Symétries en physique

Sommaire

Cours du 6/01/2014.

1. Symétries géométriques. Des molécules aux cristaux

Généralités sur les symétries

On s'intéresse à des *transformations* de *l'espace* ...

– "espace" : espace physique $\mathbb{R}^d$, typiquement $d = 3$,
mais aussi $d = 2$, espace-temps $d = 4$ de la relativité, espace abstrait des "symétries internes"
– "transformation" ponctuelle *inversible* $M \leftrightarrow M' = t(M)$, $M = t^{-1}M'$.

Ces transformations forment un *groupe* :
composition de t_1 et t_2 : $t_2 \cdot t_1$
(et $t_3 \cdot (t_2 \cdot t_1) = (t_3 \cdot t_2) \cdot t_1$, il existe un élément neutre $e \cdot t = t \cdot e = t$ et un inverse $t^{-1} \cdot t = t \cdot t^{-1} = e$).
Exemples : rotations, réflexions, etc.
Les projections (sur un plan) ne sont pas inversibles, donc pas des "transformations".

... et on s'intéresse à des *symétries* : transformations laissant *invariante* une propriété géométrique, ou la dynamique d'un système physique, ou une loi physique, etc.

Symétrie et invariance sont donc équivalents.

Les symétries d'un problème donné forment aussi un groupe.

Les symétries sont partout !

Symétries de figures géométriques

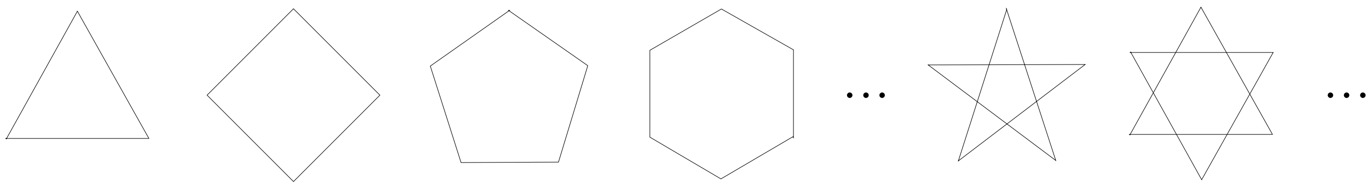


FIGURE 1 – Les premiers polygones réguliers convexes ou non-convexes.

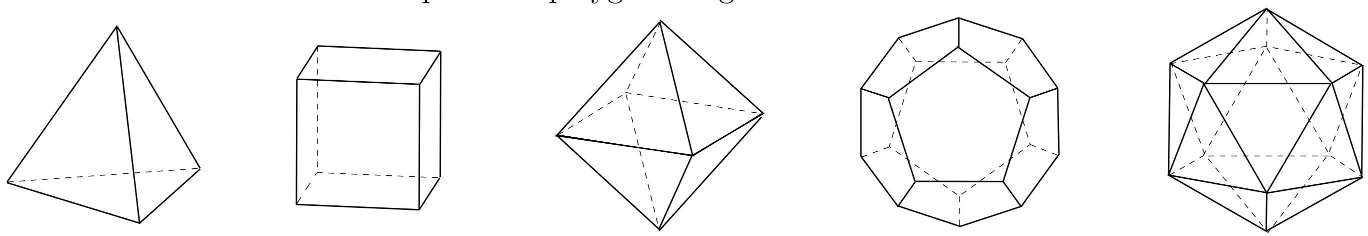


FIGURE 2 – Les cinq polyèdres réguliers ou "solides platoniciens" : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre

Cristaux

Figure 3 – Cristaux de glace ; cristal d'alun de chrome

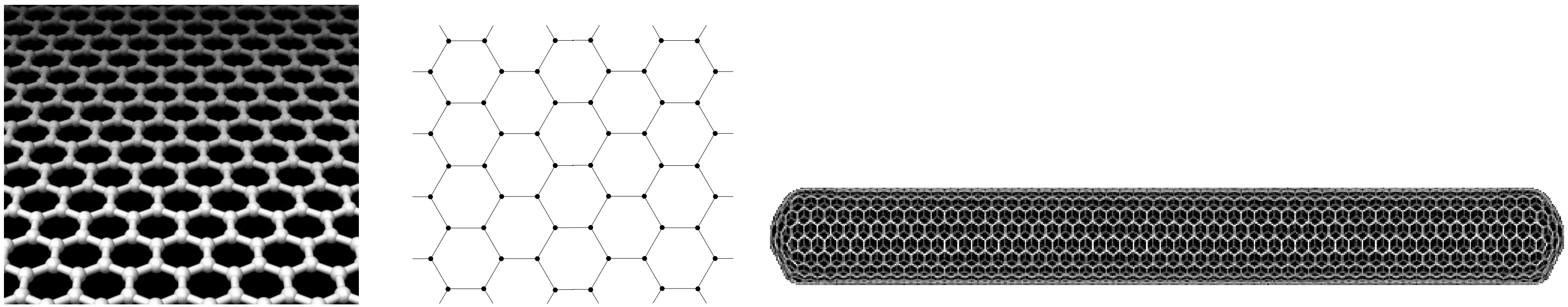


Figure 4 – Graphène. Nanotube de carbone

Molécules

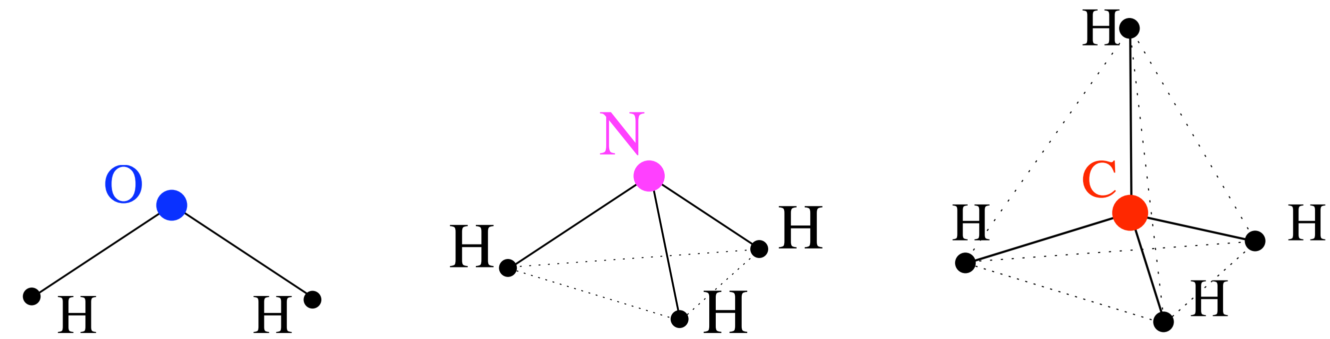


FIGURE 5 – Molécules d'eau H_2O, d'ammoniac NH_3 ; de méthane CH_4

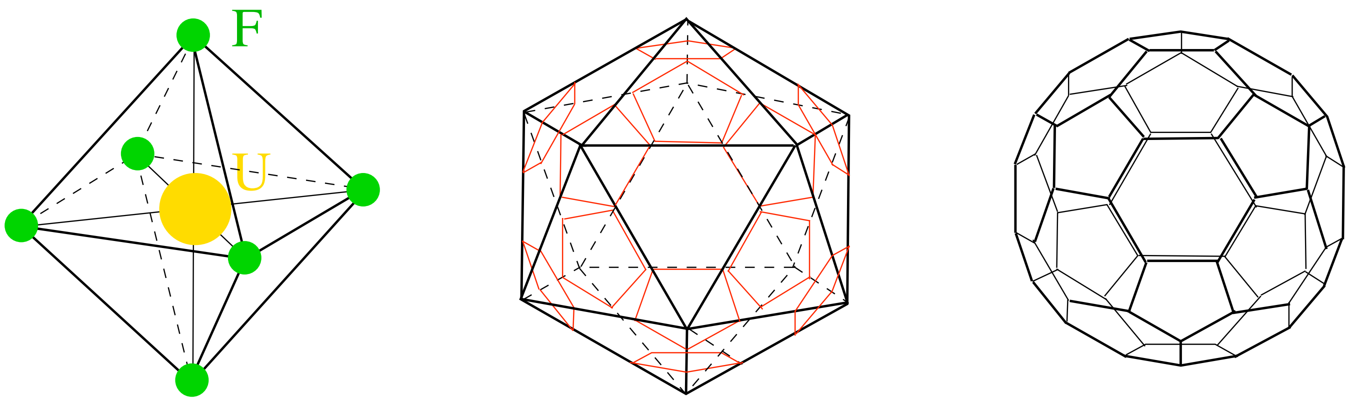


FIGURE 6 – Molécules de fluorure d'uranium UF_6 ; de fullerène C_{60}

Dans la nature . . .

Dans l’art : motifs périodiques . . .

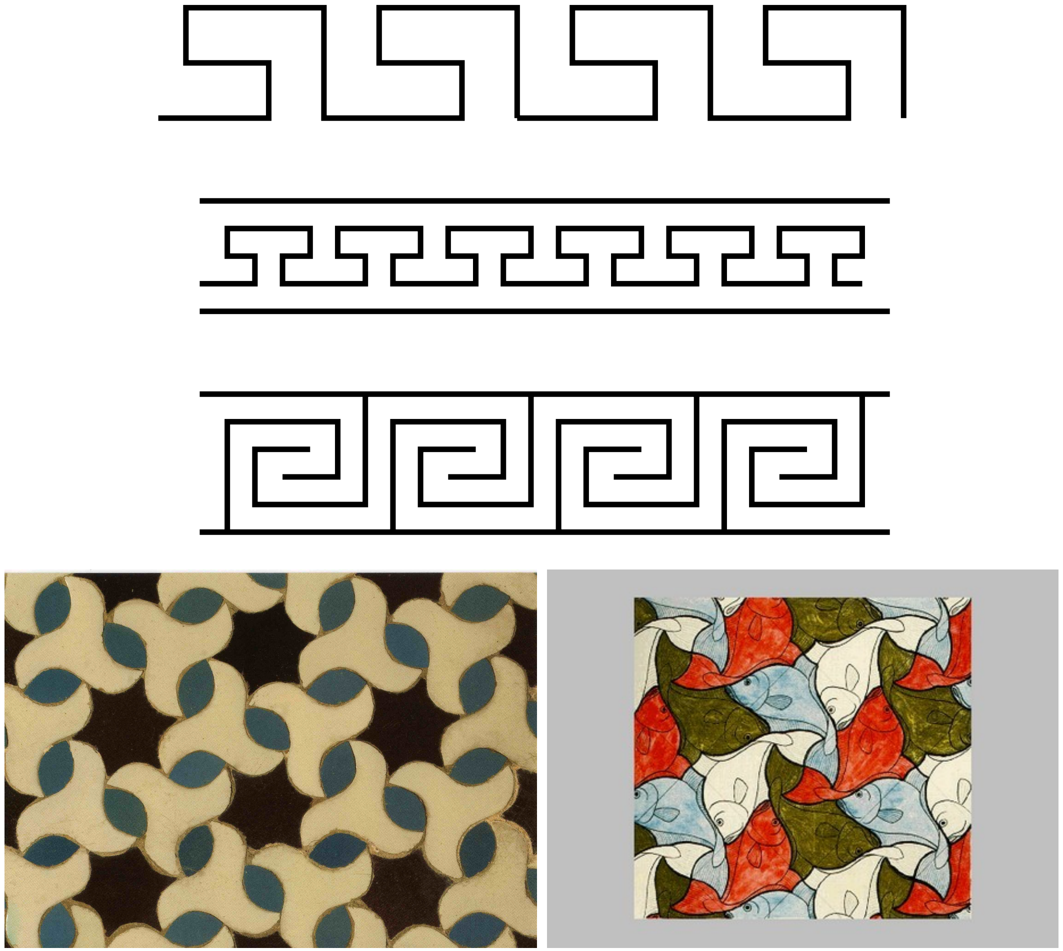


Figure 7 – “grecques”, azulejo de l’Alcazar, Séville ; gravure d’Escher

Dans les techniques

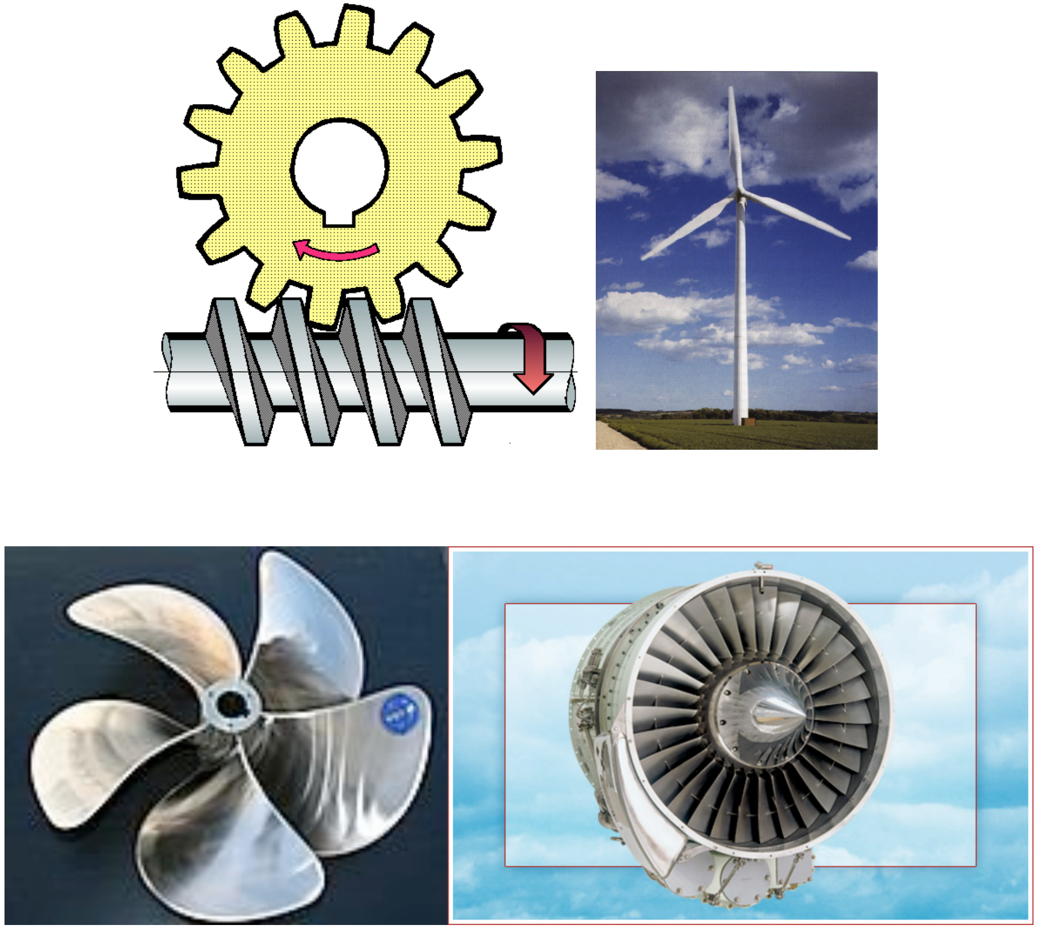


FIGURE 8 – vis sans fin, éolienne, hélice de bateau ; turbine.

Chiralité

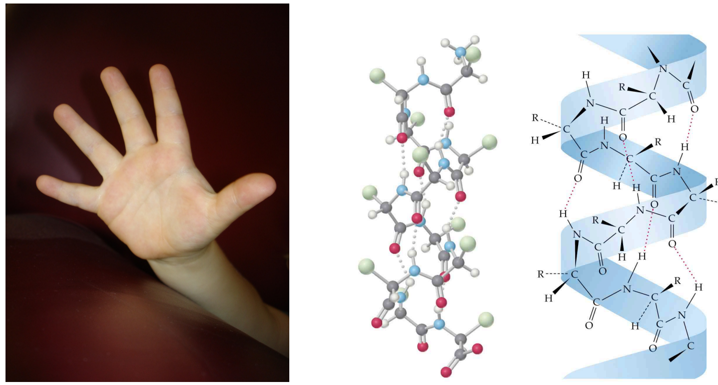


FIGURE 9 – Main. Kératine

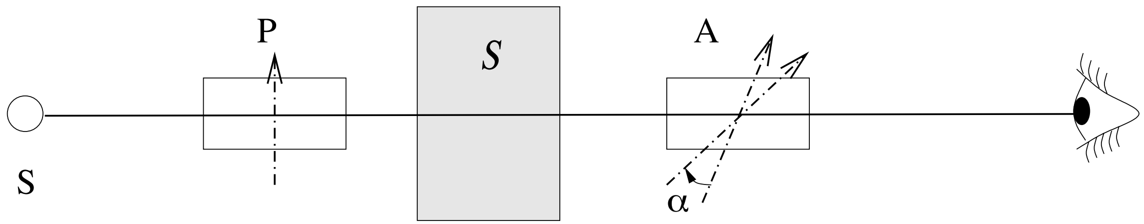


FIGURE 10 – Pouvoir rotatoire d'une substance : un faisceau polarisé linéairement par un polariseur P traverse ensuite une substance "optiquement active" $\mathcal{S}$: on constate que l'analyseur A doit être tourné d'un angle α pour retrouver l'extinction du rayon lumineux.

Isométries et déplacements

– *isométries* : transformations laissant invariantes les distances
– *déplacements* : isométries préservant l'orientation (des angles, des repères) : "transfo. propres"

Exemples : rotations, réflexions (par rapport à une droite à $d = 2$, un plan à $d = 3$), translations : *isométries* ; lesquelles sont des *déplacements* ? Qu'en est-il de l'"inversion" (ou parité) (symétrie par rapport à un point) ? Propre ou impropre ?

Composition de ces transformations : groupe des isométries, groupe des déplacements, groupe des rotations, etc.
Le produit de deux transfos "impropres" est propre.
Exercice : produit de deux réflexions par rapport à deux droites (plans) qui s'intersectent ? qui sont parallèles ?

Les transformations qui laissent un point O de l'espace invariant : les rotations et réflexions (et leurs composées, comme l'inversion), sont décrites par des matrices O orthogonales ($O \cdot O^T = I$) et forment le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}(d)$. Sous-groupe des rotations $\mathrm{SO}(d)$, $\det O = 1$.

Les transformations qui laissent un point O de l'espace invariant : les rotations et réflexions (et leurs composées, comme l'inversion), sont décrites par des matrices O orthogonales ($O \cdot O^T = I$) et forment le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}(d)$. Sous-groupe des rotations $\mathrm{SO}(d)$, $\det O = 1$.

Preuve :

$$\vec{r} \text{ représenté par vecteur colonne } X,$$
$$X \mapsto X' = O \cdot X \text{ est une isométrie} \Longleftrightarrow |\vec{r}'|^2 = X'^T \cdot X' = X^T \cdot O^T \cdot O \cdot X = X^T . X = |\vec{r}|^2,$$
$$\text{donc } O^T . O = \mathbb{1} \Leftrightarrow O . O^T = \mathbb{1}, \qquad \text{matrice orthogonale}$$
$$\det O . O^T = (\det O)^2 = \det \mathbb{1} = 1, \Rightarrow \det O = \pm 1.$$
$$\text{Orientation du repère } \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_d\} = \text{signe}(\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_d))$$
$$\text{Par une transformation } O,\ \vec{a}_i \mapsto \vec{a}'_i,\ A' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_d) = O \cdot (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_d) = O \cdot A$$
$$\text{donc } \det(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_d) = \det O \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_d).$$
$$\text{L'orientation du repère change si et seulement si } \det O = -1.$$

Donc : $\mathrm{O}(d)$: transformations orthogonales, respectent ou non l'orientation = isométries

$\mathrm{SO}(d)$: transformations orthogonales de déterminant 1, respectent l'orientation = rotations.

Groupes de symétrie des figures

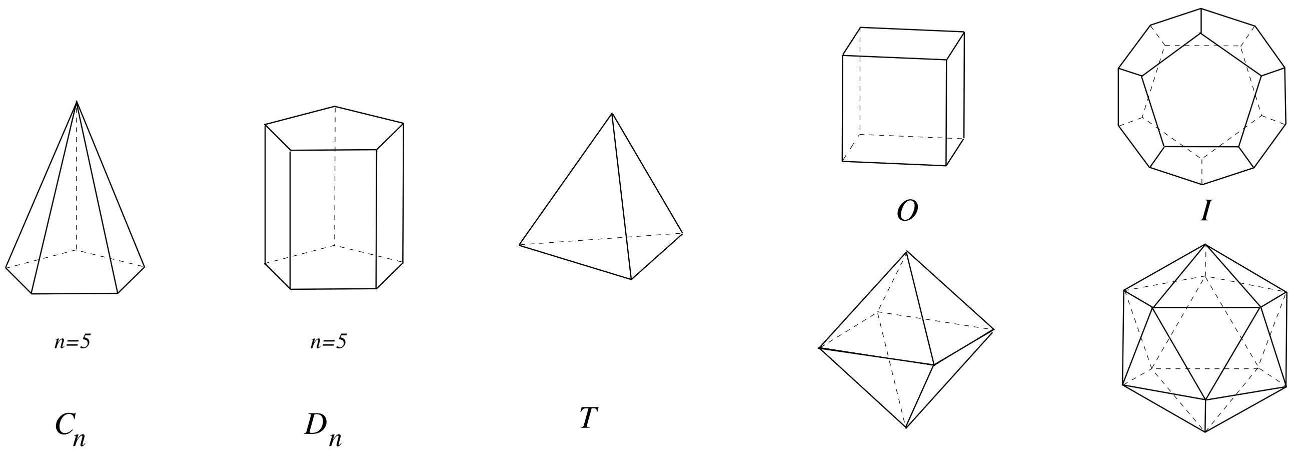


FIGURE 11 – Solides et sous-groupes finis de SO(3).

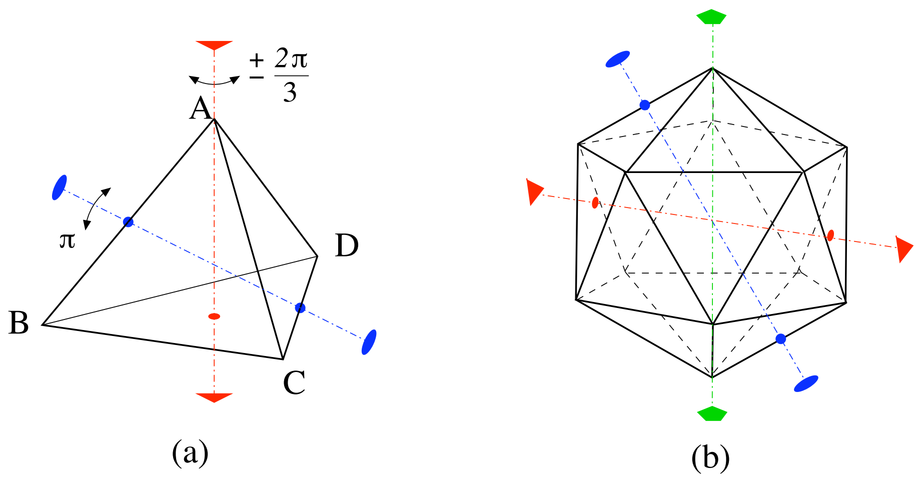


FIGURE 12 – Symétries de rotation du tétraèdre et de l'icosaèdre.

Symétries des molécules

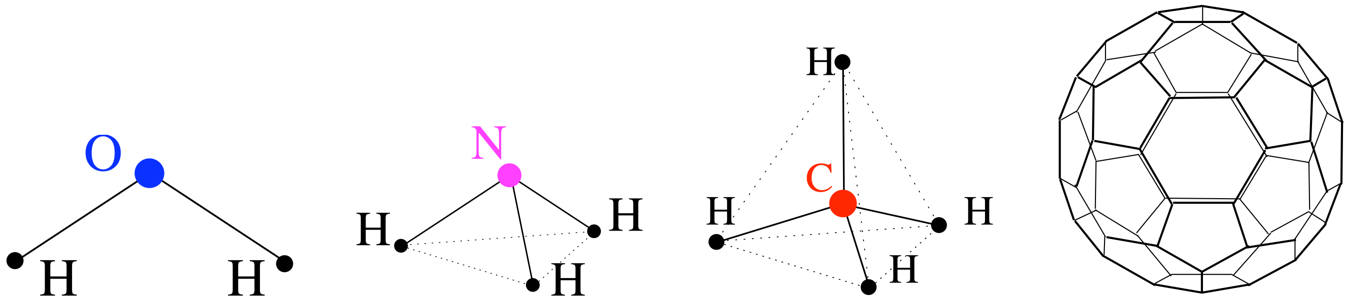


FIGURE 13 – Molécules H_2O, NH_3, CH_4 , C_{60} (fullerène)

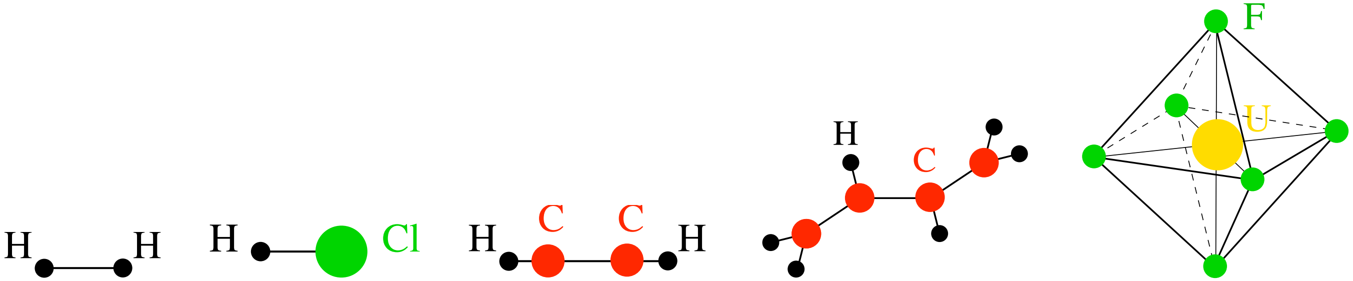


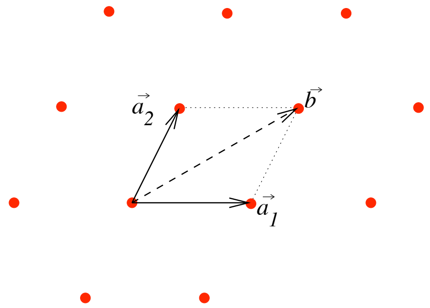
FIGURE 14 – Molécules H_2, $H\,Cl$, acétylène C_2H_2 , butadiène C_4H_6, hexafluorure d'uranium UF_6

Quel groupe de symétrie pour chacune de ces molécules ?

Symétries d'un cristal

Cristal : arrangement *périodique* d'atomes, ions etc.
Périodicité $\Leftrightarrow$ existence d'un *réseau (de Bravais)* de translations.

$$\mathcal{R}: \qquad \vec{t} = \sum_{i=1}^{d} n_i \vec{a}_i \qquad n_i \in \mathbb{Z}\ .$$



(Maille élémentaire. Non-unicité des vecteurs de base…)

Possibles invariances du cristal par rotations et/ou réflexions etc.
Groupe ponctuel des transfos qui laissent un *point* du cristal invariant
(rotations, réflexions, leurs composées)
et *groupe d'espace* des invariances du cristal incluant les translations
(par exemple *glissements* ou *mouvements hélicoïdaux*)

Ces différents types de symétries sont très contraints. On peut *classifier* les groupes ponctuels, les réseaux de Bravais et les groupes d'espace des cristaux à $d = 1, 2, 3$ dimensions.

Dimension d	Groupes ponctuels	Réseaux de Bravais	Systèmes réticulaires	Groupes d'espace
$d = 1$	2	1	1	2
$d = 2$	10	5	4	17
$d = 3$	32	14	7	230

Nombre de classes de réseaux de Bravais et de groupes de symétries cristallines, selon la dimension d d'espace

Réseaux, leurs symétries de rotation

Si un réseau $\mathcal{R}$ est invariant par une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\vec{u}$ et de matrice Ω :

– dans une base de vecteurs du réseau, $\Omega\vec{a}_i \in \mathcal{R}$ donc $\Omega\vec{a}_i = \sum_j \vec{a}_j\,\Omega_{ji}$ à coeffts Ω_{ji} entiers

– dans une base orthonormée, Ω' orthogonale, donc (en prenant le 3ème vecteur de la base selon $\vec{u}$)

$$\Omega' = X\Omega X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\,\Omega = \mathrm{tr}\,\Omega' = 1 + 2\cos\theta$ est entier $\Longrightarrow 2\cos\theta = -2, -1, 0, 1, 2$

$|\theta| = 2\pi/n$, $n = 1, 2, 3, 4, 6$, soit $\theta = 180^o,\ \pm 120^o,\ \pm 90^o,\ \pm 60^o, 0^o$.

Par exemple, invariance d'un réseau par rotation de $2\pi/5$ impossible (à $d = 2, 3$).

En combinant ces 5 types de rotations avec d'éventuelles réflexions, on trouve

10 groupes ponctuels et 5 réseaux de Bravais à d=2

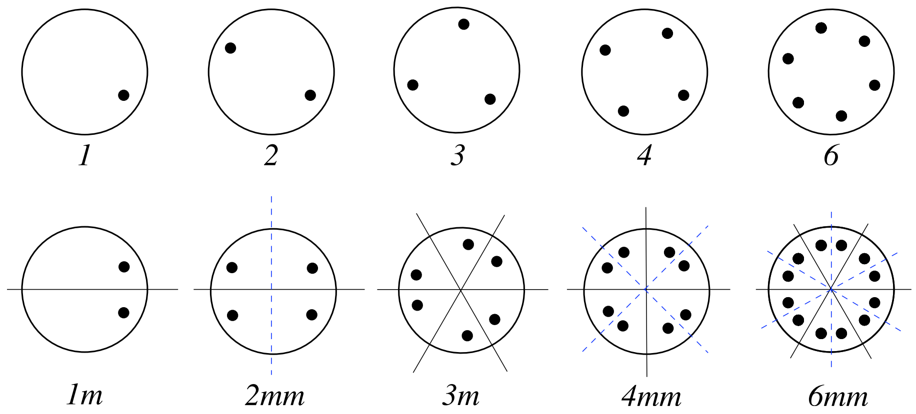


FIGURE 15 – Les 10 groupes ponctuels à $d = 2$ dimensions

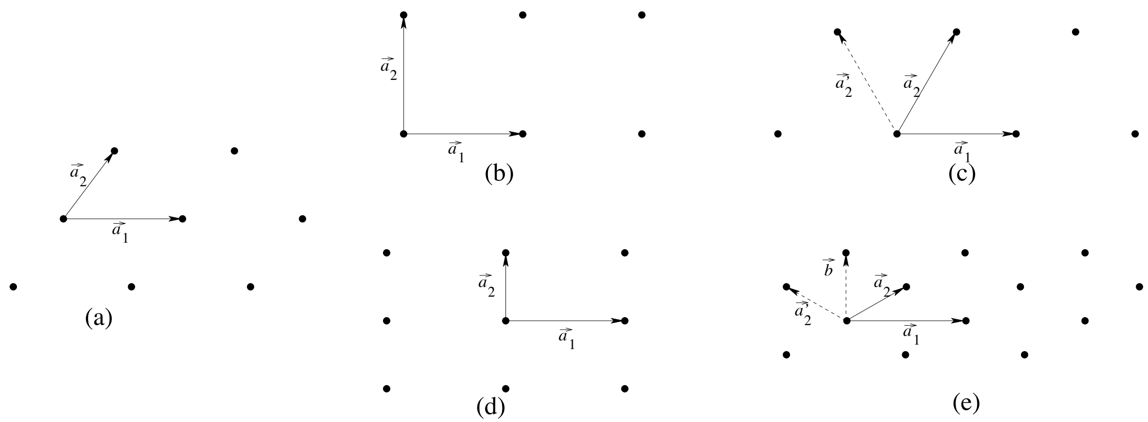


FIGURE 16 – Les 5 classes de réseaux de Bravais à 2 dimensions. Successivement, (a) réseau *monoclinique* ; (b) réseau carré (ou *tétragonal*) ; (c) réseau hexagonal ; (d) réseau *orthorhombique* (ou rectangulaire) ; (e) réseau rectangulaire centré.

Finalement en décorant par des motifs (atomiques ou artistiques), on trouve 17 types de réseaux, ou 17 groupes d'espace. Les symétries sont des translations, et des rotations, réflexions et/ou glissements.

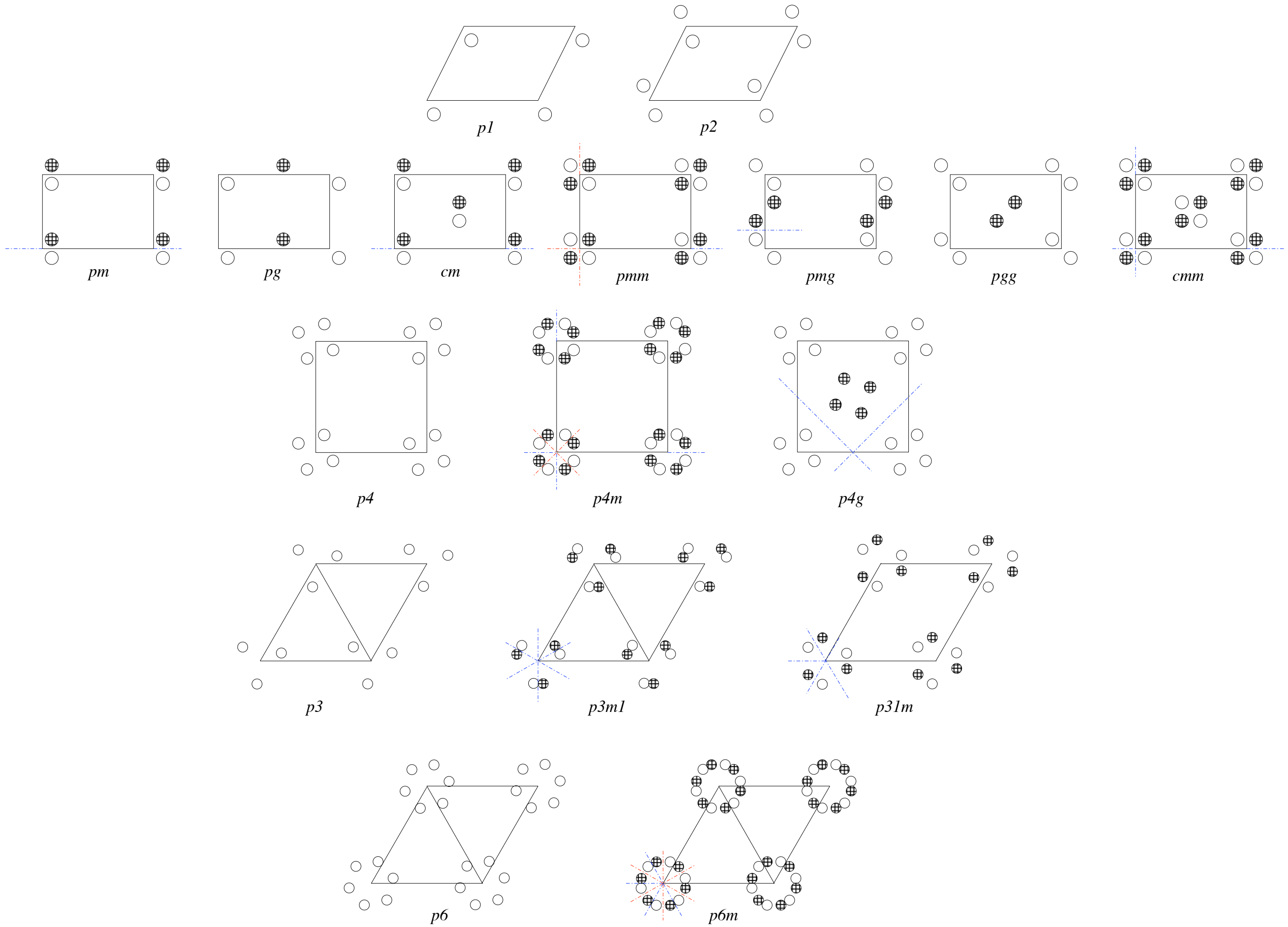


FIGURE 17 – Les 17 types de réseaux cristallins à $d = 2$ dimensions.

Nom complet	Nom abrégé	Groupe ponctuel	Chiral ?	Rotation $2\pi/n$	# axes réflexion
$p111$	$p1$	1	oui	$n=1$	0
$p211$	$p2$	2	oui	$n=2$	0
$p1m1$	pm	$1m$	non	$n=1$	1
$p1g1$	pg	$1m$	non	$n=1$	0
$c1m1$	cm	$1m$	non	$n=1$	1
$p2mm$	pmm	$2mm$	non	$n=2$	2
$p2mg$	pmg	$2mm$	non	$n=2$	1
$p2gg$	pgg	$2mm$	non	$n=2$	0
$c2mm$	cmm	$2mm$	non	$n=2$	2
$p411$	$p4$	4	oui	$n=4$	0
$p4mm$	$p4m$	$4mm$	non	$n=4$	4
$p4gm$	$p4g$	$4mm$	non	$n=4$	2
$p311$	$p3$	3	oui	$n=3$	0
$p3m1$	$p3m1$	$3m$	non	$n=3$	3
$p31m$	$p31m$	$3m$	non	$n=3$	3
$p611$	$p6$	6	oui	$n=6$	0
$p6mm$	$p6m$	$6mm$	non	$n=6$	6

Table 1 : Les 17 groupes d'espace, ou types de réseaux cristallins, à $d = 2$.

– le cristal est-il chiral, c'est-à-dire non superposable à son image miroir ?
– quel est l'ordre n de la plus grande symétrie de rotation ?
– comment sont réalisées les symétries impropres, réflexion ou glissement ?
– le réseau est-il "primitif" (c'est-à-dire de Bravais) ou centré ?

Identifier le type cristallin

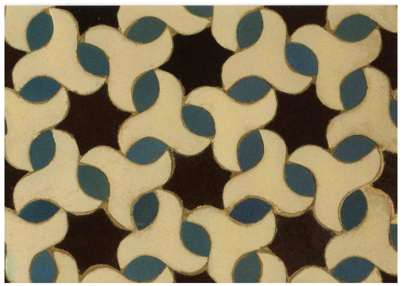
– le cristal est-il chiral, c'est-à-dire non superposable à son image miroir ?

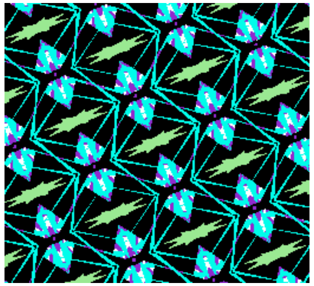
– quel est l'ordre n de la plus grande symétrie de rotation ?

– comment sont réalisées les symétries impropres, réflexion ou glissement ?

– le réseau est-il "primitif" (c'est-à-dire de Bravais) ou centré ?

Exemples :





(en ne tenant pas compte des couleurs dans le dessin du milieu)

Identifier le type cristallin

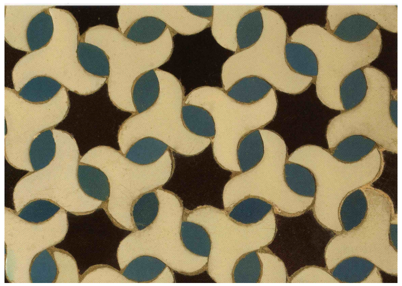
– le cristal est-il chiral, c'est-à-dire non superposable à son image miroir ?

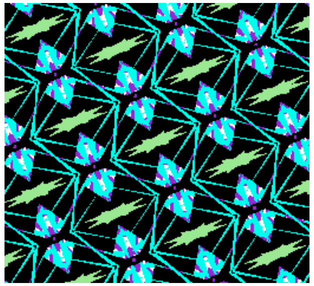
– quel est l'ordre n de la plus grande symétrie de rotation ?

– comment sont réalisées les symétries impropres, réflexion ou glissement ?

– le réseau est-il "primitif" (c'est-à-dire de Bravais) ou centré ?

Exemples :





chiral

$n = 6$

réseau hex.

$p6$

Identifier le type cristallin

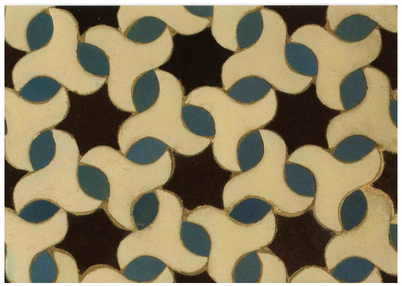
– le cristal est-il chiral, c'est-à-dire non superposable à son image miroir ?

– quel est l'ordre n de la plus grande symétrie de rotation ?

– comment sont réalisées les symétries impropres, réflexion ou glissement ?

– le réseau est-il "primitif" (c'est-à-dire de Bravais) ou centré ?

Exemples :

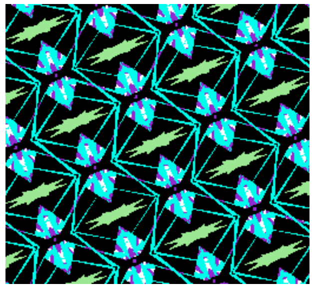


chiral
$n = 6$

réseau hex.
$p6$

chiral
$n = 4$

réseau carré
$p4$



Identifier le type cristallin

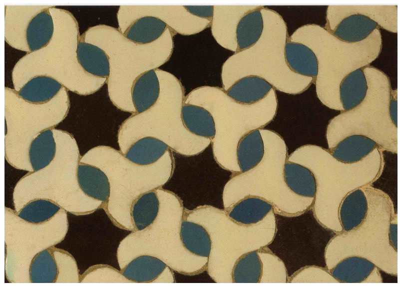
– le cristal est-il chiral, c'est-à-dire non superposable à son image miroir ?

– quel est l'ordre n de la plus grande symétrie de rotation ?

– comment sont réalisées les symétries impropres, réflexion ou glissement ?

– le réseau est-il "primitif" (c'est-à-dire de Bravais) ou centré ?

Exemples :

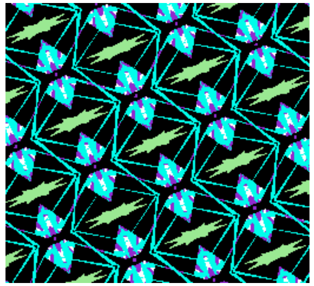


chiral
$n = 6$

réseau hex.
$p6$

chiral
$n = 4$

réseau carré
$p4$



non chiral
$n = 2$
2 miroirs $\perp$
réseau rect. centré
cmm

Voici 18 pavages du plan : deux au moins appartiennent au même groupe, lesquels ?

A trois dimensions . . .

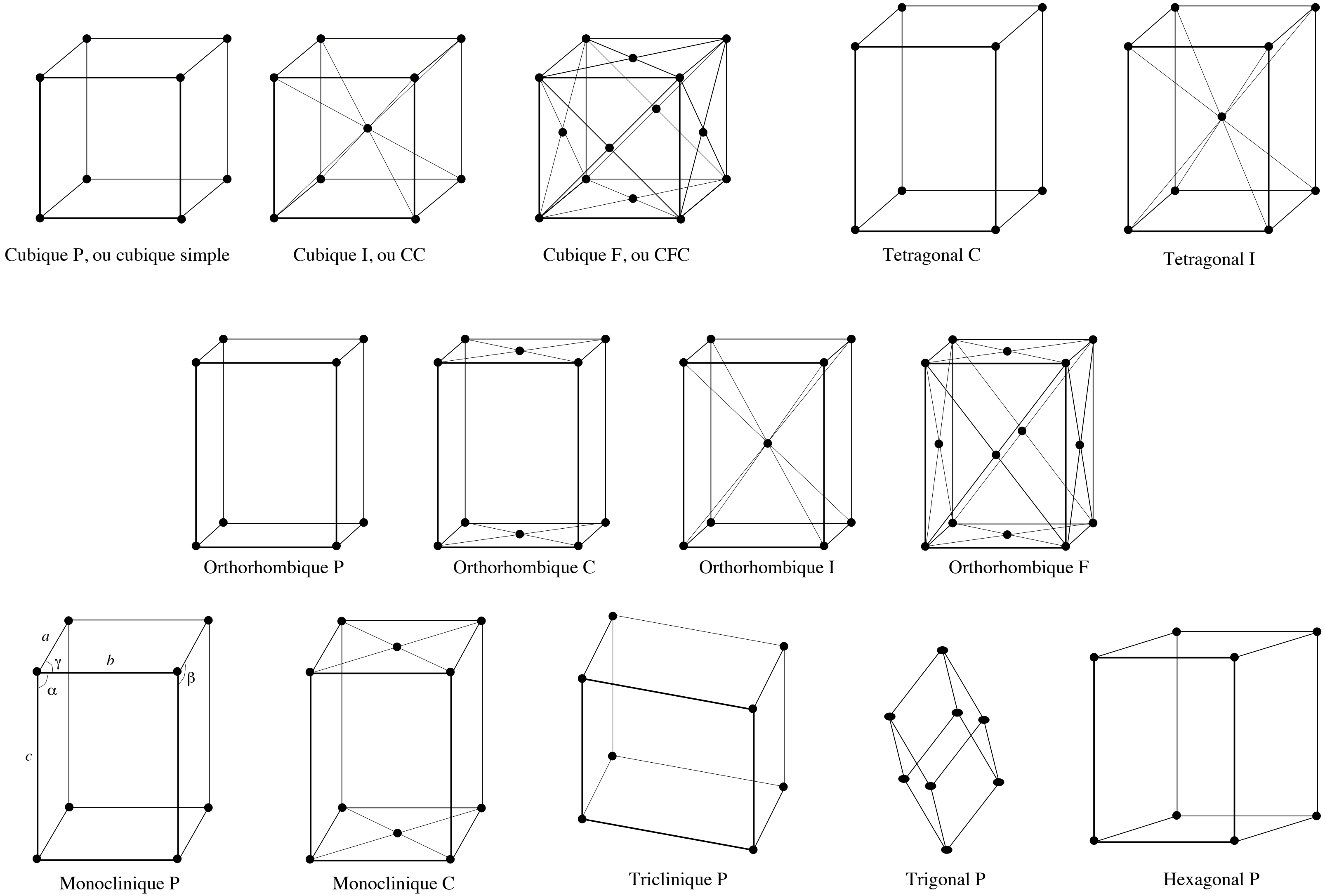
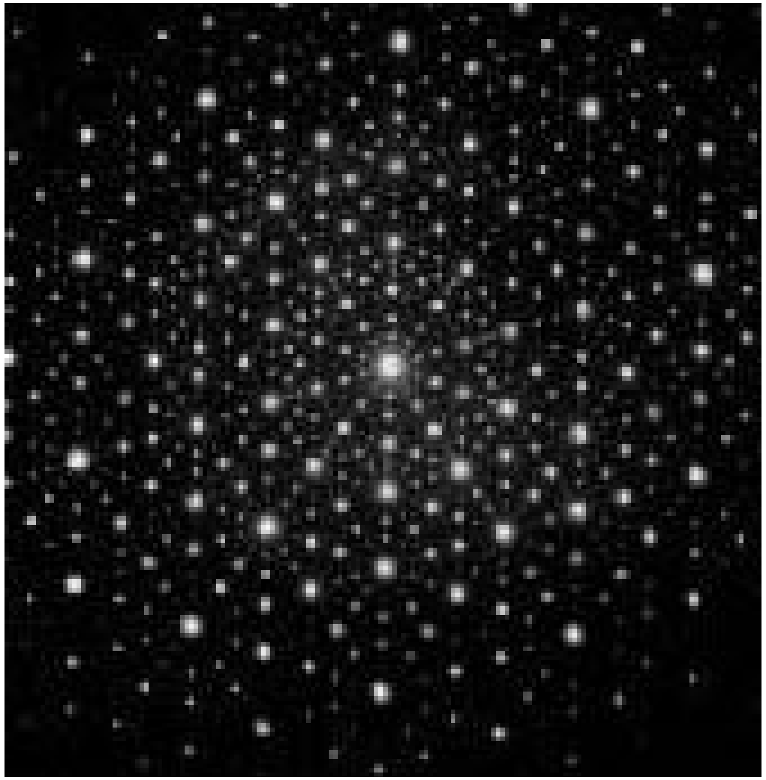


FIGURE 18 – Les 14 types de réseaux de Bravais à 3 dimensions. On a successivement les trois réseaux cubiques $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$; les deux réseaux tétragonaux $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$; les quatre réseaux orthorhombiques $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$; les deux réseaux monocliniques $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ et γ quelconque et le réseau triclinique $a \neq b \neq c$, α, β et γ quelconques ; le réseau trigonal $a = b = c$, α, β et γ quelconques et le réseau hexagonal $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ et $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.



une symétrie d'ordre 10 ?