

I - Introduction.

Nous nous intéressons, dans la perspective d'applications à des domaines tels que l'économie, la démographie ou la biologie, à la description probabiliste de l'évolution, croissance et décroissance, d'une population.

A un processus stochastique définissant une telle évolution on peut, premier d'une façon fort naturelle (par exemple en considérant l'évolution de la valeur moyenne) un processus déterministe; on entend par là une population dont le nombre $n(t)$ est régi par une équation différentielle ordinaire telle que :

$$\frac{dn}{dt} = f(n, t) \quad (1)$$

En pratique on est souvent confronté au problème inverse : on sait qu'un phénomène probabiliste est plutôt du type croissance linéaire, exponentielle ou logistique et on se propose de construire, pour le décrire, un processus stochastique qui soit du "même type".

Une première manière de procéder et qui dans notre étude ne sera qu'effleurée consiste à interpréter un (ou plusieurs) des paramètres intervenant dans l'équation déterministe ~~et~~ comme étant une variable aléatoire ce qui conduit donc à une équation différentielle stochastique *.

Une deuxième façon consiste à associer à l'équation (1) un système d'équations du "même type" mais portant sur les probabilités $p_n(t)$ que la population comporte n individus au temps t .

* On peut certes tout aussi bien rajouter un terme aléatoire ou donner aux conditions initiales un caractère aléatoire.

Nous envisagerons ainsi des processus associés aux équations d'évolution déterministes suivantes :

1° croissance (ou décroissance) linéaire : $\frac{dn}{dt} = \lambda$

2° croissance (ou décroissance) exponentielle : $\frac{dn}{dt} = \lambda n$

3° croissance linéaire avec saturation ou décroissance linéaire avec seuil : $\lambda, \mu > 0$ $\frac{dn}{dt} = \lambda - \mu n$

4° croissance exponentielle avec saturation ou décroissance linéaire avec seuil, processus dit logistique : $\lambda, \mu > 0$ $\frac{dn}{dt} = \lambda n - \mu n^2$

Dans l'analyse de ces processus, nous donnerons notre faveur à la méthode de sommation sur les chemins de préférence à d'autres méthodes (fonction génératrice ou transformation de Laplace par exemple); chaque chemin correspond à une réalisation "expérimentale" possible ce qui rend la méthode particulièrement intuitive et transparente.

Nous pensons qu'ultérieurement cet aspect peut être important, en particulier dans le choix d'éventuelles approximations et dans la discussion de leur validité. Comme nous traiterons surtout de processus discrets (mais continus en temps) les problèmes d'intégration fonctionnelle se ramèneront toujours à des passages à la limite simples dans leur principe.

Pour préciser quelle est la parenté entre processus déterministes et processus stochastiques correspondants, nous allons expliciter les équations régissant les $p_n(t)$ *. Considérons une population d'effectif $n(t)$

* Il est entendu qu'une condition initiale (n_0, t_0) a été choisie: la notation complète pour la probabilité de transition $p_n(t)$ devrait donc être: $P(n(t)/n_0, t_0)$

dont l'évolution satisfait aux hypothèses :

durant l'intervalle de temps Δt , $n(t)$ augmente de : $a(n,t) \Delta t + o(\Delta t)$
et diminue de : $b(n,t) \Delta t + o(\Delta t)$

où $o(\Delta t)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1 en Δt .

L'équation régissant cette population s'écrit :

$$\frac{dn}{dt} = a(n,t) - b(n,t) \quad (1')$$

L'analogie probabiliste de ce processus pourra s'obtenir en remplaçant l'hypothèse ci-dessus par :

durant l'intervalle de temps Δt , la probabilité pour qu'il se joigne un individu à la population est :

$$\lambda(n,t) \Delta t + o(\Delta t) \quad \lambda(n,t) \geq 0$$

et la probabilité pour qu'un individu

soit soustrait de la population est :

$$\mu(n,t) \Delta t + o(\Delta t) \quad \mu(n,t) \geq 0$$

Le système d'équations (en général de dimension infinie) en $p_n(t)$ s'écrit alors :

$$\frac{dp_n}{dt} = -[\lambda(n,t) + \mu(n,t)] p_n(t) + \lambda(n-1,t) p_{n-1}(t) + \mu(n+1,t) p_{n+1}(t) \quad (2)$$

II - Quelques aspects qualitatifs des deux modèles de processus stochastiques.

1) Est ce que la valeur moyenne du processus stochastique (2) suit la même loi d'évolution que le processus déterministe correspondant ?

Si on se restreint au cas d'un processus homogène dans le temps (λ et μ ne dépendant alors que de n), on sait que cela est vrai lorsque λ et μ sont des fonctions linéaires de n :

$$\lambda(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

$$\mu(n) = \mu_1 + \mu_2 n$$

Remarquons que sous le cas, n varie de $-\infty$ à $+\infty$, alors que pour les divers processus que nous envisagerons, la valeur $n=0$ constitue une barrière,

est réfléchissante lorsque $\lambda(0) \neq 0$ et $\mu(0) = 0$ cas de 3°

est absorbante lorsque $\lambda(0) = \mu(0) = 0$ cas de 2° et 4°

(de façon générale, nous choisirons dans la suite une condition initiale fixée $n_0 \geq 0$)

Inversement, il est facile de voir que s'il n'y a pas linéarité, la valeur moyenne suit en général une évolution différente de l'évolution déterministe. Considérons par exemple le processus :

$$\lambda(n) = 0 \quad \mu(n) = \mu n^2 \quad (\mu > 0) \quad n_0 > 0$$

La solution déterministe s'écrit :

$$n = \frac{1}{\mu(t-t_0) + 1/n_0}$$

La valeur moyenne du processus stochastique correspondant sera la somme d'un nombre fini d'exponentielles (d'exposants négatifs) et une telle somme ne peut se réduire à une ~~exponentielle~~ ^{fonction rationnelle}.

Si nous envisageons maintenant un processus (de type exponentiel) décrit par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda N \quad (3)$$

où Λ est une variable aléatoire, indépendante de t , dont la fonction densité de probabilité est: $g(\lambda)$

Il est facile de voir que la valeur moyenne $\bar{N}(t)$ ne suit l'équation déterministe:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \bar{\Lambda} \bar{N}$$

que si: $\Lambda = \bar{\Lambda}$ avec la probabilité 1.

On a d'abord:

$$g_{N(t)}^{(n)} = \frac{1}{n!} g_{\Lambda} \left(\frac{\log n}{t} \right) \theta(n) \quad (4)$$

(on a supposé $N(0) = n_0 = 1$).

Restreignons g_{Λ} à la classe des fonctions décroissant à l'infini plus vite que n'importe quelle exponentielle. Dérivant sous le signe somme la valeur moyenne:

$$\bar{N}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n g(n) dn$$

une intégration par parties (dont le terme tout intégré est alors nul) fournit la condition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\Lambda}(\lambda) (\lambda - \bar{\Lambda}) e^{\lambda t} d\lambda = 0$$

On a donc une transformée de Laplace à deux côtés pour laquelle (Sneddon 1972 page 240) existe un théorème d'inversion qui permet de conclure que:

$$g_{\Lambda}(\lambda) (\lambda - \bar{\Lambda}) = 0 \quad \text{soit} \quad g_{\Lambda}(\lambda) = \delta(\lambda - \bar{\Lambda})$$

Inversement pour une variable aléatoire Λ non certaine, la valeur moyenne du processus stochastique suivra une trajectoire distincte de la trajectoire déterministe et en général d'autant plus proche d'elle que la variance de Λ sera petite. Ainsi par exemple:

— si l'on prend pour Λ une variable aléatoire gaussienne :

$$g_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\lambda-\bar{\lambda})^2}$$

la trajectoire de la valeur moyenne sera: $\bar{N}(t) = \frac{\bar{\lambda}t}{e} e^{\sigma^2 t^2/2}$

à comparer à la trajectoire déterministe $n(t) = e^{\bar{\lambda}t}$.

— si l'on prend pour Λ un créneau :

$$g_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\varepsilon} [\theta(\lambda - (\bar{\lambda} - \varepsilon)) - \theta(\lambda - (\bar{\lambda} + \varepsilon))]$$

la trajectoire de la valeur moyenne sera: $\bar{N}(t) = e^{\bar{\lambda}t} \frac{\sinh \varepsilon t}{\varepsilon t}$.

- 2) L'évolution de l'entropie associée à la distribution des $p_n(t)$ peut être un autre moyen de caractériser un processus.

Dans le cas d'un processus déterministe, elle est nulle. Montrons que pour un processus stochastique ne comportant que des créations, elle augmente constamment à partir de sa valeur initiale nulle, pourvu que la fonction $\lambda(n)$ soit croissante. Considérons donc le processus :

Si tous les $n \rightarrow \infty = -2$ et $n \rightarrow 1$

$$\frac{dp_n}{dt} = -\lambda(n)p_n + \lambda(n-1)p_{n-1}$$

Reif nous dit qu'on

avec une condition initiale fixée: $p_n(t_0) = \delta_{nn_0}$ et donc: $p_n = 0$ pour $n < n_0$

L'entropie s'écrit:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\sum_{n=n_0}^{\infty} \dot{p}_n \ln p_n = -\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n \frac{\dot{p}_n}{p_n} \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n p_n \ln p_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_{n-1} p_{n-1} \ln p_n \end{aligned}$$

$$S = -\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n \log p_n$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{n_0}^{\infty} \lambda(n) p_n \log \frac{p_n}{p_{n+1}}$$

Le 2^e terme s'écrit: $n-1=n$

utilisant l'inégalité: $\log x \geq 1 - 1/x$ pour $x > 0$

et la croissance de $\lambda(n)$: $\lambda(n-1) = \lambda(n) - \alpha(n)$ avec $\alpha(n) > 0$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n p_n \ln \frac{p_n}{p_{n+1}} > \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n p_n (1 - \frac{p_{n+1}}{p_n}) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n p_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_{n+1} p_{n+1}$$

$$\text{Le 2^e terme s'écrit: } \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_{n-1} p_n < \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n p_n \Rightarrow \frac{dS}{dt} > \sum_{n=n_0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) p_{n+1} > 0$$

* Pour que le processus ne soit pas "explosif", $\lambda(n)$ doit augmenter avec n moins vite que n^2 . C'est ce que nous supposons afin d'être assuré d'une solution unique.

on obtient :

$$\frac{dS}{dt} \geq \overline{\alpha(n)} + \lambda(n_0-1)1_{n_0} > 0$$

3) Entre les deux modèles de processus stochastiques évoqués, il ne semble guère y avoir de lien. Essayons de voir cela de plus près sur le cas simple d'un processus de type exponentiel : équation (3) d'une part et d'autre part équation (2) avec $\lambda(n) = \lambda n$, $\mu(n) = \mu n$ processus dit de naissance et décès simple.

Remarquons d'abord que le caractère continu du premier et direct du second ne constitue pas une différence irréductible ; en effet, il existe un analogue continu du processus de naissance et décès simple (Bailey 1967 page 205) qui partage principalement les mêmes caractéristiques.

Cherchons à caractériser l'ensemble des processus aléatoires $N(t)$ que l'on peut générer à l'aide de l'équation (3). La relation (4) peut se récrire :

$$g_n(\lambda) = e^{\lambda t} \cdot g_N(e^{\lambda t}, t)$$

où on a implicitement supposé que $N(t)$ ne puisse prendre que des valeurs positives. En écrivant que la variable aléatoire Λ est indépendante du temps on est conduit à l'équation aux dérivées partielles :

$$t \frac{\partial g_N}{\partial t} + n \log n \frac{\partial g_N}{\partial n} + (1 + \log n) g_N = 0 \quad (5)$$

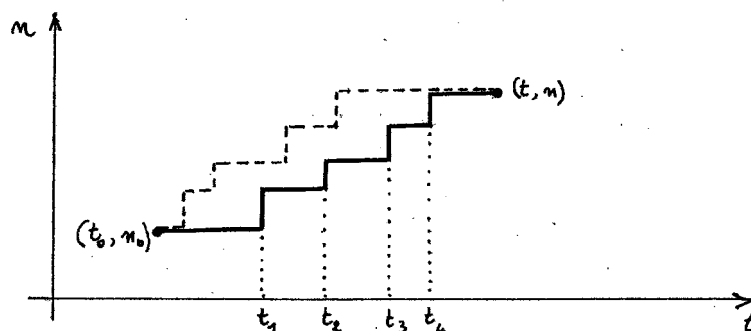
qui définit donc la classe des processus qu'on peut générer à partir de (3). En particulier, on peut s'assurer que la fonction densité du processus continu de naissance et décès simple ne satisfait pas (5).

* Si on emploie ici le terme de naissance et décès, c'est parce que ce processus est susceptible d'une interprétation au niveau individuel : la probabilité qu'un individu de donner naissance à un autre (respectivement de disparaître) pendant l'intervalle de temps Δt est : $\lambda \Delta t$ (respectivement $\mu \Delta t$)

III. Sommation sur les chemins pour un processus comportant seulement des créations (ou des disparitions).

Prenant le cas d'un processus de création par exemple (répondant donc à une équation du type (2) avec $\mu(n,t) = 0$ et $p_n(t_0) = \delta_{nn_0}$) nous cherchons à calculer la probabilité $p_n(t)$ que le système compte n individus au temps t .

1) Première méthode Le système pourra aller de (n_0, t_0) en (n, t) suivant diverses trajectoires:



chaque compte $n - n_0$ transitions et peut donc être caractérisée par les instants:

$$t_1, t_2, \dots, t_{n-n_0}$$

La probabilité de l'ensemble des trajectoires situées dans un voisinage de $t_1, \dots, t_{n-n_0}$ s'écrit:

$$P(t_0, t; t_1, \dots, t_{n-n_0}) dt_1 \dots dt_{n-n_0} = \lambda(n_0, t_1) \lambda(n_0+1, t_2) \dots \lambda(n-1, t_{n-n_0}) dt_1 \dots dt_{n-n_0} \\ \cdot \int_{t_0}^{t_1} \lambda(n_0, \tau) d\tau \dots \int_{t_{n-n_0}}^t \lambda(n, \tau) d\tau \quad (6)$$

et la probabilité cherchée $p_n(t)$ s'obtiendra en intégrant sur les instants $t_1, \dots, t_{n-n_0}$:

$$p_n(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{n-n_0-1}}^t dt_{n-n_0} P(t_0, t; t_1, \dots, t_{n-n_0}) \quad (7)$$

L'utilisation de cette formule sera sûre lorsque la fonction $P(t_0, t; t_1, \dots, t_{n-n_0})$ sera une fonction symétrique de ses arguments $t_1, \dots, t_{n-n_0}$; dans ce cas

on a en effet:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{n-n_0-1}}^t dt_{n-n_0} G(t_0, t; t_1, \dots, t_{n-n_0}) = \frac{1}{(n-n_0)!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_{n-n_0} G(t_0, t; t_1, \dots, t_{n-n_0})$$

En fait, (6) nous montre que G a la forme d'un produit :

$$g(t_0, t) f_1(t_1) \dots f_j(t_j) \dots f_{n-n_0}(t_{n-n_0}) \quad (8)$$

G sera donc une fonction symétrique lorsque ces fonctions seront égales: c'est

$$G = g(t_0, t) f(t_1) \dots f(t_{n-n_0})$$

et dans ce cas:

$$h_n(t) = \frac{g(t_0, t)}{(n-n_0)!} \left(\int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right)^{n-n_0}$$

Voilà dans quels cas G est symétrique.

Si nous nous restreignons d'abord aux processus homogènes, l'expression de l'expression (6) s'écrit:

$$t_1 [\lambda(n_0) - \lambda(n_0+1)] + t_2 [\lambda(n_0+1) - \lambda(n_0+2)] + \dots + t_{n-n_0} [\lambda(n-1) - \lambda(n)]$$

la condition pour que G soit symétrique sera, donc:

$$\lambda(n) - \lambda(n+1) = \text{constante} \quad \forall n$$

ce

dont la solution est: $\lambda(n) = an+b$

où a et b sont des constantes.

Passons aux processus non homogènes. Si l'on pose:

$$L(n, t) = \int_0^t \lambda(n, \tau) d\tau$$

$f_j(t_j)$ s'écrit:

$$\lambda(n_0+j-1, t_j) e^{L(n_0+j, t_j) - L(n_0+j-1, t_j)}$$

expression qui doit être le produit d'une fonction de j et d'une fonction de t qui sera la fonction $f(t)$ de (9). En exprimant cette condition on aboutit à l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial \lambda(n, t)}{\partial j} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda(n, t)}{\partial t} = h(t)$$

indiquent bien que
l'expression de G est
le produit d'une fonction
de j et d'une fonction
de t .
En exprimant cette condition
on aboutit à l'équation
aux dérivées partielles.

où $h(t)$ est une fonction (arbitraire) du temps dont $g(t)$ se déduit par la relation:

$$g(t) = e^{\int h(t) dt}$$

Résolvons la par exemple pour $h(t) = 0$; les deux intégrales premières s'écrivent:

$$\lambda = C_1$$

$$n - \lambda t = C_2$$

d'où la solution:

$$\lambda = \Psi(n - \lambda t)$$

La fonction arbitraire Ψ est à déterminer à l'aide d'une condition initiale appropriée; supposons nous par exemple qu'à $t=0$, $\lambda(n, 0)$ soit linéaire en n :

$$\lambda(n, 0) = an + b$$

la solution est alors:

$$\lambda(n, t) = \frac{an + b}{1 + at}$$

ce qui constitue le processus de Polya (Bailey 1967 page 107); la fonction $g(t)$ correspondante se réduit alors à une constante.

En choisissant d'autres formes pour $h(t)$, on obtient certes d'autres processus, mais ayant des formes plus compliquées. Ainsi en prenant

$$h(t) = \text{constante} = a$$

on obtient:

$$\lambda(n, t) = \frac{1}{2a e^{-2at}} \left[\frac{-at - 1}{e^{-at} - 1} + \sqrt{\left(\frac{-at - 1}{e^{-at} - 1}\right)^2 + 4a^2 e^{2at} n} \right]$$

Cela confirme donc le caractère remarquable du processus de Polya comme étant à la fois non homogène et strictement résoluble.

2) Deuxième méthode. La façon dont le processus (2) a été défini montre qu'il peut être considéré comme la limite du processus correspondant en temps discret, lorsque le pas Δt tend vers zéro. Cette remarque va nous permettre de réaliser la sommation par décomposition de l'intervalle $(0, t)$ en sous-intervalles dont le nombre à la limite devra tendre vers l'infini.

Ces deux méthodes ne correspondent d'ailleurs à rien d'autre qu'à deux façons de représenter une fonction (Rzewuski chap. 1) soit par

ses coordonnées (ici les t_i) relativement à une base, soit après découpage de l'intervalle de définition par les valeurs qu'elle prend dans chaque sous-intervalle *

Soient donc $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ les instants découpant l'intervalle (t_0, t) en K sous-intervalles égaux à: $\Delta t = \frac{t-t_0}{K}$.

Pour la simplicité de l'écriture, nous introduisons la notation:

$$\langle n''t'' | n't' \rangle = \text{probabilité pour que le système soit } n'' \text{ individus en temps } t'' \text{ sachant qu'il en avait } n' \text{ au temps } t' < t''$$

On aura donc de façon générale:

$$\langle nt | n_0 t_0 \rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n_1, \dots, n_{k-1} = -\infty}^{+\infty} \langle nt | n_{k-1} t_{k-1} \rangle \langle n_{k-1} t_{k-1} | \dots | n_1 t_1 \rangle \langle n_1 t_1 | n_0 t_0 \rangle \quad (10)$$

Pour un processus de la forme (2) comportant à la fois des créations et des disparitions, les facteurs du second membre s'écriront:

$$\begin{aligned} \langle n_{j+1} t_{j+1} | n_j t_j \rangle = & [1 - (\lambda(n_j, t_j) + \mu(n_j, t_j)) \Delta t] \delta_{n_{j+1}, n_j} \\ & + \lambda(n_j, t_j) \Delta t \delta_{n_{j+1}, n_j + 1} \\ & + \mu(n_j, t_j) \Delta t \delta_{n_{j+1}, n_j - 1} \\ & + O(\Delta t) \end{aligned}$$

Remarque En adoptant une représentation pour le symbole de Kronecker, la relation (10) permet de construire des identités non triviales; trouvons la plus simple d'entre elles, celle correspondant à un processus de Poisson:

* Si le second point de vue a l'avantage d'être plus intuitif, il a l'inconvénient de laisser en général dans le vague la classe des fonctions engendrées. Ici cependant, comme nous avons affaire à des fonctions en exolier, le problème ne se pose pas.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n_1=n_0 \\ \vdots \\ n_{K-1}=n_0}} \frac{1}{(2\pi)^K} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots d\theta_K e^{i\theta_K(n-n_{K-1})} \left[1 - \lambda \frac{t-t_0}{K} (e^{-i\theta_K} - 1) \right] \\ e^{i\theta_{K-1}(n_{K-1}-n_{K-2})} \left[1 + \lambda \frac{t-t_0}{K} (e^{-i\theta_{K-1}} - 1) \right] \\ \vdots \\ e^{i\theta_1(n_1-n_0)} \left[1 + \lambda \frac{t-t_0}{K} (e^{-i\theta_1} - 1) \right]$$

$$= e^{-\lambda(t-t_0)} \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!} \delta_{n, n_0+k}$$

Si on se limite à un processus ne comportant que des créations, on peut effectuer un regroupement de facteurs dans (10) facilitant la sommation; on pose $\nu = n - n_0$:

$$\langle n, t | n_0, t_0 \rangle = \lambda(n_0) \dots \lambda(n-1) (t-t_0)^\nu \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^\nu} \sum_{\substack{k_0, \dots, k_{\nu} = 0 \\ k_0 + \dots + k_{\nu} = K - \nu}} A_0^{k_0} A_1^{k_1} \dots A_{\nu}^{k_{\nu}}$$

S_1

et où k_i désigne le nombre de créations horizontales au niveau $n_0 + i$.

Pour effectuer cette sommation, on utilise l'identité suivante (qui se démontre en passant par la fonction génératrice):

Cette identité s'écrit sous la forme:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_i^{N-i}}{\prod_{j=0}^i (A_j - A_i)} S_N = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_{\nu} = 0 \\ k_0 + \dots + k_{\nu} = N}} A_0^{k_0} \dots A_{\nu}^{k_{\nu}} = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{A_i^N}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\nu} (1 - \frac{A_j}{A_i})} = \sum_{k_0, \dots, k_{\nu}} \delta(A_0, \dots, A_{\nu}) \alpha$$

On remarque que la généralisation des formules du type:

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

on retrouve ainsi d'une façon simple la probabilité de transition dans le cas général d'un processus homogène de création pure:

$$\langle n, t | n_0, t_0 \rangle = \lambda(n_0) \dots \lambda(n-1) \sum_{i=0}^{\nu} \frac{e^{-(t-t_0)\lambda(n_0+i)}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\nu} [\lambda(n_0+j) - \lambda(n_0+i)]} \quad n \geq n_0 + 1$$

$$\langle n, t | n_0, t_0 \rangle = \mu(n_0) \mu(n_0-1) \dots \mu(n-1) \sum_{i=0}^{\nu} \frac{e^{-(t-t_0)\mu(n_0-i)}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\nu} [\mu(n_0-j) - \mu(n_0-i)]}$$

$\nu = n - n_0$ $n_0 - \nu + 1$ $n_0 - 1, \dots, n_0$

+ Problème page

et pour $n = n_0$ $\langle n, t | n_0, t_0 \rangle = e^{-\lambda(n_0)(t-t_0)}$

IV - Somme sur le chemin pour un processus comportant à la fois des créations et des disparitions.

Comme il peut maintenant se produire un nombre arbitraire de créations et de disparitions entre les points (t, n_0) et (t, n) , chaque trajectoire sera caractérisée par un ensemble de "coordonnées" $t_1, t_2, t_3, \dots$ dont le nombre pourra varier de $n - n_0$ à l'infini. En d'autres termes, l'ensemble des trajectoires constitue une famille de sous-espaces de dimensions croissantes de $n - n_0$ à l'infini, emboîtés les uns dans les autres et immergés dans un espace vectoriel de dimension infinie.

Nous nous restreignons ici à un processus homogène pour lequel la valeur $n=0$ constitue une barrière absorbante ($\lambda(0) = \mu(0) = 0$). Dans ce cas les équations (2) montrent que tous les $p_k(t)$ (k de 1 à n) peuvent se déduire de $p_0(t)$ par simple dérivation de poche en poche.

Pour la simplicité, nous supposons que $n_0 = 1$.

1) Nous allons montrer que la contribution d'un sous-espace de dimension finie ν peut s'exprimer simplement par sa transformée de Laplace*. En procédant comme en III 1, on voit qu'une telle contribution est à un facteur constant près de la forme:

$$I(t_0, t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{\nu-1}}^t dt_{\nu} e^{\lambda_0(t_1 - t_0)} e^{\lambda_1(t_2 - t_1)} \dots e^{\lambda_{\nu-1}(t - t_{\nu-1})}$$

Le domaine d'intégration est donc défini par:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{\nu-1} < t_{\nu} < t$$

Ce qui permet d'écrire aussi pour $I(t_0, t)$:

* Remarquons qu'à cause de leur caractère borné, les solutions $p_k(t)$ ont nécessairement une transformée de Laplace.

$$I(t_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n e^{\lambda_0(t_1-t_0)} \theta(t_1-t_0) \dots e^{\lambda_{n+1}(t-t_n)} \theta(t-t_n)$$

$I(t_0, t)$ ne dépend en fait que de la différence $t-t_0$, ce qui permet d'introduire la transformée de Laplace:

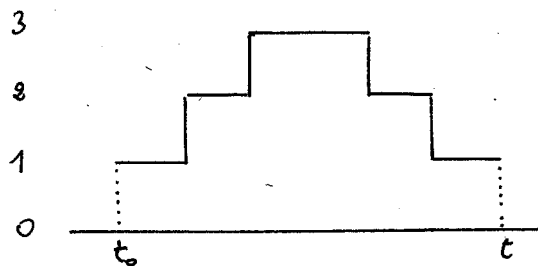
$$\hat{I}(s) = \int_0^{\infty} I(t-t_0) e^{-s(t-t_0)} \lambda(t-t_0)$$

en fait, la présence des fonctions θ nous assure que $I(t-t_0)$ est nul pour $t-t_0 < 0$, nous pouvons donc étendre la borne inférieure de 0 à $-\infty$:

On obtient ainsi:

$$I(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-a_1) \dots (s-a_{n+1})} \right]$$

A titre d'exemple, la contribution de toutes les trajectoires de la forme:



sure pour transformée de Laplace:

$$\frac{\lambda(1) \lambda(2) \mu(3) \mu(2)}{[s + \sigma(1)]^2 [s + \sigma(2)]^2 [s + \sigma(3)]} \quad \text{avec } \sigma(n) = \lambda(n) + \mu(n)$$

2) Nous effectuons maintenant la sommation de l'ensemble des trajectoires en les classant suivant la hauteur maximum atteinte, suivant en cela une méthode de factorisation utilisée par Jonvet et Tirapegui [5]

Notons $\hat{S}_j$ la transformée de Laplace de la somme des trajectoires (partant de $n_0 = 1$ et se terminant en $n=1$) de hauteur $h \leq j$.

On aura bien sûr: $\hat{S}_1 = \frac{1}{s + \sigma(1)}$

S_2 sera constitué de l'ensemble des trajectoires

suivantes:

$$S_2 = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \text{ ————— } + \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ \text{ ————— } \end{array} + \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ \text{ ————— } \end{array} + \dots$$

qui constitue une série géométrique:

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{s + \sigma(1)} [1 + p + p^2 + \dots] \quad \text{avec} \quad p = \frac{\lambda(1) \mu(2)}{[s + \sigma(1)][s + \sigma(2)]}$$

soit :

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{s + \sigma(1) - \frac{\lambda(1) \mu(2)}{s + \sigma(2)}}$$

Donne donc
une interprétation
en termes de
trajectoires de
la même
réduite
de la
fraction continue

S_3 peut se factoriser de la façon suivante:

$$S_3 : \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ \text{ ————— } \end{array} + \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ \text{ ————— } \end{array} + \dots$$

où :

$$K = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \text{ ————— } + \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ \text{ ————— } \end{array} + \begin{array}{c} \text{ ————— } \\ \text{ ————— } \end{array} + \dots$$

On obtient ainsi :

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{s + \sigma(1) - \frac{\lambda(1) \mu(2)}{s + \sigma(2) - \frac{\lambda(2) \mu(3)}{s + \sigma(3)}}}$$

En poursuivant, on obtient l'expression de la transformée de Laplace de la somme des trajectoires de hauteur arbitraire, donc de toute la trajectoire, sous forme d'une fraction continue* :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 - \tilde{p}_1 \lambda(1) &= -\lambda(1) \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 \mu(1) \\ \tilde{p}_0 (s + \lambda(1)) &= \tilde{p}_1 \mu(1) \end{aligned} \quad \hat{p}_0(s) = \frac{\mu(1)}{s} \frac{1}{s + \sigma(1) - \frac{\lambda(1) \mu(2)}{s + \sigma(2) - \frac{\lambda(2) \mu(3)}{s + \sigma(3) - \frac{\lambda(3) \mu(4)}{s + \sigma(4) - \dots}}}} \quad (11)$$

* On peut aussi obtenir cette fraction directement à partir du système (2)

Cette fraction continue a une forme particulière et constitue ce qu'on appelle une J-fraction réelle (Wall). Des théorèmes généraux concernant ces J-fractions on peut tirer des propriétés des solutions $\hat{p}_k(s)$ et c'est là un intérêt de cette approche. On peut en particulier conclure que:

1° Tous les pôles de $\hat{p}_0(s)$ sont réels, simples et leur résidu est positif.

2° $\hat{p}_0(s)$ est une fonction analytique à la fois dans le demi plan supérieur et dans le demi plan inférieur et ces propriétés s'étendent de proche en proche à tous les $\hat{p}_k(s)$.

3) Nous allons à titre d'illustration calculer explicitement la fraction continue (11) dans deux cas spécifiques.

a) Pour le processus de naissance et décès simple, nous allons retrouver l'expression classique de $p_0(t)$ (Bailey 1967 page 94). Dans ce cas le dénominateur de la fraction prend la forme:

$$s + \sigma - \frac{\lambda(2\mu)}{s + 2\sigma - \frac{(2\lambda)(3\mu)}{s + 3\sigma - \frac{(3\lambda)(4\mu)}{s + 4\sigma \dots \dots \dots}}}$$

Les numérateurs partiels de la forme: $(2n)[(n+1)\mu]$ étant du second degré en n , le théorème suivant s'applique (Perron)

La fraction continue:

$$d + \frac{a+b+c}{d+e + \frac{a+2b+4c}{d+2e + \dots + \frac{a+nb+n^2c}{d+ne + \dots}}}$$

dont les dénominateurs partiels sont non nuls et où

$$c \neq 0, e \neq 0 \quad p^2 = e^2 + 4c > 0$$

est égale à :

$$\frac{\rho}{\delta} \frac{{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)}{{}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)}$$

${}_2F_1$ étant la fonction hypergéométrique

et α, β les racines de l'équation : $cz^2 - bz + a = 0$

$$\gamma = \frac{b+c}{2c} \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) + \frac{d}{\rho} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{\rho}\right)$$

On obtient ainsi :

$$\hat{p}_0(s) = \frac{\mu}{\lambda - \mu} \frac{1}{s\gamma} \frac{{}_2F_1(1, 2; \gamma+1; z)}{{}_2F_1(0, 1; \gamma; z)}$$

ou encore en posant : $s' = s/\lambda - \mu$ et en utilisant la relation :

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{z}{1-z})$$

$$\hat{p}_0(s) = \frac{1}{s'(s'+1)} \frac{\mu}{\lambda(\lambda-\mu)} {}_2F_1(1, s'; s'+2; \frac{\mu}{\lambda})$$

dont l'inversion conduit à l'expression habituelle : ($\lambda \neq \mu$)

$$p_0(t) = \mu \frac{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \theta(t)$$

b) Nous considérons ensuite un processus du type logistique (croissance avec saturation : $\lambda(n) = \lambda n$, $\mu(n) = \mu n^2$). Dans ce cas les dénominateurs partiels sont du degré 3 en n et le théorème suivant (Perron) s'applique :

En choisissant $c_n = (n+2)^2$ on est ainsi conduit à l'équation différentielle en φ :

$$\varphi''(z^3 - \mu z^2) + \varphi'[5z^2 - (\lambda + 3\mu)z + \lambda\mu] + \varphi[4z - (\lambda + \lambda + \mu)] = 0$$

Il s'agit d'équation: $\mu \neq 0$ 1st singulier 0.

qui ne semble malheureusement pas se ramener à un type classique. ✓

Cependant si on se place en $\lambda=0$, l'équation devient une équation exacte (Murphy p.92) et admet donc une intégrale première :

$$\varphi = c \frac{e^{-\lambda/z}}{(z-\mu)z}$$

L'intégrale de contour se calcule ensuite aisément par le théorème des résidus (l'infini n'étant pas un point singulier) et on obtient :

$$\hat{p}_1(0) = \frac{1}{\mu}. \quad (12)$$

Or nous savons que pour la transformée de Laplace (Sneddon 1972 p.186) :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \hat{f}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

à condition que $|f(t)|$ soit borné pour $t > 0$ et que la limite du second membre existe.

Nous pouvons en déduire que la probabilité d'extinction du processus au bout d'un temps infini est 1 : $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 1$

On retrouve ainsi un résultat qui constitue un cas particulier d'un théorème général (Karlin p.225)
Initiation aux processus Markov (1965)