

Master de Sciences et Technologie

Mention Physique et Applications (M1)

Approche “Physique Fondamentale” (PF)

**Introduction à la
Théorie Quantique des Champs
(MU4PY214)**

Contents

| | |
|---|------------|
| Contents | iii |
| 1 Introduction et théorie classique des champs | 1 |
| 1.1 Introduction | 1 |
| 1.1.1 Point de vue particule | 1 |
| 1.1.2 Point de vue champ | 4 |
| 1.2 Systèmes mécaniques discrets et continus | 5 |
| 1.2.1 Rappels dans le cas d'une particule | 5 |
| 1.2.2 Généralisation à N particules | 5 |
| 1.3 Bilan du cours | 8 |
| 1.4 Références | 9 |
| 1.5 Formulation covariante | 11 |
| 1.5.1 Notations et conventions | 11 |
| 1.5.2 Cas d'un champ scalaire réel | 13 |
| 1.5.3 Transformations de Lorentz | 15 |
| 1.5.4 Covariance de Lorentz | 18 |
| 1.6 Bilan du cours | 19 |
| 1.7 Références | 20 |
| 1.7.1 Petits exercices | 20 |
| 1.8 Exemples de champs classiques | 21 |
| 1.8.1 Champs scalaires | 21 |
| 1.8.1.1 Champ scalaire réel | 21 |
| 1.8.1.2 Champ scalaire réel et interaction de Yukawa | 22 |
| 1.8.1.3 Champ scalaire complexe | 23 |
| 1.8.1.4 Champ scalaire complexe non-relativiste | 23 |
| 1.8.2 Champs vectoriels: l'électromagnétisme | 23 |
| 1.9 Symétries et lois de conservation | 25 |
| 1.9.1 Théorème de Noether | 25 |
| 1.9.2 Tenseur énergie-impulsion | 27 |
| 1.9.3 Symétries internes | 28 |
| 1.10 Formalisme de Hamilton | 29 |
| 1.11 Bilan du cours | 30 |
| 1.12 Références | 30 |
| 1.12.1 Petits exercices | 31 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Quantification d'un champ scalaire | 33 |
| 2.1 | L'équation de Klein-Gordon: démarche historique | 33 |
| 2.2 | Quantification canonique | 35 |
| 2.3 | Unités naturelles | 36 |
| 2.4 | Quantification d'un champ scalaire | 37 |
| 2.4.1 | Retour sur l'oscillateur harmonique | 37 |
| 2.4.2 | Champ scalaire libre | 39 |
| 2.5 | L'énergie du vide | 41 |
| 2.5.1 | Le problème de la constante cosmologique | 41 |
| 2.5.2 | L'effet Casimir | 42 |
| 2.6 | Bilan du cours | 42 |
| 2.7 | Références | 42 |
| 2.8 | Les particules | 43 |
| 2.8.1 | Des champs aux particules | 43 |
| 2.8.2 | Espace de Fock et statistique de Bose-Einstein | 44 |
| 2.8.3 | Normalisation relativiste | 45 |
| 2.9 | Champ scalaire complexe | 46 |
| 2.10 | Bilan du cours | 47 |
| 2.11 | Références | 48 |
| 2.12 | Retour sur la covariance de Lorentz | 49 |
| 2.12.1 | Point de vue de Heisenberg | 49 |
| 2.12.2 | Causalité | 50 |
| 2.13 | Propagateurs | 51 |
| 2.13.1 | Propagateurs et causalité | 51 |
| 2.13.2 | Propagateur de Feynman | 51 |
| 2.13.3 | Fonctions de Green | 52 |
| 2.14 | Bilan du cours | 53 |
| 2.15 | Références | 54 |
| 3 | Quantification du champ de Dirac | 55 |
| 3.1 | L'équation de Dirac: démarche historique | 55 |
| 3.1.1 | Dispersion relativiste | 56 |
| 3.1.2 | Equation de continuité | 57 |
| 3.1.3 | Covariance de Lorentz | 58 |
| 3.1.4 | Eléments de solution de l'équation de Dirac | 58 |
| 3.2 | Limite non-relativiste | 59 |
| 3.3 | Degrés de liberté | 63 |
| 3.4 | Bilan du cours | 64 |
| 3.5 | Références | 64 |
| 3.6 | Covariance de Lorentz de l'équation de Dirac | 65 |
| 3.6.1 | Forme covariante | 65 |
| 3.6.2 | Eléments de preuve de la covariance | 66 |
| 3.7 | L'action de Dirac | 67 |
| 3.7.1 | Lagrangien de Dirac | 68 |
| 3.7.2 | Hamiltonien de Dirac | 68 |
| 3.7.3 | Symétries et lois de conservation | 69 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.7.3.1 | Translations d'espace-temps | 69 |
| 3.7.3.2 | Transformations de Lorentz | 69 |
| 3.7.3.3 | Symétrie interne vectorielle | 69 |
| 3.7.3.4 | Symétrie interne chirale | 70 |
| 3.8 | Bilan du cours | 70 |
| 3.9 | Références | 71 |
| 3.10 | Quantification du champ de Dirac | 72 |
| 3.10.1 | Quantification canonique | 72 |
| 3.10.2 | Statistique de Fermi-Dirac | 73 |
| 3.11 | Propagateurs | 74 |
| 3.11.1 | Propagateur de fermion et causalité | 74 |
| 3.11.2 | Propagateur de Feynman | 75 |
| 3.12 | Bilan du cours | 76 |
| 3.13 | Références | 76 |
| 4 | Champs en interaction | 77 |
| 4.1 | Introduction | 78 |
| 4.1.1 | Comptage de puissance et renormalisation | 78 |
| 4.1.2 | Exemples de modèles | 80 |
| 4.1.2.1 | Modèle ϕ^4 | 80 |
| 4.1.2.2 | Electrodynamique quantique spinorielle | 81 |
| 4.1.2.3 | Electrodynamique quantique scalaire et modèle de | |
| | Higgs abélien | 82 |
| 4.1.2.4 | Modèle(s) de Yukawa | 83 |
| 4.2 | Références | 84 |
| 4.3 | Formalisme de la théorie des perturbations | 85 |
| 4.3.1 | Fonctions de corrélation | 85 |
| 4.3.1.1 | Propagateur ou fonction de corrélation à 2 points | 85 |
| 4.3.1.2 | Point de vue interaction | 85 |
| 4.3.1.3 | Théorème de Wick | 88 |
| 4.3.1.4 | Diagrammes de Feynman | 89 |
| 4.3.1.5 | Règles de Feynman du modèle ϕ^4 | 91 |
| 4.4 | Références | 94 |
| 4.5 | Matrice S et section efficace | 95 |
| 4.5.1 | Rappels de mécanique quantique | 95 |
| 4.5.2 | Amplitude de diffusion | 95 |
| 4.5.3 | Formule de réduction LSZ | 96 |
| 4.5.4 | Application au modèle ϕ^4 | 96 |
| 4.6 | Références | 99 |
| | Bibliography | 101 |

Chapter 1

Introduction et théorie classique des champs

1.1 Introduction

La théorie quantique des champs (TQC) relativiste est un formalisme général permettant d'étudier des systèmes avec un nombre arbitraire de particules (quantiques) en interaction. Développée à partir de la fin des années 20, elle a pour objectif l'unification:

- de l'électromagnétisme (Maxwell 1860),
- de la relativité restreinte (Einstein 1905),
- de la mécanique quantique (Heisenberg 1925, Schrödinger 1926).

Les premières applications ont concerné la physique atomique, la physique des particules et plus généralement la physique des hautes énergies ($\sim 10^{12}\text{eV}=1\text{Tev}$ dans les grands collisionneurs comme le LHC au CERN). Par la suite (années 70), les applications se sont étendues à la physique statistique et à la physique de la matière condensée.

1.1.1 Point de vue particule

L'unification de l'électromagnétisme, de la relativité restreinte et de la mécanique quantique a eu pour motivation les limitations de ces théories prises à part. Par exemple, dans le cas de la mécanique quantique: l'impossibilité de rendre compte de la structure fine de l'atome d'hydrogène observée expérimentalement, de "démontrer" l'existence du spin (ajouté à la main dans l'Hamiltonien de Pauli), de comprendre l'émission spontanée (retour d'un atome à son état fondamental par émission d'un photon) ou encore la radioactivité (désintégration spontanée de certains noyaux instables en d'autres avec émission de particules de matière, *e.g.*, électrons, neutrons, noyaux d'hélium, et d'énergie, *e.g.*, photons, énergie cinétique), ...

Historiquement, la première TQC est née de l'unification de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique, *e.g.*, la création d'une théorie quantique du champ

électromagnétique (EM) en l'absence de toute particule chargée (**champs libres**). Ce problème a été résolu dès 1925 par Heisenberg, Born et Jordan qui ont modélisé les degrés de liberté du système (les champs électrique et magnétique) par une infinité d'oscillateurs harmoniques puis ont procédé à la quantification canonique de ces oscillateurs (**photons**).

En 1927, Dirac a complété cette construction en incluant des particules quantiques (non-relativistes) chargées en interaction avec le champ EM quantifié. Ceci a conduit à la *théorie quantique du rayonnement* ou *électrodynamique quantique non-relativiste* qui permet de comprendre et décrire des phénomènes à un photon qui échappent à la mécanique quantique ordinaire, *e.g.*, l'émission spontanée. Ces phénomènes sont caractérisés par des processus où le nombre de particules n'est pas conservé, *e.g.*, un atome dans l'état initial et un atome et un photon dans l'état final dans le cas de l'émission spontanée.

Une étape cruciale a été franchie par Enrico Fermi en 1934 avec sa théorie de la désintégration β qui permet d'expliquer la radioactivité β .^[1] Dans ce cas, il s'agit de processus d'**annihilation** et de **création** pour les particules de matière elles-mêmes.

Une seconde motivation importante à l'origine de la TQC (et sur laquelle ce cours est basé) a été de tenter d'unifier la relativité d'Einstein et la mécanique quantique. C'est encore Dirac, en 1928, qui a incorporé la relativité restreinte en découvrant l'équation qui porte son nom: l'**équation de Dirac**. Cette équation conduit naturellement à une particule de spin-1/2 permettant ainsi de décrire le moment magnétique intrinsèque de l'électron et d'expliquer la structure fine de l'atome d'hydrogène. Notons que l'**équation de Klein-Gordon** est l'analogue relativiste sensé décrire une particule de spin-0. Cependant, l'interprétation de ces équations en tant que généralisations relativistes de l'équation de Schrödinger conduit à d'importantes difficultés conceptuelles: probabilités négatives, états d'énergies négatives... Le point important, réalisé dans le tournant des années 30 par Paul Dirac et d'autres physiciens tel que Vladimir Fock, est qu'une mécanique quantique relativiste est une théorie à une particule: elle ne permet donc pas de décrire les phénomènes de création et d'annihilation. Or le régime ultra-relativiste est caractérisé par des processus de création de paires...

Pour mieux apprécier ce point important, il est utile d'estimer les échelles de distance caractéristiques qui interviennent. Dans le cadre de la mécanique quantique non-relativiste, rappelons l'inégalité d'Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar, \quad \lambda_{\text{dB}} = \frac{\hbar}{p}, \quad (1.1)$$

qui fait apparaître la **longueur d'onde de de Broglie** λ_{dB} . A des distances, L , grandes par rapport à la longueur d'onde de de Broglie: $L \gg \lambda_{\text{dB}}$, les fluctuations quantiques sont négligeables et la physique est classique. La nature ondulatoire

¹Rappelons que l'on distingue plusieurs types de radioactivité: α (émission de rayons α , *e.g.*, hélium), β (émission de rayons β , *e.g.*, électrons) et γ (émission de rayons γ , *e.g.*, photons). Dans le cas β on a par exemple, le cas β_- : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ et le cas β_+ : $p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ où n correspond au neutron, p proton, e^- électron, e^+ positron, ν neutrino et $\bar{\nu}$ anti-neutrino.

des particules de matière ne se manifeste qu'à des distances inférieures à la longueur d'onde de de Broglie: $L \lesssim \lambda_{dB}$, *i.e.*, $\Delta p \gtrsim \hbar/L$. En mécanique relativiste, l'impulsion et l'énergie sont à pied d'égalité ce qui implique:

$$\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{L} \implies \Delta E \gtrsim \frac{\hbar c}{L}. \quad (1.2)$$

Lorsque ΔE devient supérieur à $2mc^2$, le seuil de **production de paires** particule-antiparticule est dépassé et les effets relativistes deviennent importants.^[2] On peut en déduire une deuxième longueur caractéristique, la **longueur d'onde de Compton**

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}, \quad (1.3)$$

qui est telle qu'à des distances $L \gg \lambda_C$ il n'y a pas de production de paires et les effets relativistes sont négligeables tandis que pour $L \lesssim \lambda_C$ il y a production de paires. Notons par ailleurs que l'on a toujours:

$$\lambda_C < \lambda_{dB}. \quad (1.4)$$

Ainsi, on comprend au moins conceptuellement qu'à des distances $L \lesssim \lambda_C < \lambda_{dB}$ les effets quantiques et relativistes sont importants. Et que ce régime, qui est sujet à la création et l'annihilation de particules, ne peut en aucun cas être décrit par une théorie à une particule! La mécanique quantique relativiste est donc une impasse.^[3]

C'est une théorie quantique (relativiste) des champs qui va pouvoir correctement décrire le régime quantique relativiste dominé par les processus de création de paires. Historiquement, c'est Dirac qui a prédit l'existence des antiparticules en attribuant les solutions positives de son équation aux particules ordinaires et les solutions négatives à d'hypothétiques particules de charge opposée (théorie des **trous**^[4] de Dirac). Peu après, en 1933, Anderson observe la première **antiparticule**, le positron, produite par collision de rayons cosmiques dans l'atmosphère. Des expériences de radioactivité ont ensuite confirmé cette prédiction pour d'autres particules.

²Intuitivement, $E = mc^2$ traduit une correspondance entre matière et énergie: une augmentation/diminution de l'énergie s'interprète comme la création/annihilation de matière.

³A ce point, on peut reprendre le bel exemple de Sydney Coleman ^[5] et tenter, comme en mécanique quantique, de définir l'opérateur position d'une particule quantique relativiste. En des termes plus imagés, tentons de localiser la particule en l'enfermant dans une boîte dont une paroi est amovible. Ceci est possible en mécanique quantique au prix d'une indétermination totale sur l'impulsion ($\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta p \rightarrow \infty$). Dans le régime relativiste ceci est impossible. Lorsque $\Delta x \sim \lambda_C$ on a production de paires, $\Delta p \gtrsim mc$. Plus on comprime la particule, plus l'énergie augmente dans la boîte. Ce n'est toutefois plus une particule unique qui s'y trouve mais trois, cinq ou sept particules... On ne peut donc localiser une particule unique à moins de λ_C .

⁴Notons que le concept de trou est omniprésent en physique des solides et provient de la théorie des semiconducteurs dopés. Un trou désigne l'absence d'un électron dans la mer de Fermi. Dans un semiconducteur de gap Δ , la création d'une paire particule-trou nécessite une énergie 2Δ . C'est Yoichiro Nambu (1960) qui a semé-t-il été le premier à comprendre que la **masse** en physique des particules est l'analogue d'un **gap en physique des solides**. On le voit clairement de l'expression du spectre relativiste: $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ qui donne $\Delta = mc^2$. L'énergie de création de paire n'est donc autre que l'énergie $2\Delta = 2mc^2$ qu'il faut fournir pour créer une paire particule-antiparticule.

1.1.2 Point de vue champ

Le point de vue moderne consiste à interpréter les équations de Dirac, Klein-Gordon, Maxwell, ... comme des équations décrivant des champs classiques. Rappelons que la notion de champ est apparue en physique classique pour décrire l’“action à distance” entre deux corps. C’est le cas des champs de Maxwell mais aussi du champ de gravitation de Newton. Notons d’emblée que ces champs, qui jouent le rôle de médiateurs des interactions, implémentent ainsi le **principe de localité**.

Ce sont ces champs classiques qui doivent être quantifiés (procédure appelée à tort: **seconde quantification**). En théorie quantique, le concept de champ prend alors une nouvelle dimension puisque l’idée de la TQC est d’**associer des particules aux champs**. De manière plus précise et comme nous le verrons par la suite, ce sont les excitations (quantiques) d’un champ qui correspondent à des particules avec une charge, une masse et un spin bien définis, *e.g.*, le photon, particule neutre, de masse nulle et de spin 1 provient de la quantification du champ EM. Notons que tous les photons de l’univers proviennent de la quantification de ce même champ EM. Il en est de même des électrons qui proviennent tous de la quantification du champ de Dirac, etc... Ceci vient de l’indiscernabilité des particules identiques en théorie quantique: tous les photons, électrons, protons, ... de l’univers sont identiques et donc indiscernables. Tous proviennent de la quantification du même champ dont ils sont fabriqués. Notons par ailleurs que, contrairement au cas de la mécanique quantique, en TQC le lien entre spin et statistique n’est pas un postulat mais une conséquence naturelle du formalisme (“théorème spin-statistique”).

Dans ce cours, nous introduirons le formalisme de base de la TQC à partir de la théorie classique correspondante: par quantification (canonique) d’un champ classique.⁵ Rappelons qu’en mécanique quantique, les variables dynamiques classiques x et p deviennent des opérateurs \hat{x} et \hat{p} . En théorie classique des champs, les variables dynamiques sont des champs, *e.g.*, un champ classique scalaire $\phi(\vec{x}, t)$. Après quantification, ce dernier devient un opérateur champ $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$, *i.e.*, une **fonction à valeur opératorielle** (“operator valued function” en anglais), où la coordonnée \vec{x} ne joue le rôle que d’un simple paramètre. Puisque ces opérateurs sont définis en tout point de l’espace, nous avons à faire à une infinité de degrés de liberté. Nous verrons aussi que la construction d’un modèle en TQC, incluant les formes que peuvent prendre les interactions entre divers champs, est gouvernée par de grands **principes fondamentaux** provenant de la localité et des symétries.

Notons que la TQC permet d’effectuer des prédictions quantitatives vis-à-vis des expériences. Citons en particulier l’**électrodynamique quantique** (QED) comme l’une des théories les plus précises qui existe du point de vue de l’accord avec l’expérience. L’étude de la QED sort du cadre de ce cours introductif. D’un point de vue historique et sans rentrer dans les détails, la QED a été développée dans les années 30 et 40 par des physiciens tels que Bethe, Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson, ... Son élaboration s’est heurtée au “problème des divergences” qui a nécessité l’introduction du **groupe de renormalisation** (un découplage des phénomènes

⁵Une méthode alternative repose sur l’utilisation de l’intégrale de chemin ou intégrale fonctionnelle. Elle ne sera pas abordée dans ce cours.

physiques entre courtes et longues distances) dont les premiers développements sont dûs à Stueckelberg, Petermann, Gell-Mann, Low, Bogolyubov, Shirkov... Sa formulation moderne ne sera donnée que dans les années 70 par Wilson dont les travaux ont fortement contribué à étendre le domaine d'application de la théorie des champs à la physique statistique et la physique de la matière condensée. De nos jours, la TQC est omniprésente en physique fondamentale que ce soit en physique de basses ou de hautes énergies, en rapport avec la phénoménologie ou des développements plus formels de physique-mathématique.

1.2 Systèmes mécaniques discrets et continus

1.2.1 Rappels dans le cas d'une particule

On se place d'emblée dans le formalisme Lagrangien de la mécanique analytique où espace et temps sont à pied d'égalité ce qui s'avèrera particulièrement utile dans le cadre relativiste.

Rappelons que, dans ce cadre, la dynamique d'un système mécanique est décrite par la donnée d'un **Langrangien**, $L(q, \dot{q}, t)$, qui dépend des variables dynamiques (ici la coordonnée généralisée) $q \equiv q(t)$, $\dot{q} \equiv \dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et éventuellement du temps t . Dans le cas d'un système à n degrés de libertés, la coordonnée q sera considérée comme un vecteur à n composantes: $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$.

La donnée de L est équivalente à celle des équations du mouvement ou **équations d'Euler-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Ces équations s'obtiennent au moyen du principe de moindre action qui stipule que la trajectoire (classique) effectivement suivie par le système, compte tenu des conditions aux limites, est celle qui minimise l'action S :

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (1.6)$$

Notons que le passage du formalisme de Lagrange au formalisme de Hamilton se fait au moyen d'une transformation de Legendre:

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \equiv H(q, p, t), \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (1.7)$$

où p_α est le moment conjugué à q_α . Le formalisme de Hamilton introduit naturellement une dissymétrie entre le temps et l'espace.

1.2.2 Généralisation à N particules

Considérons maintenant la généralisation de ce qui précède au cas de N particules. On prendra comme exemple le cas d'un système unidimensionnel constitué de N

particules reliées entre elles par des ressorts identiques de constante de rappel k et de longueur au repos a . Soit $\eta_i \equiv \eta_i(t)$ le déplacement de la particule $i = 1, \dots, N$ par rapport à sa position d'équilibre. Le Lagrangien du système est alors donné par:

$$L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{\eta}_i^2(t) - \frac{k}{2} (\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t))^2 \right) \quad (1.8a)$$

$$= \sum_{i=1}^N a \left(\frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2(t) - \frac{1}{2} ka \left(\frac{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}{a} \right)^2 \right) \quad (1.8b)$$

$$= \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i, \quad (1.8c)$$

où la notation \mathcal{L} désigne une **densité de Lagrangien**, *i.e.*, le Lagrangien par unité de volume (dans le cas 1D le volume se réduit à une longueur). Notons que, par abus de langage, nous appellerons fréquemment par la suite Lagrangien ce qui en fait correspond à la densité de Lagrangien.

La forme (1.8b) est commode pour un passage à la limite continue correspondant à $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ et $Na = l$ où l est la longueur totale du système. Cette limite permet de se focaliser sur l'étude de phénomènes physiques à des distances grandes devant la longueur (microscopique) a . Comme nous le verrons par la suite, dans cette limite, l'invariance de Lorentz de (1.8) **émergera** naturellement.⁶ Nous pouvons l'implémenter au moyen des transformations suivantes:

$$\sum_{i=1}^N \rightarrow \int_{-l/2}^{l/2}, \quad a \rightarrow dx, \quad \frac{m}{a} \rightarrow \sigma, \quad ka \rightarrow Y, \quad (1.9a)$$

$$\eta_i(t) \rightarrow \eta(x, t), \quad \frac{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}, \quad (1.9b)$$

où σ désigne la densité de masse, Y le module d'Young (ou d'élasticité) et l'on a choisi un intervalle d'intégration symétrique autour de l'origine. On obtient donc:

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} dx \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad (1.10)$$

où $\eta(x, t)$ est une fonction continue de la coordonnée x . Aux variables dynamiques η_i du cas discret correspond donc un champ dans le cas continu. Notons que dans (1.10), la densité de Lagrangien est la somme de deux termes: le premier fait intervenir une dérivée par rapport au temps et correspond à une **énergie cinétique**; le second fait intervenir une dérivée par rapport à la coordonnée x et correspond à une **énergie potentielle**. Le modèle (1.10) est celui d'une **corde vibrante** (classique).

Comme on le verra par la suite pour d'autres modèles, l'énergie potentielle peut éventuellement aussi faire intervenir des termes proportionnels à η . Dans le cas

⁶Notons ici que dans le cadre de la physique statistique et de la physique de la matière condensée, les TQC "émergent" plus ou moins naturellement de l'étude d'une physique à longue distance. On parle alors de TQC **effectives**.

général on notera donc: $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\eta, \partial_t \eta, \partial_x \eta)$. L'action correspondante est donnée par:

$$S[\eta] = \int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-l/2}^{l/2} dx \mathcal{L}(\eta, \partial_t \eta, \partial_x \eta), \quad (1.11)$$

qui généralise (1.6) au cas d'un système continu décrit par un champ $\eta(x, t)$. A ce point, on souhaite déterminer les équations du mouvement associées à (1.11), *i.e.*, la généralisation de (1.5) au cas continu. Pour cela nous allons procéder à une légère reformulation du principe de moindre action. Considérons donc une configuration $\eta(x, t) + \delta\eta(x, t)$ qui est telle que $\eta(x, t)$ "minimise" l'action $S[\eta]$ et $\delta\eta(x, t)$ représente une petite déviation par rapport à cette configuration. Nous supposons que les configurations initiale et finale sont fixées pour tout x et qu'il en est de même des configurations aux extrémités de la corde, *i.e.*,

$$\delta\eta(x, t_i) = \delta\eta(x, t_f) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm l/2} \delta\eta(x, t) = 0. \quad (1.12)$$

On définit alors:

$$\delta S[\eta] = S[\eta + \delta\eta] - S[\eta]. \quad (1.13)$$

Par un développement au premier ordre en η , il vient:

$$\delta S[\eta] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-l/2}^{l/2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \partial_t \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta (\partial_x \eta) \right] + O(\eta^2). \quad (1.14)$$

Les deuxième et troisième termes sous l'intégrale peuvent s'écrire:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \partial_t \eta = \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \eta \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \right) \delta \eta, \quad (1.15a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \partial_x \eta = \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \eta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \right) \delta \eta, \quad (1.15b)$$

équivalents à des intégrations par parties. Ceci conduit à:

$$\begin{aligned} \delta S[\eta] &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-l/2}^{l/2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \right) \right] \delta \eta \\ &\quad + \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \eta \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \eta \Big|_{-l/2}^{l/2} + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dans (1.16), les termes partiellement intégrés sont nuls du fait des conditions aux limites (1.12) et ne contribuent donc pas aux équations du mouvement. Par ailleurs, puisque η "minimise" l'action, le terme en facteur de $\delta\eta$ dans le premier intégrand de (1.16) doit aussi être nul. C'est ce terme qui conduit aux **équations d'Euler-Lagrange généralisées à un système continu**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}. \quad (1.17)$$

Appliquons les équations (1.17) à (1.10). En considérant η , $\partial_t \eta$ et $\partial_x \eta$ comme des variables indépendantes par rapport auxquelles on dérive \mathcal{L} , on obtient:

$$\sigma \ddot{\eta}(x, t) - Y \partial_{xx} \eta(x, t) = 0, \quad (1.18)$$

qui correspond à l'équation d'une onde 1D (la vibration de la corde) se propageant à une vitesse $\sqrt{Y/\sigma}$.

Pour conclure, il est instructif d'obtenir l'Hamiltonien associé à (1.11). Par analogie avec le cas discret, (1.7), il est donné par:

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}, \quad \pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}, \quad (1.19)$$

où $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\pi, \eta, \partial_x \eta, t)$ est la **densité de Hamiltonien** et $\pi(x, t)$ le **moment canoniquement conjugué** au champ $\eta(x, t)$. La densité d'Hamiltonien \mathcal{H} correspond donc à la transformée de Legendre de la densité de Lagrangien \mathcal{L} par rapport à $\dot{\eta}$. Appliquée à (1.10), l'équation (1.19) conduit au moment conjugué:

$$\pi(x, t) = \sigma \dot{\eta}(x, t), \quad (1.20)$$

et à la densité d'Hamiltonien:

$$\mathcal{H} = \frac{\pi^2(x, t)}{2\sigma} + \frac{Y}{2} (\partial_x \eta(x, t))^2, \quad (1.21)$$

où, dans le second membre, le premier terme correspond à l'énergie cinétique de la corde vibrante et le second à son énergie potentielle.

1.3 Bilan du cours

- le régime quantique relativiste correspond à des distances $L < \lambda_C < \lambda_{dB}$ où $\lambda_C = \hbar/(mc)$ est la longueur d'onde de Compton et $\lambda_{dB} = \hbar/p$ est la longueur d'onde de de Broglie. Ce régime correspond à des énergies $E \sim \hbar c/L > \hbar c/\lambda_C \sim 2mc^2$ où il y a création de paires particule-antiparticule.
- une mécanique quantique relativiste est intrinsèquement une théorie à une particule et ne permet pas de décrire des processus où des particules peuvent être créées ou annihilées.
- la TQC permet d'étudier des systèmes avec un nombre arbitraire de particules (quantiques) en interaction. Elle unifie l'électromagnétisme, la relativité restreinte et la mécanique quantique.
- en TQC, les particules correspondent aux excitations de champs (un champ pour chaque type de particule: le champ EM pour les photons, le champ de Dirac pour les électrons, etc...). Le spin apparaît naturellement ainsi que le lien entre spin et statistique.
- une TQC se construit à partir de la théorie des champs classique (TCC) correspondante, *i.e.*, par quantification (canonique) d'un champ classique. Il faut prendre garde à ne pas confondre un champ classique avec une fonction d'onde. Le champ quantique est quant à lui une fonction à valeur opératorielle où la coordonnée ne joue le rôle que d'un simple paramètre.

- il faut savoir écrire le Lagrangien/Hamiltonien associé à une corde vibrante classique. Et connaître la différence entre Lagrangien/Hamiltonien et densité de Lagrangien/Hamiltonien.
- il faut connaître et savoir retrouver les équations de Lagrange associées à un système continu, (1.17).
- il faut savoir déterminer le Hamiltonien associé à un Lagrangien donné, (1.19).

1.4 Références

Remarque générale: il existe de nombreux excellents ouvrages de TQC (voir ci-dessous). La référence qui nous semble être la plus abordable et que nous suivront pendant ce cours est celle du polycopié de David Tong [14] (des vidéos sont aussi disponibles). Pour aller plus loin, nous recommandons les notes de cours de Sidney Coleman [4] et [5] (des vidéos de 1975 sont aussi disponibles [6]).

A titre indicatif, citons (la liste est loin d’être exhaustive):

- Le beau livre d’Anthony Zee [16]: assez compact, fourmillant de croustillants détails physiques mais plus compliqué qu’il n’en a l’air au premier abord (attention, la quantification y est menée via l’intégrale fonctionnelle).
- Le grand “classique” de Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber [7]: incontournable mais difficile d’accès aux débutants.
- Le livre de Peskin et Schroeder [11]: à la mode depuis quelques années mais toujours d’un niveau avancé pour ce cours.
- Le livre de Lewis Ryder [12]: sensé être plus accessible que les précédents tout en ayant un exposé moderne du sujet.
- L’ouvrage en deux volumes de Bjorken et Drell [1, 2]: fondamental (a formé des générations de physiciens), beaucoup de détails des calculs dans [1] mais assez démodé.
- Le livre de Bogolyubov et Shirkov [3]: fondamental (a formé des générations de physiciens), c’est le premier livre à avoir exposé de manière rigoureuse la renormalisation (d’un niveau avancé pour ce cours).

En ce qui concerne plus particulièrement ce premier cours:

- [14], Chapitre 1.
- Pour aller plus loin: [4] et [5].
- [13], Chapitre 1 (attention: convention démodée pour les 4-vecteurs).
- Voir l’introduction de [10], pour un exposé compact des motivations physiques conduisant à l’élaboration d’une TQC.

- Pour une introduction historique détaillée: [15], Chapitre 1.
- On pourra aussi consulter: [Histoire de la théorie quantique des champ \(wikipédia\)](#).

1.5 Formulation covariante

Le champ $\eta(x, t)$ que nous venons de présenter est l'exemple le plus simple d'un champ. C'est une fonction scalaire et réelle. Son existence traduit le fait que la corde vibrante possède une infinité de degrés de liberté: la valeur du champ en tout point de l'espace unidimensionnel que nous avons considéré.

Dans la continuité, nous considérons maintenant un **champ scalaire réel** $\phi(\vec{x}, t)$ défini en tout point d'un espace à 3 dimensions avec $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. La densité de Lagrangien dépend de manière générale du champ, de ses dérivées spatio-temporelles et éventuellement explicitement de \vec{x} et de t , $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi, \vec{\nabla} \phi, \vec{x}, t)$ où $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$. On pourra aussi noter $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Les équations d'Euler-Lagrange sont alors données par:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (1.22)$$

et généralisent simplement (1.17) au cas d'un système tridimensionnel. Nous souhaitons maintenant réécrire ces équations sous une forme plus symétrique et adaptée à la physique relativiste qui nous intéresse, *i.e.*, au moyen de **4-vecteurs** ou **vecteurs de Lorentz**.

1.5.1 Notations et conventions

Nous rappelons ici les notations et conventions d'usage en relativité restreinte. On distingue tout d'abord deux types de 4-vecteurs: ⁷

$$b^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3) \quad \text{contravariant}, \quad (1.23a)$$

$$b_\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3) \quad \text{covariant}, \quad (1.23b)$$

où la composante 0 est dite temporelle. Dans toute la suite, les indices grecs: μ, ν, \dots iront de 0 à 3 tandis que les indices latins: i, j, \dots iront de 1 à 3.

Exemples:

- le 4-vecteur position:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}). \quad (1.24)$$

- le 4-vecteur impulsion:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (1.25)$$

- le 4-potential du champ électromagnétique: ⁸

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A}), \quad (1.26)$$

⁷Il existe une ancienne convention, utilisée par exemple dans [13], où il n'y a pas de distinction covariant/contravariant et où un 4-vecteur s'écrit: $b_\mu = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ avec $b_4 = ib_0$. Nous ne l'adopterons pas ici.

⁸Attention, nous adoptons le **système de Heaviside-Lorentz** (qui ne diffère du système gaussien que par des facteurs 4π) où la composante temporelle A^0 est donnée par ϕ (et non ϕ/c). Dans ce système, le caractère relativiste des équations apparaît de manière naturelle via des contributions explicites de la vitesse de la lumière.

où $\phi \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$ est le potentiel scalaire et $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{x}, t) \equiv \vec{A}(x)$ le potentiel vecteur. **Important:** toujours dans un souci de simplification des notations, nous noterons plus généralement $f(x) \equiv f(\vec{x}, t)$ toute fonction (ou champ) d'arguments spatio-temporels \vec{x} et t .

- le 4-vecteur courant:

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \vec{j}), \quad (1.27)$$

où $\rho \equiv \rho(\vec{x}, t) \equiv \rho(x)$ est la densité et $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x}, t) \equiv \vec{j}(x)$ le courant.

On définit un **produit scalaire** entre 4-vecteurs:

$$b \cdot c = b^\mu c_\mu = b_\mu c^\mu = g_{\mu\nu} b^\mu c^\nu = g^{\mu\nu} b_\mu c_\nu \quad (1.28a)$$

$$= b^0 c^0 - b^1 c^1 - b^2 c^2 - b^3 c^3 \quad (1.28b)$$

$$= b^0 c^0 - \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad (1.28c)$$

où nous avons adopté à la première ligne la **convention de sommation sur les indices répétés** et où $g_{\mu\nu}$ est le **tenseur métrique** de signature majoritairement négative:⁹

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

C'est une métrique dite **pseudo-euclidienne** ou de **Minkowski**. Comme noté dans (1.29) le tenseur métrique coïncide avec son inverse et ils sont reliés par:

$$g^{\alpha\mu} g_{\alpha\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad (1.30)$$

où $\delta^\mu{}_\nu$ est le **symbole de Kronecker**:

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Le tenseur métrique ci-dessus permet de passer d'un 4-vecteur contravariant à un 4-vecteur covariant, *i.e.*, d'élever ou d'abaisser un indice. Par exemple (attention aux signes):

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right). \quad (1.32)$$

Il permet aussi d'évaluer la norme d'un 4-vecteur. On peut ainsi montrer que le 4-vecteur impulsion est de longueur invariante:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2, \quad (1.33)$$

⁹Il existe une autre convention avec une signature majoritairement positive, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$, qui est d'usage en relativité générale. Notons que la métrique entièrement positive est dite Euclidienne et est très utilisée en **théorie statistique des champs** (TSC). Il existe aussi un moyen pour passer de la métrique de Minkowski à celle d'Euclide et vice versa (et ainsi de la TQC à la TSC): par rotation de Wick ou temps imaginaire.

où m est la masse au repos de la particule et c la vitesse de la lumière. Cette égalité est en accord avec le fait que: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. Notons aussi que:

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}, \quad (1.34)$$

qui sera utile pour la transformée de Fourier.

On définit de même le 4-vecteur gradient (attention aux signes et à la position des indices):

$$\nabla^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad (1.35a)$$

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right). \quad (1.35b)$$

Ainsi, pour un 4-vecteur γ^μ , on a (attention au signe):

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c} \gamma^0 \partial_t + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}. \quad (1.36)$$

On peut aussi réexprimer le 4-vecteur impulsion comme:

$$p^\mu = +i\hbar \nabla^\mu = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right). \quad (1.37)$$

Ceci conduit à:

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \equiv -\hbar^2 \square, \quad (1.38)$$

où \square est le **d'Alembertien**:

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (1.39)$$

et Δ le Laplacien.

1.5.2 Cas d'un champ scalaire réel

Revenons maintenant aux équations de Lagrange (1.22). A l'aide des notations et conventions présentées ci-dessus, elle peuvent s'écrire sous une forme plus compacte donnée par:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (1.40)$$

Nous verrons par la suite qu'il est possible de considérer des systèmes décrits par un ensemble discret de champs, $\phi_a(x)$, où $a = 1, 2, \dots, N$. Il existe alors une équation du mouvement pour chaque composante du champ:

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \quad (a = 1, 2, \dots, N).} \quad (1.41)$$

Dans le cas où $N = 1$, on prend $\phi_1 \equiv \phi$ et on retrouve (1.40).

Un Lagrangien donné pourra aussi s'exprimer de manière compacte au moyen de 4-vecteurs. Revenons au Lagrangien de la corde vibrante unidimensionnelle (1.10). En redéfinissant $\eta = \phi/\sqrt{Y}$ et en généralisant à un espace 3D, il vient:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2 \right), \quad (1.42)$$

où $c = \sqrt{Y/\sigma}$ a bien les dimensions d'une vitesse. Sous forme "relativiste", ce Lagrangien s'écrit:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi. \quad (1.43)$$

Le Lagrangien (1.43) est l'exemple le plus simple de Lagrangien relativiste d'un champ scalaire réel (libre). Notons que c'est le choix de la métrique majoritairement positive qui permet de l'écrire avec un signe global positif (avec une métrique majoritairement négative un signe global négatif apparaîtrait).

L'application de (1.40) à (1.43) permet de déterminer l'équation du mouvement du champ:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi \equiv \square \phi = 0, \quad (1.44)$$

qui correspond bien à une simple équation des ondes.

L'action correspondant à \mathcal{L} s'écrira:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial \phi, x), \quad (1.45)$$

où les mesures d'intégration du temps et de l'espace ont été ramassées dans le d^4x . Pour bien marquer la présence du temps, on dira que le système est à $(3 + 1)$ -dimensions (1 pour le temps). Plus généralement, **un système relativiste à D dimensions d'espace vit dans un espace-temps à $d = D + 1$ dimensions**. Dans ce cas, l'indice μ des 4-vecteurs et tenseurs prend les valeurs $0, 1, \dots, D$ où 0 correspond toujours à la composante temporelle. L'action est donnée par:

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial \phi, x). \quad (1.46)$$

Donnons deux exemples importants:

- la corde vibrante (1.10) correspond à une théorie à $(1 + 1)$ -dimensions. Son Lagrangien est donné par (1.43) avec $\mu = 0, 1$ et son action par (1.46) où $d = 2$. Comme anticipé dans le dernier cours, nous constatons que dans la limite continue une forme relativiste a émergé pour la corde vibrante où la vitesse de phase $c = \sqrt{Y/\sigma}$ correspond effectivement à une vitesse de la lumière.
- le cas d'une théorie à $(0 + 1)$ -dimensions correspond en fait à la mécanique classique (et donc à la mécanique quantique après quantification).

- l'électromagnétisme est une théorie à (3+1)-dimensions (et conduit à l'électrodynamique quantique après inclusion des champs de matière et quantification).

Dans toute la suite (sauf mention explicite du contraire) nous nous concentrerons sur des systèmes à (3 + 1)-dimensions. ¹⁰

L'introduction des 4-vecteurs n'est pas simplement cosmétique. Elle permet d'implémenter le principe de relativité restreinte d'Einstein et donc l'invariance (ou plutôt la covariance) de Lorentz. C'est ce que l'on entend par forme "relativiste".

1.5.3 Transformations de Lorentz

Rappelons le **principe de relativité de Galilée** qui s'applique aux systèmes non relativistes: les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. Le passage d'un référentiel à un autre se fait au moyen d'une **transformation de Galilée**:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t, \quad t \rightarrow t' = t, \quad (1.47)$$

où \vec{V} est la vitesse relative des deux référentiels et le temps est absolu.

Le **principe de relativité restreinte** (Einstein) stipule quant à lui que la vitesse de la lumière est constante dans tous les référentiels inertiels. Il généralise ainsi celui de Galilée en incluant le régime relativiste. Son expression mathématique est contenue dans le fait que l'intervalle:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \quad (1.48)$$

est **invariant** par changement de référentiel inertiel. Les transformations ainsi obtenues sont les **transformations de Lorentz** qui généralisent les transformations de Galilée. Les transformations de Lorentz laissent ds^2 invariant et peuvent être interprétées comme des "rotations" dans un espace à 4 dimensions (ct, x, y, z) . Il en existe 6: 3 rotations ordinaires d'espace (par rapport aux axes x, y et z) ainsi que 3 transformations spéciales (ou *boosts*) faisant intervenir le temps (dans les directions x, y et z).

Considérons par exemple le cas d'un boost dans la direction x . Cette transformation préserve la longueur d'espace-temps, *i.e.*, la forme quadratique $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ et laisse les coordonnées y et z invariantes. Sous forme matricielle, elle peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

où les paramètres de la transformation sont donnés par $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} > 0$ (facteur de Lorentz) et $\vec{V} = V\vec{e}_x$ est la vitesse du boost dans la direction x . La

¹⁰De nombreuses TQC effectives en physique de la matière condensée sont à (2 + 1)-dimensions ou à (1 + 1)-dimensions. Les premières ont pour but de décrire des systèmes planaires tels que les supraconducteurs à haute température, les systèmes à effet Hall quantique ou encore le graphène; les secondes des systèmes unidimensionnels tels que les fils quantiques et nanotubes de carbone.

transformation inverse est donnée par $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$, *i.e.*, $\beta \rightarrow -\beta$. Cette transformation peut aussi s'écrire sous la forme d'une **rotation hyperbolique** en posant: $\cosh(\phi) = \gamma$ et $\sinh(\phi) = \beta\gamma$ ou encore $\phi = \operatorname{arctanh}(\beta)$ avec $0 \leq \phi < \infty$. Ceci conduit alors à:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

A titre de comparaison, une rotation ordinaire autour de l'axe z est une transformation orthogonale préservant la longueur d'espace, *i.e.*, la forme quadratique $\vec{x}'^2 = \vec{x}^2$ et laissant le temps invariant $t' = t$. Sous forme matricielle, elle s'écrit:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

où θ est l'angle de rotation autour de l'axe z .

Il sera commode dans toute la suite de mettre ces transformations sous une forme compacte en utilisant les notations 4-vecteurs appropriées au cas relativiste. On écrira ainsi:

$$\boxed{(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (x')_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu,} \quad (1.52)$$

où Λ est une matrice 4×4 associée à la transformation (qui peut être une rotation ordinaire ou un boost). La notation $\Lambda^\mu{}_\nu$ implique que μ est un indice de ligne et ν un indice de colonne. Dans le cas d'un boost le long de x on a ainsi:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

Remarquons que les transformations inverses de (1.52) sont données par:

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu (x')^\nu, \quad x_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu (x')_\nu, \quad (1.54)$$

ou encore

$$\boxed{x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (x')^\nu, \quad x_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu (x')_\nu.} \quad (1.55)$$

Le principe de relativité restreinte contraint les coefficients $\Lambda^\mu{}_\nu$ et $\Lambda_\mu{}^\nu$ de la transformation de Lorentz. En effet, le produit scalaire laisse invariant la forme quadratique $x^2 = (x')^2$ ou, plus explicitement: $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$. Or $x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\sigma x^\sigma \Lambda_\mu{}^\rho x_\rho$. Et $x^\mu x_\mu = \delta_\sigma{}^\rho x^\sigma x_\rho$ où $\delta_\sigma{}^\rho$ est le symbole de Kronecker (1.31). On obtient donc:

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda_\mu{}^\rho = \delta_\sigma{}^\rho.} \quad (1.56)$$

Cette relation est l'analogue de $RR^T = \mathbb{1}$ qui exprime l'orthogonalité des matrices de rotation R dans l'espace ordinaire (même si la transposée n'apparaît pas explicitement dans (1.56)). On peut écrire cette relation sous une autre forme qui peut s'avérer utile en pratique. Pour cela, on écrit: $x'^\mu x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho x^\sigma x^\rho$ qui doit être égal à: $x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$. On obtient alors:

$$\boxed{\Lambda^\mu_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho = g_{\sigma\rho}} \quad (1.57)$$

Notons que le tenseur $g_{\mu\nu}$ est invariant sous la transformation de Lorentz. Il exprime l'orthogonalité d'une base qui doit être valable quelque soit la base utilisée.

Les matrices 4×4 Λ apparaissant dans (1.52) forment une **représentation** des transformations de Lorentz. L'ensemble de ces matrices forme un **groupe** orthogonal noté $O(3,1)$, le **groupe de Lorentz**. Tout comme $O(3)$, ce groupe est **non-commutatif**. Remarquons que, de la relation (1.56), on obtient:

$$\Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\rho_\mu = \delta_\sigma^\rho \quad \Rightarrow \quad (\det(\Lambda))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda) = \pm 1. \quad (1.58)$$

On distingue alors les **transformations de Lorentz propres** dont le déterminant est positif: $\det(\Lambda) = +1$. Elles forment un sous-groupe de $O(3,1)$ noté $SO(3,1)$ incluant les rotations et les boosts.¹¹ Il existe aussi des **transformations de Lorentz impropres** dont le déterminant est négatif: $\det(\Lambda) = -1$. Ces transformations correspondent à la parité et au renversement du temps. Notons que seules les transformations propres sont continûment connectées à l'identité et admettent donc un développement infinitésimal. Les transformations impropres sont discrètes. Notons aussi que les transformations qui préservent la flèche du temps sont telles que:

$$\Lambda^0_0 \geq 0. \quad (1.59)$$

De telles transformations sont dites **orthochrones**. Le **groupe de Lorentz restreint**, noté $SO^+(3,1)$ est un sous-groupe du groupe de Lorentz comprenant les transformations propres et orthochrones. Par abus de langage, le groupe de Lorentz restreint est parfois appelé groupe de Lorentz.

Pour conclure cette sous-section, notons que le groupe de Lorentz $O(3,1)$ est un sous-groupe du **groupe de Poincaré**. Ce dernier inclut aussi des translations d'espace et de temps (le groupe des translations d'espace-temps est commutatif). Sous le groupe de Poincaré, les transformations (1.52) se généralisent en:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (x')_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \quad (1.60)$$

où le 4-vecteur a^μ paramétrise la translation. Le groupe de Poincaré est parfois qualifié de groupe de Lorentz **inhomogène**. Pour insister sur l'absence de translation, les transformations (1.52) sont quant à elles parfois qualifiées de transformations de Lorentz **homogènes**.

¹¹Notons que le groupe des rotations à 3 dimensions, $SO(3)$ est un groupe compact parce que les variables angulaires sont bornées. Au contraire, le groupe de Lorentz, $SO(3,1)$, est non-compact parce que le paramètre ϕ (la rapidité qui caractérise la vitesse des boosts) n'est pas borné.

1.5.4 Covariance de Lorentz

Les scalaires, vecteurs et plus généralement tenseurs sont définis par l'action du groupe des rotation $SO(3)$ sur ces objets. ^[12] Dans l'espace de Minkowski, c'est l'action de $SO(3,1)$ qui permet de définir la nature des objets que l'on manipule.

Dans ce cadre, on peut définir un 4-vecteur comme étant un objet dont les quatre composantes se transforment comme celle du 4-vecteur position, x^μ , sous l'action d'une transformation de Lorentz homogène. Ainsi:

$$b'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu b^\nu, \quad c'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu c^\nu, \quad (1.61)$$

impliquent que b^μ et c^μ sont des 4-vecteurs. A l'aide de (1.56) on peut alors montrer que:

$$b'^\mu c'_\mu = \Lambda^\mu{}_\sigma \underbrace{\Lambda_\mu{}^\rho}_{=\delta_\sigma{}^\rho} b^\sigma c_\rho = b^\mu c_\mu, \quad (1.62)$$

ce qui permet de vérifier explicitement la covariance de Lorentz du produit scalaire:

$$b' \cdot c' = b \cdot c. \quad (1.63)$$

En utilisant (1.55) on peut aussi montrer que:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (1.64)$$

i.e., ∂^μ se transforme comme un 4-vecteur contravariant et ∂_μ comme un 4-vecteur covariant. On peut de même définir des tenseurs de rang plus élevé via leur transformation de Lorentz. Ainsi, un 4-tenseur de rang 2 est défini comme:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho T^{\sigma\rho}. \quad (1.65)$$

Les transformations de Lorentz admettent aussi des **représentations** sur les champs qui permettent d'en définir la nature. Dans le cas d'un champ scalaire, une transformation de Lorentz, $x \rightarrow x' = \Lambda x$, implique que:

$$\boxed{\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)}, \quad (1.66)$$

où nous avons utilisé la notation $\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t)$ et l'apparition de Λ^{-1} dans l'argument du champ vient du fait que nous utilisons le **point de vue actif**. Notons que (1.66) peut aussi s'écrire: $\phi'(x') = \phi(x)$, *i.e.*, la valeur du champ transformé en la coordonnée transformée est égale à la valeur du champ d'origine en la coordonnée d'origine. De même, dans le cas d'un **champ vectoriel**, *e.g.*, pour le 4-vecteur potentiel, la représentation suivante s'applique naturellement:

$$\boxed{A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)}. \quad (1.67)$$

¹²Les pseudo-scalaires, -vecteurs et -tenseurs sont définis sous l'action de la parité, donc de la partie impropre du groupe.

Une théorie (ou un modèle) est dite **covariant.e de Lorentz** (ou **invariant.e de Lorentz** ou encore **invariant.e relativiste**) si lorsque $\phi(x)$ satisfait les équations du mouvement alors $\phi(\Lambda^{-1}x)$ satisfait les **mêmes** équations du mouvement. On peut s'assurer de cette covariance de manière très simple: en construisant un Lagrangien qui est lui-même covariant de Lorentz, c'est-à-dire un **scalaire**. Le point crucial est que l'invariance relativiste de \mathcal{L} est tellement **restrictive** que l'on peut s'en servir pour **construire** \mathcal{L} .

D'un point de vue pratique, le formalisme présenté permet de repérer d'un seul coup d'oeil la nature des objets manipulés. Il suffit tout simplement pour cela de compter le nombre d'indices non contractés:

- scalaire: tous les indices sont contractés. C'est le cas par exemple de $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$.
- vecteur: un seul indice non contracté. C'est le cas par exemple de $\partial^\mu \phi \gamma^\alpha \partial_\mu \phi \sim V^\alpha$ où γ^μ est un 4-vecteur.
- tenseur de rang 2: deux indices non contractés. C'est le cas par exemple de $\partial^\mu \phi \gamma^\alpha \gamma^\beta \partial_\mu \phi \sim T^{\alpha\beta}$.

Sans faire aucun calcul, on peut alors immédiatement s'assurer que le Lagrangien libre d'un champ scalaire réel, (1.43), est bien covariant de Lorentz et que l'équation du mouvement correspondante, (1.44), l'est aussi. On comprend ainsi mieux ce que l'on entendait au premier cours par "émergence d'une invariance de Lorentz" pour la corde vibrante.

1.6 Bilan du cours

- nous étudions des systèmes relativistes dans un espace-temps à (3+1)-dimensions.
- par relativiste, on entend des systèmes dont le Lagrangien (et les équations du mouvement) sont covariants (ou invariants) de Lorentz.
- la covariance de Lorentz d'un modèle se manifeste le plus clairement grâce à l'emploi de notations relativistes, *i.e.*, au moyen de 4-vecteurs. On parle ainsi de formulation covariante d'un modèle pour indiquer qu'on l'exprime au moyen de 4-vecteurs.
- il est très important de savoir manipuler les 4-vecteurs, de comprendre la notion de covariance de Lorentz et de savoir déterminer d'un coup d'oeil la nature des objets manipulés (scalaires, vecteurs, ...).
- il faut connaître (1.40) par coeur.
- il faut connaître (1.52) par coeur et savoir donner des exemples de transformations de Lorentz.
- il est très important de comprendre la notion de représentation d'une transformation. Il faut connaître (1.66) (cas du champ scalaire) et (1.67) (cas du champ vectoriel) par coeur.

- d'un point de vue conceptuel, il est bon d'avoir à l'esprit que l'invariance de Lorentz (le caractère relativiste) d'un modèle peut émerger de l'étude de ses propriétés à longue distance même si physiquement le modèle n'a *a priori* rien de relativiste, *e.g.*, le cas de la corde vibrante après passage à la limite continue dont on peut interpréter la vitesse de phase des vibrations comme une vitesse de la lumière effective.

1.7 Références

- [14], Chapitre 1.
- Pour aller plus loin: [4] et [5].
- [13], Chapitre 1 (attention: convention démodée pour les 4-vecteurs).
- Pour réviser l'électromagnétisme et sa formulation covariante, voir par exemple: [9], [8].
- Pour réviser l'électromagnétisme et sa formulation covariante: polycoié de TCC (MU4PY110), Master 1, Sorbonne Université.

1.7.1 Petits exercices

1. Montrer que (1.40) est bien identique à (1.22).
2. Démontrer (1.57).
3. La jauge de Lorentz est telle que $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$. Justifiez la terminologie “jauge relativiste” pour désigner cette jauge. La comparer à la jauge de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

1.8 Exemples de champs classiques

1.8.1 Champs scalaires

1.8.1.1 Champ scalaire réel

Revenons au cas d'un champ scalaire réel $\phi(x)$ et tentons de construire le Lagrangien libre le plus général à l'aide des contraintes d'invariance de Lorentz et de localité. ^[13]

Imposons à notre modèle d'être non seulement invariant sous les transformations de Lorentz homogènes mais aussi sous les translations d'espace-temps, *i.e.*, sous le groupe de Poincaré. Le Lagrangien $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ ne peut alors pas dépendre explicitement de x^μ . Par ailleurs, le seul 4-vecteur qui entre dans \mathcal{L} est $\partial_\mu\phi$. Pour que \mathcal{L} soit un scalaire, il doit être contracté avec lui-même. Enfin, une théorie libre étant caractérisée par des équations du mouvement linéaires en les champs, \mathcal{L} ne peut être qu'au plus quadratique en ϕ .

La localité quant à elle proscriit des contributions du type $\phi(x)\phi(y)$ avec $x \neq y$. ^[14]

Compte tenu de ces contraintes, la forme la plus générale du Lagrangien est donnée par:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2, \quad (1.68)$$

où μ est un paramètre quelconque à ce niveau et doit avoir les dimensions de l'inverse d'une longueur. Le Lagrangien (1.43) est le **Lagrangien de Klein-Gordon** ou Lagrangien gaussien. C'est l'exemple le plus simple de Lagrangien relativiste pour un champ scalaire réel libre. Notons que c'est le choix de la métrique majoritairement positive qui permet de l'écrire avec un signe global positif (avec une métrique majoritairement négative un signe global négatif apparaîtrait).

L'application de (1.40) à (1.68) permet de déterminer l'équation du mouvement du champ:

$$\square\phi + \mu^2\phi = 0, \quad (1.69)$$

qui correspond à l'**équation de Klein-Gordon**. La solution de cette équation linéaire en ϕ peut être cherchée sous la forme d'une onde plane en accord avec le fait qu'elle décrit l'évolution d'un champ libre. A ce point, on peut remarquer que la seule différence avec la corde vibrante est la présence du terme en μ^2 dans (1.69). Tout comme pour le modèle de la corde vibrante, le champ libre ϕ correspond à une infinité d'oscillateurs harmoniques découplés. Ce découplage se manifeste le plus clairement dans l'espace de Fourier. Nous utiliserons les conventions suivantes pour

¹³Ce type d'argument basé sur les symétries est généralement qualifié d'**argument à la Ginzburg-Landau**.

¹⁴Il peut bien entendu exister des Lagrangiens non-locaux. Mais ces derniers doivent être interprétés comme des Lagrangiens effectifs obtenus après intégration de certains degrés de liberté. Autrement dit, un Lagrangien non-local peut en général reprendre une forme locale après ré-introduction de tous les degrés de liberté.

la transformée de Fourier et son inverse:

$$\phi(\vec{p}, t) = \int d^3x \phi(\vec{x}, t) e^{-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}, \quad (1.70a)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \phi(\vec{p}, t) e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}, \quad (1.70b)$$

où la constante de Planck a été introduite pour rendre l'argument de l'exponentielle sans dimension. Ainsi, au moyen de (1.70b), l'équation de Klein-Gordon devient:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{p^2 c^2 + \mu^2 \hbar^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{p}, t) = 0. \quad (1.71)$$

L'équation (1.71) est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation:

$$\omega_{\vec{p}}^2 = \frac{p^2 c^2 + \mu^2 \hbar^2 c^2}{\hbar^2}. \quad (1.72)$$

La transformée de Fourier du champ, $\phi(\vec{p}, t)$, apparaît donc comme un mode propre du champ. Par transformée de Fourier inverse, $\phi(\vec{x}, t)$ correspond à une superposition linéaire d'une infinité d'oscillateurs harmoniques découplés chacun oscillant à une certaine pulsation propre $\omega_{\vec{p}}$.

A partir de la pulsation $\omega_{\vec{p}}$ il est possible de définir une relation de dispersion en énergie:

$$E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 c^2 + \hbar^2 \mu^2 c^2. \quad (1.73)$$

Ce résultat permet de retrouver la relation de dispersion relativiste, $E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, à la condition que μ satisfasse à:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{mc}, \quad (1.74)$$

et l'on retrouve naturellement la longueur d'onde de Compton qui est l'échelle de longueur relativiste caractéristique associée à une particule de masse m . Cet argument est à prendre avec beaucoup de précaution puisque l'équation (1.69) est une équation classique et **ϕ est un champ classique qui n'a rien à voir avec une fonction d'onde**. Il permet cependant de deviner que, une fois correctement quantifiée, ce champ pourra être associé à une particule (quantique) relativiste de masse m . Ceci sera l'objet du Chapitre suivant.

1.8.1.2 Champ scalaire réel et interaction de Yukawa

Ajoutons maintenant au Lagrangien libre \mathcal{L}_0 un terme d'interaction dit de Yukawa qui couple le champ ϕ (champ de méson) à un champ ρ (champ de nucléon):

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\phi(x)\rho(x). \quad (1.75)$$

Le Lagrangien total est donné par $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$ où la dynamique associée à ρ est négligée par simplicité. L'équation du mouvement qui en résulte s'écrit:

$$\boxed{\square\phi + \mu^2\phi = -\rho}, \quad (1.76)$$

où ρ apparaît comme une **source** pour l'équation de Klein-Gordon.

1.8.1.3 Champ scalaire complexe

Considérons le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi, \quad (1.77)$$

où ϕ^* est le complexe conjugué de ϕ . Notons qu'un champ complexe peut être vu comme la combinaison linéaire de deux champs réels ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2). \quad (1.78)$$

La nature complexe de ce champ traduit l'existence d'un **degré de liberté interne** telle qu'une charge. Nous y reviendrons en Sec. [1.9.3](#).

1.8.1.4 Champ scalaire complexe non-relativiste

Considérons le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2c} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{1}{2\mu} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi - \mu \psi^* \psi, \quad (1.79)$$

où ψ est un champ complexe. Clairement, le temps et l'espace ne sont pas à pied d'égalité (premier ordre en ∂_t , deuxième ordre en ∂_x): ce modèle n'est donc pas invariant de Lorentz. L'équation du mouvement associée est donnée par:

$$\frac{i}{c} \dot{\psi} = -\frac{1}{2\mu} \Delta \psi + \mu \psi. \quad (1.80)$$

Notons que si l'on prend pour μ l'inverse de la longueur de Compton (voir [\(1.74\)](#)) et que l'on multiplie les deux membres de la dernière équation par $\hbar c$, il vient:

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + mc^2 \psi, \quad (1.81)$$

qui est très similaire à une équation de Schrödinger. Cette équation n'a cependant **rien de quantique** et ψ est un champ classique qui ne correspond en aucun cas à une fonction d'onde. Il faut donc encore une fois prendre garde à la forme prise par une équation classique pour certaines valeurs des paramètres. Ces derniers sont arbitraires au niveau actuel et ce n'est qu'après quantification qu'un sens physique, *e.g.*, lien avec la masse d'une particule, leur sera donné.

1.8.2 Champs vectoriels: l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell correspondent aux équations du mouvement du champ électromagnétique. Elles sont à la base de l'électrodynamique classique. Il en existe quatre que l'on regroupe par deux selon qu'elles possèdent ou non des sources:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.82a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.82b)$$

où \vec{E} est le champ électrique, \vec{B} le champ magnétique, ρ la densité de charge et \vec{j} la densité de courant.

Les **champs physiques** sont les champs \vec{E} et \vec{B} . Cependant, une formulation lagrangienne de l'électrodynamique nécessite l'introduction du potentiel scalaire, ϕ , et du potentiel vectoriel, \vec{A} , qui sont tels que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (1.83)$$

A l'aide de (1.83) les équations sans source, (1.82b), sont automatiquement satisfaites. Les champs ϕ et \vec{A} peuvent se combiner pour former le 4-potentiel: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A})$, (1.26). On peut alors définir le **4-tenseur du champ électromagnétique** comme :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.84)$$

Ce tenseur est **totalelement antisymétrique**. Il est physique ce qui se traduit par le fait qu'il est invariant par **transformation de jauge**:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x). \quad (1.85)$$

Notons que **fixer la jauge** correspond à choisir la fonction $\lambda(x)$. Dans le cas relativiste, il est courant d'utiliser la **jauge de Lorentz**:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \square \lambda(x) = 0, \quad (1.86)$$

qui est covariante de Lorentz. Ceci n'est pas le cas de la jauge de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ qui brise explicitement la symétrie entre l'espace et le temps et qui est davantage utilisée en physique atomique.

A ce stade, il est possible de présenter la formulation covariante de l'électrodynamique classique, *i.e.*, d'exprimer les équations du mouvement et le Lagrangien au moyen de 4-vecteurs. Les équations de Maxwell avec source prennent la forme:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu, \quad (1.87)$$

où j^μ est le 4-vecteur courant (1.27). Notons que l'antisymétrie de $F^{\mu\nu}$ implique que $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ ce qui conduit à:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.88)$$

et permet de retrouver l'équation de continuité. Cette dernière exprime la conservation du courant. La forme covariante (1.87), particulièrement élégante et compacte, permet de trouver cette conservation de manière simple et rapide.

En ce qui concerne le Lagrangien, il est composé de deux termes:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (1.89)$$

où \mathcal{L}_0 est le Lagrangien du champ de Maxwell libre et \mathcal{L}_{int} le Lagrangien d'interaction avec la matière. Pour ce qui est de la partie libre, avec $F^{\mu\nu}$ à notre disposition, on peut construire un scalaire de Lorentz physique donné par: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. On a donc:

$$\boxed{\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},} \quad (1.90)$$

avec un facteur conventionnel de 1/4. Pour ce qui est du terme d'interaction, le scalaire de Lorentz correspondant est donné par: $j^\mu A_\mu$ ce qui conduit à:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} j^\mu A_\mu.} \quad (1.91)$$

Par application des équations d'Euler-Lagrange, ce Lagrangien permet de retrouver l'équation du mouvement (1.87).

1.9 Symétries et lois de conservation

Au cours des dernières sections, nous avons eu un aperçu de l'importance des symétries en TCC pour construire le Lagrangien. Nous en avons donné quelques exemples essentiellement en ce qui concerne l'invariance de Lorentz. Cette section a pour but de présenter le lien fondamental entre symétries et lois de conservation.

1.9.1 Théorème de Noether

Ce théorème est une formulation mathématique du lien entre symétries et lois de conservation dans le cadre de la mécanique de Lagrange adaptée à la TQC.

Théorème de Noether: pour chaque **symétrie continue**, il existe un courant conservé $j^\mu(x)$ qui est tel que:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.92)$$

Notons que la conservation du courant implique la conservation d'une **charge** qui est liée à la composante temporelle du courant:

$$\boxed{Q = \frac{1}{c} \int d^3x j^0(x) = \int_{\mathcal{V}} d^3x \rho(x),} \quad (1.93)$$

où l'intégrale s'étend sur un certain volume \mathcal{V} . En effet:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{V}} d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_{\mathcal{V}} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \int_{\partial \mathcal{V}} d\vec{S} \cdot \vec{j}, \quad (1.94)$$

où $\partial \mathcal{V}$ est le bord de \mathcal{V} . Si l'on suppose, comme il est d'usage de le faire, qu'il n'y a pas de courant au bord, alors on a $\frac{dQ}{dt} = 0$ et Q est bien conservée.

L'efficacité du théorème de Noether vient du fait qu'il permet de trouver la forme du courant j^μ . Pour le montrer, revenons au cas d'un champ scalaire réel $\phi(x)$ de Lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$. Puisque nous nous intéressons à des transformations continues, il est possible de se restreindre à la forme infinitésimale d'une transformation de ϕ . Pour une transformation quelconque (nous aborderons les exemples plus bas) cette dernière peut s'écrire:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (1.95)$$

Dans le cadre de la mécanique de Lagrange, cette transformation est une **symétrie** si elle laisse \mathcal{L} invariant à une dérivée totale près: ¹⁵

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu, \quad (1.96)$$

où $F^\mu \equiv F^\mu(\phi)$ est une fonction du champ ϕ . ¹⁶ De manière générale et au premier ordre en $\delta\phi$, la transformation conduit à:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) + O(\delta\phi^2) \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) + O(\delta\phi^2). \end{aligned} \quad (1.98)$$

Si l'on suppose que l'équation du mouvement est satisfaite, le premier terme en facteur de $\delta\phi$ dans (1.98) est nul. Il vient alors:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) + O(\delta\phi^2) = \partial_\mu F^\mu, \quad (1.99)$$

d'où l'on peut déduire la forme explicite du courant conservé:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - F^\mu(\phi). \quad (1.100)$$

Insistons une nouvelle fois sur le fait que cette expression n'est valable que lorsque l'équation du mouvement est satisfaite (on dit aussi: **sur la couche de masse** ou "on-shell" en anglais). L'équation (1.100) peut par ailleurs se généraliser au cas d'un champ scalaire réel, $\phi_a(x)$ à N composantes, *i.e.*, a est un indice discret dont les valeurs vont de 1 à N :

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a - F^\mu(\phi) \quad (a = 1, \dots, N). \quad (1.101)$$

¹⁵Si l'on demandait à la transformation d'être une symétrie de \mathcal{L} , on aurait simplement $\delta\mathcal{L} = 0$. Ce que l'on demande en fait, c'est à la transformation d'être une symétrie de l'action associée à \mathcal{L} , *i.e.*, de $S = \int d^4x \mathcal{L}$. Ceci peut être réalisé même pour $\delta\mathcal{L}$ non nul à la condition qu'il s'exprime comme une dérivée totale.

¹⁶Dans le cadre d'une théorie des champs on demande que $\delta\mathcal{L}$ s'exprime comme la divergence d'un 4-vecteur F^μ . En intégrant sur tout l'espace, il vient:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \partial_\mu F^\mu = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3x F^0 + \int_{\mathcal{V}} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3x F^0 + \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{S} \cdot \vec{F}, \quad (1.97)$$

où l'intégrale de surface sur le bord du volume est nulle puisque l'on suppose que F^μ est nulle au bord. Il reste donc un terme qui correspond à une dérivée totale en temps.

1.9.2 Tenseur énergie-impulsion

Comme première application du théorème de Noether, nous souhaitons déterminer le courant conservé associée à une **translation spatio-temporelle**. De la mécanique classique, nous savons qu'à l'invariance par translation dans l'espace est associée la conservation de l'impulsion totale du système. Et à l'invariance par translation dans le temps est associée la conservation de l'énergie totale. Comme nous nous proposons de le montrer ici, dans le formalisme covariant où l'on traite espace et temps au même niveau, il est possible d'unifier les deux invariants. Dans la suite, le cas d'un champ scalaire réel de Lagrangien \mathcal{L} sera considéré. Comme précédemment, on supposera que le Lagrangien ne dépend pas explicitement de x (auquel cas il n'y aurait pas d'invariance possible). Par abus de langage nous noterons toutefois:

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)). \quad (1.102)$$

Considérons une translation spatio-temporelle homogène infinitésimale:

$$x^\nu \rightarrow (x')^\nu = x^\nu - \varepsilon^\nu, \quad (1.103)$$

où $\varepsilon^\mu \rightarrow 0$. Dans le point de vue actif, le champ scalaire se transforme comme:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x + \varepsilon) = \phi(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi(x) + O(\varepsilon^2). \quad (1.104)$$

Le Lagrangien est affecté par la transformation de la même manière puisqu'il ne dépend pas explicitement de x . En effet:

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\phi(x + \varepsilon), \partial\phi(x + \varepsilon)) \equiv \mathcal{L}(x + \varepsilon) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x), \quad (1.105)$$

donc:

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \delta^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu \partial_\mu \mathcal{L} \Rightarrow F^\mu = \delta^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu \mathcal{L}. \quad (1.106)$$

Nous pouvons maintenant utiliser (1.100) (ou (1.101) avec $a = 1$) pour en déduire le courant conservé:

$$j^\mu = \varepsilon^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi(x) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right), \quad (1.107)$$

où l'on a factorisé ε^ν . Il est commode d'exprimer ce courant sous la forme $j^\mu = \varepsilon^\nu (j^\mu)_\nu$ avec:

$$(j^\mu)_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi(x) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \equiv T^\mu{}_\nu, \quad (1.108)$$

qui fait apparaître le tenseur énergie-impulsion $T^\mu{}_\nu$. Notons que les quatre valeurs prises par ν correspondent aux quatre quantités conservées: l'énergie totale du champ, E , et les trois composantes de l'impulsion totale du champ, P^i ($i = 1, 2, 3$). En effet, on a bien:

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \quad (1.109)$$

et les quatre "charges" conservées sont:

$$E = \int d^3x T^{00}, \quad P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.110)$$

Appliquons les résultats ci-dessus au cas d'un champ de Klein-Gordon (1.68). Le tenseur énergie-impulsion est donné par:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.111)$$

et prend d'emblée une forme symétrique (ce qui n'est pas toujours le cas): $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. On en déduit alors que:

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \right), \quad (1.112a)$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi. \quad (1.112b)$$

1.9.3 Symétries internes

D'importance cruciale en physique est la notion de symétrie interne. Contrairement aux cas abordés dans les paragraphes précédents, ces symétries ne sont pas liées à des transformations de l'espace et du temps. Elles ont donc une **nature non-géométrique**. C'est ce type de symétrie qui conduit par exemple à la conservation de la charge électrique. Notons aussi que ces symétries sont liées à des transformations **globales** (on parle aussi de symétrie globale) où le.s paramètre.s de la transformation ne dépendent pas des coordonnées de l'espace-temps. ¹⁷

Afin d'illustrer la notion de symétrie interne, nous allons reconsidérer l'exemple du champ scalaire complexe de Lagrangien (1.77). Il existe une symétrie supplémentaire de (1.77) par rapport à son analogue réel (1.68). Considérons la transformation:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^*, \quad (1.113)$$

qui est une transformation continue caractérisée par une simple phase globale (transformation dite U(1)). Le Lagrangien (1.77) est invariant sous cette transformation qui n'est pas de nature géométrique. Pour mieux l'apprécier, il est instructif de la réécrire en terme des champs réels. On voit alors que la transformation correspondante mélange les composantes réelles:

$$\phi'_1 = \cos(\alpha) \phi_1 - \sin(\alpha) \phi_2, \quad \phi'_2 = \sin(\alpha) \phi_1 + \cos(\alpha) \phi_2. \quad (1.114)$$

Cette transformation est donc une rotation à 2 dimensions, non pas dans l'espace ordinaire, mais dans l'espace des composantes (ϕ_1, ϕ_2) qui correspond à l'**espace des degrés de liberté internes du champ**. Etant orthogonale et de déterminant 1, on peut la noter SO(2). A l'invariance de \mathcal{L} sous cette transformation particulière est associée une loi de conservation dont le courant est donné par:

$$j^\mu = -i \left(\phi^* (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^*) \phi \right). \quad (1.115)$$

Comme on le verra plus tard, la quantité conservée est la charge électrique. Notons par ailleurs que si le champ ϕ est associé à une charge e , on peut montrer que le

¹⁷Il existe des transformations **locales**. C'est le cas de la transformation de jauge où le paramètre de la transformation dépend de x , i.e., $\lambda \equiv \lambda(x)$, voir (1.85).

champ ϕ^* est associé à une charge $-e$. Un champ réel est associé à une charge nulle, *i.e.*, il ne possède pas ce degré de liberté interne.

Nous pouvons nous placer dans le cadre plus général d'un champ scalaire réel $\phi_a(x)$ à N composantes ($a = 1, \dots, N$). L'espace des degrés de liberté interne est alors de dimension N et l'on peut considérer des transformations orthogonales qui mélangent les N composantes:

$$\phi_a = R_a^b \phi_b, \quad (1.116)$$

où R est une matrice de rotation de dimension $N \times N$. Un Lagrangien invariant sous une telle transformation aurait une symétrie $SO(N)$. Notons que pour $N \geq 3$, cette transformation est non-abélienne.

1.10 Formalisme de Hamilton

Pour conclure ce Chapitre, le passage du Lagrangien au Hamiltonien dans le cas d'un champ ϕ en $(3+1)$ -dimensions s'obtient aisément par analogie à (1.19):

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (1.117)$$

où $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\pi, \phi, \partial\phi, x)$ est la densité d'Hamiltonien et $\pi(x)$ le moment canoniquement conjugué au champ $\phi(x, t)$. Remarquons qu'il est possible de définir une grandeur plus générale:

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}. \quad (1.118)$$

Le moment conjugué est donc lié à la composante temporelle de π^μ :¹⁸

$$\pi(x) = \frac{1}{c} \pi^0(x). \quad (1.119)$$

C'est précisément cette définition du moment conjugué qui introduit une dissymétrie entre l'espace et le temps dans le formalisme de Hamilton.

Pour un champ scalaire à N composantes, les formules ci-dessus se généralisent simplement en:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \sum_{a=1}^N \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}, \quad \pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}. \quad (1.120)$$

On a aussi:

$$\pi_a^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)}, \quad \pi_a(x) = \frac{1}{c} \pi_a^0(x). \quad (1.121)$$

Appliquons les résultats ci-dessus au cas d'un champ de Klein-Gordon (1.68). Le moment conjugué est donné par:

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}. \quad (1.122)$$

¹⁸Notons que les composantes spatiales, π^i , n'ont rien à voir avec l'impulsion totale du champ P^i ($i = 1, 2, 3$).

La densité de Hamiltonien est donnée par:

$$\mathcal{H} = \frac{c^2}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2, \quad (1.123)$$

qui est en accord avec l'expression de l'énergie totale (1.112a) obtenue au moyen du théorème de Noether. On remarque d'ailleurs que (1.123) n'est visiblement pas invariant de Lorentz même s'il provient d'un Lagrangien qui l'est. Comme anticipé plus haut, ceci est normal puisque le formalisme de Hamilton ne place pas le temps et l'espace à pied d'égalité. La physique reste cependant bien invariante de Lorentz.

Le formalisme de Hamilton est à la base de la quantification canonique que nous aborderons au prochain chapitre. ¹⁹

1.11 Bilan du cours

- il est important de garder à l'esprit que tous les modèles qui ont été présentés dans ce cours sont classiques. Toute ressemblance avec des équations de la mécanique quantique ondulatoire ne saurait être que fortuite.
- il est important de comprendre les bases de l'utilisation des symétries (localité et invariance de Lorentz) pour construire un Lagrangien.
- il faut avoir présent à l'esprit le fait qu'il existe d'une part des symétries liées à l'espace-temps (rotations et translations) et d'autre part des symétries dites internes (non-géométriques).
- il faut connaître le lien entre symétrie et loi de conservation et sa formulation en mécanique de Lagrange via le théorème de Noether.
- il faut savoir retrouver (1.100).
- par construction, le formalisme de Hamilton introduit une dissymétrie entre espace et temps même pour un modèle invariant de Lorentz. La physique reste cependant bien invariante de Lorentz.

1.12 Références

- [14], Chapitre 1.
- Pour aller plus loin: [4] et [5].

¹⁹Notons que le formalisme de Lagrange est quant à lui à la base de la quantification par intégrale fonctionnelle. Nous ne l'aborderons pas dans ce cours.

1.12.1 Petits exercices

1. Retrouver (1.100) et (1.108)
2. Retrouver les équations (1.112).
3. Retrouver (1.122) et (1.123).
4. Discuter l'invariance de jauge du Lagrangien de Maxwell couplé à des charges (le courant j^μ n'est pas dynamique dans le sens où le Lagrangien propre aux charges n'est pas donné):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu . \quad (1.124)$$

Chapter 2

Quantification d'un champ scalaire

2.1 L'équation de Klein-Gordon: démarche historique

Nous avons déjà évoqué dans l'Introduction qu'historiquement l'unification de la mécanique quantique et de la relativité restreinte avait débuté par la recherche d'une équation d'onde quantique relativiste. Nous avons aussi indiqué que cette équation à une particule ne permet pas de décrire le régime quantique relativiste caractérisé par la création de paires. Et donc qu'une mécanique quantique relativiste est une impasse. Il est toutefois instructif de reprendre les arguments historiques afin de mettre en valeur les difficultés conceptuelles auxquels ils conduisent. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette section.

Considérons tout d'abord le cas non-relativiste d'une particule libre de masse m . Son Hamiltonien classique est donné par: $H_{\text{NR}} = p^2/(2m)$. Le principe de correspondance (**première quantification**) stipule alors que le passage à la mécanique quantique se fait en élevant les variables dynamiques au rang d'opérateurs agissant dans un espace des états. Dans le point de vue position, on a ainsi:

$$H \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (2.1)$$

L'équation aux valeurs propres de H : $H\psi = E\psi$ prend alors la forme de l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t), \quad (2.2)$$

où l'on reconnaît la fonction d'onde $\psi(\vec{x}, t)$ décrivant l'état du système quantique. Cette dernière admet une interprétation probabiliste. On peut ainsi définir:

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t), \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*), \quad (2.3)$$

qui correspondent respectivement à une densité de probabilité et à un courant de probabilité.

Chapter 3

Quantification du champ de Dirac

Jusqu'à présent, nous avons considéré des champs scalaires dont la quantification conduit à des particules de spin 0 (bosons). Dans ce chapitre, nous allons aborder la description des particules de spin 1/2 (les fermions).

3.1 L'équation de Dirac: démarche historique

Tout comme nous l'avons fait pour l'équation de Klein-Gordon au début du Chapitre 2, il est très instructif de commencer ce Chapitre en exposant la démarche historique ayant conduit à l'équation de Dirac. Nous allons donc suivre Dirac (1928) dans sa construction d'une équation d'onde relativiste décrivant une particule de spin 1/2. Nous reviendrons ensuite au point de vue moderne consistant à interpréter cette équation comme une équation classique pour un champ très particulier (un champ de spineur) qu'il faudra quantifier.

Rappelons qu'au niveau de l'équation de Klein-Gordon, l'impossibilité d'attribuer au champ scalaire ϕ une interprétation probabiliste était lié au fait que cette équation est du second ordre en temps. Dans un coup de génie, Dirac a supposé que l'équation tant recherchée devait être de la forme:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta mc^2 \psi \equiv H\psi,$$

et il a proposé de considérer cette équation comme étant une équation **matricielle** où:

- ψ est un **vecteur** colonne à N composantes,
- α_i ($i = 1, 2, 3$) et β sont des **matrices** $N \times N$ hermitiques (puisque H est une observable).

En explicitant les composantes, l'équation (3.1) s'écrit:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial t} = -i\hbar c \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right)_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'} + mc^2 \beta_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'} \quad (\sigma, \sigma' = 1, \dots, N), \quad (3.1)$$

¹A l'heure actuelle, il n'existe qu'une seule particule élémentaire scalaire: le boson de Higgs.

Chapter 4

Champs en interaction

Jusqu'à présent, nous avons presque exclusivement considéré des champs quantiques libres. Ces derniers se caractérisent par une action quadratique en les champs et des équations du mouvement linéaires que l'on peut aisément résoudre. Que ce soit pour le champ scalaire ou le champ de Dirac, le cas libre correspond en effet à une infinité d'oscillateurs harmoniques découplés et est donc diagonalisable exactement. Nous avons d'ailleurs déduit l'existence des particules du spectre des champs libres: elles correspondent aux excitations du champ. Dans le cas libre, le nombre de particules est conservé.

Une description plus réaliste du monde qui nous entoure nous conduit naturellement à inclure des interactions entre particules. Afin de préserver la causalité de notre théorie, ces interactions prennent la forme de produits locaux de plus de deux champs au même point de l'espace temps. Elles conduisent à des termes non-linéaires au niveau des équations du mouvement qui couplent les différents modes de Fourier. Dans la vaste majorité des cas, il est impossible de résoudre le modèle en interaction exactement et l'on doit avoir recours à des méthodes d'approximation.

La méthode la plus utilisée est la théorie des perturbations qui suppose que l'interaction est suffisamment faible pour ne pas trop perturber le système. Le formalisme perturbatif se construit alors sur la base d'une théorie libre et a pour but de tenir compte de manière systématique de l'effet des interactions au voisinage de la théorie libre. Ainsi, pour un modèle caractérisé par une constante de couplage sans dimension g , une observable physique \mathcal{O} pourra s'écrire:

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g^n = c_0 + c_1 g + c_2 g^2 + \dots \quad (4.1)$$

où les coefficients c_i sont à évaluer ordre par ordre. L'approche perturbative consiste à évaluer l'observable en ne tenant compte que des premières corrections par rapport au cas libre (en pratique le calcul de c_1 et c_2). Dans bien des cas, le défi calculatoire devient colossal en théorie quantique des champs dès l'ordre 3 ou 4.¹ L'approche est a priori justifiée dans la limite $g \ll 1$ où les ordres supérieurs sont négligeables. La nature de la série perturbative (4.1) est toutefois complexe: c'est dans la grande

¹A l'heure actuelle, les calculs les plus avancés concernent le modèle ϕ^4 à l'ordre 7.

Bibliography

- [1] James D. Bjorken, Sidney David Drell, *Relativistic quantum mechanics*, International series in pure and applied physics, McGraw-Hill (1964).
- [2] James D. Bjorken, Sidney David Drell, *Relativistic quantum fields*, International series in pure and applied physics, McGraw-Hill (1965).
- [3] N. N. Bogolyubov and D. V. Shirkov, “Introduction To The Theory Of Quantized Fields,” Intersci. Monogr. Phys. Astron. **3** (1959) 1.
- [4] Sidney Coleman, *Notes from Sidney Coleman’s Physics 253a*, arXiv:1110.5013 [physics.ed-ph]
<https://arxiv.org/abs/1110.5013>
- [5] Sidney Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser*, B. G. Chen, D. Derbes, D. Griffiths, B. Hill, R. Sohn and Y. S. Ting, World Scientific Publishing (2018).
- [6] Sidney Coleman, *Physics 253a*, vidéos de 1975 disponibles sur:
<https://www.youtube.com/watch?v=IRDpW7QOyGw>
- [7] Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Books on Physics, Courier Corporation (2012).
- [8] John D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley India Pvt. Limited (2007).
- [9] Lev Landau et Evguéni Lifchitz, *Vol. 2, Théorie des Champs*, Editions Mir (1989).
- [10] Lev Landau et Evguéni Lifchitz, *Vol. 4, Electrodynamique Quantique*, Editions Mir (1989).
- [11] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Frontiers in Physics, Avalon Publishing (1995).
- [12] Lewis Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
- [13] Jun John Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Pearson (1967).
- [14] David Tong, *Lectures on Quantum Field Theory*, Université de Cambridge (2006).
Notes de cours + vidéos disponibles sur: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>
- [15] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1*, Cambridge University Press (1995).
- [16] Anthony Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press (2010).