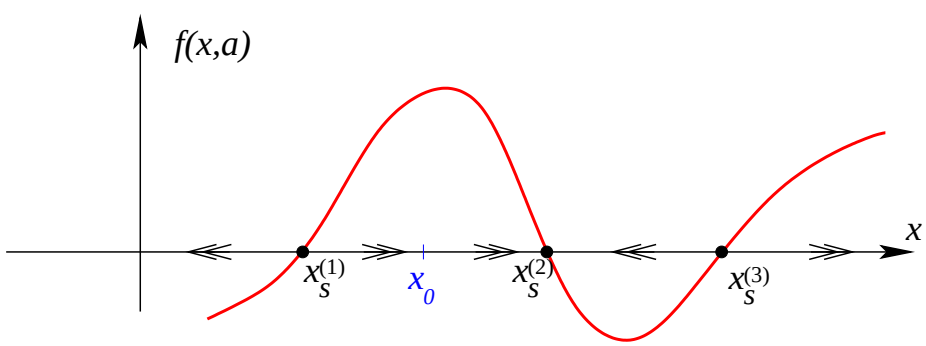


Fig. 2: Flot de $x(t)$ dans l'équation (2.1).

Choisissons un point x_0 et suivons le "flot" de $x(t)$ solution de (2.1), avec la condition initiale $x(0) = x_0$. Si $f(x_0, a) > 0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} > 0$ et $x(t)$ croît au voisinage de $t = 0$. En fait $x(t)$ croît tant que $f(x(t), a) > 0$, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'ou bien $x(t)$ atteigne la première valeur $x_s^{(j)}$ supérieure à x_0, ou bien $x(t) \to \infty$. Sur la figure, c'est ce qui se passe respectivement pour $x_s^{(1)} < x_0 < x_s^{(2)}$ ou pour $x_0 > x_s^{(3)}$. Inversement, partir d'un point x_0 où $f(x_0, a) < 0$ donne un flot de $x(t)$ décroissant soit vers le $x_s^{(i)}$ le plus proche inférieur à x_0, soit vers $-\infty$.

Si la dérivée $f'(x, a) \neq 0$ en chacun des points $x_s^{(j)}$, on voit que les points où elle est positive sont répulsifs (c'est-à-dire instables), ceux où elle est négative sont attracteurs (stables).

Discuter graphiquement le flot de $x(t)$ si la fonction f a un zéro double en x_s.

2.2. Linéarisation d'une équation du premier ordre

On va effectuer maintenant une analyse de la condition de stabilité au voisinage d'une solution statique donnée x_s en se basant sur une *approximation linéaire de l'équation dans ce voisinage.* Si (2.1) est l'équation considérée, a un (ou plusieurs) paramètre(s) de contrôle, et x_s une solution statique, c'est-à-dire indépendante du temps, satisfaisant donc $f(x_s, a) = 0$, on cherche une solution de la forme $x(t) = x_s + \xi(t)$, avec $\xi(t)$ supposé petit (à tout temps t). On développe donc (2.1) au premier ordre en ξ pour obtenir

$$\dot{\xi}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s} \xi(t) \tag{2.2}$$

qui s'intègre immédiatement en

$$\xi(t) = \xi(0) e^{\rho t} \tag{2.3}$$

où $\rho := \partial f / \partial x|_{x_s}$ est indépendant de t (mais dépend du paramètre de contrôle a). Selon le signe de ρ, la conclusion est différente. Si $\rho < 0$, la perturbation $\xi(t)$ reste bornée par sa valeur initiale à $t = 0$. La solution x_s est stable [4]. Si par contre $\rho > 0$, la perturbation $\xi(t)$ augmente exponentiellement avec le temps, et si petite qu'elle ait été au temps $t_0 = 0$, elle finit par devenir arbitrairement grande (et à rendre incorrecte l'approximation linéaire qu'on vient d'effectuer). On conclut à l'instabilité de la solution x_s. Noter qu'on a bien retrouvé la conclusion de l'analyse graphique précédente.

[4] Il conviendrait de justifier l'approximation de l'équation initiale par sa linéarisation, pour $\xi \ll 1$; il faudrait pour cela démontrer que les termes d'ordre plus élevé en ξ n'affectent pas la conclusion. Ceci peut être effectué dans de nombreux systèmes non-linéaires.

2.3. Exemple : linéarisation de l'équation (1.4)

Revenons à l'équation (1.4), en supposant $a > 0$. La linéarisant au voisinage d'une solution statique $x_s = \pm\sqrt{a}$, c'est-à-dire posant $x = x_s + \xi$ et ne gardant que les termes linéaires en ξ conduit à $\dot{\xi} = -2x_s\xi$, dont la solution $\xi(t) = \xi(0)e^{-2x_s t}$ a un comportement radicalement différent selon qu'on regarde $x_s = +\sqrt{a}$ ou $x_s = -\sqrt{a}$. Pour la première, le comportement de ξ aux grands temps permet de conclure à la stabilité, pour la seconde, à l'instabilité. Si $a = 0$, la solution $x_s = 0$ est juste au bord de la région de stabilité, et il faut aller au delà de l'analyse de stabilité linéaire pour conclure.

Il se trouve que l'équation différentielle (1.4) peut s'intégrer explicitement et exactement, ce qui nous permet de comparer le traitement exact avec la linéarisation. L'équation (1.4) est en effet "à variables séparées", ce qui signifie qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{a - x^2} = dt$$

où le membre de gauche ne dépend que de x, et celui de droite de t. On peut donc l'intégrer en prenant en compte la condition initiale $x(0) = x_0$, et en distinguant les cas $a > 0$, $a = 0$ ou $a < 0$.

Supposons par exemple $a < 0$ et posons $a = -\alpha^2$, avec disons $\alpha = \sqrt{-a}$ la racine positive de $-a$. On écrit alors

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{\alpha}$$

et donc en intégrant entre $t = 0$ et t, et $x = x_0$ et x,

$$t = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{\alpha} - \mathrm{Arc}\tan\frac{x_0}{\alpha}\right) \ . \tag{2.4}$$

L'utilisation de la formule d'addition des tangentes

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \tag{2.5}$$

et un peu d'algèbre conduisent alors à l'une des formules ci-dessous. Le cas $a > 0$ se traite de manière analogue, les tan étant remplacées par leur version hyperbolique. Le cas $a = 0$ est particulièrement simple.

Selon que $a > 0$, $a = 0$ ou $a < 0$, on a donc trois solutions explicites distinctes

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{a}\ \frac{x_0 + \sqrt{a}\tanh(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a} + x_0\tanh(\sqrt{a}t)} & \text{si } a > 0 \\ \frac{x_0}{1 + x_0 t} & \text{si } a = 0 \\ \sqrt{-a}\ \frac{x_0 - \sqrt{-a}\tan(\sqrt{-a}t)}{\sqrt{-a} + x_0\tan(\sqrt{-a}t)} & \text{si } a < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour $a > 0$ et $x_0 > -\sqrt{a}$, la solution tend vers $\sqrt{a}$ exponentiellement vite quand $t \to \infty$, puisqu'on calcule aisément

$$x(t) - \sqrt{a} = \sqrt{a}\frac{(1 - \tanh(\sqrt{a}t))(x_0 - \sqrt{a})}{\sqrt{a} + x_0\tanh(\sqrt{a}t)} \approx_{t\to\infty} \text{const.}(x_0 - \sqrt{a})e^{-2\sqrt{a}t} \ .$$

Quelle que soit la valeur initiale $x_0 > -\sqrt{a}$, la solution $x(t)$ converge vers $\sqrt{a}$. Pour $a > 0$ mais $x_0 < -\sqrt{a}$, quand le temps t tend vers t_1 donné par $\sqrt{a}t_1 = \text{Arg tanh}\left(\frac{-\sqrt{a}}{x_0}\right)$ qui est positif, $x(t) \to -\infty$. Si $x_0 = -\sqrt{a}$, $x(t) = -\sqrt{a} \quad \forall t$, mais il s'agit d'un point fixe instable. La position d'équilibre stable $+\sqrt{a}$ est donc un point "attracteur", tandis que $-\sqrt{a}$ est "répulsif".

Pour $a < 0$, et pour tout x_0, $x(t) \to -\infty$ quand $t \to t_1 := \frac{1}{\sqrt{-a}}\text{Arc}\tan\left(\frac{-\sqrt{-a}}{x_0}\right)$ (plus éventuellement π) qui est positif. Donc pour $a < 0$, $x(t)$ diverge vers $-\infty$, quelle que soit la valeur x_0.

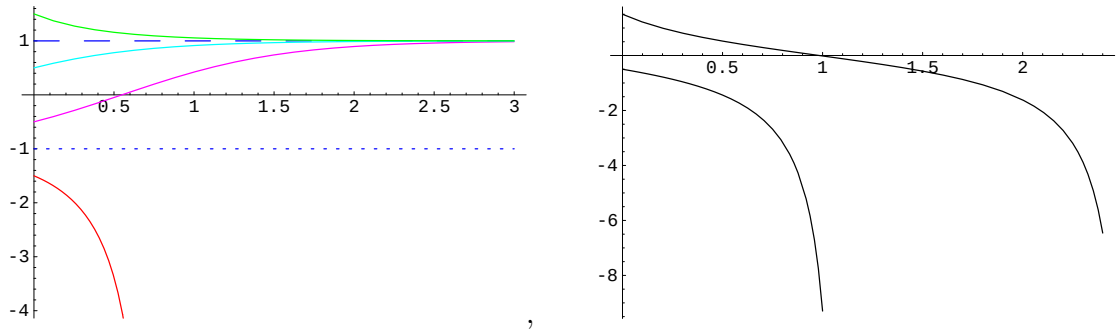


Fig. 3: A gauche : trajectoires $x(t)$ de (1.4) pour $a = 1 > 0$; de haut en bas, $x_0 = 1,\ 0.5,\ -0.5,\ -1.5$; les points $x_s = \sqrt{a} = 1$ stable (attractif) et $x_s = -\sqrt{a} = -1$ instable (répulsif) sont aussi indiqués par des lignes brisées. A droite , trajectoires pour $a = -1 < 0$; de haut en bas, $x_0 = 1.5,\ -0.5$

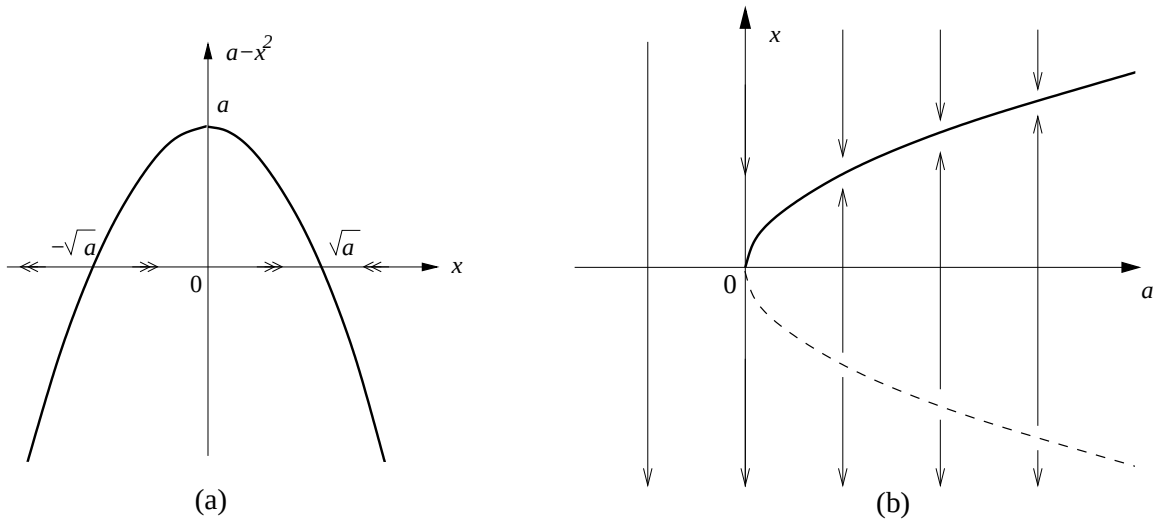


Fig. 4: (a) : Diagramme de flot de (1.4) pour $a > 0$; (b) : diagramme de bifurcation de (1.4).

Pour $a = 0$, $x(t)$ tend vers 0 quand $t \to \infty$ quel que soit $x_0 \geq 0$, mais vers $-\infty$ quand $t \to -1/x_0$ si $x_0 < 0$. Noter que dans ce dernier cas, la singularité (la valeur infinie) de x est atteinte en un temps fini. La solution $x_s = 0$ du cas $a = 0$ est donc une position d'équilibre instable.

Exercice : dessiner les diagrammes de flot pour les cas $a < 0$ et $a = 0$.

L'analyse des solutions (2.6) a donc confirmé les conclusions de la linéarisation. On dessine un diagramme de bifurcation résumant ces conclusions, voir figure 4(b).

2.4. Linéarisation d'une équation d'ordre plus élevé : linéarisation au voisinage d'un extrémum du potentiel.

La méthode de linéarisation s'applique aussi à des équations différentielles d'ordre plus élevé, par exemple à l'équation du mouvement d'un point matériel soumis à une force dérivant d'un potentiel,

$$\ddot{x}(t) = -U'(x(t)) \tag{2.7}$$

avec $U'(x) = \frac{d}{dx}U(x)$. Comme on l'a vu plus haut, une solution statique est un point x_s où $U(x_s) = 0$, et selon la discussion précédente, pour en discuter la stabilité, on développe $U(x)$ et $U'(x)$ au premier ordre non trivial pour $x \approx x_s + \xi$

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_s) + \underbrace{U'(x_s)}_{0}\xi + \frac{1}{2}U''(x_s)\xi^2 + \cdots \\ U'(x) &= U''(x_s)\xi + \cdots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Linéariser l'équation (2.7), c'est ne conserver que le terme linéaire en ξ dans $U'(x)$, donc écrire

$$\ddot{\xi}(t) = -U''(x_s)\xi \ . \tag{2.9}$$

On est ramené à la discussion de l'équation (1.2). La solution $\xi = 0$, c'est-à-dire $x = x_s$, est stable si $a = -U''(x_s) < 0$, soit $U''(x_s) > 0$. Ceci est en accord avec notre assertion antérieure qu'une solution statique stable correspond à un *minimum* du potentiel.

2.5. Linéarisation du système de Hopf

Revenons maintenant à (1.6), ou plutôt à (1.9), $\dot{r} = (a - r^2)r$, $\dot{\theta} = 1$. Appliquons l'analyse linéaire précédente à l'équation en r : elle a deux solutions statiques $r_s = 0$ et $r_s = \sqrt{a}$,

et on développe en leur voisinage en écrivant $r(t) = r_s + \rho(t)$, où ρ satisfait l'équation linéarisée

$$\begin{aligned}\dot\rho &= (a - r_s^2 - 2\rho r_s)(r_s + \rho) + \epsilon(\rho)\\ &= -2\rho r_s^2 + \rho(a - r_s^2) + \epsilon(\rho) = (a - 3r_s^2)\rho\\ &= \begin{cases} \rho a & \text{si } r_s = 0\\ -2\rho a & \text{si } r_s = \sqrt{a}\end{cases}\end{aligned} \tag{2.10}$$

où on a finalement omis les termes $\epsilon(\rho)$. Si $a < 0$, on est nécessairement dans le premier cas ($r_s = 0$), et on voit que $\rho(t) = \rho(0)e^{at}$ qui tend vers zéro à grand t, le point $r_s = 0$ est donc stable. Si $a > 0$, $r_s = 0$ est instable, tandis que pour $r_s = \sqrt{a}$, $\rho(t) = \rho(0)e^{-2at}$ tend vers zéro, $r_s = \sqrt{a}$ est stable. Enfin on traite séparément le cas $a = 0$, $\dot r = -r^3$ qui n'a que la solution $r_s = 0$ et pour laquelle l'analyse de stabilité linéaire ne permet pas de conclure. Dans ce cas l'équation de Hopf radiale est simplement $\dot r = -r^3$, soit $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} = 2$, qui s'intègre immédiatement en $r(t) = r_0/\sqrt{1 + 2r_0^2 t}$, décrivant donc un mouvement qui tend vers 0 quand $t \to \infty$: $r_s = 0$ est donc stable.

L'équation (1.9) peut en fait se résoudre exactement pour tout a en séparant les variables

$$dt = \frac{dr}{r(a - r^2)} = \frac{dr}{a}\left(\frac{r}{a - r^2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2a} d \ln \frac{r^2}{|a - r^2|}\ , \tag{2.11}$$

qui s'intègre en

$$e^{2at} = C\frac{r^2}{|a - r^2|}$$

où la constante C est fixée par la valeur initiale $r_0 := r(0)$, soit $1 = C\frac{r_0^2}{|a - r_0^2|}$, et donc

$$\frac{r^2}{a - r^2} = \frac{r_0^2}{a - r_0^2} e^{2at}$$

(car on vérifie que $a - r^2$ reste toujours du même signe que $a - r_0^2$). De cette dernière équation on tire l'expression de r^2 puis finalement, celle de $r(t)$ (qui est > 0 par définition)

$$r(t) = \begin{cases} r_0\sqrt{\frac{a}{r_0^2 + (a - r_0^2)e^{-2at}}} & \text{si } a \neq 0\\ \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}} & \text{si } a = 0\end{cases}\ . \tag{2.12}$$

Exercice : vérifier que la limite $a \to 0$ de la première solution redonne bien la deuxième.

On voit sur ces formules que la limite $t \to \infty$ est très différente selon que $a > 0$ (où $r(t) \to \sqrt{a}$), ou $a \leq 0$ (où $r(t) \to 0$).

Les figures qui suivent illustrent ces différents cas. Dans les cas (a) et (b) où $a > 0$, la trajectoire tend vers $r_s = \sqrt{a}$ qui est donc attractive : on dit que le cercle de rayon $r = r_s =$

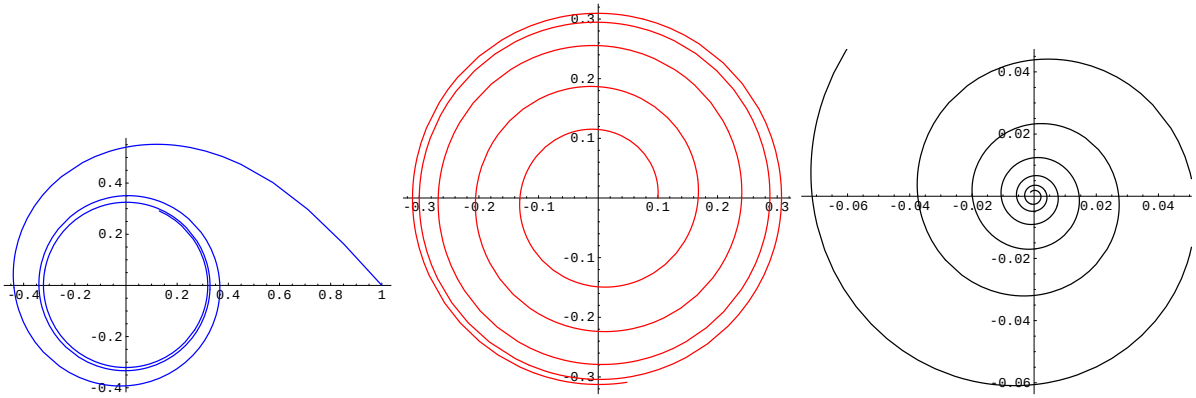


Fig. 5: Trajectoires du système de Hopf pour différentes valeurs du paramètre de contrôle a et de la condition initiale $r(0) = r_0$: (a) $a = 0.1$, $r_0 = 1$; (b) $a = 0.1$, $r_0 = 0.1$; (c) $a = -0.1$, $r_0 = 0.1$.

$\sqrt{a}$, qui constitue la trajectoire asymptotique, parcourue à vitesse angulaire constante, est un *cycle limite*. Dans le cas (c) où $a < 0$, $r(t)$ tend vers zéro exponentiellement vite : $r(t) \sim e^{at}$. Dans le cas où $a = 0$ (non figuré ici), la convergence vers zéro est beaucoup plus lente $r(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}$.

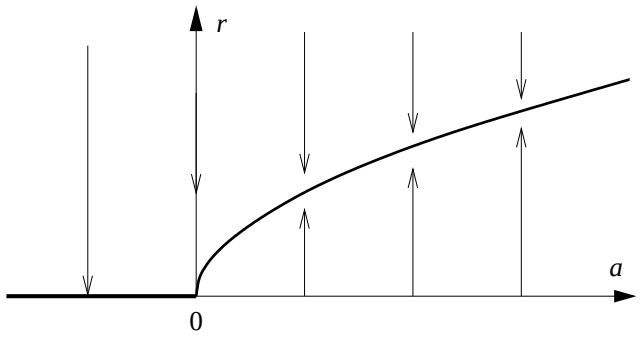


Fig. 6: Diagramme de bifurcation pour le système de Hopf

Le diagramme de bifurcation peut aussi se dessiner dans le plan (a, r), voir fig. 6.

Exercice. Tracer le diagramme de flot de $r(t)$ en distinguant les cas $a < 0$ et $a > 0$.

3. Portrait de phase

3.1. Espace de phases

Considérons un point dans l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, décrit par trois coordonnées spatiales x_i, $i = 1, 2, 3$. Sa dynamique fait apparaître sa vitesse, de coordonnées v_i, ou de façon

équivalente, son impulsion $p_i = mv_i$. En physique, on appelle *espace des phases* un espace de dimension 6 (dans le cas considéré ici), de coordonnées (x_i, v_i), $i = 1, 2, 3$. Une loi du mouvement $x_i = f_i(t)$ implique par dérivation la loi de $v_i = \dot{f}_i(t)$, et l'ensemble des points $(x_i = f_i(t), v_i = \dot{f}_i(t))$ définit une courbe (paramétrée par t) dans l'espace des phases, nommée *portrait de phase*. Inversement étant donnée une telle courbe, on peut reconstruire la loi du mouvement : pour plus de simplicité, restreignons-nous à un système à un degré de liberté (c'est-à-dire une seule coordonnée x), dont l'espace des phases (de coordonnées x et v) est donc de dimension 2. Si au voisinage d'un point x_0 on peut décrire la courbe par $v = \phi(x)$, la fonction cherchée $x(t)$ doit être telle que $\dot{x}(t) = \phi(x)$ qui s'intègre en $t - t_0 = \int_{x_0}^{x} dx'/\phi(x')$ et mène donc à la loi du mouvement $x(t)$, si on appelle t_0 le temps où le système est en x_0.

Exemple : considérons un oscillateur harmonique libre non amorti, de fréquence propre ω_0, donc obéissant à l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Si au temps $t = 0$, il est lâché sans vitesse initiale depuis la position x_0, sa loi du mouvement est $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$, donc $v(t) = -x_0\omega_0 \sin \omega_0 t$. La trajectoire dans l'espace de phases est la courbe paramétrée $(x(t), v(t))$, donc une *ellipse* $x^2 + v^2/\omega_0^2 = x_0^2$. Inversement, étant donnée cette ellipse, on en choisit une "branche", (soit la partie supérieure, soit la partie inférieure de l'ellipse dans le plan (x, v), c'est-à-dire qu'on fait un choix de signe pour la racine carrée), par exemple $v = \omega_0\sqrt{x_0^2 - x^2}$ et on intègre $dx/\sqrt{x_0^2 - x^2} = \omega_0 dt$ d'où $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$. La condition initiale fixe alors $\phi = 0$. (Le choix opposé de signe dans la racine aurait conduit à $x = -x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi')$ avec $\phi' = \phi + \pi$, donc au final, à la même fonction $x(t)$, à une redéfinition de ϕ près.).

Sans même résoudre explicitement l'"équation horaire" (l'équation du mouvement), on peut "lire" beaucoup d'informations concernant le mouvement sur le "portrait de phase" (x, v). Considérons en effet un point $(x, v = \omega_0\sqrt{x_0^2 - x^2})$ (en choisissant à nouveau la branche supérieure de l'ellipse). Le fait que $v > 0$ signifie qu'à partir de ce point, le mouvement s'effectue vers la droite sur cette branche, jusqu'à ce que v s'annule et change de signe, c'est-à-dire qu'on passe sur la branche inférieure ; à partir de ce moment, la conclusion est inversée et le mouvement s'effectue vers la gauche sur la branche inférieure jusqu'à ce qu'il recoupe à nouveau l'axe, etc. Le mouvement dans l'espace des phases est donc un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre le long de l'ellipse.

Ces considérations s'étendent à un système à N degrés de liberté, c'est-à-dire décrit par N coordonnées x_i : l'espace de phases est alors de dimension $2N$.

Pour un système donné, obéissant à la loi de la dynamique $m\ddot{x}_i = F_i(\vec{x}, t)$ avec une force donnée, la solution $x_i = f_i(t)$ est unique une fois spécifiées des conditions initiales $x_i(t_0), \dot{x}_i(t_0)$. Cela implique que deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent pas s'intersecter : si c'était le cas, elles auraient des conditions initiales prises en ce point identiques et la suite de leur trajectoire coïnciderait alors. La seule exception à cette règle se produit en un point d'équilibre instable, *du voisinage* duquel plusieurs trajectoires différentes peuvent partir, ou y arriver (au bout d'un temps infini, pourquoi ?).

3.2. Pendule simple, son portrait de phase

On revient au pendule simple, satisfaisant l'équation $\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta$. On a mentionné au chapitre 2 qu'une intégrale première peut être obtenue en multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\cos\theta = E/m\ell^2 \text{ constante } ,$$

où, comme précédemment, $\omega_0^2 = g/\ell$ et où E est l'énergie totale conservée, fixée par les conditions initiales. Appelons $\phi = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire. L'équation précédente est précisément celle d'une courbe dans l'espace des phases, c'est-à-dire d'un portrait de phase, qui dépend de la constante $E/m\ell^2$. En se rappelant que $\cos\theta \equiv 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, on peut résoudre

$$\phi = \pm 2\omega_0\sqrt{\nu^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{3.1}$$

avec $\nu \overset{\text{déf}}{=} \frac{\phi_0}{2\omega_0}$, où $\phi_0 = \dot{\theta}_0$ est la vitesse angulaire au point où $\theta = 0$ (donc $E/m\ell^2 = \frac{1}{2}\phi_0^2 - \omega_0^2$). Comme précédemment, une remarque simple consiste à observer que le mouvement s'effectue sur une même branche et dans une direction donnée tant que ϕ ne s'annule pas. Si $\phi > 0$ (branche supérieure), θ croît au cours du mouvement, donc le point se déplace vers la droite. Le mouvement ne peut changer de sens que si ϕ vient à s'annuler.

• Pour $\nu \ll 1$, ϕ, θ sont (au plus) d'ordre 1 en ν, et l'équation se simplifie en

$$\phi = \pm 2\omega_0\nu\sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\nu}\right)^2} \ .$$

C'est l'approximation déjà rencontrée des petites oscillations du pendule par un oscillateur harmonique, et on retrouve comme portrait de phase l'ellipse du paragraphe précédent : il s'agit d'une ellipse de demi-axes 2ν, $2\omega_0\nu$ dans les variables θ et ϕ.

• Quand ν croît mais reste inférieur à 1, l'ellipse se déforme et grossit, la trajectoire (le portrait) restant une courbe fermée. Le mouvement est encore un mouvement pendulaire

oscillant, entre des angles $\pm\theta_m$, avec $\sin(\theta_m/2) = \nu$. On obtient la période en intégrant l'équation du mouvement, là encore une équation différentielle à variables séparées :

$$dt = \frac{d\theta}{\phi(\theta)} = \pm\frac{d\theta}{2\omega_0\sqrt{\nu^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \ . \tag{3.2}$$

Comme esquissé au chapitre 2, §4, la demi-période correspond au temps nécessaire au pendule pour osciller mettons entre les angles $-\theta_m$ et θ_m, (donc avec une vitesse angulaire $\phi > 0$, d'où le choix du signe $+$ dans (3.2)) soit

$$\frac{T}{2} = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\theta}{2\omega_0\sqrt{\nu^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \tag{3.3}$$

et le changement de variable d'intégration $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_m}{2}\sin u$ amène à (le vérifier !)

$$T = 4\int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\theta_m}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u\,\sin^2\frac{\theta_m}{2}}} \ . \tag{3.4}$$

La période est donc donnée en fonction de l'angle maximum θ_m par cette intégrale non triviale, nommée "intégrale elliptique de première espèce"

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\mathbf{K}(\sin^2\frac{\theta_m}{2}) \overset{\text{déf}}{=} 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \sin^2 u\sin^2\frac{\theta_m}{2}}} \ . \tag{3.5}$$

Toute cette discussion reste valable jusqu'à la valeur critique $\nu = 1$.

• Le cas $\nu = 1$, et donc $\sin^2\theta_m/2 = 1$, $\theta_m = \pm\pi$, correspond à la situation où la bille du pendule atteint la verticale avec une vitesse nulle. La période T tend vers l'infini quand $\nu \to 1$.

• Enfin pour $\nu > 1$, le radical dans (3.1) ne s'annule jamais, donc le sens du mouvement sur le portrait de phase ne s'inverse jamais : vers la gauche sur la branche inférieure, vers la droite sur la supérieure.

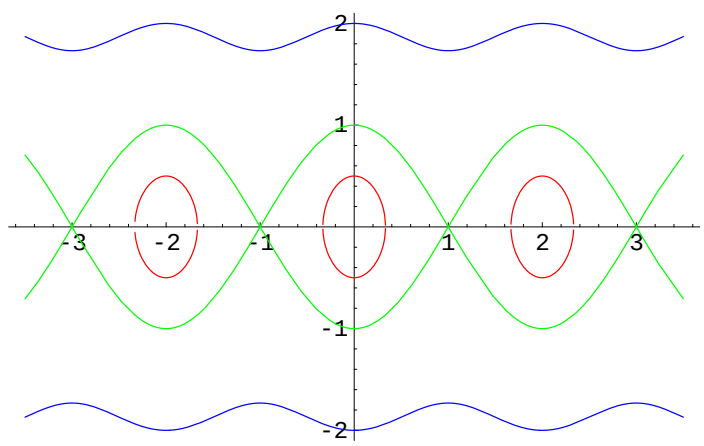


Fig. 7: Portrait de phase du pendule simple : en abscisse θ/π, en ordonnée $\phi/2\omega_0$ pour les trois valeurs de $\nu = \frac{1}{2}, 1, 2$.

Voir le portrait de phase sur la figure 7. Noter que des trajectoires s'intersectent aux points $\theta = (2k+1)\pi$, qui correspondent à des points d'équilibre instable. Les trajectoires qui passent par ces points séparent les trajectoires fermées, du type elliptique, des trajectoires ouvertes. Pour cette raison, elles sont appelées *séparatrices*.

4. Le modèle proie-prédateur, équation de Lotka-Volterra. *(traité en TD)*

Il s'agit d'un modèle d'interactions entre deux populations, les petits poissons et les gros, les seconds mangeant les premiers ... Il a été initialement proposé par Lotka pour la modélisation de certaines réactions chimiques, puis appliqué par Volterra à l'évolution de populations de poissons dans l'Adriatique. On écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \gamma p - apP \\ \frac{dP}{dt} &= -\Gamma P + ApP \end{aligned} \tag{4.1}$$

où les quatre constantes sont positives, homogènes à l'inverse d'un temps. Si les petits poissons étaient seuls, γ serait leur taux de croissance (exponentielle), si les gros étaient sans proies, Γ serait leur taux d'extinction. Les constantes non diagonales décrivent les interactions entre ces populations.

Ce système admet des solutions "triviales"

$$p = P = 0\,; \qquad p = 0,\ P(t) = P(0)\,e^{-\Gamma t}\,; \qquad P = 0,\ p(t) = p(0)\,e^{\gamma t}\ . \tag{4.2}$$

On cherche des solutions dans $\mathbb{R}^2_+$. Que sont les points fixes ? Ils sont solutions de

$$\{\gamma p_s = a p_s P_s\ , \quad \Gamma P_s = A p_s P_s\} \Longleftrightarrow (p_s, P_s) = (0,0),\ \left(\frac{\Gamma}{A}, \frac{\gamma}{a}\right) \tag{4.3}$$

La linéarisation autour du point fixe trivial est ...triviale ! puisqu'elle se réduit à $\frac{d\tilde{p}}{dt} = \gamma\tilde{p}\,, \quad \frac{d\tilde{P}}{dt} = -\Gamma\tilde{P}$, donc elle décrit des populations découplées. En ce qui concerne le point fixe non trivial, on note qu'on peut récrire (4.1) sous la forme

$$\dot{p} = -ap(P - P_s)\ , \qquad \dot{P} = AP(p - p_s)\ . \tag{4.4}$$

La linéarisation autour du point fixe non trivial, $p = p_s + \tilde{p}\,,\ P = P_s + \tilde{P}$, s'en déduit :

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -a p_s \tilde{P} \qquad \frac{d\tilde{P}}{dt} = A P_s \tilde{p} \tag{4.5}$$

donc en éliminant $\tilde{P}$

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dt^2} = -aAp_sP_s\tilde{p}$$

(ou la même équation pour $\tilde{P}$), équation du type oscillateur harmonique de fréquence propre donnée par $\omega_0^2 = aAp_sP_s = \gamma\Gamma$. Donc la version linéarisée des équations de Lotka-Volterra a pour solution

$$\begin{aligned} p(t) &= p_s + (p(0) - p_s)\cos\omega_0 t - \sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}}\frac{a}{A}(P(0) - P_s)\sin\omega_0 t \\ P(t) &= P_s + (P(0) - P_s)\cos\omega_0 t + \sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma}}\frac{A}{a}(p(0) - p_s)\sin\omega_0 t \end{aligned} \quad , \tag{4.6}$$

équations d'une ellipse centrée en (p_s, P_s), d'équation $\gamma A^2(p - p_s)^2 + \Gamma a^2(P - P_s)^2 =$ constante (constante donnée par les conditions initiales).

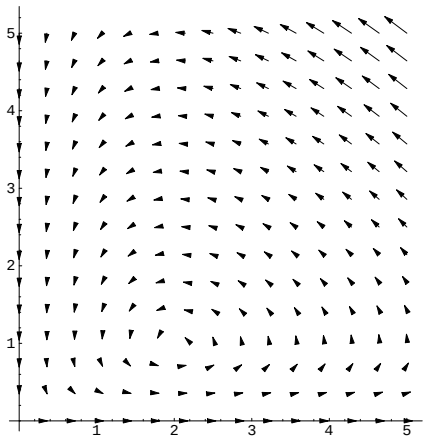


Fig. 8: Champ de vitesse du système de Volterra pour des valeurs $a = A = \gamma = 1$, $\Gamma = 2$.

S'il est difficile de dessiner le portrait de phase (un système de courbes dans un espace de dimension 4 !), on peut le représenter à deux dimensions dans le plan (p, P) en dessinant en chaque point le vecteur vitesse $(\dot{p}, \dot{P})$. Les trajectoires sont des courbes tangentes à ce *champ de vitesse*. Les équations (4.4) impliquent que le champ de vitesse, donc les trajectoires, s'enroulent autour du point fixe non trivial dans le sens positif. On montre en outre que les trajectoires sont fermées, donc périodiques. Voir figure 8.

Un dernier point au sujet de l'équation de Lotka-Volterra. Malgré sa non-linéarité, on peut trouver une quantité conservée. Si on pose $u = \ln p$, $U = \ln P$, les équations (4.1) se mettent sous la forme

$$\frac{du}{dt} = \gamma - ae^U \ , \qquad \frac{dU}{dt} = -\Gamma + Ae^u \ . \tag{4.7}$$

Si on peut trouver un "hamiltonien" $H(u,U)$ tel que $\dot{u} = \partial_U H$, $\dot{U} = -\partial_u H$, alors cet hamiltonien est une quantité conservée puisque

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial U}\dot{U} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} = 0 \ .$$

Or il est aisé d'intégrer les deux équations

$$\partial_U H = \gamma - ae^U \ , \qquad \partial_u H = \Gamma - Ae^u$$

en deux étapes, la première équation impliquant $H(u,U) = \gamma U - ae^U + C(u)$, puis la seconde $H(u,U) = \gamma U - ae^U + \Gamma u - Ae^u$, à une constante additive sans importance près. Le "mouvement" s'effectue donc sur la courbe d'équation

$$\gamma \ln P - aP + \Gamma \ln p - Ap = \text{constante} \ , \tag{4.8}$$

ou encore

$$P^\gamma p^\Gamma = Ce^{aP+Ap} \ .$$

la constante C étant fixée par les conditions initiales.

5. Applications récursives

Ce paragraphe est consacré au cas de systèmes régis par des équations aux différences finies, pouvant se mettre sous forme d'applications récursives $x_n = f(x_{n-1})$ ou $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2})$, etc

De telles applications peuvent être vues comme des *discrétisations* d'une équation différentielle, respectivement du premier, du deuxième etc ordre. A ce titre, elles peuvent représenter une méthode pratique de résolution numérique de telles équations. Elles peuvent aussi apparaître de plein droit dans l'étude de systèmes dynamiques où on n'a accès qu'à des valeurs de la variable à des temps discrets, par exemple la position d'une comète à son périhélie, la population d'une espèce de tortues marines lors de leur ponte annuelle...

5.1. Points fixes et stabilité linéaire

Considérons une application récursive (ou "itérative")

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{5.1}$$

où f est une fonction supposée continue et dérivable, et étudions ses points fixes et la stabilité de sa linéarisation au voisinage de ces points fixes. Les points fixes qu'il est traditionnel de dénoter par x^* satisfont

$$x^* = f(x^*) \ .$$

Géométriquement, ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = f(x)$ avec la première bissectrice.

Linéariser l'itération au voisinage d'un de ses points fixes x^*, c'est définir une nouvelle suite $u_n = x_n - x^*$ et récrire la relation en termes des u_n en développant f au premier ordre en u

$$x_{n+1} = x^* + u_{n+1} = f(x^* + u_n) = f(x^*) + f'(x^*)u_n + \mathrm{O}(u_n^2)$$

soit

$$u_{n+1} = f'(x^*)u_n \ . \tag{5.2}$$

Selon la valeur de $\rho := |f'(x^*)|$, cette suite géométrique a des comportements bien différents. Si $\rho < 1$, la suite u_n converge vers zéro, c'est-à-dire x_n tend vers la limite x^*. Au contraire, si $\rho > 1$, la suite u_n diverge et, selon cette analyse de stabilité linéaire, x_n ne converge pas vers x^* (mais rien n'interdit qu'il converge vers un autre point fixe).

On peut aussi visualiser cette condition sur ρ et la convergence ou non de x_n vers x^* par une méthode graphique. Cette méthode est illustrée sur l'exemple de la suite $x_n = e^{x_{n-1}} - 2$, $x_1 = 1$ sur la figure 9a. Pour un point x_n donné, la nouvelle valeur de $x_{n+1} = f(x_n)$ est obtenue en projetant sur l'axe des abscisses le point de la bissectrice de coordonnées $x_{n+1} = y_{n+1} = f(x_n)$. L'itération conduit alors à la construction d'un escalier ou d'un colimaçon, qui s'éloigne de x^* ou qui s'en approche selon que la tangente à la courbe en x^* est au dessus ou au dessous de la bissectrice, c'est-à-dire si $\rho = |f'(x^*)| > 1$ ou si $\rho < 1$.

Bien que l'équation $x = e^x - 2$ admette une racine positive $x_+^* \approx 1.14619$, comme on le voit sur la figure 9a, cette racine **n'est pas** la limite de cette suite qui en fait converge

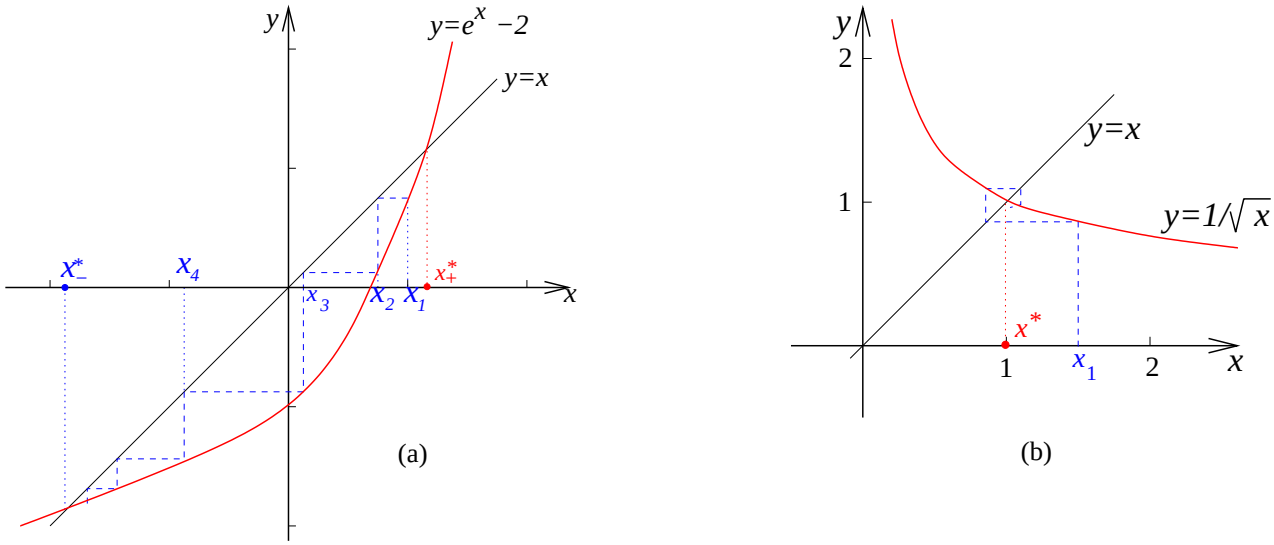


Fig. 9: (a) Convergence ou divergence de la suite $x_n = e^{x_{n-1}} - 2$ selon la valeur initiale de x_1. On a représenté la suite qui démarre de $x_1 = 1$. Tracer sur le graphe celle qui démarre de $x_1 = 1.5$. (b) Le cas de la suite $x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$.

vers l'autre racine $x_n \to x^*_- \approx -1.84141$. On dit parfois que x^*_+ est un point fixe répulsif, x^*_- un point fixe attractif de l'itération. Noter que la même relation de récurrence avec la valeur initiale $x_1 = 1.5$ conduit à une suite divergente. En trouver la raison graphique sur la figure.

Récapitulons

$$\begin{aligned} \rho = |f'(x^*)| < 1 :&\ \ x^* \ \text{ est un point fixe attractif } x_n \to x^* \\ \rho = |f'(x^*)| > 1 :&\ \ x^* \ \text{ est un point fixe répulsif } x_n \not\to x^* \\ \rho = |f'(x^*)| = 1 :&\ \ \text{on ne peut pas conclure.} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Montrer que la suite $x_{n+1} = \ln(x_n + 2)$ qui admet les mêmes points fixes $x^*_\pm$ (pourquoi ?) voit se renverser leurs rôles. x^*_+ est maintenant attractif, et x^*_- répulsif.

Étudier de la même façon la convergence de la suite $x_n = 3(1 - e^{-x_{n-1}})$ vers la racine positive de l'équation $x^* = 3(1 - e^{-x^*})$ rencontrée dans l'étude du corps noir (cf TD 2 et TP). (L'itération converge car la fonction $\phi(x) = 3(1 - e^{-x})$ a une pente $\phi'(x) = 3e^{-x} < 1$ au voisinage de $x = 3$ ($e^{-3} \approx 1/20$).)

5.2. Application logistique

L'application logistique est l'itération définie par

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) =: f(x_n) \tag{5.4}$$

où x est une variable dans l'intervalle $[0,1]$ et a est un paramètre positif. En dépit de son apparente simplicité, cette application itérative révèle de surprenantes richesses ...

Noter d'abord qu'elle constitue une discrétisation de l'équation dite de Verhulst, $\dot{x} = Ax - Bx^2$, qui, elle, n'exhibe aucun phénomène particulièrement intéressant. Cette équation différentielle peut par changement des variables $x = A\tilde{x}/B$ et $\tilde{t} = At$ se mettre sous la forme canonique

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{x} = \tilde{x}(1-\tilde{x}) \tag{5.5}$$

puis s'intègre aisément par séparation de variables,

$$d\tilde{t} = \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}^2} = \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{d\tilde{x}}{1-\tilde{x}} = d\ln\left|\frac{\tilde{x}}{1-\tilde{x}}\right| \ ,$$

soit

$$\left|\frac{\tilde{x}(\tilde{t})}{1-\tilde{x}(\tilde{t})}\right| = \left|\frac{\tilde{x}(0)}{1-\tilde{x}(0)}\right| e^{\tilde{t}} \ .$$

On peut en fait se débarrasser des valeurs absolues : l'équation précédente montre que $\tilde{x}(\tilde{t})/(1-\tilde{x}(\tilde{t}))$ ne s'annule pas au cours du temps, donc est du même signe que $\tilde{x}(0)/(1-\tilde{x}(0))$. On en tire alors la solution

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = \frac{e^{\tilde{t}}\tilde{x}(0)}{1+(e^{\tilde{t}}-1)\tilde{x}(0)}$$

ou encore, dans les variables initiales

$$x(t) = \frac{e^{At}x(0)}{1+\frac{B}{A}(e^{At}-1)x(0)}$$

fonction qui tend gentiment vers A/B quand $t \to \infty$. Le paramètre de contrôle a de l'application logistique peut être considéré comme lié au pas de discrétisation du temps de l'équation de Verhulst par $a = A\Delta t + 1$. Nous allons voir qu'il joue un rôle très important ... et insoupçonné au niveau de l'équation de Verhulst.

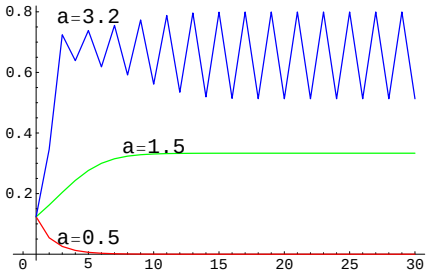


Fig. 10: Itérations $x_n = f_n(x_0)$ de l'application logistique pour une condition initiale quelconque, ici $x_0 = 0.1234567890$, et, de bas en haut $a = 0.5$, $a = 1.5$ et $a = 3.2$. L'axe des abscisses porte la valeur de $n+1$.

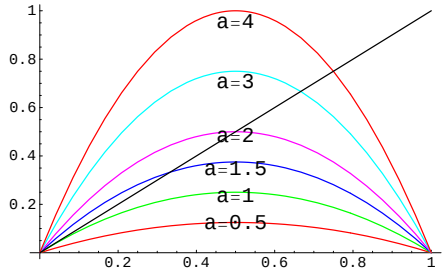


Fig. 11: Les points fixes de l'application logistique pour différentes valeurs du paramètre de contrôle a. Ici on a tracé les courbes pour (de bas en haut) $a = 0.5,\ 1.,\ 1.5,\ 2.,\ 3.,\ 4.$

Puisqu'on veut itérer l'application $x_{n+1} = f(x_n)$ et ne considérer f que dans l'intervalle $[0, 1]$, il faut d'abord se demander quelles valeurs de a sont telles que f applique $[0, 1]$ sur lui-même. Un calcul élémentaire montre que f est maximale en $x = \frac{1}{2}$, qu'elle y prend la valeur $a/4$ et que la condition cherchée est donc $a \leq 4$.

Introduisons la notation commode $f_n(x)$ pour la n-ième itérée de la fonction $f(x)$ de (5.4), autrement dit le résultat de n compositions de la même fonction f

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots f}_{n \text{ fois}}\,, \tag{5.6}$$

ou encore $f_n = f \circ f_{n-1}$, $f_1 \equiv f$. Revenons alors à la suite x_n. Comme toujours pour une suite définie par récurrence, il faut aussi se donner une valeur initiale x_0 (l'équivalent de la condition initiale pour une équation différentielle du premier ordre). Avec la notation précédente, on a $x_n = f_n(x_0)$. Il est aisé de calculer numériquement les x_n successifs pour une valeur du paramètre a donnée. Voir figure 10.

Il est beaucoup moins aisé de donner une expression fermée de x_n, en dehors de quelques valeurs particulières de a. Par exemple pour $a = 2$, (5.4) est équivalent à $1 - 2x_{n+1} = (1 - 2x_n)^2$ donc $\ln(1 - 2x_{n+1}) = 2\ln(1 - 2x_n) = \cdots = 2^{n+1}\ln(1 - 2x_0)$.

Il apparaît sur la figure que la suite (x_n) (la "trajectoire" de x si on pense à n comme une discrétisation du temps) a une limite quand $t \to \infty$ pour a petit, vers une valeur nulle ou finie, selon a, mais oscille pour a plus grand. Il est aisé de confirmer par l'analyse cette constatation empirique. Les limites possibles de x_n sont les points fixes attractifs (au sens de (5.3)) de l'application. Les points fixes x^* sont solutions de $x^* = ax^*(1 - x^*)$. Ce sont donc

$$x^* = 0 \qquad \text{et} \qquad x^* = 1 - a^{-1} \tag{5.7}$$

mais la deuxième valeur est en dehors de l'intervalle $[0, 1]$ pour $a < 1$ et doit donc être rejetée. Donc pour $0 \leq a < 1$, le seul point fixe est $x^* = 0$, et il est attractif selon le critère

(5.3) puisque $f'(0) = a$ est bien de module inférieur à 1. Pour $a \geq 1$ un nouveau point fixe apparaît. Il y a donc une première bifurcation en $a = 1$. Examinons la stabilité de ce nouveau point fixe x^* : $f'(x) = a(1-2x)$, donc en $x^* = 1 - a^{-1}$, $f'(x^*) = 2 - a$ est de module inférieur à 1 ssi $1 < a < 3$.

Ceci est bien confirmé par l'étude de la figure 11. Si $a < 1$, la courbe $y = f(x)$ ne coupe la bissectrice qu'en 0. Si $a > 1$, un nouveau point fixe apparaît, la pente de la tangente en 0 est supérieure à 1, donc l'origine est instable.

En $a_1 = 3$ se produit donc une nouvelle bifurcation. Le point fixe non trivial devient à son tour instable. Mais comme le montre la figure 10, l'histoire ne s'arrête pas là. En $a = 3.2$, les x_n oscillent entre deux valeurs, ce qui suggère que $f_2 = f \circ f$ a des points fixes non triviaux. Cherchons en effet les points fixes de f_2. On trouve $f_2(x) = a^2x(1-x)\big(1 - ax(1-x)\big)$, donc les points fixes non triviaux $x^* \neq 0$ satisfont une équation du 3ème degré $1 = a^2(1-x^*)\big(1 - ax^*(1-x^*)\big)$ dont le point fixe non trivial de f doit être aussi solution (tout point fixe de f est point fixe de f_2 !). Cela permet de ramener l'équation du 3ème degré à une équation du 2ème degré

$$1 - a^2(1-x^*)\big(1 - ax^*(1-x^*)\big) = (1 - a + ax)(1 + a - a(1+a)x + a^2x^2) = 0$$

et les racines du facteur de degré 2 sont

$$x^*_{2\pm} = \frac{1}{2}\left(1 + a^{-1} \pm \sqrt{(1+a^{-1})(1-3a^{-1})}\right) \ .$$

Elles sont réelles pour $a \geq 3$, égales à $2/3$ en $a = 3$ et restent dans $[0, 1]$ pour tout $a > 3$.

L'analyse de stabilité linéaire montre que les *deux* solutions sont stables (sous l'action de f_2) pour $3 \leq a < a_2 := 1 + \sqrt{6} = 3.449\cdots$.

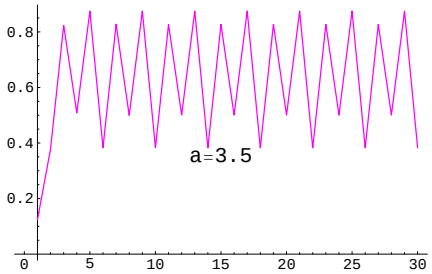


Fig. 12: Itérations $x_n = f_n(x_0)$ de l'application logistique pour $x_0 = 0.1234567890$ (un choix arbitraire !) et $a = 3.5$. L'axe des abscisses porte la valeur de $n + 1$.

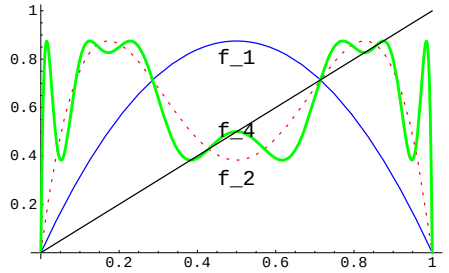


Fig. 13: Itérations $x_n = f_n(x)$ de l'application logistique pour $a = 3.5$. $f = f_1$, f_2 et f_4 sont portées respectivement en trait fin, en pointillé et en trait gras.

Au delà de cette valeur, le même scénario se répète. Comme le montre la figure 12, pour $a = 3.5$, apparaissent des oscillations de $x_n = f_n(x_0)$ entre *quatre* valeurs, ce qui montre que l'on est maintenant en présence de cycles de longueur 4. Il faut donc examiner la fonction f_4 et ses points fixes (fig. 13).

Sur la figure 13, dessinée pour $a = 3.5$, apparaissent les points fixes de f, les deux supplémentaires de f_2, visibles aux points d'intersection avec la droite $y = x$, mais dotés d'une pente (en valeur absolue) supérieure à 1, donc instables. Seuls les 4 nouveaux points fixes de f_4 sont stables.

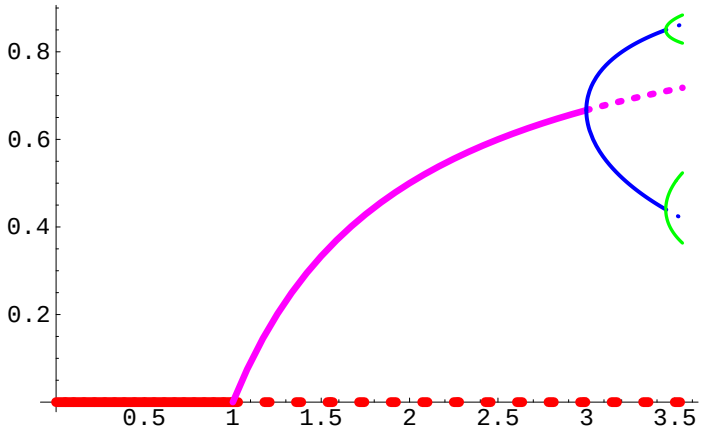


Fig. 14: Le début de la cascade de Feigenbaum : bifurcations successives des points fixes de f_{2^n} en ceux de $f_{2^{n+1}}$. Ici on voit ceux de $f_1 = f$, f_2 et f_4. Les courbes en tirets signalent des points fixes instables.

Le système itératif a donc subi une nouvelle bifurcation en $a = a_2$, avec apparition de 4 points fixes de f_4 (et des 4-cycles oscillant entre eux), stables ...jusqu'à une valeur $a = a_3 = 3.544$. Au delà se produit un nouveau doublement de période, avec des 8-cycles,

valable dans une plage encore plus étroite de valeurs de a au bout de laquelle une nouvelle bifurcation, et un nouveau doublement de période, se produisent, etc. On peut représenter cette cascade de bifurcations comme sur la figure 14. C'est la *cascade de Feigenbaum*, du nom de son découvreur (1978).

Une étude plus détaillée montre qu'apparaissent successivement des points fixes nouveaux de f_{2^r}, attractifs dans un intervalle $a_r < a < a_{r+1}$ tandis que les points fixes précédents deviennent instables. La suite a_r converge vers $a_\infty = 3.569945\cdots$ et la suite des $\frac{a_r - a_{r-1}}{a_{r+1} - a_r}$ tend elle-même vers une valeur $\delta = 4.669201609102990\cdots$, ou de façon équivalente, on a

$$a_r - a_\infty \sim -A\delta^{-r} \ . \tag{5.8}$$

Fait très remarquable, cette valeur de δ a des propriétés d'*universalité*, en ce sens qu'elle ne dépend pas du choix de la fonction f pourvu que cette fonction applique l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même et qu'elle ait un maximum quadratique dans cet intervalle (le fait que $f''(x_m) \neq 0$, avec ici $x_m = \frac{1}{2}$, étant donc le fait crucial). Par contre, les valeurs de a_∞ ou de la constante A dans (5.8) ne sont pas universelles, mais dépendent de la nature précise de la fonction f. Ainsi, l'itération $x_{n+1} = \frac{a}{4}\sin(\pi x_n)$ conduit à la même valeur de δ, même si la valeur de a_∞ est différente. [5]

Que se passe-t-il au delà de cette valeur, pour $a_\infty < a < 4$? Tous les points fixes précédents sont instables, il existe par contre pour la plupart des valeurs de a dans cet intervalle une orbite apériodique, dite *attracteur étrange*, faite d'une infinité de points x, et le long de laquelle le comportement des itérés successifs d'un x_0 semble erratique. Il existe aussi des plages étroites de a où des p-cycles nouveaux apparaissent, avec à nouveau des doublements de période et des cascades de Feigenbaum (phénomène d'"intermittence"). Par exemple, pour $1 + \sqrt{8} = 3.8284 < a < 3.8495$, des 3×2^r-cycles stables existent. Ces p-cycles se voient comme des zones claires sur le diagramme des orbites ci-dessous (figure 15). Pour a générique, le système présente un comportement qu'on aime associer au **chaos**, c'est-à-dire une extrême sensibilité aux conditions initiales. Dans ce cas, pour deux valeurs initiales x'_0 et x''_0 proches, l'intervalle $x'_n - x''_n$ croît exponentiellement

$$|x'_n - x''_n| \sim \kappa^n |x'_0 - x''_0| \ ,$$

[5] En fait la fonction f doit vérifier plusieurs conditions techniques, qu'elle ait un maximum quadratique unique dans l'intervalle considéré et que sa "dérivée schwarzienne" $f'''/f' - \frac{3}{2}(f''/f')^2$ y soit négative.

avec $\kappa > 1$. Une telle croissance n'est bien sûr compatible avec le fait que x reste dans l'intervalle $[0, 1]$ que pour un nombre fini de valeurs de n, mais l'important est ce phénomène de croissance des écarts. De façon plus précise, pour $a = 4$ par exemple, la relation (5.4) se récrit

$$\begin{aligned} & x_n =: \sin^2\theta_n \\ a = 4 \ : \qquad & x_{n+1} = \sin^2\theta_{n+1} = 4x_n(1-x_n) = 4\sin^2\theta_n\cos^2\theta_n = \sin^2 2\theta_n \\ & \theta_{n+1} = 2\theta_n \bmod \pi \ . \end{aligned} \tag{5.9}$$

et donc $|\theta'_n - \theta''_n| = 2^n|\theta'_0 - \theta''_0| \bmod \pi$.

L'itération logistique est un des modèles de base pour étudier les phénomènes encore mal compris d'apparition du chaos et de la turbulence. Il existe en effet des situations expérimentales (convexion de Rayleigh-Bénard dans des cellules contenant de l'helium liquide ou du mercure, expériences d'A. Libchaber et al.) dans lesquelles on observe une cascade de doublements de fréquence avant l'apparition d'un régime turbulent, et dans lesquelles les propriétés universelles des itérations se manifestent. Pour en savoir plus, voir par exemple `http://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00232033/en/` .

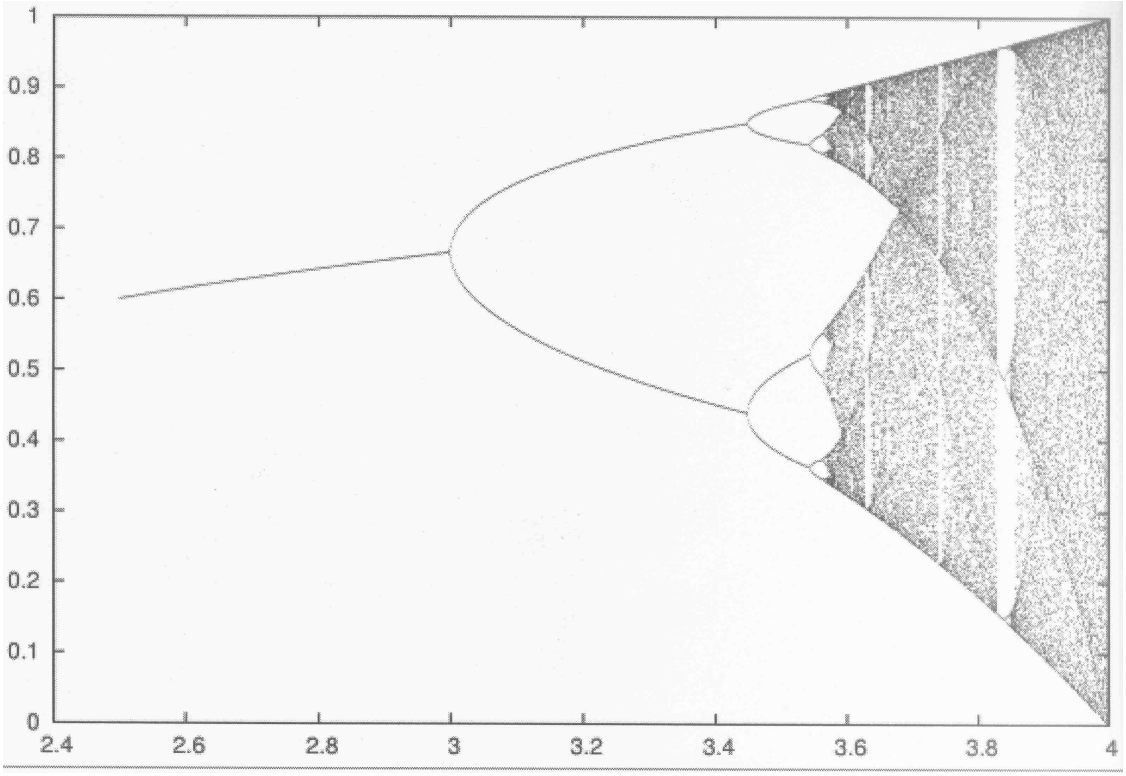


Fig. 15: Orbites de l'application logistique (zoom et prolongement de la figure 14).

Chapitre 6. Équations de bilan

1. Courant. Équation de conservation.

1.1. Densité et courant

Considérons un corps essentiellement unidimensionnel (tel un fil, un tuyau) contenant un fluide, soit matériel, particules solides, charges électriques, fluide liquide ou gazeux..., soit immatériel, chaleur, etc. Par "fluide", on entend un système mouvant, doté de propriétés de transport. La quantité de fluide contenue dans un petit élément de ce corps est décrite en tout point par une densité (volumique) $\rho(x,t)$ qui varie selon x et le temps t. La quantité totale contenue dans un petit volume, entre les abscisses x et $x+dx$, est donc

$$dN = \rho(x,t)dx\delta S$$

si δS est la section transverse du corps. (On aurait aussi pu introduire la *densité linéïque* $\overline{\rho}(x,t)$ et écrire $dN = \overline{\rho}(x,t)dx$.)

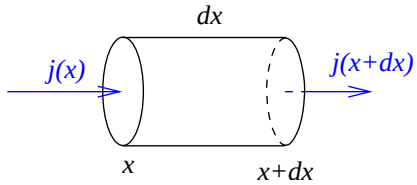


Fig. 1: Flux entrant et sortant dans le volume élémentaire.

L'élément de volume considéré voit une certaine quantité de fluide entrer ou sortir par ses extrémités à chaque instant. On décrit cela en définissant le "courant" $j(x,t)$. Par définition la quantité algébrique (c'est-à-dire positive ou négative) de fluide traversant la section δS dans le sens des x croissants, c'est-à-dire de gauche à droite, pendant le temps dt est

$$d'N(x,t) = j(x,t)\delta S dt \ .$$

Noter que cette quantité peut représenter elle-même un *bilan*, dans le cas par exemple où des particules traversent la surface δS vers la gauche et d'autres vers la droite. Dans ce cas on a bien sûr

$$j(x,t)dt\delta S = \#\text{particules allant vers la droite} - \#\text{particules allant vers la gauche} \ ,$$

à travers la surface δS au point x, pendant le temps dt. La quantité $j\delta S$ est le "flux" de j à travers la surface δS.

1.2. Loi de conservation

Supposons maintenant que le fluide considéré soit sujet à une **loi de conservation**. Par là, on entend que la variation de la quantité de fluide dans le volume considéré pendant un laps de temps dt résulte uniquement des entrées et sorties de ce fluide par les extrémités. C'est le cas par exemple du nombre de molécules d'un fluide dans une canalisation (en l'absence de fuite dans cette dernière...), ou du nombre d'électrons dans un conducteur ordinaire, en l'absence de réactions électrochimiques. Ce ne serait pas le cas si le fluide participait à des réactions chimiques ou autres à l'intérieur du volume et pendant l'intervalle considérés.

Sous cette hypothèse, on peut écrire une *équation de bilan*, qui exprime cette conservation locale, dans tout intervalle de temps dt et d'espace dx. Pendant l'intervalle de temps dt, la quantité de fluide dans notre volume élémentaire varie de

$$\begin{aligned} d^2N(x,t) &= \partial_t dN(x,t)dt = \partial_t \rho(x,t)\delta S dx dt \\ &= (j(x,t)\delta S - j(x+dx)\delta S)dt = -\partial_x j(x,t)\delta S dx dt \ , \end{aligned} \tag{1.1}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0 \ ,} \tag{1.2}$$

dite *équation de conservation*.

Toutes les considérations qui précèdent peuvent et doivent être généralisées pour un système qui n'est pas unidimensionnel. Le courant devient un *vecteur*, $\vec{j}(\vec{x},t)$, de composantes (j_x, j_y, j_z); son flux à travers l'élément de surface δS est le produit scalaire $\vec{j}.\hat{n}\delta S$, où $\hat{n}$ est le vecteur unitaire normal à δS et dirigé vers l'intérieur du volume. L'équation de conservation (1.2) s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{j}(x,y,z,t) + \partial_t \rho(x,y,z,t) = 0 \ , \tag{1.3}$$

où $\operatorname{div} \vec{j}$ est l'opérateur *divergence*, qui s'écrit en coordonnées rectangulaires

$$\operatorname{div} \vec{j}(x,y,z,t) := \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z \ .$$

1.3. Équation de continuité d'un fluide

Revenons à notre fluide contenu dans un corps unidimensionnel. Si la variation de la quantité de fluide est due à un mouvement d'ensemble à une vitesse $v(x,t)$, la quantité qui traverse δS entre les temps t et $t+dt$ est celle qui était contenue au temps t dans le volume $\delta S dx$ avec $dx = v dt$, donc

$$j(x,t)\delta S dt = \rho(x,t) dx \delta S = \rho(x,t) v(x,t) dt \delta S$$

soit

$$j(x,t) = \rho(x,t)v(x,t) \ , \tag{1.4}$$

(ou sous forme vectorielle $\vec{j} = \rho\vec{v}$,) et l'équation de conservation prend la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \ , \tag{1.5}$$

ou encore

$$\partial_t\rho + \rho\,\partial_x v + v\partial_x\rho = 0 \ , \tag{1.6}$$

où le dernier terme prend en compte une éventuelle *compressibilité* du fluide, c'est-à-dire une variation de la densité ρ d'un point à l'autre. (La généralisation tridimensionnelle ne pose pas de problème $\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \partial_t\rho = 0$, ou encore $\partial_t\rho + \rho\operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho = 0$). C'est l'*équation de continuité*, très importante en hydrodynamique.

Pour un fluide matériel, on la complète par une équation de transport de la quantité de mouvement, exprimant le principe fondamental de la dynamique sur un élément de volume du fluide, en fonction de la pression $p(x,t)$

$$\rho\left(\partial_t + \vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}p \ . \qquad \text{équation d'Euler (1.7)}$$

Dans le cas où la vitesse v est indépendante de x, (mouvement en bloc du fluide), l'équation (1.6) se réduit à $(\partial_t + v\partial_x)\rho = 0$ dont la solution est de la forme $\rho(x,t) = f(x - vt)$, la fonction f étant déterminée par la condition initiale, $f(x) = \rho(x,0)$, donc $\rho(x,t) = \rho(x - vt, 0)$, qui décrit une *onde de densité*.

1.4. Équation de la chaleur, équation de diffusion

Le courant j peut aussi décrire le flux de chaleur entrant ou sortant d'un corps. Selon le calcul de bilan effectué plus haut en (1.1), la quantité de chaleur algébrique qui entre dans le volume élémentaire pendant l'intervalle de temps dt est $dQ = -\partial_x j(x,t)dxdt\delta S$. L'énergie interne de ce volume varie donc de $dU = dQ$. On définit la chaleur spécifique (à volume constant) c_V du corps par

$$dU = c_V\,\mu\,dT(\delta S dx) \ , \tag{1.8}$$

où μ est la masse volumique. On a donc

$$c_V\,\mu dT = c_V\,\mu\,\partial_t T dt = -\partial_x j dt$$

soit

$$c_V\,\mu\partial_t T = -\partial_x j \ . \tag{1.9}$$

Dans de nombreux corps, le courant de chaleur $j(x,t)$ est proportionnel à la dérivée spatiale (c'est-à-dire au gradient) de la température (loi de Fourier)

$$j(x,t) = -\kappa \partial_x T \ , \tag{1.10}$$

où κ est la *conductibilité thermique*, une quantité positive et caractéristique du corps, constante en première approximation. Cette équation, avec son signe, implique que le flux de chaleur est dirigé vers la région de plus faible température, conformément à notre expérience quotidienne. En combinant (1.9) et (1.10), on aboutit à l'**équation de la chaleur**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_V \mu} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ . \tag{1.11}$$

À nouveau, la généralisation à trois dimensions n'offre pas de difficulté conceptuelle

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_V \mu} \Delta T} \tag{1.12}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le *laplacien*.

Pour l'étude de cette équation dans des situations variées, voir le TD 5.

Cette équation de la chaleur est un cas particulier d'**équation de diffusion**, qui décrit aussi bien la dilution d'un polluant dans un liquide, la diffusion d'un gaz dans un autre ou dans un corps solide, etc. Supposons que le courant reflète les inhomogénéités de la densité selon la *loi de Fick*

$$j(x,t) = -D \frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) \ , \tag{1.13}$$

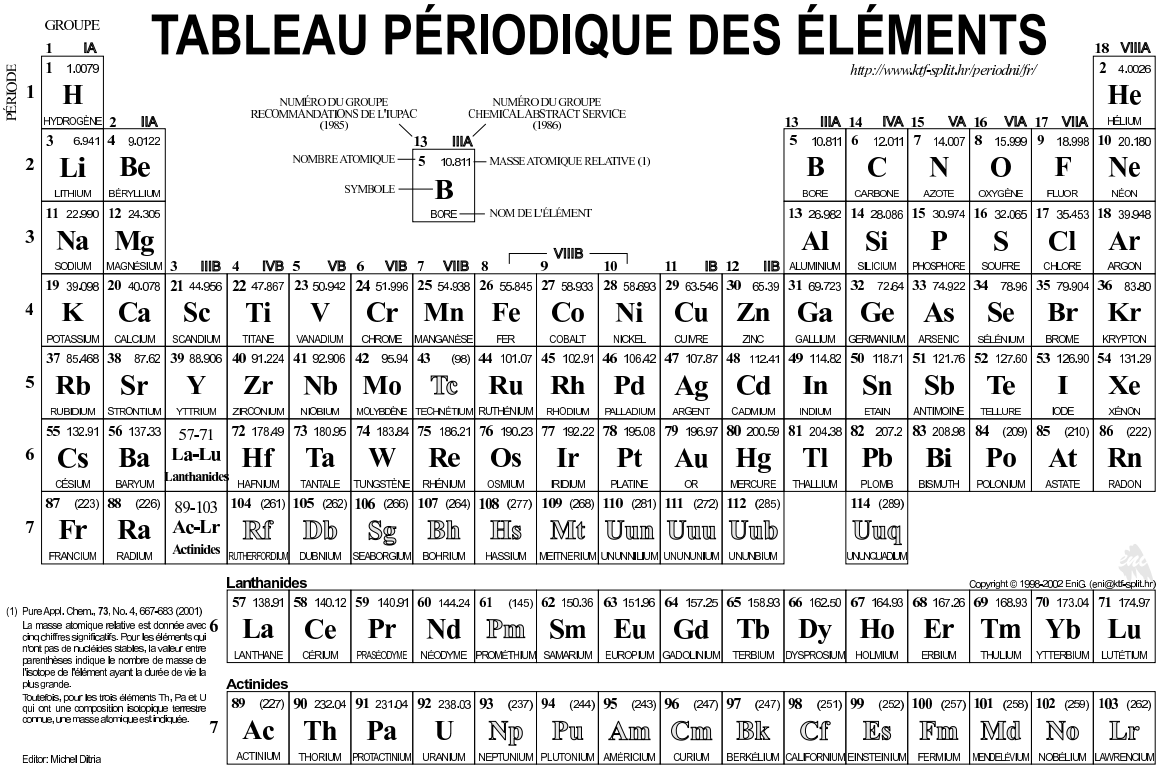
où la constante D, dite constante de diffusion, est positive. Cette "loi" (empirique) signifie que les transferts du fluide ont lieu vers les zones où ρ est le plus faible. En la combinant avec (1.2), on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ , \tag{1.14}$$

appelée équation de diffusion.

2. Chaîne radioactive

Rappelons qu'un noyau atomique est caractérisé par son nombre de protons Z ("nombre atomique") et son nombre de masse A, qui compte la somme protons+neutrons. Des noyaux de même Z (correspondant à la même espèce chimique) mais dotés de A différents (nombres de neutrons différents) sont dits *isotopes*. Si X est la dénomination de l'espèce chimique correspondant à Z protons, on note ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ l'isotope de nombre de masse A [1]



Rappelons encore qu'il existe des noyaux instables, se désintégrant spontanément selon l'un des trois types de radioactivité, α, β et γ. La radioactivité α correspond à l'émission d'une particule α, autrement dit un noyau d'Helium, fait de 2 protons et 2 neutrons. Dans une telle désintégration,

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' + \alpha \ . $$

[1] Ce n'est malheureusement pas la convention utilisée dans le tableau suivant, extrait de `http://www.ktf-split.hr/periodni/fr/pse-pdf.html` .

La désintégration β (une notation historique) se réfère à la désintégration d'un neutron en proton, accompagnée de l'émission d'un électron e^- (et d'un antineutrino $\overline{\nu}$ qu'on omet dans la suite)

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta} {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}'' + e^- \ . $$

Enfin la radioactivité γ correspond à une désexcitation d'un noyau par émission d'un gamma, rayonnement électromagnétique de très haute énergie. Elle n'affecte pas A ni Z et ne nous concernera pas ici. On connaît des chaînes d'éléments radioactifs se désintégrant en cascade. Par exemple, l'Uranium 238 (l'isotope le plus courant de ce corps) subit la chaîne suivante de désintégrations

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow{\alpha} {}^{218}_{84}\mathrm{Po} $$

suivi de

$$ \begin{array}{ccccccccccc} & \beta \nearrow {}^{218}_{85}\mathrm{At} \searrow \alpha & & \beta \nearrow {}^{214}_{84}\mathrm{Po} \searrow \alpha & & & & & & & \\ {}^{218}_{84}\mathrm{Po} & & {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} & & {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} & \xrightarrow{\beta} & {}^{210}_{83}\mathrm{Bi} & \xrightarrow{\beta} & {}^{210}_{84}\mathrm{Po} & \xrightarrow{\alpha} & {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} \ . \\ & \alpha \searrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} \nearrow \beta & & \alpha \searrow {}^{210}_{81}\mathrm{Tl} \nearrow \beta & & & & & & & \end{array} $$

La chaîne s'arrête alors, le Plomb 206 étant un isotope stable. On voit que plusieurs *canaux* de désintégration sont parfois possibles pour un même isotope.

Pour chacune de ces désintégrations, le nombre de désintégrations par unité de temps est proportionnel au nombre de noyaux présents, avec un taux de désintégration constant, caractéristique du noyau étudié et de son mode de désintégration. Pendant le temps dt, le nombre de noyaux se désintégrant (dans un certain canal) est

$$ |dN| = \lambda N dt = -dN \ . \tag{2.1} $$

(Autrement dit la probabilité d'un noyau de se désintégrer est λ par seconde, voir plus bas § 3.2). On définit la *demi-vie*, notée τ, par le temps au bout duquel le nombre N a décru par un facteur 2. En intégrant (2.1), on trouve

$$ N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \tag{2.2} $$

donc $N(\tau) = N(0)/2$ conduit à

$$ \tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad N(t) = N(0)\, e^{-t \ln 2/\tau} = N(0) 2^{-t/\tau}. \tag{2.3} $$

La quantité initiale de l'isotope considéré décroît d'un facteur 1000 au bout d'un temps $\frac{\ln 1000}{\ln 2}\tau \approx 10\tau$ (se rappeler que $2^{10} \approx 10^3$). Par exemple, pour l'isotope naturel ^{238}U de l'Uranium, $\tau = 4,5$ Gans, (1 "Gan"= 1 milliard d'années !) donc le nombre N aura décrû d'un facteur 1000 au bout d'un temps $t = 45$ Gans, soit trois fois l'âge actuel de l'Univers...

Dans le cas d'une chaîne comme ci-dessus, chacune des étapes a sa demi-vie τ. Pour une espèce (un isotope) X_i dans la chaîne, soit $N_i(t)$ le nombre de noyaux au temps t, et soient $\tau_{ij} = \frac{\ln 2}{\lambda_{ij}}$ les demi-vies des désintégrations vers les espèces X_j. Le nombre de noyaux obéit donc à une équation de bilan

$$\frac{dN_i}{dt} = -\sum_{\substack{j \\ i\to j}} N_i\lambda_{ij} + \sum_{\substack{k \\ k\to i}} N_k\lambda_{ki} \ .$$

L'ensemble des N_i satisfait donc un système d'équations différentielles linéaires couplées.

Considérons par exemple les deux premières étapes de la chaîne ci-dessus

$$^{238}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{234}\mathrm{Pa}$$

On écrit

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = -\lambda_U \mathrm{U} = -\frac{\mathrm{U}}{\tau_\mathrm{U}} \ln 2$$
$$\frac{d\mathrm{Th}}{dt} = \left(\frac{\mathrm{U}}{\tau_U} - \frac{\mathrm{Th}}{\tau_\mathrm{Th}}\right) \ln 2$$

avec des notations évidentes. La première se résout comme ci-dessus

$$\mathrm{U}(t) = \mathrm{U}(0)\, 2^{-t/\tau_\mathrm{U}}$$

et on a donc à résoudre alors

$$\frac{d\mathrm{Th}(t)}{dt} = \left(\frac{\mathrm{U}(0)\, 2^{-t/\tau_\mathrm{U}}}{\tau_U} - \frac{\mathrm{Th}(t)}{\tau_\mathrm{Th}}\right) \ln 2 \tag{2.4}$$

dont la solution est de la forme

$$\mathrm{Th}(t) = 2^{-t/\tau_\mathrm{Th}} A + \frac{\tau_\mathrm{Th}}{\tau_\mathrm{U} - \tau_\mathrm{Th}} \mathrm{U}(0)\, 2^{-t/\tau_\mathrm{U}} \tag{2.5}$$

(le premier terme étant la solution générale de l'équation homogène, le second une solution particulière de (2.4)). On détermine finalement la constante A en fixant la condition initiale $\mathrm{Th}(0) = A + \tau_\mathrm{Th}\mathrm{U}(0)/(\tau_\mathrm{U} - \tau_\mathrm{Th})$

$$\mathrm{Th}(t) = \mathrm{Th}(0)\, 2^{-t/\tau_\mathrm{Th}} + \frac{\tau_\mathrm{Th}}{\tau_\mathrm{U} - \tau_\mathrm{Th}} \mathrm{U}(0)(2^{-t/\tau_\mathrm{U}} - 2^{-t/\tau_\mathrm{Th}}) \ . \tag{2.6}$$

Noter le signe du deuxième terme dans (2.5) : si $\tau_{\mathrm{U}} \gg \tau_{\mathrm{Th}}$ (ce qui est le cas, $\tau_{\mathrm{U}} = 4{,}5$ milliards d'années, $\tau_{\mathrm{Th}} = 24$ jours !), le premier processus de désintégration fournit moins de noyaux de Th qu'il ne s'en désintègre par le second processus, et on atteint très vite (dès que $\tau_{\mathrm{Th}} \ll t \ll \tau_{\mathrm{U}}$) un régime où le terme $2^{-t/\tau_{\mathrm{Th}}} \ll 1$ tandis que $2^{-t/\tau_{\mathrm{U}}} \approx 1$ et donc $\mathrm{Th}(t) \approx \frac{\tau_{\mathrm{Th}}}{\tau_{\mathrm{U}}-\tau_{\mathrm{Th}}}\mathrm{U}(0)$ reste approximativement constant. Ce n'est qu'au bout d'un temps $t \approx \tau_{\mathrm{U}}$ que le terme $2^{-t/\tau_{\mathrm{U}}}$ se manifeste et que la décroissance de $\mathrm{Th}(t)$ devient perceptible.

Dans le cas où il existe plusieurs canaux de désintégration pour un isotope X donné, comme ^{214}Bi ci-dessus, disons X$\rightarrow$ Y et Z avec des taux λ et μ, on écrit

$$dN_X = -(\lambda + \mu)N_X$$

soit $N_X(t) = N_X(0)e^{-(\lambda+\mu)t}$, et on définit à nouveau la demi-vie par $\tau_X = \ln 2/(\lambda + \mu)$. Si on définit $\tau_{X\to Y} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ et $\tau_{X\to Z} = \frac{\ln 2}{\mu}$ comme ce que seraient les demi-vies pour les désintégrations séparées X$\rightarrow$Y et X$\rightarrow$Z, on peut écrire

$$\tau_X < \inf(\tau_{X\to Y}, \tau_{X\to Z}) \ .$$

L'ouverture d'un nouveau canal *diminue* bien sûr la demi-vie.

Dans le cas du ^{214}Bi, on lit dans les tables que les probabilités des deux canaux valent $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 99,96\%$ pour le canal Bi$\rightarrow$ ^{214}Po et le complément $\frac{\mu}{\lambda+\mu} = 0,04\%$ pour le canal Bi$\rightarrow$ ^{210}Tl.

3. Autres équations de bilan

3.1. Réactions chimiques

Considérons une réaction

$$aA + bB + \cdots \rightarrow cC + dD + \cdots$$

où $A, \cdots D \cdots$ désignent des molécules, $a, \cdots d$ sont les coefficients stoechiométriques. Si $N_A, \cdots$ désignent les nombres de molécules A etc, leurs variations pendant un intervalle dt sont proportionnelles aux coefficients stoechiométriques,

$$-\frac{dN_A}{a} = -\frac{dN_B}{b} = \cdots = \frac{dN_C}{c} = \frac{dN_D}{d} = \cdots = d\lambda$$

et on appelle λ le degré d'avancement de la réaction. La vitesse de réaction est par définition

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

donc

$$v = -\frac{1}{a}\frac{dN_A}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{dN_B}{dt} = \cdots = \frac{1}{c}\frac{dN_C}{dt} = \frac{1}{d}\frac{dN_D}{dt} = \cdots \ .$$

Si on travaille à volume constant V, on préfère utiliser les concentrations molaires $[A] = \frac{N_A}{V}$, etc, donc

$$v = -\frac{V}{a}\frac{d[A]}{dt}$$

Dans de nombreuses situations, la vitesse de la réaction peut s'exprimer sous la forme

$$v = k[A]^\alpha [B]^\beta \cdots$$

en fonction des concentrations des *réactifs*, avec une constante k ne dépendant que de la température. A priori, les indices $\alpha, \beta, \cdots$ sont distincts des coefficients $a, b, \cdots$. Il peut aussi se faire, dans les réactions dites auto-catalytiques, que les concentrations $[C], [D], \cdots$ des produits de la réaction interviennent dans cette formule, avec des puissances $\gamma, \delta, \cdots$.

3.2. Processus stochastiques. Équation maîtresse

Les équations de bilan du type précédent apparaissent encore dans les *processus stochastiques*, c'est-à-dire les phénomènes aléatoires dépendant du temps. On considère un système qui peut occuper un certain nombre de configurations $\mathcal{C}$, chacune avec une certaine probabilité. Il est doté d'une dynamique qui le fait "sauter" d'une configuration $\mathcal{C}$ à une configuration $\mathcal{C}'$ avec une probabilité $\mathcal{T}(\mathcal{C}', \mathcal{C}; t)dt$ pendant le temps dt. L'hypothèse que le processus est *markovien* signifie que cette probabilité de saut (on dit plutôt "de transition") entre les instants t et $t + dt$ ne dépend pas de l'histoire antérieure, mais seulement de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et t, comme indiqué.

La probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{C}; t)$ pour le système d'être dans la configuration $\mathcal{C}$ à l'instant t est sujette à l'équation

$$\frac{d\mathcal{P}(\mathcal{C}; t)}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} \Big(\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; t)\mathcal{P}(\mathcal{C}'; t) - \mathcal{T}(\mathcal{C}', \mathcal{C}; t)\mathcal{P}(\mathcal{C}; t) \Big) \ , \tag{3.1}$$

dite *équation maîtresse*, qui exprime une fois encore le bilan des transitions amenant à ou faisant partir de la configuration $\mathcal{C}$. (La restriction à $\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}$ dans la somme de (3.1) peut être levée.)

En sommant sur toutes les configurations $\mathcal{C}$ on obtient

$$\sum_{\mathcal{C}} \frac{d\mathcal{P}(\mathcal{C}; t)}{dt} = \sum_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \Big(\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; t)\mathcal{P}(\mathcal{C}'; t) - \mathcal{T}(\mathcal{C}', \mathcal{C}; t)\mathcal{P}(\mathcal{C}; t) \Big) \equiv 0$$

exprimant une tautologie : la somme des probabilités est constante (et égale à 1).

Exemple : le problème de désintégration de noyaux atomiques pourrait et devrait être traité par une approche probabiliste, puisque c'est bien là le fond de la question : un noyau (comme tout système individuel de nature quantique) a une probabilité de transition de tel ou tel état vers tel autre. Le traitement qui a précédé s'est appliqué implicitement à une vaste population de noyaux (dont le nombre a été traité comme une variable continue, et non comme un entier discret), et a concerné en fait le nombre moyen (la valeur moyenne ou espérance au sens probabiliste) de la variable aléatoire nombre total de noyaux de tel isotope. L'équation (2.1) se redit en termes probabilistes comme suit :

la probabilité d'un noyau donné de subir la désintégration étudiée pendant le temps dt est $\mathcal{T}(\mathrm{X} \to \mathrm{X}') = \lambda dt$.

La probabilité d'avoir N noyaux dans l'état initial (radioactif) X au temps t étant notée $\mathcal{P}_N(t)$, on a

$$\mathcal{P}_N(t+dt) = (1-\lambda dt)^N \mathcal{P}_N(t) + \lambda(N+1)\mathcal{P}_{N+1}(t)dt + \mathrm{O}(dt^2)$$

donc

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_N(t) = \lambda\left((N+1)\mathcal{P}_{N+1}(t) - N\mathcal{P}_N(t)\right) \tag{3.2}$$

On s'est donné (avec probabilité 1) la valeur initiale N_0, $\mathcal{P}_N(t=0) = \delta_{NN_0}$. On résout l'équation (3.2) par la méthode de la fonction génératrice : soit

$$F(x,t) = \sum_{N=0}^{N_0} x^N \mathcal{P}_N(t) \ . \tag{3.3}$$

L'équation (3.2) conduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) = \lambda(1-x)\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) \tag{3.4}$$

dont la solution peut être écrite sous la forme $F(x,t) = G((1-x)\phi(t))$ à condition que $\dot{\phi}(t) = -\lambda\phi(t)$, soit $\phi(t) = e^{-\lambda t}$, et la fonction jusque là arbitraire G est fixée par la condition initiale $F(x,0) = x^{N_0} = G(1-x)$, soit $G(x) = (1-x)^{N_0}$, d'où finalement

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \left(1-(1-x)e^{-\lambda t}\right)^{N_0} = \left((1-e^{-\lambda t}) + xe^{-\lambda t}\right)^{N_0} \\ &= \sum_{N=0}^{N_0} \binom{N_0}{N}(1-e^{-\lambda t})^N e^{-(N_0-N)\lambda t} \end{aligned} \tag{3.5}$$

qui permet d'identifier

$$\mathcal{P}_N(t) = \binom{N_0}{N}(1-e^{-\lambda t})^N e^{-(N_0-N)\lambda t} \ , \tag{3.6}$$

la loi dite binômiale pour une probabilité $p(t) = e^{-\lambda t}$. On peut alors calculer l'espérance de la variable aléatoire N

$$\langle N\rangle(t) = \sum_{n=0}^{N_0} n\mathcal{P}_n(t) = \left.\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} = N_0 e^{-\lambda t} \ .$$

On retrouve bien le résultat obtenu plus haut à partir de l'équation différentielle satisfaite par N. On pourrait aussi étudier maintenant ce que sont les fluctuations de la variable aléatoire N autour de cette valeur moyenne, etc.

⋆ ⋆

⋆