Le Point avec un sextant.

Michel Talon

Février 2018

1 Géométrie sphérique.

On suppose connues les formules usuelles de trigonométrie plane élémentaire, et on va déduire les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.

1.1 Relations fondamentales.

On assimile la Terre à une sphère de rayon 6371 km. Elle tourne autour d'un axe NS à la vitesse d'un tour par 24 h, soit 15° par heure (et donc 15' par minute). Pour les calculs relatifs au sextant, trois points à la surface de la Terre sont en cause : le pôle N (ou S), la position supposée de l'observateur, et le "pied" de l'astre observé, c'est à dire l'intersection de la ligne qui joint le centre de la Terre avec le centre de l'astre, et la surface de la Terre. Ce qui nous amène à l'étude des triangles sphériques. Soient A, B, C trois points sur la sphère et O son centre. La "droite" joignant A à B est le plus court chemin à la surface de la sphère joignant ces deux points. C'est en fait l'arc de grand cercle entre A et B, celui ci étant l'intersection de la sphère avec le plan OAB, sur lequel on choisit l'arc le plus court. Le triangle sphérique est donc formé par trois arcs de grand cercle, $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$.

A ce triangle sont attachées deux séries de nombres a, b, c et α, β, γ. Les longueurs : a est la longueur du coté $\overset{\frown}{BC}$, idem b pour $\overset{\frown}{CA}$ et c pour$\overset{\frown}{AB}$. En fait ces longueurs sont mesurées par des angles, car considérant le "triangle" OAB, l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur le produit du rayon de la sphère par l'angle au centre (OA,OB). Dans notre cas on mesure les distances en mille marins. Un mille est la distance sous tendue par un angle au centre de 1 minute, c'est à dire :

$$\pi \times 6371/(180 \times 60) \simeq 1852\text{m}$$

La distance est donc directement exprimée par les angles au centre. Dans la suite on raisonne donc sur une sphère de rayon 1.

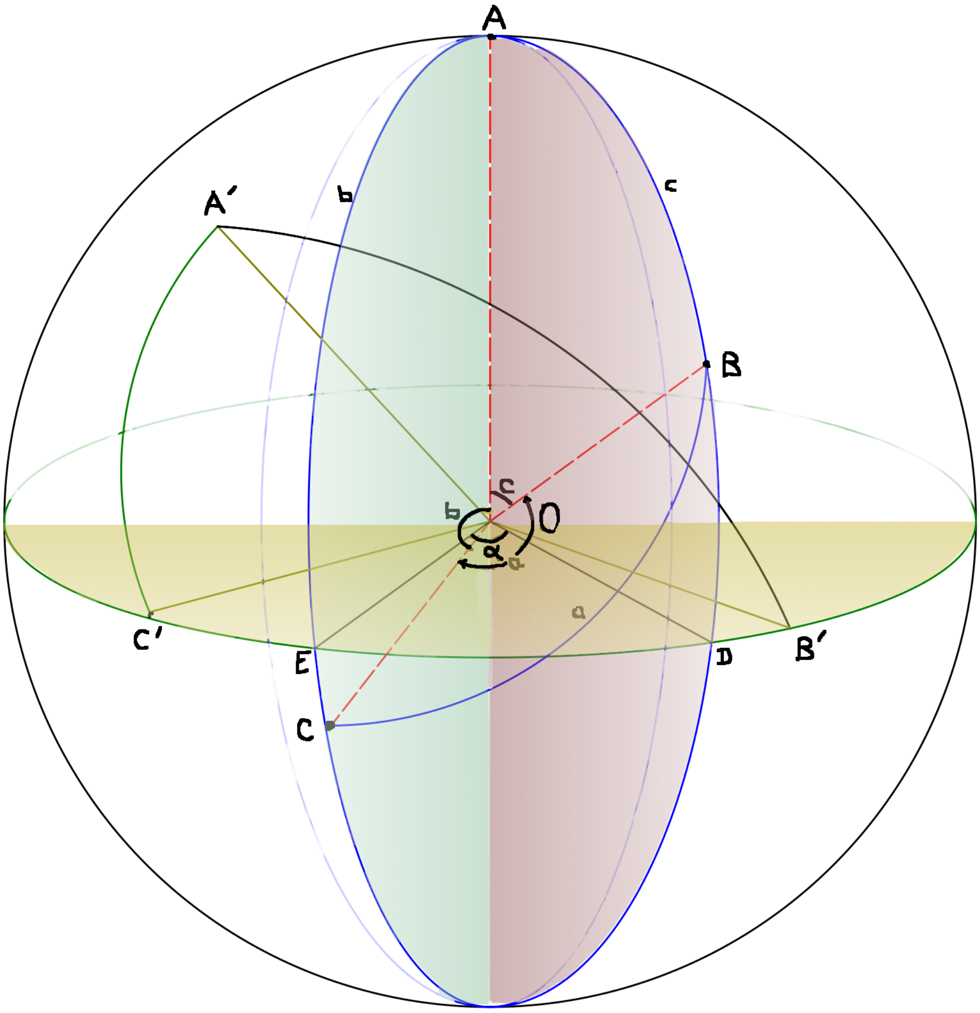
On définit l'angle α entre les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ comme l'angle formé par les tangentes respectives en A aux arcs AB et AC. Comme ces tangentes sont perpendiculaires à OA et respectivement dans les plans OAB et OAC, c'est aussi l'angle formé par ces deux plans, et donc par les traces de ces deux plans sur le plan perpendiculaire à OA en O. Sur le dessin α est l'angle entre les traces OD et OE. Idem pour les angles β (entre BA et BC en B) et γ (entre CA et CB en C).

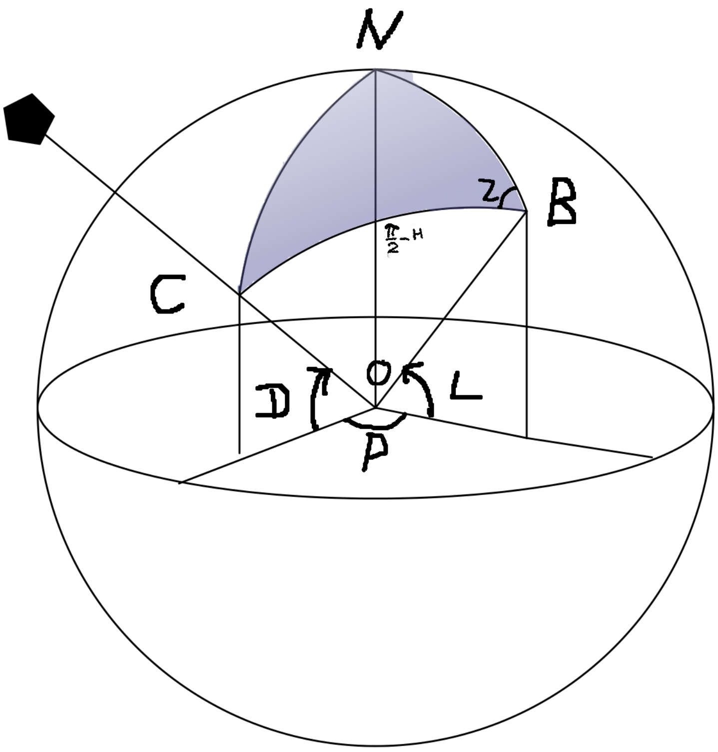
Comme la sphère est symétrique par rotation on peut toujours représenter A au pôle Nord, donc le plan perpendiculaire à OA en O est le plan équatorial. Le grand cercle AB le coupe en D, et le grand cercle AC le coupe en E. On peut toujours choisir un repère orthonormé Oz selon OA, et Ox selon OD, dans le plan OAB. On aura alors Oy dans le plan équatorial, on peut le choisir, comme sur le dessin selon OC' (alors Oxyz n'est pas direct, mais celà ne nous importe pas). Dans ce repère on a $A = (0,0,1)$ et $B = (\sin c, 0, \cos c)$. Le point C se projette sur OE en $\sin b$ et sur OA en $\cos b$. L'angle (OE,OD) étant α, C a pour coordonnées $C = (\sin b \cos\alpha, \sin b \sin\alpha, \cos b)$. Alors le produit scalaire vaut :

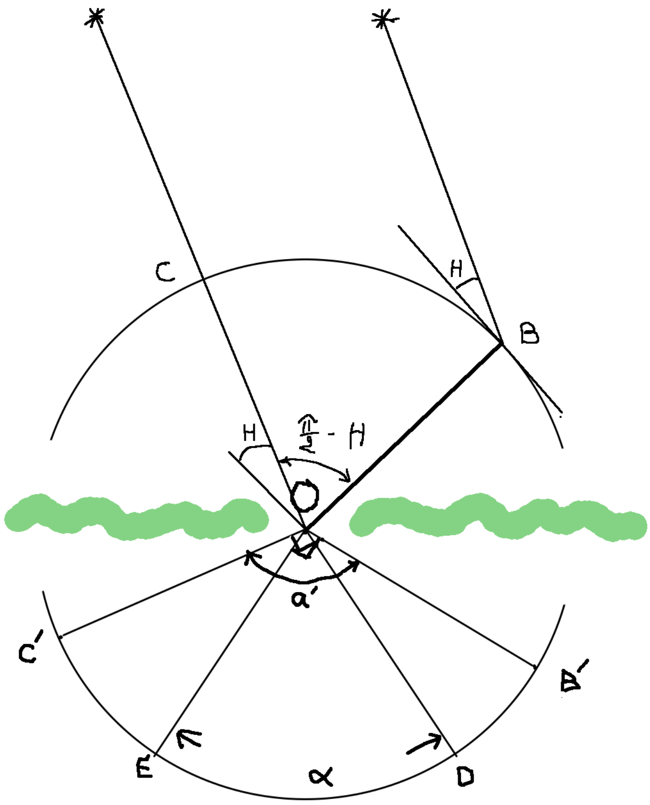
$$\left(\vec{OB}, \vec{OC}\right) = \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

Par symétrie on a les trois relations qui sont les seules relations indispensables pour l'application au calcul du point nautique :

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma
\end{aligned}$$







$$\alpha + a' = \pi$$

1.2 Deuxième et troisième formule fondamentale.

On va néanmoins déduire d'autres relations de géométrie sphérique. Définissons d'abord le triangle dual au triangle ABC. Le point A' est défini de sorte que OA' est perpendiculaire à OB et OC et est choisi dans le même demi–espace que A déterminé par le plan OBC. De même B' est polaire part rapport OCA et C' par rapport à OAB. En particulier OB' et OC' sont perpendiculaires à OA donc B' et C' sont sur l'équateur sur le dessin. Comme OC' et perpendiculaire à OD il complète bien le trièdre (ODC'A) utilisé ci-dessus.

La notion de dualité est involutive, c'est à dire que le triangle ABC est le dual de A'B'C'. En effet OA est perpendiculaire à OB' et OC' et A est du même coté que A' par rapport à l'équateur. Idem pour OB et OC. Au triangle A'B'C' sont attachées deux séries de nombres a', b', c' et α', β', γ', définis comme ci-dessus. Cependant il existe des relations simples entre eux. Sur le dessin on voit que

$$\alpha + a' = \widehat{\mathrm{C'D}} + \widehat{\mathrm{EB'}} = \pi$$

et donc par dualité $\alpha' + a = \pi$. Finalement par symétrie on a toutes les relations :

$$\alpha + a' = \alpha' + a = \beta + b' = \beta' + b = \gamma + c' = \gamma' + c = \pi$$

.

Notons que le produit scalaire (OC,OC') vaut dans le système de coordonnées ci-dessus, avec le point $C' = (0,1,0)$, $\left(\vec{OC},\vec{OC'}\right) = \sin b \sin \alpha$. Par dualité il vaut aussi $\sin b' \sin \alpha' = \sin\beta \sin a$ en appliquant $b' = \pi - \beta$ etc. Donc on trouve $\sin b \sin \alpha = \sin\beta \sin a$ et par symétrie on a la relation des sinus :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

Enfin on peut appliquer la relation des cosinus au triangle A'B'C' $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha'$ ce qui en remplaçant $a' = \pi - \alpha$ etc. donne $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$. Par symétrie on a les relations des cosinus entre les angles :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \\
\cos\beta &= -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b \\
\cos\gamma &= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c
\end{aligned}$$

1.3 Relation des cotangentes.

Par les relations des cosinus sur les cotés on a $\sin c \cos\beta = (\cos b - \cos a \cos c)/\sin a$. On remplace $\cos b$ par $(\sin^2 a + \cos^2 a)\cos b$ ce qui donne $\sin a \cos b + \cot a(\cos a \cos b - \cos c)$. Utilisant encore la relation des cosinus pour transformer la dernière parenthèse en $-\sin a \sin b \cos\gamma$ on obtient : $\sin c \cos\beta = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos\gamma$. Par dualité on obtient : $\cos b \sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \cos c$. On divise par $\sin\beta$ pour obtenir la relation des cotangentes :

$$\sin c \cot b = \sin\alpha \cot\beta + \cos a \cos c$$

et bien sûr les relations obtenues par permutation de A,B,C.

1.4 Haversines.

Ce qui suit n'a d'intérêt que si on envisage de faire les calculs à la main.

Les formules de cosinus nécessitent d'effectuer 4 multiplications à 4 chiffres (c'est la précision requise), aussi pour les calculs manuels il a été jugé utile d'introduire des quantités qui se tabulent en peu de place et nécessitent moins d'opérations. En outre elles souffrent moins de problèmes d'arrondis. On définit l'haversine :

$$\mathrm{hav}\,\theta = (1-\cos\theta)/2 = \sin^2(\theta/2)$$

Noter que $\mathrm{hav}\theta$ est toujours compris entre 0 et 1 et est une fonction paire. Dans la table de haversines jointe on trouve par exemple en regard de 37° 22' la valeur 1026, qu'il faut lire .1026. Pour 23' il faut interpoler entre 1026 et 1028 (pour 24') donc on prend .1027. On voit qu'il est aisé d'obtenir 4 chiffres significatifs. Attention pour les petits angles on a des valeurs comme 1 pour les angles 0° 0' jusqu'à 22' ce qu'il faut lire comme .0001, bien sûr. Pour les petits angles hav varie en $(\theta)^2$ donc reste longtemps très petit.

On peut reformuler la relation des cosinus en termes de haversines comme l'a fait R. Doniol (Table de point miniature, Institut français de navigation 1955). On verra que dans le domaine nautique les angles utilisés sont complémentaires de ceux que nous utilisons, et la relation de cosinus prend la forme :

$$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P$$

et il s'agit de calculer H connaissant L, D et P. On utilise $\cos(L \mp D) = \cos L \cos D \pm \sin L \sin D$ donc

$$\sin H = \cos(L-D) - (\cos(L-D) + \cos(L+D))\,\mathrm{hav}\,P$$

Il a été observé par Hanno Ix qu'on peut tout exprimer sur des haversines en calculant $\hat{H} = \pi/2 - H$ de sorte que $\sin H = \cos\hat{H}$. Simplement on remplace $\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{hav}\,\theta$ partout. Finalement :

$$\mathrm{hav}\,\hat{H} = \mathrm{hav}(L-D) + \Big(1 - \mathrm{hav}(L-D) - \mathrm{hav}(L+D)\Big) \times \mathrm{hav}\,P$$

Il existe une autre formule utile au calcul du point qui s'exprime aussi entièrement avec des haversines (formule de l'azimut, due à L. Bergman, voir plus bas) :

$$\mathrm{hav}\,Z = \frac{\mathrm{hav}(\pi/2 - D) - \mathrm{hav}(L-H)}{1 - \mathrm{hav}(L-H) - \mathrm{hav}(L+H)}$$

min \ deg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
0	0	1	3	7	12	19	27	37	49	62	76	92	109	128	149	170	194	218	245	272	302	332	364	397	432	468	506	545	585	627	670	714	760	807	855	904	955	1007	1060	1114	1170	1226	1284	1343	1403
2	0	1	3	7	12	19	28	38	49	62	76	92	110	129	149	171	194	219	246	273	303	333	365	399	433	470	507	546	587	628	671	716	761	808	856	906	957	1009	1062	1116	1172	1228	1286	1345	1405
4	0	1	3	7	13	20	28	38	49	62	77	93	110	129	150	172	195	220	247	274	304	334	366	400	435	471	509	548	588	630	673	717	763	810	858	908	958	1010	1064	1118	1174	1230	1288	1347	1407
6	0	1	3	7	13	20	28	38	50	63	77	94	111	130	151	173	196	221	247	275	305	335	367	401	436	472	510	549	589	631	674	719	764	811	860	909	960	1012	1065	1120	1175	1232	1290	1349	1409
8	0	1	3	7	13	20	29	39	50	63	78	94	112	131	151	173	197	222	248	276	306	336	368	402	437	473	511	550	591	633	676	720	766	813	861	911	962	1014	1067	1122	1177	1234	1292	1351	1411
10	0	1	4	8	13	20	29	39	51	64	79	95	112	131	152	174	198	223	249	277	307	337	370	403	438	475	512	552	592	634	677	722	767	815	863	913	963	1016	1069	1123	1179	1236	1294	1353	1413
12	0	1	4	8	13	21	29	39	51	64	79	95	113	132	153	175	199	224	250	278	308	338	371	404	439	476	514	553	593	635	679	723	769	816	865	914	965	1017	1071	1125	1181	1238	1296	1355	1415
14	0	1	4	8	14	21	30	40	52	65	80	96	114	133	153	176	199	224	251	279	309	339	372	405	441	477	515	554	595	637	680	725	771	818	866	916	967	1019	1073	1127	1183	1240	1298	1357	1417
16	0	1	4	8	14	21	30	40	52	65	80	96	114	133	154	176	200	225	252	280	310	340	373	407	442	478	516	556	596	638	682	726	772	819	868	918	969	1021	1074	1129	1185	1242	1300	1359	1420
18	0	1	4	8	14	21	30	41	52	66	81	97	115	134	155	177	201	226	253	281	311	342	374	408	443	480	518	557	598	640	683	728	774	821	870	919	970	1023	1076	1131	1187	1244	1302	1361	1422
20	0	1	4	8	14	22	31	41	53	66	81	97	115	135	156	178	202	227	254	282	312	343	375	409	444	481	519	558	599	641	684	729	775	823	871	921	972	1024	1078	1133	1189	1246	1304	1363	1424
22	0	1	4	9	15	22	31	41	53	67	82	98	116	135	156	179	203	228	255	283	313	344	376	410	445	482	520	560	600	643	686	731	777	824	873	923	974	1026	1080	1134	1190	1248	1306	1365	1426
24	0	1	4	9	15	22	31	42	54	67	82	99	117	136	157	180	203	229	256	284	314	345	377	411	447	483	521	561	602	644	687	732	778	826	874	924	976	1028	1082	1136	1192	1249	1308	1367	1428
26	0	2	5	9	15	22	31	42	54	68	83	99	117	137	158	180	204	230	257	285	315	346	378	412	448	485	523	562	603	645	689	734	780	827	876	926	977	1030	1083	1138	1194	1251	1310	1369	1430
28	0	2	5	9	15	23	32	42	54	68	83	100	118	137	159	181	205	231	257	286	316	347	379	414	449	486	524	564	605	647	690	735	781	829	878	928	979	1031	1085	1140	1196	1253	1312	1371	1432
30	0	2	5	9	15	23	32	43	55	69	84	100	119	138	159	182	206	231	258	287	317	348	381	415	450	487	525	565	606	648	692	737	783	831	879	929	981	1033	1087	1142	1198	1255	1314	1373	1434
32	0	2	5	10	16	23	32	43	55	69	84	101	119	139	160	183	207	232	259	288	318	349	382	416	451	488	527	566	607	650	693	738	785	832	881	931	982	1035	1089	1144	1200	1257	1316	1375	1436
34	0	2	5	10	16	24	33	44	56	70	85	102	120	140	161	183	208	233	260	289	319	350	383	417	453	490	528	568	609	651	695	740	786	834	883	933	984	1037	1091	1146	1202	1259	1318	1377	1438
36	0	2	5	10	16	24	33	44	56	70	85	102	120	140	161	184	208	234	261	290	320	351	384	418	454	491	529	569	610	653	696	741	788	835	884	934	986	1039	1092	1147	1204	1261	1320	1379	1440
38	0	2	5	10	16	24	33	44	57	71	86	103	121	141	162	185	209	235	262	291	321	352	385	419	455	492	531	570	611	654	698	743	789	837	886	936	988	1040	1094	1149	1206	1263	1321	1381	1442
40	0	2	5	10	17	24	34	45	57	71	86	103	122	142	163	186	210	236	263	292	322	353	386	421	456	493	532	572	613	655	699	744	791	839	888	938	989	1042	1096	1151	1207	1265	1323	1383	1444
42	0	2	6	10	17	25	34	45	58	71	87	104	122	142	164	187	211	237	264	293	323	354	387	422	457	495	533	573	614	657	701	746	792	840	889	940	991	1044	1098	1153	1209	1267	1325	1385	1446
44	0	2	6	11	17	25	34	45	58	72	87	104	123	143	164	187	212	238	265	294	324	355	388	423	459	496	534	574	616	658	702	747	794	842	891	941	993	1046	1100	1155	1211	1269	1327	1387	1448
46	0	2	6	11	17	25	35	46	58	72	88	105	124	144	165	188	213	238	266	295	325	356	390	424	460	497	536	576	617	660	704	749	796	843	893	943	995	1047	1101	1157	1213	1271	1329	1389	1450
48	0	2	6	11	18	26	35	46	59	73	89	106	124	144	166	189	213	239	267	296	326	358	391	425	461	498	537	577	618	661	705	751	797	845	894	945	996	1049	1103	1159	1215	1273	1331	1391	1452
50	1	3	6	11	18	26	36	47	59	73	89	106	125	145	167	190	214	240	268	297	327	359	392	426	462	500	538	578	620	663	707	752	799	847	896	946	998	1051	1105	1160	1217	1275	1333	1393	1454
52	1	3	6	11	18	26	36	47	60	74	90	107	126	146	167	190	215	241	269	298	328	360	393	428	464	501	540	580	621	664	708	754	800	848	898	948	1000	1053	1107	1162	1219	1277	1335	1395	1456
54	1	3	6	12	18	26	36	47	60	74	90	107	126	146	168	191	216	242	270	299	329	361	394	429	465	502	541	581	623	666	710	755	802	850	899	950	1002	1055	1109	1164	1221	1278	1337	1397	1458
56	1	3	7	12	19	27	37	48	61	75	91	108	127	147	169	192	217	243	271	300	330	362	395	430	466	503	542	583	624	667	711	757	803	852	901	951	1003	1056	1111	1166	1223	1280	1339	1399	1460
58	1	3	7	12	19	27	37	48	61	75	91	109	127	148	170	193	218	244	271	301	331	363	396	431	467	505	544	584	625	668	713	758	805	853	903	953	1005	1058	1112	1168	1225	1282	1341	1401	1462
60	1	3	7	12	19	27	37	49	62	76	92	109	128	149	170	194	218	245	272	302	332	364	397	432	468	506	545	585	627	670	714	760	807	855	904	955	1007	1060	1114	1170	1226	1284	1343	1403	1464

min \ deg	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0	1464	1527	1590	1654	1720	1786	1853	1922	1991	2061	2132	2204	2277	2350	2425	2500	2576	2653	2730	2808	2887	2966	3046	3127	3208	3290	3372	3455	3538	3622	3706	3790	3875	3960	4046	4132	4218	4304	4391	4477	4564	4651	4738	4826	4913
2	1467	1529	1592	1657	1722	1788	1856	1924	1993	2063	2135	2206	2279	2353	2427	2503	2578	2655	2733	2811	2890	2969	3049	3130	3211	3293	3375	3458	3541	3625	3709	3793	3878	3963	4049	4135	4221	4307	4394	4480	4567	4654	4741	4828	4916
4	1469	1531	1594	1659	1724	1791	1858	1926	1996	2066	2137	2209	2282	2355	2430	2505	2581	2658	2735	2813	2892	2972	3052	3132	3214	3295	3378	3460	3544	3627	3712	3796	3881	3966	4052	4137	4224	4310	4396	4483	4570	4657	4744	4831	4919
6	1471	1533	1596	1661	1726	1793	1860	1929	1998	2068	2139	2211	2284	2358	2432	2508	2584	2660	2738	2816	2895	2974	3054	3135	3216	3298	3380	3463	3546	3630	3714	3799	3884	3969	4055	4140	4226	4313	4399	4486	4573	4660	4747	4834	4921
8	1473	1535	1599	1663	1728	1795	1862	1931	2000	2070	2142	2214	2287	2360	2435	2510	2586	2663	2740	2819	2897	2977	3057	3138	3219	3301	3383	3466	3549	3633	3717	3802	3887	3972	4057	4143	4229	4316	4402	4489	4576	4663	4750	4837	4924
10	1475	1537	1601	1665	1731	1797	1865	1933	2003	2073	2144	2216	2289	2363	2437	2513	2589	2665	2743	2821	2900	2980	3060	3140	3222	3304	3386	3469	3552	3636	3720	3805	3889	3975	4060	4146	4232	4319	4405	4492	4579	4666	4753	4840	4927
12	1477	1539	1603	1667	1733	1799	1867	1935	2005	2075	2146	2219	2291	2365	2440	2515	2591	2668	2746	2824	2903	2982	3062	3143	3224	3306	3389	3472	3555	3639	3723	3807	3892	3978	4063	4149	4235	4321	4408	4495	4582	4669	4756	4843	4930
14	1479	1541	1605	1670	1735	1802	1869	1938	2007	2078	2149	2221	2294	2368	2442	2518	2594	2671	2748	2826	2905	2985	3065	3146	3227	3309	3391	3474	3558	3641	3726	3810	3895	3980	4066	4152	4238	4324	4411	4498	4585	4672	4759	4846	4933
16	1481	1543	1607	1672	1737	1804	1872	1940	2010	2080	2151	2223	2296	2370	2445	2520	2596	2673	2751	2829	2908	2988	3068	3149	3230	3312	3394	3477	3560	3644	3728	3813	3898	3983	4069	4155	4241	4327	4414	4501	4587	4674	4762	4849	4936
18	1483	1546	1609	1674	1740	1806	1874	1942	2012	2082	2154	2226	2299	2373	2447	2523	2599	2676	2753	2832	2911	2990	3070	3151	3233	3315	3397	3480	3563	3647	3731	3816	3901	3986	4072	4158	4244	4330	4417	4503	4590	4677	4764	4852	4939
20	1485	1548	1611	1676	1742	1808	1876	1945	2014	2085	2156	2228	2301	2375	2450	2525	2601	2678	2756	2834	2913	2993	3073	3154	3235	3317	3400	3483	3566	3650	3734	3819	3904	3989	4075	4160	4247	4333	4420	4506	4593	4680	4767	4855	4942
22	1487	1550	1613	1678	1744	1811	1878	1947	2017	2087	2158	2231	2304	2378	2452	2528	2604	2681	2759	2837	2916	2996	3076	3157	3238	3320	3402	3485	3569	3653	3737	3821	3906	3992	4077	4163	4249	4336	4422	4509	4596	4683	4770	4857	4945
24	1489	1552	1616	1680	1746	1813	1881	1949	2019	2089	2161	2233	2306	2380	2455	2530	2607	2684	2761	2840	2919	2998	3079	3159	3241	3323	3405	3488	3572	3655	3740	3824	3909	3995	4080	4166	4252	4339	4425	4512	4599	4686	4773	4860	4948
26	1491	1554	1618	1683	1748	1815	1883	1952	2021	2092	2163	2235	2309	2383	2457	2533	2609	2686	2764	2842	2921	3001	3081	3162	3244	3325	3408	3491	3574	3658	3742	3827	3912	3997	4083	4169	4255	4342	4428	4515	4602	4689	4776	4863	4951
28	1493	1556	1620	1685	1751	1817	1885	1954	2024	2094	2166	2238	2311	2385	2460	2535	2612	2689	2766	2845	2924	3004	3084	3165	3246	3328	3411	3494	3577	3661	3745	3830	3915	4000	4086	4172	4258	4344	4431	4518	4605	4692	4779	4866	4953
30	1495	1558	1622	1687	1753	1820	1887	1956	2026	2096	2168	2240	2314	2388	2462	2538	2614	2691	2769	2847	2927	3006	3087	3167	3249	3331	3413	3496	3580	3664	3748	3833	3918	4003	4089	4175	4261	4347	4434	4521	4608	4695	4782	4869	4956
32	1498	1560	1624	1689	1755	1822	1890	1959	2028	2099	2170	2243	2316	2390	2465	2540	2617	2694	2772	2850	2929	3009	3089	3170	3252	3334	3416	3499	3583	3667	3751	3836	3921	4006	4092	4178	4264	4350	4437	4524	4611	4698	4785	4872	4959
34	1500	1562	1626	1691	1757	1824	1892	1961	2031	2101	2173	2245	2318	2392	2467	2543	2619	2696	2774	2853	2932	3012	3092	3173	3254	3336	3419	3502	3586	3669	3754	3838	3923	4009	4095	4181	4267	4353	4440	4527	4614	4701	4788	4875	4962
36	1502	1565	1628	1693	1759	1826	1894	1963	2033	2104	2175	2248	2321	2395	2470	2545	2622	2699	2777	2855	2934	3014	3095	3176	3257	3339	3422	3505	3588	3672	3757	3841	3926	4012	4097	4183	4270	4356	4443	4529	4616	4703	4791	4878	4965
38	1504	1567	1631	1696	1762	1829	1897	1965	2035	2106	2178	2250	2323	2397	2472	2548	2624	2702	2779	2858	2937	3017	3097	3178	3260	3342	3425	3508	3591	3675	3759	3844	3929	4015	4100	4186	4272	4359	4446	4532	4619	4706	4794	4881	4968
40	1506	1569	1633	1698	1764	1831	1899	1968	2038	2108	2180	2252	2326	2400	2475	2551	2627	2704	2782	2861	2940	3020	3100	3181	3263	3345	3427	3510	3594	3678	3762	3847	3932	4017	4103	4189	4275	4362	4448	4535	4622	4709	4796	4884	4971
42	1508	1571	1635	1700	1766	1833	1901	1970	2040	2111	2182	2255	2328	2402	2477	2553	2630	2707	2785	2863	2942	3022	3103	3184	3265	3347	3430	3513	3597	3681	3765	3850	3935	4020	4106	4192	4278	4365	4451	4538	4625	4712	4799	4887	4974
44	1510	1573	1637	1702	1768	1835	1903	1972	2042	2113	2185	2257	2331	2405	2480	2556	2632	2709	2787	2866	2945	3025	3105	3186	3268	3350	3433	3516	3599	3683	3768	3853	3938	4023	4109	4195	4281	4368	4454	4541	4628	4715	4802	4889	4977
46	1512	1575	1639	1704	1770	1838	1906	1975	2045	2115	2187	2260	2333	2407	2482	2558	2635	2712	2790	2868	2948	3028	3108	3189	3271	3353	3436	3519	3602	3686	3771	3855	3941	4026	4112	4198	4284	4370	4457	4544	4631	4718	4805	4892	4980
48	1514	1577	1641	1707	1773	1840	1908	1977	2047	2118	2190	2262	2336	2410	2485	2561	2637	2715	2792	2871	2950	3030	3111	3192	3274	3356	3438	3521	3605	3689	3773	3858	3943	4029	4115	4201	4287	4373	4460	4547	4634	4721	4808	4895	4983
50	1516	1579	1644	1709	1775	1842	1910	1979	2049	2120	2192	2265	2338	2412	2487	2563	2640	2717	2795	2874	2953	3033	3113	3195	3276	3358	3441	3524	3608	3692	3776	3861	3946	4032	4117	4203	4290	4376	4463	4550	4637	4724	4811	4898	4985
52	1518	1582	1646	1711	1777	1844	1913	1982	2052	2123	2194	2267	2341	2415	2490	2566	2642	2720	2798	2876	2956	3036	3116	3197	3279	3361	3444	3527	3611	3695	3779	3864	3949	4035	4120	4206	4293	4379	4466	4553	4640	4727	4814	4901	4988
54	1520	1584	1648	1713	1779	1847	1915	1984	2054	2125	2197	2269	2343	2417	2492	2568	2645	2722	2800	2879	2958	3038	3119	3200	3282	3364	3447	3530	3613	3697	3782	3867	3952	4037	4123	4209	4295	4382	4469	4556	4643	4730	4817	4904	4991
56	1523	1586	1650	1715	1782	1849	1917	1986	2056	2127	2199	2272	2345	2420	2495	2571	2648	2725	2803	2882	2961	3041	3122	3203	3284	3367	3449	3533	3616	3700	3785	3870	3955	4040	4126	4212	4298	4385	4472	4558	4645	4733	4820	4907	4994
58	1525	1588	1652	1718	1784	1851	1919	1989	2059	2130	2202	2274	2348	2422	2497	2573	2650	2727	2806	2884	2964	3044	3124	3205	3287	3369	3452	3535	3619	3703	3788	3872	3958	4043	4129	4215	4301	4388	4474	4561	4648	4735	4823	4910	4997
60	1527	1590	1654	1720	1786	1853	1922	1991	2061	2132	2204	2277	2350	2425	2500	2576	2653	2730	2808	2887	2966	3046	3127	3208	3290	3372	3455	3538	3622	3706	3790	3875	3960	4046	4132	4218	4304	4391	4477	4564	4651	4738	4826	4913	5000

min	90	91	92	93	94
0	5000	5087	5174	5262	5349
2	5003	5090	5177	5265	5352
4	5006	5093	5180	5267	5355
6	5009	5096	5183	5270	5357
8	5012	5099	5186	5273	5360
10	5015	5102	5189	5276	5363
12	5017	5105	5192	5279	5366
14	5020	5108	5195	5282	5369
16	5023	5111	5198	5285	5372
18	5026	5113	5201	5288	5375
20	5029	5116	5204	5291	5378
22	5032	5119	5206	5294	5381
24	5035	5122	5209	5297	5384
26	5038	5125	5212	5299	5386
28	5041	5128	5215	5302	5389
30	5044	5131	5218	5305	5392
32	5047	5134	5221	5308	5395
34	5049	5137	5224	5311	5398
36	5052	5140	5227	5314	5401
38	5055	5143	5230	5317	5404
40	5058	5145	5233	5320	5407
42	5061	5148	5236	5323	5410
44	5064	5151	5238	5326	5413
46	5067	5154	5241	5328	5415
48	5070	5157	5244	5331	5418
50	5073	5160	5247	5334	5421
52	5076	5163	5250	5337	5424
54	5079	5166	5253	5340	5427
56	5081	5169	5256	5343	5430
58	5084	5172	5259	5346	5433
60	5087	5174	5262	5349	5436

min	95	96	97	98	99
0	5436	5523	5609	5696	5782
2	5439	5526	5612	5699	5785
4	5442	5528	5615	5702	5788
6	5444	5531	5618	5705	5791
8	5447	5534	5621	5707	5794
10	5450	5537	5624	5710	5797
12	5453	5540	5627	5713	5799
14	5456	5543	5630	5716	5802
16	5459	5546	5632	5719	5805
18	5462	5549	5635	5722	5808
20	5465	5552	5638	5725	5811
22	5468	5554	5641	5728	5814
24	5471	5557	5644	5730	5817
26	5473	5560	5647	5733	5819
28	5476	5563	5650	5736	5822
30	5479	5566	5653	5739	5825
32	5482	5569	5656	5742	5828
34	5485	5572	5658	5745	5831
36	5488	5575	5661	5748	5834
38	5491	5578	5664	5751	5837
40	5494	5580	5667	5753	5840
42	5497	5583	5670	5756	5842
44	5499	5586	5673	5759	5845
46	5502	5589	5676	5762	5848
48	5505	5592	5679	5765	5851
50	5508	5595	5681	5768	5854
52	5511	5598	5684	5771	5857
54	5514	5601	5687	5774	5860
56	5517	5604	5690	5776	5863
58	5520	5606	5693	5779	5865
60	5523	5609	5696	5782	5868

min	100	101	102	103	104
0	5868	5954	6040	6125	6210
2	5871	5957	6042	6128	6212
4	5874	5960	6045	6130	6215
6	5877	5963	6048	6133	6218
8	5880	5965	6051	6136	6221
10	5883	5968	6054	6139	6224
12	5885	5971	6057	6142	6227
14	5888	5974	6059	6145	6229
16	5891	5977	6062	6147	6232
18	5894	5980	6065	6150	6235
20	5897	5983	6068	6153	6238
22	5900	5985	6071	6156	6241
24	5903	5988	6074	6159	6243
26	5905	5991	6077	6162	6246
28	5908	5994	6079	6164	6249
30	5911	5997	6082	6167	6252
32	5914	6000	6085	6170	6255
34	5917	6003	6088	6173	6258
36	5920	6005	6091	6176	6260
38	5923	6008	6094	6179	6263
40	5925	6011	6096	6181	6266
42	5928	6014	6099	6184	6269
44	5931	6017	6102	6187	6272
46	5934	6020	6105	6190	6274
48	5937	6022	6108	6193	6277
50	5940	6025	6111	6195	6280
52	5943	6028	6113	6198	6283
54	5945	6031	6116	6201	6286
56	5948	6034	6119	6204	6288
58	5951	6037	6122	6207	6291
60	5954	6040	6125	6210	6294

min	105	106	107	108	109
0	6294	6378	6462	6545	6628
2	6297	6381	6465	6548	6631
4	6300	6384	6467	6551	6633
6	6303	6387	6470	6553	6636
8	6305	6389	6473	6556	6639
10	6308	6392	6476	6559	6642
12	6311	6395	6479	6562	6644
14	6314	6398	6481	6564	6647
16	6317	6401	6484	6567	6650
18	6319	6403	6487	6570	6653
20	6322	6406	6490	6573	6655
22	6325	6409	6492	6575	6658
24	6328	6412	6495	6578	6661
26	6331	6414	6498	6581	6664
28	6333	6417	6501	6584	6666
30	6336	6420	6504	6587	6669
32	6339	6423	6506	6589	6672
34	6342	6426	6509	6592	6675
36	6345	6428	6512	6595	6677
38	6347	6431	6515	6598	6680
40	6350	6434	6517	6600	6683
42	6353	6437	6520	6603	6685
44	6356	6440	6523	6606	6688
46	6359	6442	6526	6609	6691
48	6361	6445	6528	6611	6694
50	6364	6448	6531	6614	6696
52	6367	6451	6534	6617	6699
54	6370	6454	6537	6620	6702
56	6373	6456	6540	6622	6705
58	6375	6459	6542	6625	6707
60	6378	6462	6545	6628	6710

min	110	111	112	113	114
0	6710	6792	6873	6954	7034
2	6713	6795	6876	6956	7036
4	6716	6797	6878	6959	7039
6	6718	6800	6881	6962	7042
8	6721	6803	6884	6964	7044
10	6724	6805	6887	6967	7047
12	6726	6808	6889	6970	7050
14	6729	6811	6892	6972	7052
16	6732	6814	6895	6975	7055
18	6735	6816	6897	6978	7058
20	6737	6819	6900	6980	7060
22	6740	6822	6903	6983	7063
24	6743	6824	6905	6986	7066
26	6746	6827	6908	6988	7068
28	6748	6830	6911	6991	7071
30	6751	6833	6913	6994	7073
32	6754	6835	6916	6996	7076
34	6756	6838	6919	6999	7079
36	6759	6841	6921	7002	7081
38	6762	6843	6924	7004	7084
40	6765	6846	6927	7007	7087
42	6767	6849	6930	7010	7089
44	6770	6851	6932	7012	7092
46	6773	6854	6935	7015	7095
48	6776	6857	6938	7018	7097
50	6778	6860	6940	7020	7100
52	6781	6862	6943	7023	7103
54	6784	6865	6946	7026	7105
56	6786	6868	6948	7028	7108
58	6789	6870	6951	7031	7110
60	6792	6873	6954	7034	7113

min	115	116	117	118	119
0	7113	7192	7270	7347	7424
2	7116	7194	7273	7350	7427
4	7118	7197	7275	7352	7429
6	7121	7200	7278	7355	7432
8	7124	7202	7280	7358	7434
10	7126	7205	7283	7360	7437
12	7129	7208	7285	7363	7439
14	7132	7210	7288	7365	7442
16	7134	7213	7291	7368	7444
18	7137	7215	7293	7370	7447
20	7139	7218	7296	7373	7449
22	7142	7221	7298	7376	7452
24	7145	7223	7301	7378	7455
26	7147	7226	7304	7381	7457
28	7150	7228	7306	7383	7460
30	7153	7231	7309	7386	7462
32	7155	7234	7311	7388	7465
34	7158	7236	7314	7391	7467
36	7160	7239	7316	7393	7470
38	7163	7241	7319	7396	7472
40	7166	7244	7322	7399	7475
42	7168	7247	7324	7401	7477
44	7171	7249	7327	7404	7480
46	7174	7252	7329	7406	7482
48	7176	7254	7332	7409	7485
50	7179	7257	7335	7411	7487
52	7181	7260	7337	7414	7490
54	7184	7262	7340	7416	7492
56	7187	7265	7342	7419	7495
58	7189	7267	7345	7422	7497
60	7192	7270	7347	7424	7500

min	120	121	122	123	124
0	7500	7575	7650	7723	7796
2	7503	7578	7652	7726	7798
4	7505	7580	7655	7728	7801
6	7508	7583	7657	7731	7803
8	7510	7585	7659	7733	7806
10	7513	7588	7662	7735	7808
12	7515	7590	7664	7738	7810
14	7518	7593	7667	7740	7813
16	7520	7595	7669	7743	7815
18	7523	7598	7672	7745	7818
20	7525	7600	7674	7748	7820
22	7528	7603	7677	7750	7822
24	7530	7605	7679	7752	7825
26	7533	7608	7682	7755	7827
28	7535	7610	7684	7757	7830
30	7538	7612	7686	7760	7832
32	7540	7615	7689	7762	7834
34	7543	7617	7691	7765	7837
36	7545	7620	7694	7767	7839
38	7548	7622	7696	7769	7842
40	7550	7625	7699	7772	7844
42	7553	7627	7701	7774	7846
44	7555	7630	7704	7777	7849
46	7558	7632	7706	7779	7851
48	7560	7635	7709	7781	7854
50	7563	7637	7711	7784	7856
52	7565	7640	7713	7786	7858
54	7568	7642	7716	7789	7861
56	7570	7645	7718	7791	7863
58	7573	7647	7721	7794	7865
60	7575	7650	7723	7796	7868

min	125	126	127	128	129
0	7868	7939	8009	8078	8147
2	7870	7941	8011	8081	8149
4	7873	7944	8014	8083	8151
6	7875	7946	8016	8085	8153
8	7877	7948	8018	8087	8156
10	7880	7951	8021	8090	8158
12	7882	7953	8023	8092	8160
14	7885	7955	8025	8094	8162
16	7887	7958	8028	8097	8165
18	7889	7960	8030	8099	8167
20	7892	7962	8032	8101	8169
22	7894	7965	8035	8103	8171
24	7896	7967	8037	8106	8174
26	7899	7969	8039	8108	8176
28	7901	7972	8041	8110	8178
30	7904	7974	8044	8113	8180
32	7906	7976	8046	8115	8183
34	7908	7979	8048	8117	8185
36	7911	7981	8051	8119	8187
38	7913	7983	8053	8122	8189
40	7915	7986	8055	8124	8192
42	7918	7988	8058	8126	8194
44	7920	7990	8060	8128	8196
46	7922	7993	8062	8131	8198
48	7925	7995	8065	8133	8201
50	7927	7997	8067	8135	8203
52	7930	8000	8069	8138	8205
54	7932	8002	8071	8140	8207
56	7934	8004	8074	8142	8209
58	7937	8007	8076	8144	8212
60	7939	8009	8078	8147	8214

min	130	131	132	133	134
0	8214	8280	8346	8410	8473
2	8216	8282	8348	8412	8475
4	8218	8285	8350	8414	8477
6	8221	8287	8352	8416	8480
8	8223	8289	8354	8418	8482
10	8225	8291	8356	8421	8484
12	8227	8293	8359	8423	8486
14	8230	8296	8361	8425	8488
16	8232	8298	8363	8427	8490
18	8234	8300	8365	8429	8492
20	8236	8302	8367	8431	8494
22	8238	8304	8369	8433	8496
24	8241	8307	8372	8435	8498
26	8243	8309	8374	8438	8500
28	8245	8311	8376	8440	8502
30	8247	8313	8378	8442	8505
32	8249	8315	8380	8444	8507
34	8252	8317	8382	8446	8509
36	8254	8320	8384	8448	8511
38	8256	8322	8387	8450	8513
40	8258	8324	8389	8452	8515
42	8260	8326	8391	8454	8517
44	8263	8328	8393	8457	8519
46	8265	8330	8395	8459	8521
48	8267	8333	8397	8461	8523
50	8269	8335	8399	8463	8525
52	8272	8337	8401	8465	8527
54	8274	8339	8404	8467	8529
56	8276	8341	8406	8469	8531
58	8278	8343	8408	8471	8533
60	8280	8346	8410	8473	8536

min	135	136	137	138	139
0	8536	8597	8657	8716	8774
2	8538	8599	8659	8718	8775
4	8540	8601	8661	8720	8777
6	8542	8603	8663	8722	8779
8	8544	8605	8665	8723	8781
10	8546	8607	8667	8725	8783
12	8548	8609	8669	8727	8785
14	8550	8611	8671	8729	8787
16	8552	8613	8673	8731	8789
18	8554	8615	8675	8733	8791
20	8556	8617	8677	8735	8793
22	8558	8619	8679	8737	8794
24	8560	8621	8680	8739	8796
26	8562	8623	8682	8741	8798
28	8564	8625	8684	8743	8800
30	8566	8627	8686	8745	8802
32	8568	8629	8688	8747	8804
34	8570	8631	8690	8749	8806
36	8572	8633	8692	8751	8808
38	8574	8635	8694	8752	8810
40	8576	8637	8696	8754	8811
42	8578	8639	8698	8756	8813
44	8580	8641	8700	8758	8815
46	8583	8643	8702	8760	8817
48	8585	8645	8704	8762	8819
50	8587	8647	8706	8764	8821
52	8589	8649	8708	8766	8823
54	8591	8651	8710	8768	8825
56	8593	8653	8712	8770	8826
58	8595	8655	8714	8772	8828
60	8597	8657	8716	8774	8830

min	140	141	142	143	144
0	8830	8886	8940	8993	9045
2	8832	8888	8942	8995	9047
4	8834	8889	8944	8997	9049
6	8836	8891	8945	8998	9050
8	8838	8893	8947	9000	9052
10	8840	8895	8949	9002	9054
12	8841	8897	8951	9004	9055
14	8843	8899	8953	9005	9057
16	8845	8900	8954	9007	9059
18	8847	8902	8956	9009	9060
20	8849	8904	8958	9011	9062
22	8851	8906	8960	9012	9064
24	8853	8908	8961	9014	9066
26	8854	8909	8963	9016	9067
28	8856	8911	8965	9018	9069
30	8858	8913	8967	9019	9071
32	8860	8915	8969	9021	9072
34	8862	8917	8970	9023	9074
36	8864	8918	8972	9024	9076
38	8866	8920	8974	9026	9077
40	8867	8922	8976	9028	9079
42	8869	8924	8977	9030	9081
44	8871	8926	8979	9031	9082
46	8873	8927	8981	9033	9084
48	8875	8929	8983	9035	9086
50	8877	8931	8984	9037	9087
52	8878	8933	8986	9038	9089
54	8880	8935	8988	9040	9091
56	8882	8936	8990	9042	9092
58	8884	8938	8991	9043	9094
60	8886	8940	8993	9045	9096

min	145	146	147	148	149
0	9096	9145	9193	9240	9286
2	9097	9147	9195	9242	9287
4	9099	9148	9197	9243	9289
6	9101	9150	9198	9245	9290
8	9102	9152	9200	9246	9292
10	9104	9153	9201	9248	9293
12	9106	9155	9203	9249	9295
14	9107	9157	9204	9251	9296
16	9109	9158	9206	9253	9298
18	9111	9160	9208	9254	9299
20	9112	9161	9209	9256	9301
22	9114	9163	9211	9257	9302
24	9116	9165	9212	9259	9304
26	9117	9166	9214	9260	9305
28	9119	9168	9215	9262	9307
30	9121	9169	9217	9263	9308
32	9122	9171	9219	9265	9310
34	9124	9173	9220	9266	9311
36	9126	9174	9222	9268	9313
38	9127	9176	9223	9269	9314
40	9129	9177	9225	9271	9316
42	9130	9179	9226	9272	9317
44	9132	9181	9228	9274	9318
46	9134	9182	9229	9275	9320
48	9135	9184	9231	9277	9321
50	9137	9185	9233	9278	9323
52	9139	9187	9234	9280	9324
54	9140	9189	9236	9281	9326
56	9142	9190	9237	9283	9327
58	9144	9192	9239	9284	9329
60	9145	9193	9240	9286	9330

min	150	151	152	153	154
0	9330	9373	9415	9455	9494
2	9332	9375	9416	9456	9495
4	9333	9376	9417	9458	9497
6	9334	9377	9419	9459	9498
8	9336	9379	9420	9460	9499
10	9337	9380	9422	9462	9500
12	9339	9382	9423	9463	9502
14	9340	9383	9424	9464	9503
16	9342	9384	9426	9466	9504
18	9343	9386	9427	9467	9505
20	9345	9387	9428	9468	9507
22	9346	9389	9430	9469	9508
24	9347	9390	9431	9471	9509
26	9349	9391	9432	9472	9510
28	9350	9393	9434	9473	9512
30	9352	9394	9435	9475	9513
32	9353	9395	9436	9476	9514
34	9355	9397	9438	9477	9515
36	9356	9398	9439	9479	9517
38	9357	9400	9440	9480	9518
40	9359	9401	9442	9481	9519
42	9360	9402	9443	9482	9520
44	9362	9404	9444	9484	9522
46	9363	9405	9446	9485	9523
48	9365	9407	9447	9486	9524
50	9366	9408	9448	9488	9525
52	9367	9409	9450	9489	9527
54	9369	9411	9451	9490	9528
56	9370	9412	9452	9491	9529
58	9372	9413	9454	9493	9530
60	9373	9415	9455	9494	9532

min	155	156	157	158	159
0	9532	9568	9603	9636	9668
2	9533	9569	9604	9637	9669
4	9534	9570	9605	9638	9670
6	9535	9571	9606	9639	9671
8	9536	9572	9607	9640	9672
10	9538	9574	9608	9641	9673
12	9539	9575	9609	9642	9674
14	9540	9576	9610	9644	9675
16	9541	9577	9612	9645	9676
18	9543	9578	9613	9646	9677
20	9544	9579	9614	9647	9678
22	9545	9581	9615	9648	9679
24	9546	9582	9616	9649	9680
26	9547	9583	9617	9650	9681
28	9549	9584	9618	9651	9682
30	9550	9585	9619	9652	9683
32	9551	9586	9621	9653	9684
34	9552	9588	9622	9654	9685
36	9553	9589	9623	9655	9686
38	9555	9590	9624	9656	9687
40	9556	9591	9625	9657	9688
42	9557	9592	9626	9658	9689
44	9558	9593	9627	9660	9690
46	9559	9595	9628	9661	9691
48	9561	9596	9629	9662	9692
50	9562	9597	9630	9663	9693
52	9563	9598	9632	9664	9694
54	9564	9599	9633	9665	9695
56	9565	9600	9634	9666	9696
58	9567	9601	9635	9667	9697
60	9568	9603	9636	9668	9698

min	160	161	162	163	164
0	9698	9728	9755	9782	9806
2	9699	9729	9756	9782	9807
4	9700	9729	9757	9783	9808
6	9701	9730	9758	9784	9809
8	9702	9731	9759	9785	9810
10	9703	9732	9760	9786	9810
12	9704	9733	9761	9787	9811
14	9705	9734	9762	9787	9812
16	9706	9735	9762	9788	9813
18	9707	9736	9763	9789	9813
20	9708	9737	9764	9790	9814
22	9709	9738	9765	9791	9815
24	9710	9739	9766	9792	9816
26	9711	9740	9767	9792	9817
28	9712	9741	9768	9793	9817
30	9713	9742	9769	9794	9818
32	9714	9743	9769	9795	9819
34	9715	9743	9770	9796	9820
36	9716	9744	9771	9797	9820
38	9717	9745	9772	9797	9821
40	9718	9746	9773	9798	9822
42	9719	9747	9774	9799	9823
44	9720	9748	9775	9800	9824
46	9721	9749	9776	9801	9824
48	9722	9750	9776	9801	9825
50	9723	9751	9777	9802	9826
52	9724	9752	9778	9803	9827
54	9725	9753	9779	9804	9827
56	9726	9753	9780	9805	9828
58	9727	9754	9781	9806	9829
60	9728	9755	9782	9806	9830

min	165	166	167	168	169
0	9830	9851	9872	9891	9908
2	9830	9852	9873	9891	9909
4	9831	9853	9873	9892	9909
6	9832	9854	9874	9893	9910
8	9833	9854	9874	9893	9910
10	9833	9855	9875	9894	9911
12	9834	9856	9876	9894	9911
14	9835	9856	9876	9895	9912
16	9836	9857	9877	9896	9913
18	9836	9858	9878	9896	9913
20	9837	9858	9878	9897	9914
22	9838	9859	9879	9897	9914
24	9839	9860	9880	9898	9915
26	9839	9860	9880	9898	9915
28	9840	9861	9881	9899	9916
30	9841	9862	9881	9900	9916
32	9841	9863	9882	9900	9917
34	9842	9863	9883	9901	9917
36	9843	9864	9883	9901	9918
38	9844	9865	9884	9902	9918
40	9844	9865	9885	9903	9919
42	9845	9866	9885	9903	9919
44	9846	9867	9886	9904	9920
46	9847	9867	9886	9904	9920
48	9847	9868	9887	9905	9921
50	9848	9869	9888	9905	9921
52	9849	9869	9888	9906	9922
54	9849	9870	9889	9906	9923
56	9850	9871	9890	9907	9923
58	9851	9871	9890	9908	9924
60	9851	9872	9891	9908	9924

min	170	171	172	173	174
0	9924	9938	9951	9963	9973
2	9925	9939	9952	9963	9973
4	9925	9939	9952	9963	9973
6	9926	9940	9953	9964	9974
8	9926	9940	9953	9964	9974
10	9927	9941	9953	9964	9974
12	9927	9941	9954	9965	9974
14	9928	9942	9954	9965	9975
16	9928	9942	9955	9966	9975
18	9929	9942	9955	9966	9975
20	9929	9943	9955	9966	9976
22	9929	9943	9956	9967	9976
24	9930	9944	9956	9967	9976
26	9930	9944	9956	9967	9976
28	9931	9945	9957	9968	9977
30	9931	9945	9957	9968	9977
32	9932	9946	9958	9968	9977
34	9932	9946	9958	9969	9978
36	9933	9946	9958	9969	9978
38	9933	9947	9959	9969	9978
40	9934	9947	9959	9969	9978
42	9934	9948	9959	9970	9979
44	9935	9948	9960	9970	9979
46	9935	9948	9960	9970	9979
48	9936	9949	9961	9971	9979
50	9936	9949	9961	9971	9980
52	9937	9950	9961	9971	9980
54	9937	9950	9962	9972	9980
56	9938	9951	9962	9972	9980
58	9938	9951	9962	9972	9981
60	9938	9951	9963	9973	9981

min	175	176	177	178	179
0	9981	9988	9993	9997	9999
2	9981	9988	9993	9997	9999
4	9981	9988	9993	9997	9999
6	9982	9988	9994	9997	9999
8	9982	9989	9994	9997	9999
10	9982	9989	9994	9997	9999
12	9982	9989	9994	9998	9999
14	9983	9989	9994	9998	9999
16	9983	9989	9994	9998	9999
18	9983	9990	9994	9998	9999
20	9983	9990	9995	9998	9999
22	9984	9990	9995	9998	9999
24	9984	9990	9995	9998	9999
26	9984	9990	9995	9998	9999
28	9984	9990	9995	9998	9999
30	9985	9991	9995	9998	9999
32	9985	9991	9995	9998	9999
34	9985	9991	9995	9998	9999
36	9985	9991	9996	9999	9999
38	9985	9991	9996	9999	9999
40	9986	9992	9996	9999	9999
42	9986	9992	9996	9999	9999
44	9986	9992	9996	9999	9999
46	9986	9992	9996	9999	9999
48	9986	9992	9996	9999	9999
50	9987	9992	9996	9999	9999
52	9987	9993	9997	9999	9999
54	9987	9993	9997	9999	9999
56	9987	9993	9997	9999	9999
58	9988	9993	9997	9999	9999
60	9988	9993	9997	9999	10000

Il n'y a qu'une seule table à consulter, et une seule multiplication à 4 chiffres à effectuer. On peut la raccourcir par la "méthode Védique" qui consiste à faire le produit (où x=10) :

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(a'x^3 + b'x^2 + c'x + d') = aa'x^6 + (ab' + a'b)x^5 + (ac' + bb' + a'c)x^4 + ...$$

où on s'arrête quand on est convaincu d'avoir 4 chiffres significatifs. Exemple, avec 3 chiffres, 456x789. Les termes partiels sont 4x7=28, 4x8+5x7=67,4x9+5x8+6x7=118 5x9+6x8=94, ... On pose l'opération en commençant par la gauche :

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 6 \\ & & 7 & 8 & 9 \\ \hline & 8 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 6^1 & 1 & 9 & \\ \hline 3 & 5 & 9 & 7 & ... \end{array}$$

La procédure consiste à d'abord poser 28, avec le 8 en haut et le 2 en retenue, en bas décalé. De même on pose 67 avec le 7 en haut et le 6 décalé en bas. Un problème se pose avec 118, on pose le 8 en haut, puis le 1 en retenue en bas, mais il reste un 1 qui vient en retenue sur le 6, idem pour le reste. Ensuite il ne reste plus qu'une addition simple où la retenue est au plus 1. Il est donc facile d'identifier les 3 chiffres significatifs 359. Le résultat exact est 359784 alors que l'approximatif est 359000. Il a fallu pousser plus loin que le minimum à cause de la retenue sur le 6, due à une somme partielle > à 100, ce qui est le pire qui peut se produire sur 4 chiffres.

2 Calcul du point.

Le principe de la navigation consiste à évaluer approximativement la position du navire en partant d'une position connue qu'on fait évoluer sur la carte en tenant compte de la vitesse et du cap du navire. Il existe de nombreuses incertitudes : vents, courants, etc. de sorte que la position ainsi estimée diffère de plus en plus de la vérité. On fait alors le point en procédant à des observations astronomiques qui permettent de recaler la position sur la carte avec une précision raisonnable (quelques milles) et aussi de recaler l'estime. C'est le départ d'un nouvelle navigation à l'estime suivie par un nouveau point, etc. Contrairement à l'estime il n'y a pas de raison pour les erreurs de point s'accumulent, et on peut espérer qu'elles s'annulent statistiquement, donc que la route complète est correcte à quelques mille prés.

2.1 Position d'un astre à une heure donnée.

La méthode est basée sur la considération d'un triangle sphérique BNC comme sur le dessin, où N est le pôle Nord (ou Sud), B est la position estimée du navire ou plus probablement un point fixé sur la carte situé sur une intersection du quadrillage et proche de la position estimée du navire. Finalement C est le "pied" de l'astre observé. On utilise traditionnellement des coordonnées différentes des angles que nous avons considérés plus haut. Le point B est repéré par sa longitude et sa latitude. La latitude est l'angle L entre le plan équatorial et OB, c'est donc le complémentaire de l'angle c considéré plus haut. Si B est dans l'hémisphère Sud, la latitude est comptée négativement, au total elle est donc comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. La longitude est l'angle entre le méridien de B et un méridien conventionnel d'origine, le méridien de Greenwich, c'est à dire l'angle entre le plan NOB et le plan similaire pour Greenwich. Elle est comptée positivement vers l'Ouest et négativement vers l'Est, et atteint $\pm$ 180 degrés à l'opposé de Greenwich. Dans le repère lié à la Terre ces coordonnées sont stables (du moins si B est considéré immobile).

L'astre observé (Soleil, Lune, Etoile, ...) est caractérisé de façon similaire. L'angle qu'il forme avec le plan équatorial est appelé déclinaison et noté D. C'est le complémentaire de l'angle b ci–dessus. En fait il s'agit de la ligne OC visant le centre de l'astre, et cette ligne est parallèle à la ligne de visée de l'astre à partir du point B car l'astre est très lointain, sauf dans le cas de la lune où d'autres planètes proches pour lesquelles il faut introduire une correction de parallaxe. L'angle entre le plan ONC contenant l'axe et le plan du méridien de Greenwich est la "longitude" du pied de l'astre qu'on appelle GHA (Greenwich hourly angle). On peut en effet mesurer les longitudes en décalage horaire par rapport à Greenwich. Comme la Terre tourne alors que l'astre est fixe, le GHA évolue rapidement, de 15' toutes les minutes, donc pour avoir une précision d'une minute il faut déterminer le temps avec une précision de moins de 4 secondes. Il faut donc dater la mesure avec un chronomètre précis à la seconde. Cette exigence a causé des problèmes dans les mesures de longitude jusqu'à la réalisation de chronomètres précis. Ce qui nous intéresse directement c'est l'angle entre le méridien du point d'observation B et celui du pied de l'astre C, qui s'appelle LHA (local hourly angle), et que nous notons P. C'est aussi la différence (algébrique) entre le GHA et la longitude de B. Cet angle varie donc de 15' par minute.

Pour une heure précise donnée on peut calculer exactement la position des astres (sachant que la Terre tourne autour du Soleil en un an, la Lune autour de la Terre en environ un mois, la Terre est animée outre sa rotation de mouvements de précession et de nutation, comme une toupie) c'est le rôle des éphémérides, soit sur papier soit calculés en machine. Il existe en outre des "incertitudes" sur la mesure du temps (introduction de "leap seconds" etc.) qui font que les données des éphémérides calculés nécessitent une correction de temps ΔT difficilement modélisable, mais non négligeable. Elle vaut 69 secondes en ce moment. Pour ce qui concerne l'éphéméride papier on peut se procurer librement par exemple l' Almanach Nautical 2018 compact, pdf qui n'est pas très volumineux (6.8 Mo pour 154 pages) dont on peut extraire quelques pages pour une navigation donnée. Pour exemple voici une page :

	Aries	Venus		Mars		Jupiter		Saturn	
Thu	GHA	GHA	Dec	GHA	Dec	GHA	Dec	GHA	Dec
0	144°57.0	167°31.6	-11°01.3	254°31.1	-21°43.8	274°35.2	-17°16.5	228°16.1	-22°25.0
1	159°59.5	182°31.1	-11°00.1	269°31.9	-21°44.0	289°37.5	-17°16.6	243°18.4	-22°25.0
2	175°02.0	197°30.6	-10°59.0	284°32.8	-21°44.2	304°39.8	-17°16.6	258°20.6	-22°24.9
3	190°04.4	212°30.1	-10°57.8	299°33.7	-21°44.5	319°42.1	-17°16.6	273°22.8	-22°24.9
4	205°06.9	227°29.6	-10°56.7	314°34.5	-21°44.7	334°44.4	-17°16.7	288°25.0	-22°24.9
5	220°09.4	242°29.1	-10°55.5	329°35.4	-21°44.9	349°46.7	-17°16.7	303°27.3	-22°24.9
6	235°11.8	257°28.6	-10°54.4	344°36.2	-21°45.2	4°49.0	-17°16.7	318°29.5	-22°24.9
7	250°14.3	272°28.1	-10°53.2	359°37.1	-21°45.4	19°51.3	-17°16.8	333°31.7	-22°24.9
8	265°16.7	287°27.6	-10°52.1	14°37.9	-21°45.6	34°53.6	-17°16.8	348°33.9	-22°24.9
9	280°19.2	302°27.1	-10°50.9	29°38.8	-21°45.9	49°55.9	-17°16.8	3°36.2	-22°24.9
10	295°21.7	317°26.6	-10°49.8	44°39.7	-21°46.1	64°58.1	-17°16.9	18°38.4	-22°24.9
11	310°24.1	332°26.1	-10°48.6	59°40.5	-21°46.3	80°00.4	-17°16.9	33°40.6	-22°24.9
12	325°26.6	347°25.6	-10°47.5	74°41.4	-21°46.6	95°02.7	-17°17.0	48°42.8	-22°24.8
13	340°29.1	2°25.1	-10°46.3	89°42.2	-21°46.8	110°05.0	-17°17.0	63°45.1	-22°24.8
14	355°31.5	17°24.6	-10°45.2	104°43.1	-21°47.0	125°07.3	-17°17.0	78°47.3	-22°24.8
15	10°34.0	32°24.1	-10°44.0	119°43.9	-21°47.2	140°09.6	-17°17.1	93°49.5	-22°24.8
16	25°36.5	47°23.6	-10°42.8	134°44.8	-21°47.5	155°11.9	-17°17.1	108°51.7	-22°24.8
17	40°38.9	62°23.1	-10°41.7	149°45.7	-21°47.7	170°14.2	-17°17.1	123°54.0	-22°24.8
18	55°41.4	77°22.6	-10°40.5	164°46.5	-21°47.9	185°16.5	-17°17.2	138°56.2	-22°24.8
19	70°43.9	92°22.1	-10°39.4	179°47.4	-21°48.2	200°18.8	-17°17.2	153°58.4	-22°24.8
20	85°46.3	107°21.6	-10°38.2	194°48.2	-21°48.4	215°21.1	-17°17.2	169°00.6	-22°24.8
21	100°48.8	122°21.1	-10°37.1	209°49.1	-21°48.6	230°23.4	-17°17.3	184°02.9	-22°24.7
22	115°51.2	137°20.6	-10°35.9	224°49.9	-21°48.8	245°25.7	-17°17.3	199°05.1	-22°24.7
23	130°53.7	152°20.1	-10°34.7	239°50.8	-21°49.1	260°28.0	-17°17.3	214°07.3	-22°24.7
Mer.pass.:14:17		v-0.5 d1.1 m-3.8		v0.9 d-0.2 m1.0		v2.3 d-0.0 m-1.9		v2.2 d0.0 m0.6	

Fri	GHA	GHA	Dec	GHA	Dec	GHA	Dec	GHA	Dec
0	145°56.2	167°19.7	-10°33.6	254°51.7	-21°49.3	275°30.3	-17°17.4	229°09.5	-22°24.7
1	160°58.6	182°19.2	-10°32.4	269°52.5	-21°49.5	290°32.6	-17°17.4	244°11.8	-22°24.7
2	176°01.1	197°18.7	-10°31.3	284°53.4	-21°49.7	305°34.9	-17°17.4	259°14.0	-22°24.7
3	191°03.6	212°18.2	-10°30.1	299°54.2	-21°50.0	320°37.2	-17°17.5	274°16.2	-22°24.7
4	206°06.0	227°17.7	-10°28.9	314°55.1	-21°50.2	335°39.5	-17°17.5	289°18.4	-22°24.7
5	221°08.5	242°17.2	-10°27.8	329°55.9	-21°50.4	350°41.8	-17°17.5	304°20.7	-22°24.7
6	236°11.0	257°16.7	-10°26.6	344°56.8	-21°50.6	5°44.1	-17°17.6	319°22.9	-22°24.7
7	251°13.4	272°16.2	-10°25.5	359°57.7	-21°50.9	20°46.4	-17°17.6	334°25.1	-22°24.6
8	266°15.9	287°15.7	-10°24.3	14°58.5	-21°51.1	35°48.7	-17°17.6	349°27.3	-22°24.6
9	281°18.3	302°15.3	-10°23.1	29°59.4	-21°51.3	50°51.0	-17°17.7	4°29.6	-22°24.6
10	296°20.8	317°14.8	-10°22.0	45°00.2	-21°51.5	65°53.3	-17°17.7	19°31.8	-22°24.6
11	311°23.3	332°14.3	-10°20.8	60°01.1	-21°51.8	80°55.6	-17°17.8	34°34.0	-22°24.6
12	326°25.7	347°13.8	-10°19.6	75°01.9	-21°52.0	95°57.9	-17°17.8	49°36.3	-22°24.6
13	341°28.2	2°13.3	-10°18.5	90°02.8	-21°52.2	111°00.2	-17°17.8	64°38.5	-22°24.6
14	356°30.7	17°12.8	-10°17.3	105°03.7	-21°52.4	126°02.5	-17°17.9	79°40.7	-22°24.6
15	11°33.1	32°12.3	-10°16.1	120°04.5	-21°52.7	141°04.8	-17°17.9	94°42.9	-22°24.6
16	26°35.6	47°11.8	-10°15.0	135°05.4	-21°52.9	156°07.1	-17°17.9	109°45.2	-22°24.6
17	41°38.1	62°11.4	-10°13.8	150°06.2	-21°53.1	171°09.4	-17°18.0	124°47.4	-22°24.5
18	56°40.5	77°10.9	-10°12.6	165°07.1	-21°53.3	186°11.7	-17°18.0	139°49.6	-22°24.5
19	71°43.0	92°10.4	-10°11.5	180°07.9	-21°53.6	201°14.0	-17°18.0	154°51.8	-22°24.5
20	86°45.5	107°09.9	-10°10.3	195°08.8	-21°53.8	216°16.3	-17°18.1	169°54.1	-22°24.5
21	101°47.9	122°09.4	-10°09.1	210°09.7	-21°54.0	231°18.7	-17°18.1	184°56.3	-22°24.5
22	116°50.4	137°08.9	-10°08.0	225°10.5	-21°54.2	246°21.0	-17°18.1	199°58.5	-22°24.5
23	131°52.8	152°08.5	-10°06.8	240°11.4	-21°54.4	261°23.3	-17°18.2	215°00.8	-22°24.5
Mer.pass.:14:13		v-0.5 d1.2 m-3.8		v0.9 d-0.2 m1.0		v2.3 d-0.0 m-1.9		v2.2 d0.0 m0.6	

Sat	GHA	GHA	Dec	GHA	Dec	GHA	Dec	GHA	Dec
0	146°55.3	167°08.0	-10°05.6	255°12.2	-21°54.7	276°25.6	-17°18.2	230°03.0	-22°24.5
1	161°57.8	182°07.5	-10°04.5	270°13.1	-21°54.9	291°27.9	-17°18.2	245°05.2	-22°24.5
2	177°00.2	197°07.0	-10°03.3	285°13.9	-21°55.1	306°30.2	-17°18.2	260°07.4	-22°24.5
3	192°02.7	212°06.5	-10°02.1	300°14.8	-21°55.3	321°32.5	-17°18.3	275°09.7	-22°24.4
4	207°05.2	227°06.1	-10°00.9	315°15.7	-21°55.5	336°34.8	-17°18.3	290°11.9	-22°24.4
5	222°07.6	242°05.6	-9°59.8	330°16.5	-21°55.8	351°37.1	-17°18.3	305°14.1	-22°24.4
6	237°10.1	257°05.1	-9°58.6	345°17.4	-21°56.0	6°39.4	-17°18.4	320°16.4	-22°24.4
7	252°12.6	272°04.6	-9°57.4	0°18.2	-21°56.2	21°41.7	-17°18.4	335°18.6	-22°24.4
8	267°15.0	287°04.1	-9°56.3	15°19.1	-21°56.4	36°44.0	-17°18.4	350°20.8	-22°24.4
9	282°17.5	302°03.7	-9°55.1	30°19.9	-21°56.6	51°46.3	-17°18.5	5°23.1	-22°24.4
10	297°20.0	317°03.2	-9°53.9	45°20.8	-21°56.9	66°48.7	-17°18.5	20°25.3	-22°24.4
11	312°22.4	332°02.7	-9°52.7	60°21.7	-21°57.1	81°51.0	-17°18.5	35°27.5	-22°24.4
12	327°24.9	347°02.2	-9°51.6	75°22.5	-21°57.3	96°53.3	-17°18.6	50°29.7	-22°24.4
13	342°27.3	2°01.8	-9°50.4	90°23.4	-21°57.5	111°55.6	-17°18.6	65°32.0	-22°24.3
14	357°29.8	17°01.3	-9°49.2	105°24.2	-21°57.7	126°57.9	-17°18.6	80°34.2	-22°24.3
15	12°32.3	32°00.8	-9°48.0	120°25.1	-21°57.9	142°00.2	-17°18.7	95°36.4	-22°24.3
16	27°34.7	47°00.3	-9°46.8	135°25.9	-21°58.2	157°02.5	-17°18.7	110°38.7	-22°24.3
17	42°37.2	61°59.9	-9°45.7	150°26.8	-21°58.4	172°04.8	-17°18.7	125°40.9	-22°24.3
18	57°39.7	76°59.4	-9°44.5	165°27.7	-21°58.6	187°07.1	-17°18.8	140°43.1	-22°24.3
19	72°42.1	91°58.9	-9°43.3	180°28.5	-21°58.8	202°09.4	-17°18.8	155°45.4	-22°24.3
20	87°44.6	106°58.4	-9°42.1	195°29.4	-21°59.0	217°11.8	-17°18.8	170°47.6	-22°24.3
21	102°47.1	121°58.0	-9°40.9	210°30.2	-21°59.2	232°14.1	-17°18.9	185°49.8	-22°24.3
22	117°49.5	136°57.5	-9°39.8	225°31.1	-21°59.5	247°16.4	-17°18.9	200°52.1	-22°24.3
23	132°52.0	151°57.0	-9°38.6	240°31.9	-21°59.7	262°18.7	-17°18.9	215°54.3	-22°24.2
Mer.pass.:14:09		v-0.5 d1.2 m-3.8		v0.9 d-0.2 m1.0		v2.3 d-0.0 m-1.9		v2.2 d0.0 m0.6	

Stars

	SHA	Dec
Alpheratz	357°40.5	29°11.4
Ankaa	353°12.9	-42°12.8
Schedar	349°37.2	56°38.2
Diphda	348°52.8	-17°53.5
Achernar	335°24.8	-57°09.1
Hamal	327°57.3	23°32.8
Polaris	316°26.3	89°20.6
Akamar	315°16.0	-40°14.4
Menkar	314°11.8	4°09.4
Mirfak	308°35.8	49°55.5
Aldebaran	290°45.7	16°32.5
Rigel	281°08.9	-8°11.2
Capella	280°29.6	46°01.0
Bellatrix	278°28.4	6°21.7
Elnath	278°08.4	28°37.2
Alnilam	275°43.0	-1°11.7
Betelgeuse	270°57.7	7°24.4
Canopus	263°54.4	-52°42.7
Sirius	258°30.6	-16°44.6
Adara	255°09.7	-29°00.2
Procyon	244°56.1	5°10.6
Pollux	243°23.4	27°58.8
Avior	234°16.1	-59°34.3
Suhail	222°49.6	-43°30.5
Miaplacidus	221°38.0	-69°47.6
Alphard	217°52.6	-8°44.4
Regulus	207°39.8	11°52.6
Dubhe	193°47.3	61°39.1
Denebola	182°30.1	14°28.2
Gienah	175°48.7	-17°38.5
Acrux	173°05.2	-63°11.7
Gacrux	171°56.9	-57°12.7
Alioth	166°17.6	55°51.5
Spica	158°27.7	-11°15.3
Alcaid	152°56.2	49°13.2
Hadar	148°43.1	-60°27.3
Menkent	148°03.7	-36°27.3
Arcturus	145°52.6	19°05.5
Rigil Kent.	139°47.2	-60°54.2
Zubenelg.	137°01.8	-16°06.9
Kochab	137°20.0	74°04.7
Alphecca	126°08.3	26°39.2
Antares	112°22.4	-26°28.1
Atria	107°21.6	-69°03.1
Sabik	102°09.0	-15°44.7
Shaula	96°17.8	-37°06.7
Rasalhague	96°03.7	12°32.9
Etamin	90°45.0	51°29.1
Kaus Aust.	83°39.9	-34°22.3
Vega	80°37.1	38°47.9
Nunki	75°54.7	-26°16.3
Altair	62°05.5	8°54.9
Peacock	53°14.8	-56°40.5
Deneb	49°29.7	45°20.6
Enif	33°44.3	9°57.4
Alnair	27°40.3	-46°52.5
Fomalhaut	15°20.9	-29°31.7
Scheat	13°50.6	28°10.8
Markab	13°35.5	15°18.1

2018/2/1	SHA	Mer.pass
Venus	22°34.5	12:50
Mars	109°34.1	07:02
Jupiter	129°38.2	05:41
Saturn	83°19.1	08:46

2018/2/1	SHA	Mer.pass
Venus	21°23.5	12:51
Mars	108°55.5	07:00
Jupiter	129°34.1	05:37
Saturn	83°13.4	08:42

2018/2/1	SHA	Mer.pass
Venus	20°12.7	12:52
Mars	108°16.9	06:59
Jupiter	129°30.3	05:33
Saturn	83°07.7	08:39

Horizontal paralax	
Venus:	0.1
Mars:	0.1

h	Sun		Moon				
Thu	GHA	Dec	GHA	ν	Dec	d	HP
0	176°28.1	-12°46.1	186°01.9	12.5	-16°02.2	6.4	54.7
1	191°28.1	-12°45.2	200°33.4	12.5	-15°55.8	6.5	54.7
2	206°28.2	-12°44.3	215°05.0	12.6	-15°49.3	6.6	54.7
3	221°28.2	-12°43.5	229°36.6	12.6	-15°42.7	6.6	54.7
4	236°28.2	-12°42.6	244°08.1	12.6	-15°36.0	6.7	54.8
5	251°28.2	-12°41.8	258°39.7	12.6	-15°29.2	6.8	54.8
6	266°28.3	-12°40.9	273°11.4	12.6	-15°22.4	6.9	54.8
7	281°28.3	-12°40.1	287°43.0	12.6	-15°15.5	6.9	54.8
8	296°28.3	-12°39.2	302°14.7	12.7	-15°08.5	7.0	54.8
9	311°28.4	-12°38.3	316°46.3	12.7	-15°01.5	7.1	54.8
10	326°28.4	-12°37.5	331°18.0	12.7	-14°54.4	7.2	54.8
11	341°28.4	-12°36.6	345°49.7	12.7	-14°47.2	7.2	54.9
12	356°28.4	-12°35.8	0°21.4	12.7	-14°39.9	7.3	54.9
13	11°28.5	-12°34.9	14°53.2	12.7	-14°32.6	7.4	54.9
14	26°28.5	-12°34.0	29°24.9	12.8	-14°25.2	7.4	54.9
15	41°28.5	-12°33.2	43°56.7	12.8	-14°17.7	7.5	54.9
16	56°28.6	-12°32.3	58°28.5	12.8	-14°10.1	7.6	54.9
17	71°28.6	-12°31.4	73°00.3	12.8	-14°02.5	7.7	55.0
18	86°28.6	-12°30.6	87°32.1	12.8	-13°54.8	7.7	55.0
19	101°28.7	-12°29.7	102°04.0	12.8	-13°47.1	7.8	55.0
20	116°28.7	-12°28.9	116°35.8	12.9	-13°39.3	7.9	55.0
21	131°28.7	-12°28.0	131°07.7	12.9	-13°31.4	7.9	55.0
22	146°28.8	-12°27.1	145°39.6	12.9	-13°23.4	8.0	55.0
23	161°28.8	-12°26.3	160°11.5	12.9	-13°15.4	8.1	55.0
	SD.=16.2	d=0.9			S.D.=14.9		

Fri	GHA	Dec	GHA	ν	Dec	d	HP
0	176°28.8	-12°25.4	174°43.4	12.9	-13°07.3	8.1	55.1
1	191°28.9	-12°24.5	189°15.3	12.9	-12°59.1	8.2	55.1
2	206°28.9	-12°23.7	203°47.3	13.0	-12°50.9	8.3	55.1
3	221°28.9	-12°22.8	218°19.2	13.0	-12°42.6	8.3	55.1
4	236°29.0	-12°21.9	232°51.2	13.0	-12°34.3	8.4	55.1
5	251°29.0	-12°21.1	247°23.2	13.0	-12°25.9	8.4	55.1
6	266°29.1	-12°20.2	261°55.2	13.0	-12°17.4	8.5	55.2
7	281°29.1	-12°19.3	276°27.2	13.0	-12°08.9	8.6	55.2
8	296°29.1	-12°18.5	290°59.3	13.0	-12°00.3	8.6	55.2
9	311°29.2	-12°17.6	305°31.3	13.1	-11°51.6	8.7	55.2
10	326°29.2	-12°16.7	320°03.4	13.1	-11°42.9	8.7	55.2
11	341°29.2	-12°15.9	334°35.4	13.1	-11°34.2	8.8	55.2
12	356°29.3	-12°15.0	349°07.5	13.1	-11°25.3	8.9	55.3
13	11°29.3	-12°14.1	3°39.6	13.1	-11°16.4	8.9	55.3
14	26°29.4	-12°13.3	18°11.8	13.1	-11°07.5	9.0	55.3
15	41°29.4	-12°12.4	32°43.9	13.1	-10°58.5	9.0	55.3
16	56°29.4	-12°11.5	47°16.0	13.1	-10°49.5	9.1	55.3
17	71°29.5	-12°10.6	61°48.2	13.2	-10°40.3	9.1	55.4
18	86°29.5	-12°09.8	76°20.4	13.2	-10°31.2	9.2	55.4
19	101°29.6	-12°08.9	90°52.5	13.2	-10°22.0	9.2	55.4
20	116°29.6	-12°08.0	105°24.7	13.2	-10°12.7	9.3	55.4
21	131°29.6	-12°07.2	119°56.9	13.2	-10°03.4	9.3	55.4
22	146°29.7	-12°06.3	134°29.1	13.2	-9°54.0	9.4	55.4
23	161°29.7	-12°05.4	149°01.4	13.2	-9°44.6	9.5	55.5
	SD.=16.2	d=0.9			S.D.=15.0		

Sat	GHA	Dec	GHA	ν	Dec	d	HP
0	176°29.8	-12°04.5	163°33.6	13.2	-9°35.1	9.5	55.5
1	191°29.8	-12°03.7	178°05.8	13.2	-9°25.6	9.5	55.5
2	206°29.8	-12°02.8	192°38.1	13.3	-9°16.0	9.6	55.5
3	221°29.9	-12°01.9	207°10.3	13.3	-9°06.4	9.6	55.5
4	236°29.9	-12°01.1	221°42.6	13.3	-8°56.7	9.7	55.6
5	251°30.0	-12°00.2	236°14.9	13.3	-8°47.0	9.7	55.6
6	266°30.0	-11°59.3	250°47.2	13.3	-8°37.2	9.8	55.6
7	281°30.1	-11°58.4	265°19.5	13.3	-8°27.4	9.8	55.6
8	296°30.1	-11°57.6	279°51.8	13.3	-8°17.6	9.9	55.6
9	311°30.1	-11°56.7	294°24.1	13.3	-8°07.7	9.9	55.6
10	326°30.2	-11°55.8	308°56.4	13.3	-7°57.7	10.0	55.7
11	341°30.2	-11°54.9	323°28.7	13.3	-7°47.7	10.0	55.7
12	356°30.3	-11°54.0	338°01.0	13.3	-7°37.7	10.0	55.7
13	11°30.3	-11°53.2	352°33.3	13.3	-7°27.7	10.1	55.7
14	26°30.4	-11°52.3	7°05.7	13.3	-7°17.6	10.1	55.7
15	41°30.4	-11°51.4	21°38.0	13.3	-7°07.4	10.2	55.8
16	56°30.5	-11°50.5	36°10.3	13.3	-6°57.2	10.2	55.8
17	71°30.5	-11°49.7	50°42.7	13.3	-6°47.0	10.2	55.8
18	86°30.6	-11°48.8	65°15.0	13.3	-6°36.7	10.3	55.8
19	101°30.6	-11°47.9	79°47.4	13.3	-6°26.4	10.3	55.8
20	116°30.7	-11°47.0	94°19.7	13.3	-6°16.1	10.4	55.9
21	131°30.7	-11°46.1	108°52.1	13.3	-6°05.7	10.4	55.9
22	146°30.8	-11°45.3	123°24.4	13.3	-5°55.3	10.4	55.9
23	161°30.8	-11°44.4	137°56.8	13.3	-5°44.9	10.5	55.9
	SD.=16.2	d=0.9			S.D.=15.1		

Lat.	Twilight		Sunrise	Sunset	Twilight	
	Naut.	Civil			Civil	Naut.
72	06:10	07:30	08:48	15:42	16:60	18:20
70	06:09	07:21	08:29	16:01	17:09	18:21
68	06:08	07:13	08:14	16:15	17:16	18:22
66	06:07	07:07	08:02	16:27	17:23	18:23
64	06:06	07:01	07:52	16:38	17:28	18:24
62	06:04	06:56	07:43	16:46	17:33	18:25
60	06:03	06:52	07:36	16:54	17:37	18:26
58	06:02	06:48	07:29	17:00	17:41	18:27
56	06:01	06:45	07:23	17:06	17:45	18:28
54	06:00	06:41	07:18	17:11	17:48	18:29
52	05:59	06:38	07:13	17:16	17:51	18:30
50	05:58	06:36	07:09	17:20	17:53	18:31
45	05:55	06:30	06:60	17:29	17:59	18:34
40	05:52	06:24	06:52	17:37	18:05	18:36
35	05:50	06:19	06:45	17:44	18:09	18:39
30	05:47	06:15	06:39	17:49	18:14	18:42
20	05:40	06:06	06:29	17:60	18:22	18:48
10	05:33	05:58	06:19	18:09	18:30	18:55
0	05:25	05:50	06:11	18:17	18:39	19:03
-10	05:15	05:40	06:02	18:26	18:48	19:13
-20	05:03	05:29	05:52	18:36	18:58	19:25
-30	04:47	05:16	05:41	18:47	19:11	19:41
-35	04:36	05:08	05:35	18:53	19:19	19:51
-40	04:24	04:59	05:27	19:00	19:29	20:03
-45	04:09	04:47	05:19	19:09	19:40	20:18
-50	03:49	04:33	05:08	19:19	19:54	20:38
-52	03:39	04:26	05:03	19:24	20:01	20:47
-54	03:28	04:18	04:58	19:29	20:08	20:58
-56	03:14	04:10	04:52	19:35	20:17	21:11
-58	02:59	03:60	04:45	19:41	20:26	21:27
-60	02:39	03:48	04:37	19:49	20:37	21:45

Lat.	Moonrise			Moonset		
	Thu	Fri	Sat	Thu	Fri	Sat
72	09:37	09:21	09:08	14:34	16:27	18:15
70	09:05	09:00	08:56	15:05	16:46	18:25
68	08:41	08:44	08:46	15:28	17:00	18:33
66	08:22	08:31	08:38	15:46	17:12	18:40
64	08:07	08:21	08:31	16:00	17:22	18:45
62	07:54	08:11	08:25	16:12	17:30	18:50
60	07:43	08:03	08:20	16:23	17:38	18:55
58	07:34	07:56	08:16	16:31	17:44	18:58
56	07:26	07:50	08:11	16:39	17:49	19:02
54	07:18	07:45	08:08	16:46	17:54	19:05
52	07:12	07:40	08:04	16:52	17:59	19:07
50	07:06	07:35	08:01	16:58	18:03	19:10
45	06:53	07:25	07:55	17:10	18:12	19:15
40	06:42	07:17	07:49	17:20	18:19	19:19
35	06:33	07:10	07:44	17:28	18:25	19:23
30	06:25	07:03	07:40	17:36	18:31	19:26
20	06:11	06:52	07:32	17:48	18:40	19:32
10	05:59	06:43	07:26	17:59	18:48	19:37
0	05:47	06:34	07:20	18:10	18:56	19:42
-10	05:36	06:25	07:14	18:20	19:04	19:46
-20	05:23	06:15	07:07	18:31	19:12	19:51
-30	05:09	06:04	06:59	18:43	19:21	19:57
-35	05:01	05:58	06:55	18:51	19:26	19:60
-40	04:52	05:50	06:50	18:59	19:32	20:03
-45	04:41	05:42	06:44	19:08	19:39	20:07
-50	04:28	05:32	06:38	19:19	19:47	20:12
-52	04:21	05:27	06:34	19:25	19:51	20:15
-54	04:14	05:22	06:31	19:30	19:55	20:17
-56	04:07	05:16	06:27	19:37	19:60	20:20
-58	03:58	05:09	06:23	19:44	20:05	20:23
-60	03:48	05:02	06:18	19:52	20:10	20:26

Day	Sun			Moon		
	Eqn.of Time		Mer.	Mer.Pass.		Age
	00^h	12^h	Pass	Upper	Lower	
15	14:08	14:06	12:14	11:58	00:21	29(0%)
16	14:05	14:03	12:14	12:44	00:21	1(0%)
17	14:01	13:59	12:13	13:30	01:07	2(3%)

Pour chacun de nombreux astres sont donnés heure par heure le GHA et la déclinaison (il faudra donc effectuer des interpolations pour les temps intermédiaires). Pour les étoiles fixes on donne le GHA pour Aries, et pour les autres étoiles on donne le SHA (sideral hourly angle) c'est à dire la différence de longitude entre l'étoile en question et Aries, et qui donc ne varie pas rapidement avec le temps. Ainsi pour avoir le GHA d'une étoile à une heure donnée il faut ajouter son SHA au GHA d'Aries. La table donne d'autres informations comme le semi–diamètre du Soleil SD, le semi–diamètre le la Lune, ou la différence entre le midi de Greenwich (le moment où le soleil est à la verticale du méridien) et le 12h du temps universel valant 14' en bas à droite.

Ainsi à une heure précisément donnée, on peut connaître la déclinaison exacte D de l'astre et l'angle exact P, le LHA. Dans le triangle sphérique NBC (où A = N) on peut alors déterminer exactement la distance entre B et C et l'angle au sommet entre BC et BN. Comme on le voit sur le dessin l'arc $a = \widehat{\mathrm{BC}}$ vaut $\pi/2 - H$ où H est l'angle sous lequel on voit l'astre par rapport au plan horizontal en B, c'est à dire l'angle entre l'horizon et la visée de l'astre que fournit le sextant avec une précision théorique de l'ordre de une minute. Cet angle s'appelle hauteur de l'astre. En outre on peut déterminer l'angle en B entre les arcs $\widehat{\mathrm{BA}}$ et $\widehat{\mathrm{BN}}$, c'est à dire l'angle sous lequel on voit en B l'astre par rapport au Nord. Cet angle s'appelle l'azimut de l'astre et est noté Z. Il est mesurable avec une précision médiocre avec une boussole, et est calculable aisément avec une précision suffisante de 1 degré. Il s'identifie à l'angle β ci-dessus. Appliquant les formules de cosinus on a de suite, avec $a = \pi/2 - H, b = \pi/2 - D, c = \pi/2 - L, \alpha = P, \beta = Z$ le hauteur H :

$$H = \arcsin\left(\sin D \sin L + \cos D \cos L \cos P\right)$$

puis connaissant H, on a l'azimut :

$$Z = \arccos \frac{\sin D - \sin L \times \sin H}{\cos L \times \cos H}$$

Avec une calculatrice qui calcule sur 10 chiffres il n'y a pas de problème pour obtenir H et Z avec 4 chiffres significatifs quelles que soient les singularités du calcul, à condition de garder les valeurs intermédiaires dans la mémoire de la calculatrice et de ne pas les tronquer. Avec un calcul à la main c'est moins évident.

Notons qu'il existe une formule permettant de calculer l'azimut sans passer par le calcul de la hauteur. On utilise la formule des cotangentes :

$$\sin c \cot b = \sin \alpha \cot \beta + \cos a \cos c$$

avec $\alpha = P, \beta = Z, c = \pi/2 - L, b = \pi/2 - D$, ce qui donne :

$$\cot Z \sin P = \tan D \cos L - \cos P \sin L$$

2.2 Utilisation du sextant.

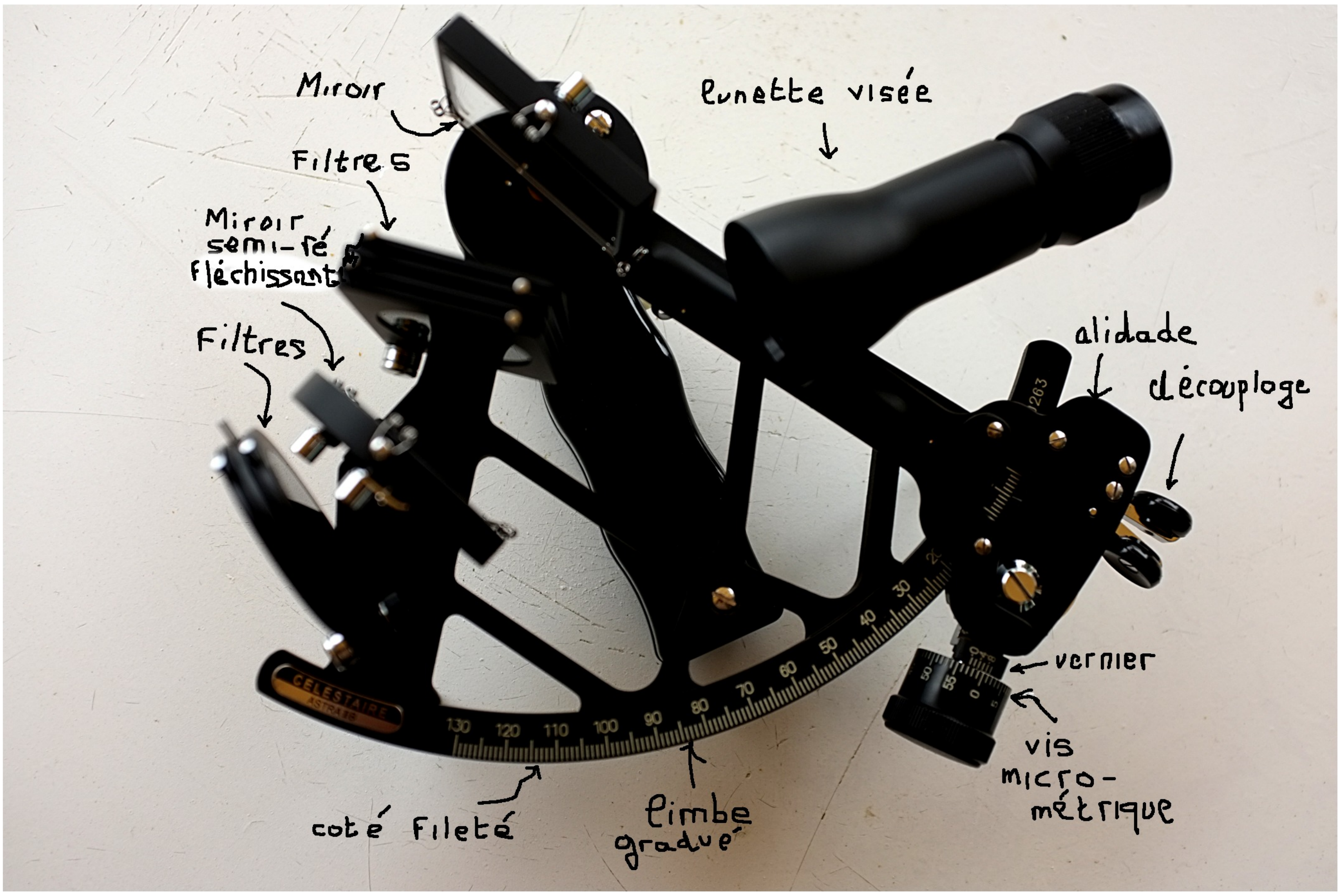
2.2.1 Principes.

Le sextant est un instrument possédant deux miroirs, l'un est fixe et semi–réfléchissant et l'autre tourne avec le déplacement de l'alidade. Il en résulte un déplacement du rayon lumineux correspondant à deux fois celui de l'alidade, voir le dessin. Quand les miroirs sont parallèles on vise l'horizon. Si on tourne le miroir d'un angle α pour observer l'astre à une hauteur H on voit que l'angle entre la normale au miroir et la ligne verticale est $\pi/4+\alpha$ donc la symétrique par rapport à la normale fait encore un angle $\pi/4+\alpha$, si bien que la direction de l'astre fait un angle $\pi/2+2\alpha$ avec la verticale, et donc un angle 2α avec l'horizontale. Les graduations du limbe du sextant sont donc en fait des demi-degrés, c'est ce qui permet de mesurer des hauteurs jusqu'à 120 degrés avec un arc faisant un peu plus de 60 degrés.

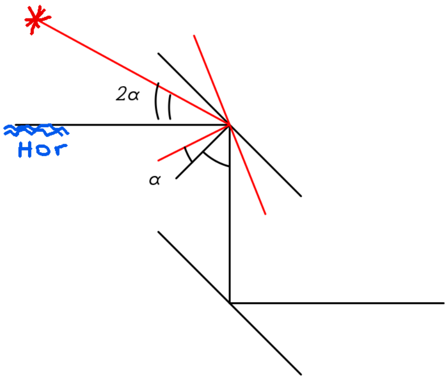
Le principe de la mesure est donc de viser l'horizon à travers le miroir semi–réfléchissant, dégager l'alidade et la pousser jusqu'à faire apparaître l'astre au niveau de l'horizon, engager la vis micrométrique et parfaire le réglage. On doit balancer le sextant pour s'assurer qu'il est bien vertical, si bien que l'image de l'astre est la plus basse possible. Pour un astre non ponctuel, on règle de façon à obtenir la tangence du "limbe" supérieur ou inférieur, et on ajuste en ajoutant ou soustrayant le semi–diamètre de l'astre. Quand le réglage est parfait on note immédiatement l'heure exacte, à la seconde prés. On peut ensuite lire l'indication de hauteur, d'abord les degrés sur le limbe, puis les minutes sur le tambour micrométrique, éventuellement les dixièmes de minute sur le vernier du tambour. Il faut ensuite appliquer les corrections expliquées ci–dessous pour obtenir la hauteur mesurée correcte au point où on se trouve. On peut alors comparer à la hauteur calculée exactement par la trigonométrie sphérique à partir de la position supposée B et de l'heure mesurée, et en déduire la valeur de l'intercept. Le sextant porte des filtres colorés permettant de masquer la lumière trop forte du soleil devant les deux miroirs. Les filtres sont de force variable ce qui permet d'ajuster à une égale luminosité les images directes et réfléchies sur le miroir semi–réfléchissant. Sans celà l'une des deux images peut être difficilement visible.

A terre on peut aussi utiliser le sextant, mais cette fois on utilise un horizon artificiel constitué par une cuve d'eau. Cette fois au lieu de viser l'horizon on vise le reflet du soleil dans la cuve, et comme précédemment on avance l'alidade pour amener l'image du soleil sur le reflet. On utilise encore la tangence du limbe inférieur de l'image du soleil et du limbe supérieur du reflet. Cette tangence est facile à observer, et la verticalité du sextant est aussi facile à déterminer car les deux images du soleil doivent être alignées verticalement. Il faut noter que dans cette mesure la direction horizontale est médiatrice des rayons issus directement du soleil ou via le reflet, et l'écart angulaire que l'on mesure est donc le double de la hauteur du soleil. En ce qui concerne les corrections ci–dessous il ne faut pas appliquer la correction "dip" car ici l'horizon est exact. Par contre la réfraction a lieu pour le rayon direct ainsi que celui issu du reflet. Il faut donc retirer R à la hauteur mesurée (à la moitié de l'indication du sextant).

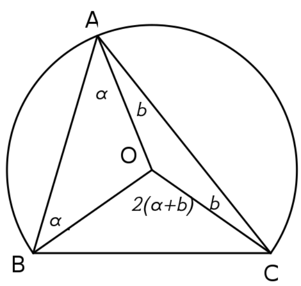
Enfin on peut utiliser le sextant horizontalement pour déterminer l'écart angulaire entre deux amers au bord de la côte et plus généralement pour déterminer la distance angulaire entre deux astres, particulièrement entre la lune et une étoile. La lune tournant de manière régulière alors que l'étoile est fixe, ceci permet de connaître l'heure de façon précise et de recaler l'horloge de bord qui ne serait pas assez précise. L'astronome Nevil Maskelyne avait préparé des tables à cet usage, et les marins ont utilisé cette méthode tard dans le 19^{eme} siècle, car les horloges précises étaient très onéreuses.



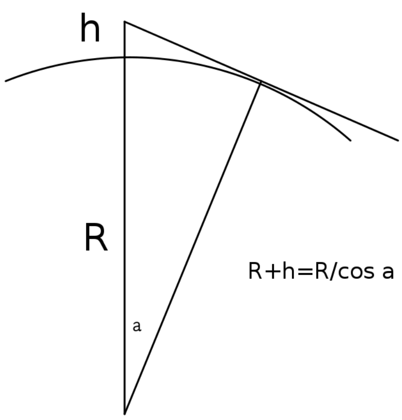
Mesure de hauteur



Arc capable



Dip



En conclusion, le sextant est un instrument précis, qui permet des mesures angulaires de 1' sur plus de 60 degrés, c'est à dire mieux que 3/10000. Ses miroirs doivent donc être parfaitement plans, et parfaitement réglables, les filtres colorés doivent être parfaitement plans, le bâti doit être parfaitement rigide, et surtout le limbe gradué avec beaucoup de précision, 1 degré occupe environ 1,4 mm sur le limbe, et se trouve subdivisé en 60' par la vis micrométrique, il faut donc une précision de la graduation au 1/100 de mm, idem pour le crantage du limbe sur lequel s'appuie la vis micrométrique sans fin. De telles précisions sont aisément à la portée des machines modernes mais devaient être difficiles à atteindre autrefois. L'optique de la lunette et le tain des miroirs doivent être de qualité pour permettre une bonne visée.

2.2.2 Corrections.

La hauteur mesurée par le sextant doit être corrigée de plusieurs effets, erreur de calibrage, dip, réfraction, avant d'obtenir la valeur mesurée correcte. L'erreur de calibrage consiste en ce que le zéro du sextant, c'est à dire la position où les deux miroirs sont parallèles et un objet distant n'est pas vu dédoublé par le miroir semi–réfléchissant, ne correspond pas exactement au zéro de la vis micrométrique. Si c'est le cas et s'il n'est pas possible d'améliorer le réglage des miroirs, il est toujours possible d'ajouter ou soustraire systématiquement le décalage observé au zéro, ce qui corrige l'erreur de mesure.

L'erreur de "dip" ou de plongée correspond à ce que l'oeil de l'observateur étant à une certaine hauteur h au dessus du niveau de la Terre, l'horizon observé apparaît plus bas d'un angle α et Il faudra donc soustraire α à la hauteur H de l'astre. Selon le dessin on a $R+h = R/\cos\alpha$, comme h est petit $R/(R+h) = 1-h/R$ et $\cos\alpha = 1-\alpha^2/2$ d'où $\alpha = \sqrt{2h/R}$, en radians. En degrés ceci donne $180/\pi\sqrt{2/R} = 0.0321\sqrt{h}$ numériquement. Soit en minutes le dip vaut $1.926\sqrt{h}$ avec h en mètres. Pour une valeur raisonnable de h = 2m ceci donne 2.72' ce qui est loin d'être négligeable quand on demande une précision à la minute. Si on est placé à une hauteur importante la correction devient considérable, et il n'est pas évident d'avoir une valeur fiable de la hauteur h au dessus de la mer. Notons que si on utilise le sextant avec un horizon artificiel, aucune correction de dip n'est à appliquer.

L'erreur de réfraction vient de ce que les rayons venant de l'astre sont courbés par la densité variable de l'atmosphère et l'astre paraît donc plus haut que ce qu'il n'est réellement. Il est évidemment difficile de calculer la trajectoire exacte du rayon, mais il existe des formule empiriques permettant d'évaluer cet effet. Une formule récente (G.G. Bennett, 1982, Journal of the institute of Navigation) est :

$$R = \cot\left(H + \frac{7.31}{H+4.4}\right)$$

où H est la hauteur apparente de l'astre en degrés, et la correction est en minutes. Par exemple pour H = 20 degrés, la réfraction est de 2'44", pour 45 degrés elle est de 1' et au delà elle est faible, mais pour les petits angles elle est très importante, comme 10' pour 5 degrés. Voir une discussion approfondie dans https ://sites.google.com/site/miragesetrefraction/2—refraction-astronomique.

En outre comme l'effet dépend de la densité, cette formule est valable pour une pression de 1010 hpa et une température de 10 degrés soit 283 Kelvins, et doit être multipliée par $(P/P_0)(T_0/T) = 0.28P/(t+273)$ numériquement pour d'autres valeurs de P et T en application de $PV = nRT$ comme la densité est comme $1/V$. Une fois R calculé et corrigé il faut la soustraire à la hauteur mesurée.

Ce n'est pas tout, pour des astres de fort diamètre apparent, Soleil, Lune, on observe le moment où l'astre est vu tangent à l'horizon dans le sextant, soit vers le haut soit vers le bas, car il est difficile d'apprécier la position du centre. Il faut donc ajouter le semi–diamètre si on observe la tangence du limbe inférieur (il faudrait augmenter H pour amener le centre sur l'horizon) et le soustraire pour le limbe supérieur. Le semi–diamètre est typiquement de l'ordre de 16' pour le Soleil et 14' pour la Lune et figure dans l'éphéméride.

Et enfin pour les astres proches de la Terre, typiquement la Lune il faut tenir compte de l'erreur de parallaxe qui vient de ce qu'on observe à partir de la surface de la Terre et non pas du son centre ce qui fausse la mesure angulaire. L'astre paraît plus bas que ce qu'il est vu du centre et il faut donc ajouter la correction de parallaxe. Cette correction est tabulée dans l'almanach nautique compact à la colonne HP. Elle est de l'ordre de 56' et change légèrement au cours du temps à cause de l'ellipticité de la trajectoire de la Lune.

En conclusion il existe de nombreuses corrections dont chacune peut être de plusieurs minutes, chacune est déterminée avec beaucoup d'incertitudes, il est donc quelque peu aléatoire d'avoir une précision de 1' sur la mesure de hauteur, 5' est sûrement très bien.

2.3 La méthode de la droite de hauteur.

Cette méthode est due à Marc de Saint Hilaire (1875) et au physicien Lord Kelvin. Pour une hauteur donnée, l'angle de OB avec la direction de l'astre est constant : $\pi/2 - H$. La droite OB génère donc un cône de pointe en O, et sa trace sur la Terre est un cercle, le cercle de hauteur. En général le pied de l'astre est à plusieurs milliers de milles de la position B du vaisseau (estimée ou proche) alors qu'on recherche une position à quelques milles prés. On peut donc remplacer ce cercle par un segment de droite localement, appelé droite de hauteur. Comme on connaît la direction de l'astre, l'azimut Z, ce segment de droite est perpendiculaire à la direction de l'astre, et la seule question est de connaître sa position exacte, c'est à dire la distance entre B et le segment, mesurée le long de l'azimut BC. Cette distance s'appelle l'intercept.

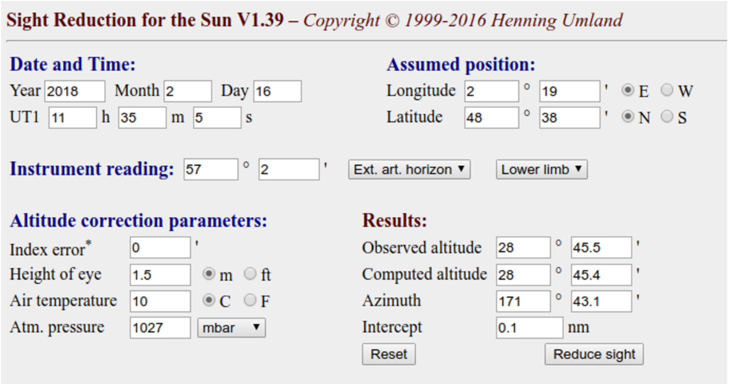
Or on connaît la hauteur exacte Hex de l'astre à partir de B, donnée par les formules de hauteur ci-dessus utilisant l'éphéméride. Et le sextant permet de mesurer Hmes avec une précision de l'ordre de 1' soit un mille. Aussi bien Hex que Hmes sont de l'ordre de 10^3 milles, tandis que la différence entre eux, due justement au fait que la position estimée de B n'est pas exacte est de l'ordre de quelques milles. La différence de deux grands nombres produisant un petit nombre est un cas classique de perte de précision, c'est pourquoi Hex doit être calculé précisément. Théoriquement on connait la différence à 1 mille prés, on peut donc tracer la droite de hauteur sur la carte : à partir du point choisi B on trace une droite selon l'azimut, on porte la différence (Hmes - Hex) sur cette droite. Si la différence est positive c'est qu'on est plus près de l'astre que B et on porte cette différence en direction de l'astre. Si (Hmes - Hex) est négative c'est qu'on est plus loin de l'astre que B et on porte la différence à l'opposé de l'astre. A partir du point porté on trace la perpendiculaire à la ligne d'azimut, c'est la droite de hauteur. A priori on sait que le navire est en fait sur cette droite. Si on refait le calcul de Hmes à partir d'un point de référence sur cette droite, la nouvelle valeur Hex sera égale à Hmes (localement bien sûr).

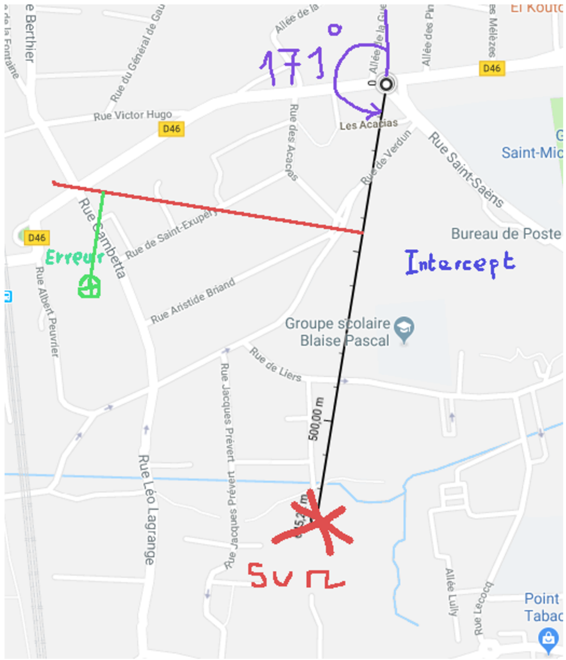
Pour connaître la position exacte de B il faut donc effectuer deux mesures de hauteur avec deux astres différents dont les azimuts sont distants si possible de plus de 45 degrés de façon que les droites de hauteur correspondantes s'intersectent nettement et la position exacte est alors leur point d'intersection. De jour on peut prendre deux mesures de hauteur du soleil à plusieurs heures d'écart. Le problème est alors que pendant ce temps le navire s'est translaté d'un vecteur estimé $\vec{V}$ il faut donc prendre l'intersection de la deuxième droite de hauteur avec la première translatée de $\vec{V}$. Évidemment le procédé souffre d'imprécision. De nuit on peut prendre deux étoiles suffisamment distantes à peu prés à la même heure, ce qui élude le problème du mouvement de B. Par contre il n'est plus évident de distinguer l'horizon. Par pleine lune on peut à la fois faire une mesure correcte de hauteur sur la lune et distinguer l'horizon.

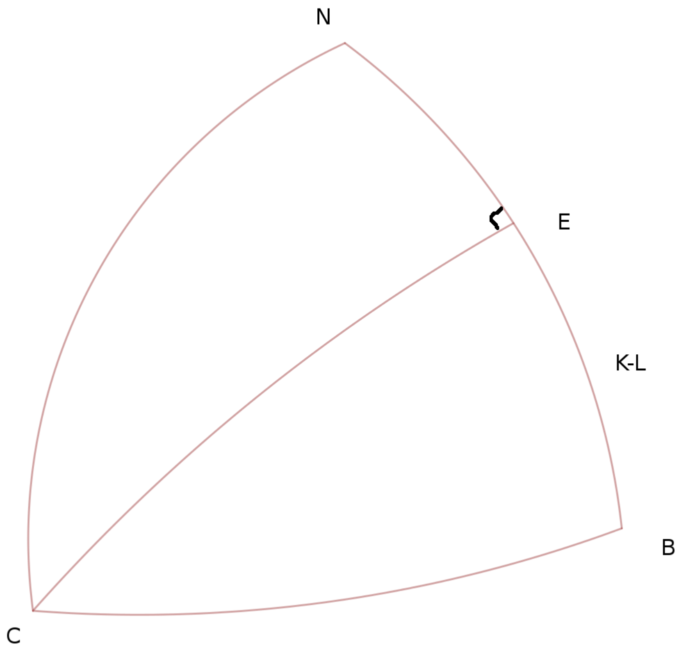
On peut faire le calcul de manière complètement automatique avec un programme informatique. Par exemple on peut utiliser le programme Sun Sight de Henning Umland qui calcule la position du Soleil et les corrections de sextant et donne l'azimut et l'intercept. L'intérêt est qu'il s'agit d'une page html comprenant un programme javascript qui fait tout le travail, mais est accessible de n'importe quel ordinateur ou téléphone portable et a une présentation claire ce qui n'est pas le cas général. Dans la suite on va évoquer les méthodes permettant de faire le calcul à la main avec efficacité.

2.4 Problèmes de signes et de précision.

Les formules fondamentales calculent H comme un arc sinus et Z comme un arc cosinus. Comme le cosinus est pair les angles θ et $2\pi - \theta$ ont le même cosinus. On peut donc être amené à remplacer Z -> 360 - Z. Apparemment la règle est que si Z <= 180 on remplace Z par 360 - Z. En ce qui concerne les éléments du calcul on note que P = GHA - Longitude, ce qui est une différence algébrique. Les deux quantités sont prises positivement vers l'Ouest et négativement vers l'Est, donc si elle ont des signes différents il s'agit d'une somme. Le signe global importe peu puisqu'on forme $\cos P$. Quand H est voisin de 90°, $\sin H$ varie peu avec H (la dérivée vaut $\cos H \simeq 0$ et donc H est mal défini par $\sin H$, la précision devient mauvaise. Dans le calcul de l'azimut, on doit prendre un arc cosinus, donc le même effet se produit si Z est voisin de 0 ou 180°. En outre il y a une division par $\cos L \cos H$ donc par presque zéro si L ou H sont voisins de 90°. Comme $|\cos Z| <= 1$ le numérateur $\sin D - \sin L \sin H$ doit aussi être petit, or $\sin L$ ou $\sin H$ sont voisins de ± 1 si bien que l'autre doit être voisin de $\pm D$. Le calcul se présente comme une forme 0/0 et il y a perte de précision. Les problèmes de signe se trouvent multipliés dans la métode des tables de Ageton (voir plus bas) car dans ce cas il devient impossible de distinguer θ et 3 autres valeurs $-\theta$ $\theta + \pi$ $-\theta + \pi$. Il vaut donc mieux se représenter la position du triangle NBC sur la sphère ...


Sight Reduction for the Sun V1.39 – Copyright © 1999-2016 Henning Umland
Date and Time:
Year 2018 Month 2 Day 16
UT1 11 h 35 m 5 s
Assumed position:
Longitude 2 ° 19 ' E W
Latitude 48 ° 38 ' N S
Instrument reading: 57 ° 2 '
Ext. art. horizon
Lower limb
Altitude correction parameters:
Index error* 0 '
Height of eye 1.5 m ft
Air temperature 10 C F
Atm. pressure 1027 mbar
Results:
Observed altitude 28 ° 45.5 '
Computed altitude 28 ° 45.4 '
Azimuth 171 ° 43.1 '
Intercept 0.1 nm
Reset
Reduce sight


171°
Intercept
Erreur
Sun
Rue Victor Hugo
Les Acacias
Rue Saint-Saëns
Bureau de Poste
Rue Gambetta
Rue Aristide Briand
Groupe scolaire Blaise Pascal
Rue de Liers
500,00 m
Rue Léo Lagrange
Rue Jacques Prévert
Point Tabac


N
E
K-L
B
C

2.5 Utilisation des haversines.

Nous avons déjà montré que le hauteur peut se calculer par la formule :

$$\operatorname{hav}\hat{H} = \operatorname{hav}(L-D) + \Big(1 - \operatorname{hav}(L-D) - \operatorname{hav}(L+D)\Big) \times \operatorname{hav}P$$

où $\hat{H} = \pi/2 - H$. Comme une précision de 1' sur H équivaut à une précision de 1 mille sur la position de la droite de hauteur, et aussi à la précision théorique du sextant, et comme la lecture de la table de haversines montre que cette précision correspond à la dernière décimale sur les 4 décimales de la table, on voit que, théoriquement il est possible en utilisant cette technique de faire le point avec la précision typique de quelques milles.

En ce qui concerne l'azimut, il existe une formule similaire, mais notons d'abord que la précision requise est moins grande, clairement on souhaite connaître l'azimut au degré près pour tracer la droite de hauteur, donc une précision de deux décimales est suffisante.

Partant de

$$\cos Z = \frac{\sin D - \sin L \times \sin H}{\cos L \times \cos H}$$

on note que $\cos L \cos H = (\cos(L-H) + \cos(L+H))/2 = 1 - \operatorname{hav}(L-H) - \operatorname{hav}(L+H)$ et $\sin L \sin H = (\cos(L-H) - \cos(L+H))/2 = -\operatorname{hav}(L-H) + \operatorname{hav}(L+H)$ Finalement, on introduit $\hat{D} = \pi/2 - D$ puis $\cos Z = 1 - 2\operatorname{hav}Z$ et $\sin D = 1 - 2\operatorname{hav}\hat{D}$. Réduisant tout, on trouve :

$$\operatorname{hav}Z = \frac{\operatorname{hav}(\pi/2 - D) - \operatorname{hav}(L-H)}{1 - \operatorname{hav}(L-H) - \operatorname{hav}(L+H)}$$

La seule opération à faire est une division gardant deux chiffres significatifs, ce qui est vite fait. Il existe un procédé encore plus rapide, utilisant une abaque créée par Hanno Ix :

On l'utilise de la manière suivante : on commence par porter la déclinaison D à droite et on trace une droite horizontale, puis l'angle LHA, c'est à dire P en haut et on trace une droite verticale. L'intersection des deux droites définit un point A sur une ligne de l'abaque. On porte alors l'altitude H à gauche et on trace une droite horizontale qui coupe la même ligne de l'abaque en un point B. De celui ci on trace une ligne verticale et on lit en bas l'azimut Z. Manifestement ceci suffit pour une précision de 1 degré.

Pour comprendre ce diagramme notons que la loi des sinus appliquée au triangle NBC donne, avec les notations ci-dessus et les angles en N et B :

$$\frac{\sin Z}{\sin \hat{D}} = \frac{\sin P}{\sin \hat{H}}$$

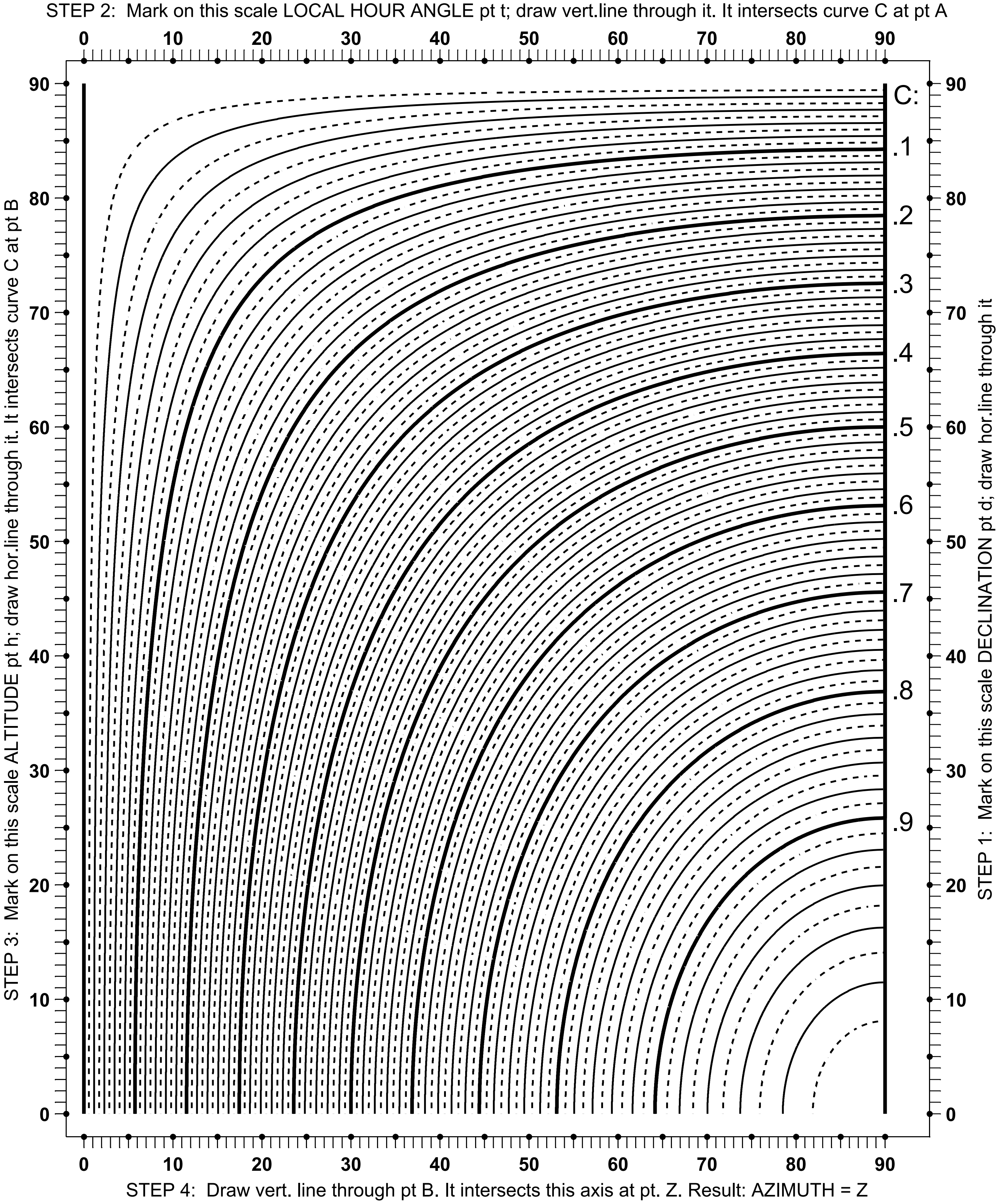
soit encore :

$$\sin Z \cos H = \sin P \cos D$$

Les lignes figurant sur le diagramme sont des lignes où le produit $\sin x \cos y$ est constant, pour des axes d'origine en bas à gauche. Le produit tend donc vers 0 dans la zone en haut à gauche et tend vers 1 dans la zone en bas à droite. Les échelles verticales droite et gauche indiquent des cosinus, les échelles horizontales haute et basse indiquent des sinus, donc rester sur la même courbe implique $\sin Z \cos H = \sin P \cos D$, puisque Z et P sont mesurés horizontalement, et H et D verticalement. Le diagramme peut être recréé aisément avec un logiciel de calcul formel, par exemple avec maxima

```
draw3d(explicit(sin(%pi/180*x)*cos(%pi/180*y),x,0,90,y,0,90),
grid = [10,10],
contour_levels = [0,.01,1],contour = map
)$
draw_file(terminal = eps,dimensions=[5000,5000],file_name = "azidi")$
```

Quelques expériences montrent que ce diagramme fonctionne très bien et rapidement. Évidemment il y a des zones de perte de précision, par exemple si B et C sont près du pôle il y a clairement une forte indétermination de la ligne d'azimut. Le diagramme originel de Hanno Ix est joint, car il est particulièrement lisible.



H.Dx

Azimuth by Graphical Method

2.6 Tables de Ageton.

L'idée de la méthode (Lord Kelvin) est de subdiviser le triangle de navigation NBC en deux triangles NEC et BEC où E est choisi sur le méridien NB de façon que l'angle (EC,EN) soit de $\pi/2$, autrement dit les plans ONB et OCE sont perpendiculaires le long de OE, et d'appliquer les formules des sinus et cosinus à ces deux triangles. Avec un angle droit les formules se simplifient.

Soit R la longueur de $\widehat{\mathrm{CE}}$ c'est à dire l'angle (OC,OE). D'autre part on utilise les sécantes et cosécantes définies ainsi :

$$\sec\theta = 1/\cos\theta \quad \csc\theta = 1/\sin\theta$$

— Relation des sinus dans le triangle NEC :

$$\frac{\sin\pi/2}{\sin\hat{D}} = \frac{\sin P}{\sin R}$$

où $\hat{D} = \pi/2 - D$ comme d'habitude. Soit : :

$$\csc R = \csc P \times \sec D$$

— Relation des cosinus dans le triangle NEC :

$$\cos\hat{D} = \cos R \cos\hat{K}$$

soit

$$\csc K = \frac{\csc D}{\sec R}$$

Ceci permet de calculer successivement en fonction des données R puis K.

— Relation des cosinus dans le triangle BEC : se rappelant que l'arc BC a pour longueur $\pi/2 - H = \hat{H}$ et que l'arc BE a pour longueur K-L on a :

$$\cos\hat{H} = \cos R \cos(K - L)$$

soit encore :

$$\csc H = \sec R \times \sec(K - L)$$

ce qui donne la valeur de la hauteur H. Finalement

— Relation des sinus dans le triangle BEC :

$$\frac{\sin\pi/2}{\sin\hat{H}} = \frac{\sin Z}{\sin R}$$

ce qui s'écrit :

$$\csc Z = \frac{\csc R}{\sec H}$$

ce qui détermine l'azimut Z.

A chaque étape il faut calculer un produit ou un quotient, donc Ageton a créé une table avec les logarithmes des sécantes et cosécantes et réécrit les relations ci-dessus (aprés avoir pris les valeurs absolues) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\log\csc R &= \log\csc P + \log\sec D \\
\log\csc K &= \log\csc D - \log\sec R \\
\log\csc H &= \log\sec R + \log\sec(K-L) \\
\log\csc Z &= \log\csc R - \log\sec H
\end{aligned}$$

de sorte qu'il y a uniquement 4 additions ou soustractions à effectuer. Par contre il faut consulter la table 12 fois. La table présente les log sécantes et log cosecantes (logarithmes décimaux) des angles de 0 à 180 degrés multipliés par 100000. Pour chaque degré il y a des données appelées A ou B, qui sont $A(\theta) = \log|\csc\theta|$ et $B(\theta) = \log|\sec\theta|$. La page en exemple correspond aux degrés de 10° 0' à 10° 60' soit 11° mais sert aussi pour les complémentaires de 79° 0' (en partant du bas) jusqu'à 79° 60'= 80° avec évidemment interchange de A et B. Ceci est indiqué par les positions de A et B en haut et en bas. En outre ces valeurs servent aussi pour les valeurs entre 90° et 180° en utilisant le fait que $\sin(\pi/2+\theta) = \cos\theta$ et $\cos(\pi/2+\theta) = -\sin\theta$, et donc les relations similaires pour les inverses, ce qui correspond à un simple interchange de A et B. Finalement chaque page comprend les valeurs pour 5 degrés, ici de 10° à 14°. Par exemple pour 11° 6' on a A = 71552 et B = 820, tandis que pour 101° 6' on a A = 820 et B = 71552. Les mêmes valeurs correspondent à 78° 54'. Il faut par contre tenir compte soigneusement des signes. En particulier dans le calcul de K-L qui se transforme en K+L si les signes sont opposés. La règle est qu'on donne à K le même signe que la déclinaison D. En effet il est évident que l'astre C et le point E sont dans le même hémisphère. Donc si L est Nord et D est Sud il faut prendre la somme de |K| et |L|. Il faut aussi réduire le LHA=P entre -180 et +180 degrés. Finalement pour exprimer l'azimut, il faut d'abord lire la table par le bas et ensuite il y a 4 cas :

— Z -> Z si L est Nord et P est Est
— Z -> 180 - Z si L est Sud et P est Est
— Z -> 180 + Z si L est Sud et P est Ouest
— Z -> 360 - Z si L est Nord et P est Ouest

On calcule donc successivement $A(P)$, $A(D)$ et $B(D)$ sur la même ligne, puis $A(R) = A(P) + B(D)$ et $B(R)$ sur la même ligne. Ensuite $A(K) = A(D) - B(R)$ dont on tire K et on calcule K-L avec vigilance sur le signe. On forme alors $B(K-L)$ et $A(H) = B(K-L) + B(R)$ d'où on tire H. De là $A(Z) = A(R) - B(H)$ d'où Z qu'on normalise correctement.

On trouve des tables de Ageton qui ont été recalculées récemment, sous forme compacte similaire à ce qui a été décrit ci-dessus (5 chiffres significatifs) et sous forme détaillée avec 6 chiffres significatifs et calculées pour les dixièmes de minutes (voir https ://www.celnav.de/page3.htm) ce qui permet de traîter avec plus de sûreté les zones où la méthode se trouve imprécise (P et D aux environs de 90 degrés, K entre 82 et 98 degrés). Dans ces zones on a des sommes de termes très grands avec des petits d'où perte de précision. Il semble que ces tables permettent de faire tous les calculs avec une précision aussi bonne qu'un calculatrice, mais il faut prendre garde à tous les signes ... En outre la table est assez volumineuse et les recherches dans la table sont fastidieuses et propices à erreurs. L'utilisation directe de la calculatrice est bien plus rapide et sûre, tandis que la méthode des haversines est une solution de secours qui marche bien, avec des tables très compactes et d'utilisation facile.

t AND K ARE BOTH GREATER OR BOTH LESS THAN 90°.

Z IS LESS THAN 90° ONLY WHEN K HAS THE SAME NAME AND IS GREATER THAN **L.**

	A 10°	B	A 11°	B	A 12°	B	A 13°	B	A 14°	B	
	B 100°	A	B 101°	A	B 102°	A	B 103°	A	B 104°	A	
00	76033	565	71940	805	68212	960	64791	1128	61632	1310	60
01	75961	667	875	808	153	962	737	131	582	313	59
02	890	669	810	810	093	965	682	133	531	316	58
03	819	672	746	813	034	968	627	136	481	319	57
04	747	674	681	815	67975	970	573	139	430	322	56
05	75676	676	71616	818	67916	973	64519	1142	61380	1325	55
06	605	678	552	820	857	976	464	145	330	329	54
07	534	681	488	823	798	978	410	148	279	332	53
08	464	683	423	825	739	981	356	151	229	335	52
09	393	685	359	828	681	984	302	154	179	338	51
10	75323	687	71295	830	67622	987	64248	1157	61129	1341	50
11	252	690	231	833	563	989	194	160	079	344	49
12	182	692	167	835	505	992	140	163	029	348	48
13	112	694	104	838	447	995	086	166	60979	351	47
14	042	696	040	840	388	998	032	169	929	354	46
15	74972	699	70976	843	67330	1000	63978	1172	60879	1357	45
16	902	701	913	845	272	003	925	175	830	360	44
17	832	703	850	848	214	006	871	178	780	364	43
18	763	706	786	850	156	009	818	181	730	367	42
19	693	708	723	853	098	011	764	184	681	370	41
20	74624	710	70660	855	67040	1014	63711	1187	60631	1373	40
21	555	712	597	858	66982	017	658	190	582	377	39
22	486	715	534	860	925	020	605	193	533	380	38
23	417	717	471	863	867	022	551	196	483	383	37
24	348	719	409	865	810	025	498	199	434	386	36
25	74279	722	70346	868	66752	1028	63445	1202	60385	1390	35
26	210	724	284	870	695	031	392	205	336	393	34
27	142	726	221	873	638	033	340	208	287	396	33
28	073	729	159	876	580	036	287	211	238	399	32
29	005	731	097	878	523	039	234	214	189	403	31
30	73937	733	70034	881	66466	1042	63181	1217	60140	1406	30
31	869	736	69972	883	409	045	129	220	091	409	29
32	801	738	910	886	353	047	076	223	042	412	28
33	733	740	849	888	296	050	024	226	59994	416	27
34	665	743	787	891	239	053	62972	229	945	419	26
35	73597	745	69725	894	66182	1056	62919	1232	59897	1422	25
36	530	748	664	896	126	059	867	235	848	426	24
37	462	750	602	899	069	062	815	238	800	429	23
38	395	752	541	901	013	064	763	241	751	432	22
39	328	755	479	904	65957	067	711	244	703	435	21
40	73261	757	69418	907	65900	1070	62659	1247	59654	1439	20
41	194	759	357	909	844	073	607	250	606	442	19
42	127	762	296	912	788	076	555	254	558	445	18
43	060	764	235	914	732	079	503	257	510	449	17
44	72993	767	174	917	676	081	451	260	462	452	16
45	72927	769	69113	920	65620	1084	62400	1263	59414	1455	15
46	860	771	053	922	564	087	348	266	366	459	14
47	794	774	68992	925	509	090	297	269	318	462	13
48	727	776	932	928	453	093	245	272	270	465	12
49	661	779	871	930	398	096	194	275	222	469	11
50	72595	781	68811	933	65342	1099	62142	1278	59175	1472	10
51	529	783	750	936	287	102	091	281	127	475	09
52	463	786	690	938	231	104	040	285	079	479	08
53	398	788	630	941	176	107	61989	288	032	482	07
54	332	791	570	944	121	110	938	291	58984	485	06
55	72266	793	68510	946	65066	1113	61887	1294	58937	1489	05
56	201	796	451	949	011	116	836	297	889	492	04
57	136	798	391	952	64956	119	785	300	842	495	03
58	070	800	331	954	901	122	734	303	795	499	02
59	005	803	272	957	846	125	683	306	748	502	01
60	71940	805	68212	960	64791	1128	61632	1310	58700	1506	00
	B 79°	A	B 78°	A	B 77°	A	B 76°	A	B 75°	A	
	A 169°	B	A 168°	B	A 167°	B	A 166°	B	A 165°	B	

2.7 Exemple.

On traite ici un exemple simple par les différentes méthodes. On prend une visée du soleil avec un horizon artificiel, à terre, et on prend pour point supposé un point identifié sur la carte (Google maps) voisin d'environ 1 km. Le point supposé B est de Lat = 48°38'16" N et de Long = 2°18'54" E. La mesure est faite à 16h13'10" temps local, soit 15h13'10" TU. On observe une hauteur de 32°49' quand le limbe inférieur du soleil est tangent au limbe supérieur du reflet. La hauteur d'oeil est de 1m, la température de 8° et la pression de 1021 mb.

La solution la plus rapide et la plus sûre est évidemment le programme complètement automatique qui nous apprend que la hauteur observée est 16°37.5' la hauteur calculée 16°35' l'azimut 228° et l'intercept 0.5 milles nautiques. On est donc parfaitement compatibles avec les limites de précision de l'instrument. Notons que la hauteur observée tient compte des corrections de sextant et de semi–diamètre. en effet 32°49'/2 = 16°24' est inférieur de 13' à H obs. tandis que SD = 16'. Le programme a donc soustrait 5' pour la réfraction (noter qu'il n'y a pas de dip).

Passons aux méthodes manuelles. Il faut d'abord calculer la correction de sextant. La formule de réfraction donne 3.278' auquel se retranche la parallaxe. Le SD = 16.2' selon la table donc une correction nette de 3.1' qui finit par donner H = 16°37' comme valeur observée. Il existe une table des corrections d'altitude pour le soleil sur le site de l'almanach nautique, qui donne bien une correction de 13' pour une hauteur de 16° et l'observation du limbe inférieur, ceci tenant compte de tous les effets sauf le dip.

Le calcul avec la calculatrice et les formules basiques redonne évidemment le résultat ci-dessus avec quelques erreurs d'arrondi. Pour éviter celles–ci on a intérêt à stocker les données dans les mémoires de la calculatrice, par exemple avec une Casio

```
L -> mém A
D -> mém B
P -> mém C
H -> mém D après calcul
```

et écrire les formules sous forme : $\sin(D) = \sin(A)\sin(B)+\cos(A)\cos(B)\cos(C)$ et donc $\arcsin(Rép)->D$ puis $\cos(Z) = (\sin(B) - \sin(A)\sin(D))/(\cos(A)\cos(D))$ de cette manière les résultats intermédiaires sont stockés avec la précision complète de la machine.

On trouve Z = 131° ce qui n'est pas correct. Il faut appliquer la règle de signe qui donne Z -> 360° -Z = 228°.

La méthode des haversines trouve la même hauteur de façon purement manuelle, rapidement et sans recherches de tables compliquées. L-D = 60°29' L+D = 36°47'. Noter que L et D sont de signe contraire et ça ne pose pas de problème.

$$\text{hav}\hat{H} = .2536 + (1 - .2536 - .0995) \times .1597 = .3569$$

donc $\text{hav}\hat{H} = 73°22'$ d'où H=17°38'. Le diagramme de Hanno Ix donne Z = 228° immédiatement sans problème.

La seule difficulté est la multiplication : la voici effectuée par la méthode traditionnelle et la méthode védique :

```
          6469                              6469
          1597                              1597
 -------------                             ------  "Papillons" 6 34 80 117
         45383                              6407..  puis 127
        58221                               3812..
       32345                                 11
       6469                                ------
     ---------                             10329 ..
      10330993
```

Par la méthode classique on calcule 4 chiffres inutiles. Pour la méthode védique la retenue (papillons > 100) a été posée sous la deuxième ligne. Si on s'arrête au papillon 117 on va trouver 1031. Si on tient compte de la centaine dans 127 on trouve 1032, et si on tient compte de la dizaine 10329 qui s'arrondit à 1033. En fait la différence ne se traduit pas par une grosse erreur dans l'angle.

En outre la méthode des haversines n'est pas propice aux erreurs de signe. Il faut seulement tenir compte du signe relatif de L et D. Ensuite l'haversine est paire et toujours positive, elle est définie modulo 360°, donc pas de normalisation particulière.

Finalement effectuons le calcul avec les tables de Ageton. Pour commencer il faut normaliser P entre -180° et +180°, ici P = 47°6'. On forme donc :

```
  A(P)  13517
+ B(D)    935       et on garde A(D) = 68750
--------------
A(R)    14452       et on garde B(R) = 15666

 A(D)   68750
-B(R)   15666
--------------
A(K)    53084       on lit  K = -17°8'  Sud même signe que D
                          Lat = +48°38' Nord
                          K-L =  65°46'
 B(K-l) 38674
+B(R)   15666
--------------
A(H)    54340       et on garde B(H) = 1852

 A(R)   14452
-B(H)    1852
--------------
A(Z)    12600
On lit sur la table H = 16°37' et Z = 131°. En fait Z doit être
renormalisé en 360° - Z soit Z = 229°. Aux erreurs d'arrondi
près c'est correct.
```

Les calculs sont faciles, le résultat est précis, mais il faut être très vigilant dans la lecture des tables, noter quand il faut lire à la fois A et B, ne pas faire d'errur de signe, etc. Comme la méthode utilise des $|\sin\theta|$ et $|\cos\theta|$ il n'est pas possible de distinguer entre θ et $\pm\theta \pm \pi$, et il faut donc fixer ces choses à partir de règles supplémentaires. Le signe relatif de K et L dans (K-L) est particulièrement traître. En outre la méthode devient imprécise prés des pôles et il faut soit appliquer une "recette" différente (la technique de Sadler) soit utiliser des tables plus volumineuses à 6 chiffres significatifs.

3 Le point près de la côte.

Prés de la côte connaître sa position à quelques milles près est absolument insuffisant pour des raisons de sécurité. Par contre si l'on peut observer des amers sur la côte et les identifier sur la carte il est possible d'obtenir la position exacte avec un sextant en mesurant la distance angulaire de deux amers. En effet, si on connaît l'angle γ sous lequel on voit les deux amers, alors on se trouve sur un cercle dont le centre est situé sur la médiatrice des amers, et les voit sous un angle 2γ, voir le dessin. Un triangle isocèle ayant ses angles de base égaux, l'angle (BAC) vaut $\alpha+\beta$ quand l'angle (BOC) vaut $2\pi-(\pi-2\alpha)-(\pi-2\beta)=2(\alpha+\beta)=2\gamma$.

Ainsi OA=OB si et seulement si l'angle en A vaut une valeur constante égale à la moitié de l'angle (BOC). Pour tracer l'arc de cercle il suffit de tracer la ligne BO formant un angle $\pi-\gamma$ avec BC et la ligne CO formant le même angle avec CB.

Le navire se trouve donc sur un arc de cercle appelé arc capable. Pour fixer sa position il faut observer simultanément un troisième amer, tracer un deuxième arc capable, il est alors à leur intersection.

On peut aussi déterminer la distance à la côte si on observe un objet élevé dont on connaît la hauteur (phare, etc.) et dont on distingue aussi bien le sommet que le pied. Si α est l'angle sous lequel on le voit et h sa hauteur, alors la distance est $h \cot \alpha$.

Les liens suivants fonctionnent à ce jour. Il est notoire que les liens ont une tendance inévitable à disparaître. Le sites www.celnav.de et www.siranah.de contiennent une foule de renseignements utiles. Le livre espagnol de Andrés Ruiz est aussi passionnant. L'article de Wikipedia sur la trigonométrie sphérique, écrit en large partie par David Madore est très bien. Il y a aussi un livre fort complet par P.Y. Creach.

Références

[1] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonométrie_sphérique

[2] https ://www.celnav.de/astro.zip

[3] https ://www.celnav.de/sunsight.htm
https ://www.celnav.de/moonsight.htm

[4] https ://sites.google.com/site/navigationalalgorithms/books

[5] http ://www.oceannavigator.com/July-August-2015/Ultra-compact-sight-reduction/

[6] http ://fer3.com/arc/m2.aspx/Azimuth-Diagram-better-copy-HannoIx-oct-2012-g20988

[7] http ://fer3.com/arc/m2.aspx/Table-De-Point-Miniature-R-Doniol-FrankReed-jul-2015-g32063

[8] http ://fer3.com/arc/m2.aspx/Longhand-Sight-Reduction-Bergman-nov-2014-g29441

[9] https ://thenauticalalmanac.com/
https ://thenauticalalmanac.com/2018 Nautical Almanac- compact version.pdf

[10] http ://www.siranah.de/html/sail040u.htm

[11] http ://fer3.com/arc/imgx/Ageton_01.pdf

[12] http ://pycreach.free.fr/archives/Trigonometrie spherique.pdf

[13] http ://fred.elie.free.fr/sextant.pdf