

TP 2

La loi en $1/\sqrt{n}$ de

réduction de l'écart-type par moyennage

Comment détecter l'effet de marée dû à la Lune avec un pendule simple?

Partie 1

Réduction de l'écart-type par moyennage

Si dans une expérience les facteurs qui font fluctuer le résultat de la mesure sont aléatoires et non corrélés, alors on peut améliorer la précision de la mesure en la répétant un grand nombre de fois et en prenant la moyenne. Cette méthode qui est capitale en physique sera illustrée par divers exemples dans cette séance.

1 Le raisonnement probabiliste

On fait une expérience E_2 consistant à mesurer deux fois la période d'un pendule par la même méthode. X_1 désigne la variable aléatoire correspondant au résultat obtenu lors de la première mesure et de même, X_2 désigne la variable correspondant au résultat de la seconde mesure. X_1 et X_2 sont donc des variables très similaires (mêmes moyenne, variance ou fonction densité) mais on les distingue par des indices spécifiques parce que leurs valeurs numériques sont différentes.

On désigne par X_m la variable aléatoire représentant la moyenne de ces 2 mesures: $X_m = (X_1 + X_2)/2$. Calculer l'écart-type $\sigma(X_m)$ en fonction de l'écart-type σ des X_i en précisant bien à chaque étape les hypothèses qui sont nécessaires. Puis généraliser ce résultat au cas d'une expérience E_n où on fait n mesures successives.

La mise en oeuvre statistique de l'expérience aléatoire précédente suppose qu'on répète un grand nombre de fois l'expérience E_2 (ou l'expérience E_n). C'est ce qu'on fait dans la question suivante.

2 Moyennage des mesures. Version 1: moyenne mobile sur intervalles adjacents

Les 40 mesures T_i de la période d'un pendule contenues dans le fichier "pend1.data" ont été obtenues par chronométrage manuel avec un chronomètre donnant le 1/100 de seconde. La valeur théorique de la période de ce pendule (donnée par la formule du pendule simple) est $T_0 = 3.5318$ s.

Comme nous sommes principalement intéressés par les fluctuations par rapport à cette valeur on commence par soustraire T_0 aux T_i . Pour simplifier, exprimez ces différences en millisecondes. Calculer l'écart-type $\sigma^{(1)}$ des $T'_i = T_i - T_0$ et représenter ces nombres sur un graphique G .

On peut faire des moyennes de ces 40 mesures par paquets de tailles croissantes. Par exemple, si on fait des paquets de 2, on fera successivement la moyenne des mesures (1, 2) soit $m_1^{(2)}$, puis (3, 4) soit $m_2^{(2)}$, et ainsi de suite jusqu'à (39, 40) qui donnera $m_{20}^{(2)}$.

Représentez les nombres $m_1^{(2)}, \dots, m_{20}^{(2)}$ sur le même graphique G .

En principe on devrait voir que leurs fluctuations sont moins fortes que celles des périodes initiales

T'_i .

Puis calculez l'écart-type des nombres $m_1^{(2)}, \dots, m_{20}^{(2)}$, soit $\sigma^{(2)}$. Selon la loi en $1/\sqrt{n}$ on devrait avoir: $\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)}/\sqrt{2}$. Est-ce bien le cas?

Afin de faire de même pour des paquets de 2, 8 et 16 mesures. écrivez et utilisez une fonction Matlab qui réalise ces opérations. A chaque fois, représentez les moyennes sur le graphique G et calculez leur écart-type.

En principe on devrait avoir: $\sigma^{(16)} = \sigma^{(1)}/4$, Est-ce le cas? Si ce n'est pas le cas, il faut noter que $\sigma^{(16)}$ a été calculé à partir de seulement 2 valeurs ce qui n'est guère satisfaisant. La méthode qu'on va voir dans la question suivante remédie à ce problème.

3 Moyennage des mesures. Version 2: moyenne mobile sur intervalles successifs (avec chevauchement)

La méthode de moyennage précédente a plusieurs inconvénients dont le principal est que le nombre des paquets diminue rapidement lorsque leur taille augmente. La méthode de moyenne mobile la plus couramment utilisée est celle qu'on va décrire maintenant.

Dans cette méthode on fait des paquets comprenant toujours un nombre impair de mesures. Prenons l'exemple de paquets de 3. On va déplacer une fenêtre ayant une largeur de 3 le long de la courbe des T'_i . Ainsi lorsque la fenêtre se trouve centrée en $i = 3$, on fera la moyenne: $m_3^{(3)} = (T'_2 + T'_3 + T'_4)/3$. Puis on fera glisser cette fenêtre vers des valeurs plus grandes de i . Bien sûr ce moyennage ne peut se faire que pour $i \geq 2$ et $i \leq 39$.

La différence essentielle par rapport à la méthode précédente est que chaque période T'_i est utilisée *plusieurs fois*. De cette façon on obtient davantage de moyennes. Ainsi pour une fenêtre de largeur $w = 2 \times 8 + 1 = 17$ on obtiendra des moyennes pour tous les i sauf pour 8 valeurs de chaque côté ce qui fera en tout: $40 - 16 = 24$ valeurs alors que précédemment on n'en avait que 2.

Ecrire une fonction Matlab qui réalise ces opérations. On pourra prendre $w_i = 3, 5, 7, 11, 15, 21, 27, 33$. A chaque fois, représentez les moyennes sur un graphique G similaire à ce qui a été fait ci-dessus et calculez leur écart-type.

Pour résumer vos résultats construire un graphique portant en abscisse les nombres w_i et en ordonnées les écarts-types correspondants. Placez également sur ce graphique la courbe théorique $y_i = \sigma^{(1)}/\sqrt{w_i}$. Il est conseillé de faire ce graphique en axes log-log de telle façon que la courbe théorique devienne une droite de pente -0.5 .

4 Comment se sert-on de la loi en $1/\sqrt{n}$ en pratique?

Il faut distinguer deux cas selon qu'on effectue une mesure ou une série de mesures dépendant d'un paramètre.

- Si on ne fait qu'une seule mesure on n'a pas besoin d'utiliser la méthode de la moyenne mobile. On calculera simplement la moyenne m et l'écart-type σ des n mesures et on donnera la période du pendule sous la forme:

$$T = m \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Comment s'écrit ce résultat dans le cas des 40 mesures ci-dessus?

- Si on veut faire une mesure, soit en fonction du temps soit en fonction d'un autre paramètre, on utilisera la méthode de la moyenne mobile expliquée à la question 3.

On tracera alors sur un graphique les 3 courbes $m(t)$ et $m(t) \pm \sigma(t)/\sqrt{n}$. Les deux bornes $\pm \sigma(t)/\sqrt{n}$

définiront ce qu'on appelle une barre d'erreur.

Illustration Dans la recherche de la particule de Higgs qui a actuellement cours à l'accélérateur LHC ("Large Hadron Collider" = grand collisionneur de hadrons, ce qui désigne les particules ayant des interactions fortes) du CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) à Genève, on trace une courbe en fonction de la masse présumée de la particule. Son existence éventuelle se manifestera par un pic. Malheureusement il y a des pics qui ne sont en fait que des fluctuations aléatoires. Ainsi pour pouvoir conclure valablement il faut que la barre d'erreur soit nettement inférieure à l'amplitude du bruit de fond responsable des fluctuations aléatoires. Pour réduire la barre d'erreur il faut augmenter le nombre d'événements n . Comme les événements intéressants sont rares cela signifie qu'il faut faire fonctionner l'accélérateur durant des mois pour accumuler plus d'événements. C'est la phase dans laquelle on est actuellement. En principe, on devrait avoir une réponse relativement sûre pour le Higgs vers le mois d'août 2012.

Maintenant que nous savons comment construire une barre d'erreur il nous faut encore comprendre quelle en est la signification réelle. Nous avons écrit la barre d'erreur $\pm\sigma(t)/\sqrt{n}$, mais on aurait aussi bien pu écrire $\pm 2\sigma(t)/\sqrt{n}$ ou plus généralement $\pm k\sigma(t)/\sqrt{n}$ où k peut prendre les valeurs 2, 3 ou 4 ou davantage. La compréhension de ce point tourne autour des notions de niveau de confiance et d'intervalle de confiance. C'est le but des questions qui suivent.

5 Notion d'intervalle de confiance et de barre d'erreur

Considérons une variable aléatoire X qui a une densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $(-3, 3)$. Quelle est la probabilité p pour qu'elle prenne une valeur quelconque appartenant à l'intervalle $I = (-2, 2)$. La réponse est bien sûr $p(I) = 4/6 = 2/3$. De la même façon trouvez la probabilité $p(I)$ pour $I = (-\sigma, \sigma)$ et plus généralement pour les intervalles $I(k) = (-k\sigma, k\sigma)$.

On peut aussi renverser la question et demander:

"Trouvez l'intervalle $I(p)$ qui soit tel que $p = P X \in I(p) = 0.95$ ".

On dira alors que $p = 0.95$ est le *niveau de confiance* et que $I(p)$ est *l'intervalle de confiance* correspondant.

Solution On sait que pour une variable ayant une répartition uniforme sur (a, b) on a: $m = (a + b)/2$, $\sigma = (b - a)/\sqrt{12}$. Cela donne ici: $m = 0$, $\sigma = \sqrt{3}$. Donc: $p[I(k)] = (1/6)k 2\sqrt{3} = k/\sqrt{3}$.

Inversement, si on se fixe $p = 0.95$ la relation précédente donne: $k(p) = 0.95 \times \sqrt{3} = 1.64$ et donc $I(p) = (-1.64\sigma, 1.64\sigma)$.

Ainsi, on peut conclure en disant que pour le niveau de confiance $p = 0.95$, $I(p) = (-1.64\sigma, 1.64\sigma)$ est l'intervalle de confiance autour de la moyenne $m = 0$. Statistiquement cela signifie que sur 100 tirages au hasard, environ 95 vont tomber dans $I(p)$.

Construisez un tableau donnant l'intervalle de confiance $I(p)$ (c'est-à-dire en fait $k(p)$) pour les valeurs suivantes du niveau de confiance:

$$p = 0.60, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$$

Vous verrez que les valeurs que vous obtenez sont en fait peu différentes de celles pour une distribution normale données dans le tableau 1. De fait, une distribution de type "créneau" est peu différente d'une distribution normale de même variance. car la fonction $\exp(-x^2)$ de la loi normale décroît tellement vite lorsque x augmente qu'elle est quasiment assimilable à une coupure verticale.

Table 1 Intervalle de confiance (c.a.d barre d'erreur) $m \pm k(p)\sigma$ pour divers niveaux de confiance p

Niveau de confiance (p)	0.60	0.80	0.90	0.95	0.99
Distribution normale					
$k(p)$	0.85	1.28	1.64	1.96	2.57
Inégalité de Tchebycheff					
$k(p) \sim (\text{en fait } \leq)$	1.58	2.23	3.16	4.47	10.0

Notes: La règle générale est que plus la fonction densité est pointue, plus la barre d'erreur pour un niveau de confiance donné sera petite.

L'inégalité de Tchebycheff s'écrit:

$$P\{m - k\sigma < X < m + k\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Son intérêt vient de ce qu'elle est valable pour *toute* distribution ayant une variance finie.

Du fait que les estimations de k obtenues par l'inégalité de Tchebycheff sont valables même pour des distributions relativement plates (pourvu que la variance existe), il est normal qu'elles donnent des barres d'erreur nettement plus larges qu'une distribution normale.

6 Utilisation pratique des intervalles de confiance

De ce qui précède il résulte qu'un intervalle de confiance (par exemple pour la mesure d'une moyenne) n'est rien d'autre qu'une barre d'erreur mais assortie d'un niveau de probabilité qui en donne une interprétation précise.

Dans l'utilisation pratique la première question qu'on se pose est: "Quel niveau de confiance faut-il choisir?" Il est important de réaliser qu'il n'y a pas de réponse mathématique à cette question. Le choix est fait de façon relativement subjective en fonction des caractéristiques de l'expérience.

La première caractéristique à prendre en compte est le nombre n d'évènements. Si n est plus petit que 10, l'écart-type de la moyenne sera large; dans ce cas si on exige un niveau de confiance de 0.99 on aura par exemple une barre d'erreur de la forme $m = 1.1 \pm 10$ dont on ne pourra tirer aucune conclusion. Une autre considération est l'importance de l'enjeu. Ainsi pour affirmer l'existence du boson de Higgs on s'imposera un niveau de confiance très élevé correspondant à des barres d'erreur $m \pm 5\sigma$.

On a vu que l'intervalle de confiance dépend de la forme de la fonction densité de la variable aléatoire sous-jacente ainsi que de l'écart-type *exact* de cette variable.

Hélas, cette fonction densité est en général inconnue et pour l'écart-type on ne dispose que d'une valeur estimée $\hat{\sigma}$ et non de la valeur exacte. Si on a plus de 100 évènements on peut tenter de déterminer la fonction de distribution. Au contraire, si on n'a que quelques dizaines d'évènements tout ce qu'on peut faire est déterminer $\hat{\sigma}$ et faire l'hypothèse qu'il n'est pas trop éloigné du σ exact. Dans la seconde partie une application à un problème concret devrait permettre de mieux voir comment procéder en pratique.

Partie 2

Peut-on détecter l'effet de marée avec un pendule

1 Le défi

Les figures 1 et 2 donnent un aperçu du phénomène que nous voulons étudier. En fait, dans un premier temps il n'est pas nécessaire d'entrer dans le détail du fonctionnement du pendule ni de l'effet de marée. La seule chose que nous avons besoin de savoir est que la période devrait être plus longue d'environ une microseconde à midi par rapport à minuit à condition qu'on soit dans une situation de nouvelle lune ou de pleine lune. La question est de savoir si l'enregistrement dont nous disposons peut nous permettre de déceler cette différence.

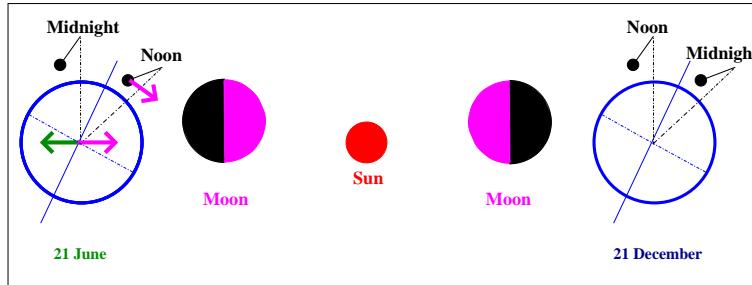


Fig. 1: Force de marée agissant sur un pendule à midi et à minuit. Dans cette figure la position de la Lune correspond à ce qu'on appelle la nouvelle lune et qu'on devrait en fait plutôt appeler absence de lune car la Lune est invisible du fait que sa face éclairée est du côté opposé à la Terre.

Le pendule subit deux forces: l'attraction de la Lune (en couleur magenta) et la force centrifuge (en vert) due au mouvement de rotation de la Terre autour du centre de gravité du système Terre-Lune. Au centre de la Terre ces deux forces se compensent exactement mais pour un point situé à la surface de la Terre la compensation n'est plus exacte et la différence constitue ce qu'on appelle l'effet de marée car c'est le même mécanisme qui est responsable des marées. La composante verticale de la force de marée (qui est seule à jouer un rôle) est de l'ordre de $10^{-7} g$. Pour un pendule ayant une période de 2 s cet effet se traduit par une différence de l'ordre de $0.1\mu s$ entre la période à midi et à minuit.

La question que nous nous posons est de voir si cette petite variation est détectable expérimentalement.

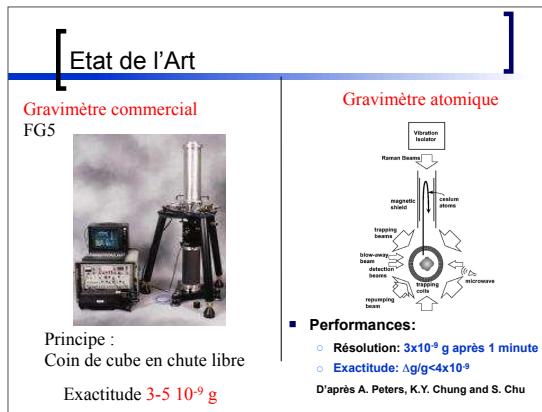


Fig.2a: Deux types de gravimètre. Un gravimètre est un appareil mesurant l'accélération de la gravité g . Le gravimètre de gauche mesure la gravité en observant la chute libre d'une masse dans une chambre sous vide (cylindre argenté supérieur). Les vibrations du sol sont amorties par un amortisseur (cylindre gris inférieur). La mesure de la hauteur z à laquelle se trouve la masse se fait par interférométrie optique, le temps t est donné par une horloge atomique au rubidium et g est déterminé par un ajustement à la relation $z = (1/2)gt^2$. Une question qu'on peut se poser est "comment règle-t-on la verticalité avec la précision souhaitable?"; pour l'instant, nous n'avons pas trouvé la réponse. *Source: Le Gouët (J.) et al. (pas de date, 2008 ou 2009 sans doute): Stabilité et exactitude préliminaire d'un gravimètre atomique, (p. 6).*

Utilisez le graphique de la figure 2b pour représenter schématiquement sur un graphique les variations

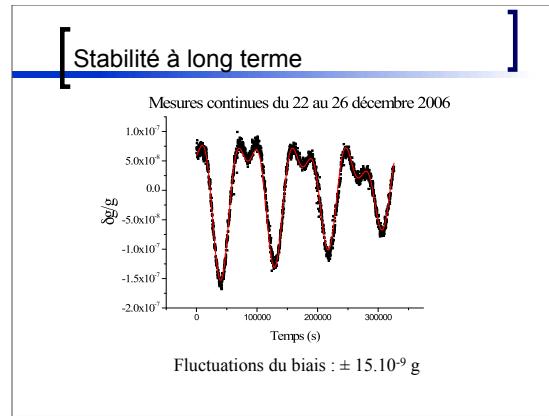


Fig.2b: Observation de l'effet de marée avec un gravimètre atomique. L'observation porte sur un peu plus que 3 jours du 22 au 26 décembre 2006. La pleine lune a eu lieu le 20 décembre si bien que l'amplitude de l'effet de marée diminue d'environ 40% entre le 22 et le 26. Les variations de gravité peuvent être dues à des effets astronomiques comme dans la présente figure, mais aussi à des perturbations de l'écorce terrestre. Ainsi un tremblement de terre de magnitude 8.2 dans les îles Kouriles qui s'est produit le 13 janvier 2007 à 5:23 (heure française) et a duré environ une minute s'est traduit par une variation brutale de la gravité de l'ordre de $-10^{-5} g$ soit 100 fois plus que l'effet de marée. *Source: Même source que pour la figure 2a (p. 29).*

attendues $\delta T/T_0$ pour la période d'un pendule. On rappelle la formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \delta g}} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 - \frac{\delta g}{2g}\right) = T_0 \left(1 - \frac{\delta g}{2g}\right) \implies \frac{\delta T}{T_0} \simeq -\frac{\delta g}{2g}$$



Fig. 3: Pendule entretenu par effet lumineux. Le pendule dont nous analysons les mesures de période fonctionne sur le principe du radiomètre de Crookes. Il est contenu dans un enceinte où la pression est de l'ordre de 1/100 de la pression atmosphérique. De façon à minimiser les frottements il est posé sur des couteaux d'horlogerie ce qui lui permet d'osciller durant 6 heures après avoir été déplacé de 2 cm. Les battements du pendule sont comptés par un dispositif optique à chaque fois que le bras coupe un rayon infrarouge.

Il a été construit en 2002 par un créateur suisse Mr. Marcel Bétrisey. *Source: Marcel Bétrisey Créations: <http://www.betrisey.ch/cronolit.html>*

2 Premiers tests

Les données expérimentales sont contenues dans le fichier “pendule.data”. Il y a 20,000 lignes de nombres plus à la fin du fichier des informations sur la date et les circonstances de l'expérience. Chaque ligne correspond en fait à la moyenne sur 10 battements faite par l'ordinateur qui a enregistré les temps. Ce qu'on appelle un battement est une demi-période (noté T'); le pendule a été construit

pour avoir un battement de 1 seconde¹.

a) Les mesures ont été faites les 14-15 avril 2002. Trouvez sur Internet un calendrier lunaire de 2002 pour savoir quelle était la position de la Lune à cette date.

b) Comme seules nous intéressent les variations, on commence par soustraire 1 s aux chiffres du fichier. Puis on calculera sa moyenne et son écart-type.

Sur la base de l'écart-type que vous venez d'obtenir peut-on espérer accéder à la précision requise de $0.1\mu\text{s}$?

c) Pour vous faire une première idée, représentez graphiquement les 200 premières mesures en fonction du numéro de la mesure.

Il y a bien sûr des fluctuations positives et négatives, mais surtout on voit deux familles de fluctuations d'amplitudes fort différentes. Essayez à vue d'oeil de caractériser ces deux familles en termes de moyenne et d'écart-type.

Que suggère l'existence de ces deux familles du point de vue expérimental?

d) Tracez l'histogramme de ces battements? On pourra prendre un nombre de marches égal à quelques centaines. L'histogramme fait apparaître un pic principal et 2 pics secondaires. Ces pics concordent-ils avec la caractérisation des deux familles de la question ci-dessus?

3 Moyenne mobile

On veut voir si la durée des battements change avec l'heure. On est donc dans un cas où il faut utiliser la fonction "moyenne mobile" déjà utilisée dans la question 3 de la première partie. Tracer cette moyenne mobile successivement pour la première tranche de 24h puis pour la seconde, puis pour les 8 heures restantes. Pour diviser le vecteur initial en 3 sections notez que du fait qu'il y a une mesure toutes les 10 secondes, une durée de 24 heures représente $24 \times 360 = 8,640$ mesures.

Voit-on sur ces courbes l'effet attendu?

4 Améliorer la précision de la mesure

Les courbes de moyenne mobile de la question précédente montrent qu'il faudrait gagner un facteur 20 en précision. Supposons que, par un moyen approprié, on puisse supprimer les 2 bosses secondaires mises en évidence par l'histogramme; quel serait approximativement l'écart-type de la distribution réduite à son pic central? Quel facteur cette amélioration ferait-elle gagner?

On voit qu'on est loin du facteur 20 qui serait nécessaire. Il convient donc d'envisager une méthode de mesure fondamentalement nouvelle même si cela nécessite de changer le pendule.

Quelles suggestions auriez-vous?

Si pour l'instant vous n'avez pas d'idée, vous pouvez lire la méthode décrite ci-dessous. A priori on ne sait pas si cette méthode marche. A vrai dire elle est proposée davantage pour stimuler la réflexion que comme une solution garantie.

5 Amplification des temps

Pour gagner un facteur 20 en précision il faudrait pouvoir "amplifier le temps" de la même façon qu'on peut amplifier une tension électrique. Il ne semble pas y avoir de méthode pour amplifier le temps mais il existe de nombreuses procédés pour amplifier les longueurs. Par exemple en projetant une diapositive sur un écran on amplifie les longueurs initiales et cela d'autant plus que l'écran est placé à une grande distance du projecteur. On est donc amené à se poser deux questions (i) Comment transformer les temps en longueurs? (ii) Comment amplifier les longueurs?

¹Les pendules battant la seconde ont joué un rôle très important dans le développement de la physique entre le 16e et le 19e siècle en particulier parce qu'ils permettaient des mesures très précises.

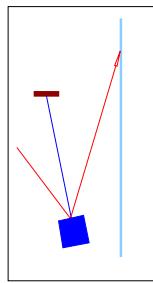


Fig. 3: Mesure optique de l'amplitude d'un pendule. La surface supérieure du cylindre porte un miroir qui réfléchit un rayon laser (en rouge). Si le rayon laser est suffisamment rasant par rapport à l'écran situé sur la droite on pourra obtenir un gain important. Reste à savoir quelle sera l'amplitude des vibrations.

Dans le cas du pendule la transformation des temps en longueurs peut se faire du fait qu'il y a une relation entre la période et l'amplitude des oscillations. Cette relation (donnée dans les livres de mécanique générale) est la suivante²:

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_1^2}{16} \right), \text{ avec } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}}, \quad \theta_1 = \text{angle maximum} \quad (1)$$

Autrement dit, pour connaître T il suffit de mesurer l'amplitude avec précision (g' peut s'obtenir par le calcul). Pour ce faire, on peut penser à un procédé d'amplication optique comme dans la figure 3.

²Cette formule provient d'un développement limité par rapport à l'angle maximum θ_1 . Si nécessaire il est facile de rajouter des termes supplémentaires.