

Rappel de la notion d'espace vectoriel normé.

1 - Espace vectoriel hermitien.

Un espace vectoriel hermitien (ou pré-hilbertien) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien dont voici la définition :

Un produit scalaire hermitien est une application qui à un couple de vecteurs associe un nombre complexe :

$$\begin{matrix} \vec{x} & , & \vec{y} \\ \in E & , & \in E \end{matrix} \longrightarrow \circ \longrightarrow \begin{matrix} (\vec{x}, \vec{y}) \\ \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

et satisfaisant aux axiomes suivants :

1° $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$: hermitien.

2° linéaire à droite et semi linéaire à gauche

$$(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{z}) = \alpha^* (\vec{x}, \vec{z}) + \beta^* (\vec{y}, \vec{z})$$

3° défini positif $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}.$$

On tire une norme : $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$

La norme, en fait, est une notion qu'on peut définir de façon indépendante.

De même qu'on a généralisé la notion de produit scalaire habituel pour donner les axiomes ci-dessus, de même il suffit de généraliser la notion de longueur habituelle ce qui conduit aux axiomes :

On dit qu'on a défini une norme sur un espace vectoriel E si on a défini une application qui à tout vecteur associe un nombre positif.

$$\vec{x} \longrightarrow \|\vec{x}\| \in \mathbb{R}.$$

et satisfaisant aux propriétés :

1° $\|\vec{x}\| \geq 0$ et $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

2° $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

3° $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ inégalité triangulaire.

Une vérification s'impose : est-ce que la norme $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ satisfait les axiomes de norme que nous venons d'énumérer.

1° $\|\vec{x}\| \geq 0$ résulte de la définition de la $\sqrt{}$.

$$\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$2^\circ \|\lambda \vec{x}\| = \sqrt{|\lambda|^2 (\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| \|\vec{x}\|.$$

3° Seule cette dernière propriété va en fait poser quelque problème.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y})}$$

$$= \sqrt{(\vec{x}, \vec{x}) + 2 \operatorname{Re}(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y})}$$

$$\text{on a : } \sqrt{(\vec{x}, \vec{x}) + 2 \operatorname{Re}(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y})} \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} + \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$$

Comme les deux membres sont ≥ 0 on peut élever au carré sans problème :

$$\operatorname{Re}(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \quad (1)$$

Or l'inégalité de Schwartz * nous apprend que :

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \quad \text{d'où (1) résulte}$$

à fortiori.

° Notion d'espace complet.

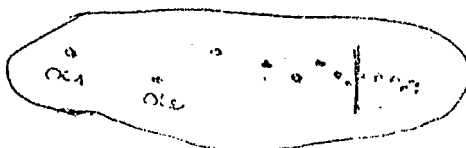
se souvient en général assez bien de la première partie de la définition.

On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy a une limite dans cet espace.

Qu'est-ce qu'une suite de Cauchy ?

une phrase : une suite de Cauchy est une suite telle que à partir d'un certain rang les différents termes sont aussi près les uns des autres que l'on veut.

voilà un dessin :



Montrons que cette inégalité se démontre en partant de :

$$(\vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x} + \lambda \vec{y}) \geq 0 \quad \text{et en choisissant le paramètre } \lambda \text{ de}$$

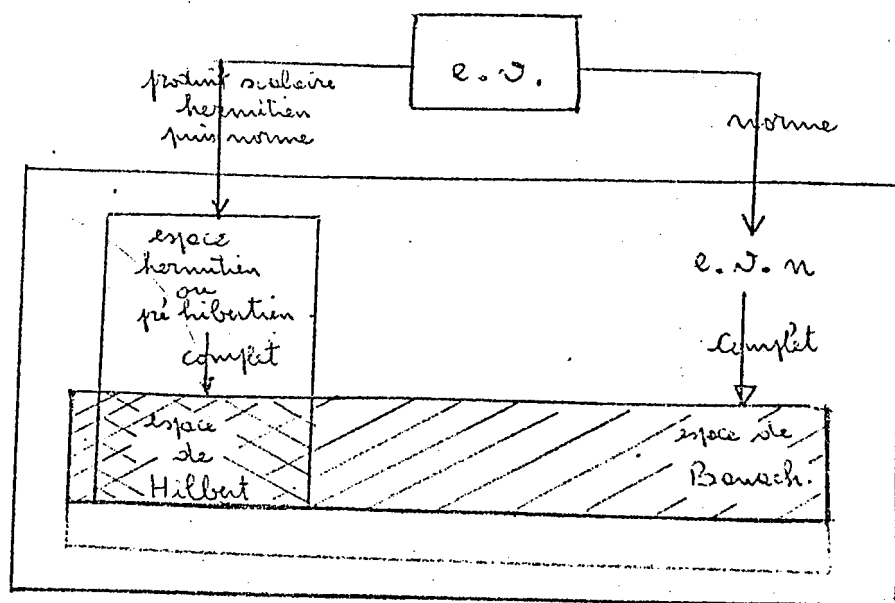
$$\text{telle que : } \lambda = \rho e^{-i\theta}, \quad \text{où } \theta = \arg(\vec{x}, \vec{y}).$$

sa forme mathématique: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall p, q > N \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Un espace hermitien (e.s. et pré-hilbertien) complet est appelé un espace de Hilbert.

Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

Nous pouvons résumer dans un schéma cette filiation:



appelons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets et que, plus généralement, tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Cette notion n'est donc vraiment cruciale que pour les espaces de dimension infinie.

Nous allons donner :

un exemple d'espace non complet.

Considérons l'espace E des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et

$$\text{valeur dans } \mathbb{C} : [0, 1] \xrightarrow[\text{continue}]{f} \mathbb{C}$$

Définissons y la norme: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$

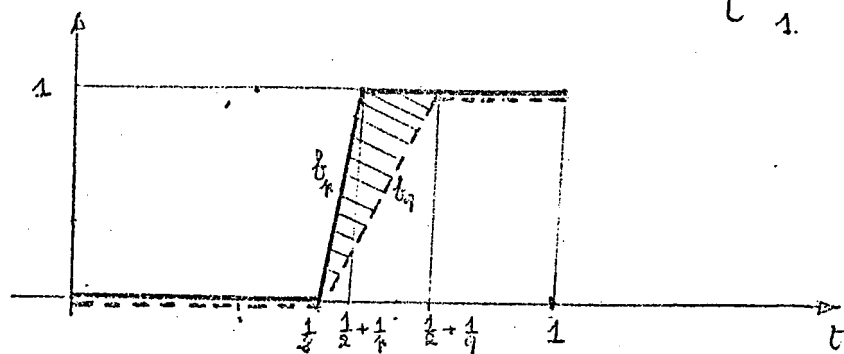
exercice préliminaire : montrer que $\|f\|_1$ satisfait bien les axiomes de la norme

Pour montrer que E_1 (nous appelons E_1 l'espace E muni de sa norme)

est pas complet, il nous suffit d'exhiber une suite qui soit :

- 1° non convergente dans E_1
 2° de Cauchy.

Considérons la suite de fonctions suivantes: $f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1/2 \\ n(t-1/2) & \text{si } 1/2 \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$



Intuitivement nous nous rendons bien compte que la fonction limite présente un saut en $t = 1/2$, donc ne sera pas continue et donc n'appartient pas à E_1 : autrement dit, la suite f_n ne converge pas dans E_1 .

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que cette suite est une suite de Cauchy c.e.d. essentiellement que: $\int_0^1 |f_p(t) - f_q(t)| dt \rightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow \infty$.

Pour cela, nous allons calculer cette intégrale.

Supposons par exemple que $p > q$ alors $f_p(t) \geq f_q(t)$ et

$$\int_0^1 |f_p(t) - f_q(t)| dt = \int_0^1 f_p(t) dt - \int_0^1 f_q(t) dt.$$

Notre intégrale s'obtient donc simplement en évaluant l'aire du triangle hachuré (un calcul direct n'est guère plus long, à condition de faire le changement

de voir de façon rigoureuse il suffit de remarquer d'une part que $f(t)$ est 0 quand t tend vers $1/2$ par valeurs inférieures et de montrer d'autre part que lorsque t tend vers $1/2$ par valeurs supérieures, $f(t)$ reste en permanence

à 1 c.e.d. que: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \mid \forall n > N \quad |f_n(1/2 + \epsilon)| = 1$

que la fonction $n(t-1/2)$ atteint 1 en ordonnée pour $t-1/2 = 1/n$ il suffira, pour le ϵ donné, de prendre N tel que: $\frac{1}{N} < \epsilon$.

variable $t' = t - 1/2$). On obtient ainsi:

$$\int_0^1 |f_p(t) - f_q(t)| dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$$

expression qui tend bien vers zéro quand $p, q \rightarrow \infty$.

Un exemple d'espace complet.

Notre espace de fonctions précédentes peut fort bien devenir complet, si nous le munissons d'une norme différente:

$$\|f\|_2 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Remarque En cherchant la définition de la convergence uniforme dans vos cours antérieurs, montrer que si $f_n \rightarrow f$ au sens de $\|\cdot\|_2$, cela est équivalent à dire que f_n converge vers f uniformément.

Montrons maintenant que l'espace E_2 est complet c.à.d. que toute suite de Cauchy f_n est convergente.

Notre hypothèse est donc:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \mid \forall p, q > N \quad \sup |f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon \quad (1)$$

et notre conclusion veut être:

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N(\varepsilon') \mid \forall n > N \quad \sup |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon' \quad \text{où } f \text{ est la fonction (limite).}$$

Puisque l'inégalité (1) est vraie pour le sup, elle est vraie en particulier pour tout t_0 fixé appartenant à $[0,1]$. c.à.d.:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \mid p, q > N \Rightarrow |f_p(t_0) - f_q(t_0)| < \varepsilon \quad (1')$$

mais $f_p(t_0)$ est maintenant une suite de nombres complexes et (1') traduit que cette suite est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$; mais puisque $\mathbb{C}$ est complet on en déduit que cette suite numérique converge vers une limite $f(t_0)$; autrement dit, nous venons de montrer que: $\forall t_0 \in [0,1] \quad f_n(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t_0)$.

Notre démonstration n'est pas encore terminée car nous venons seulement de montrer que $f_n(t)$ converge simplement vers une limite $f(t)$, alors que nous voulons montrer qu'elle converge uniformément.

Dans l'inégalité (1) faisons $q \rightarrow \infty$. elle devient :

$$\sup |f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (1'')$$

Remarque Bien noter que le ε est devenu ε ce qui traduit un théorème général sur les limites : si la suite u_n est ε à M , la limite u de u_n est ε à M .

Nous voyons que (1'') ressemble beaucoup à (2) ; pour terminer la démonstration il suffit de dire que le ε' de (2) étant fixé, il suffit de choisir ε de (1) tel que $\varepsilon < \varepsilon'$. On aura bien ainsi :

$$\sup |f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon < \varepsilon' \quad \text{c.q.f.d.}$$

La notion de base totale

Parti d'un espace vectoriel, nous avons donc pu définir deux notions métriques : produit scalaire (et par là même la notion d'orthogonalité : dire que $\vec{x}$ est perpendiculaire à $\vec{y}$ si $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$)
norme (c.e.d. longueur).

Nous allons maintenant accomplir un nouveau pas (l'analogue de celui fait Descartes en introduisant les coordonnées cartésiennes et en créant la géométrie analytique) en définissant une base et des coordonnées.

Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie, les formules correspondantes à une base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$ sont bien connues.

Expression d'un vecteur $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$ d'où il résulte que (comment ?)

x_i , composantes de $\vec{x}$, s'expriment par : $x_i = (\vec{e}_i, \vec{x})$.

Expression du produit scalaire : $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Expression de la norme : $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

Si le produit scalaire considéré est hermitien, seule la seconde formule sera transformée en : $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$.

Remarque Dans le cas où l'espace a un nombre de dimensions infini, le nombre de vecteurs de base est celui des coordonnées sera bien sûr aussi infini et les sommes précédentes deviendront des sommes infinies c.-à-d. des séries; et on sera immédiatement confronté au problème de savoir si ces séries convergent ou non. Le choix d'une base est ainsi considérablement plus compliqué.

Le théorème fondamental concernant les bases orthogonales finies est le théorème d'Hahn.

Pour qu'un ensemble orthonormé de n vecteurs $\{\vec{e}_i\}$ d'un espace hermitien V soit total (autrement dit soit une base de V) il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

$$1^\circ (\vec{e}_i, \vec{x}) = 0 \quad \forall i \text{ de } 1 \text{ à } n \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$2^\circ \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n (\vec{x}, \vec{e}_i) (\vec{e}_i, \vec{y})$$

équation de Parseval appelé aussi relation de fermeture.

$$3^\circ \quad \forall \vec{x} \in V \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |(\vec{e}_i, \vec{x})|^2 \quad (\text{égalité de Bessel}).$$

Et dans ce cas tout vecteur $\vec{x}$ s'écrit : $\vec{x} = \sum_{i=1}^n (\vec{e}_i, \vec{x}) \vec{e}_i$.

Que devient ce théorème dans le cas d'un nombre de dimensions infini?

Tout d'abord, si nous savons certes ce qu'est une base (autrement dit un ensemble total) finie, mais nous ignorons, a priori, ce qu'il faut entendre par base infinie. Pour introduire cette notion nous avons le choix entre deux démarches.

1° Une généralisation (purement algébrique) de la notion habituelle de base.

Une famille infinie de vecteurs $\{\vec{e}_i\}$ d'un espace E est dite libre si toute combinaison linéaire finie de vecteurs de cette famille est libre.

est dite engendrente

si tout vecteur de E peut s'écrire sous la forme : $\vec{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{e}_i$ d'une combinaison linéaire finie de vecteurs de la famille.

Une telle définition n'est cependant pas très intéressante dans notre cas, car elle ne nous fait pas profiter du fait que nous avons défini la notion de norme (et donc de limite) et disposons de ce fait d'une structure plus riche qu'un simple espace vectoriel.

° Une généralisation (topologique) faisant appel à la notion de norme.

Si H est un espace de Hilbert et si $\{\vec{e}_i\}$ est une famille de vecteurs de H , on dit que $\{\vec{e}_i\}$ est une base hilbertienne de H si :

1° Les $\{\vec{e}_i\}$ sont 2 à 2 orthogonaux (ce qui revient à dire que les $\vec{e}_i$ forment un système libre au sens de 1° : le montrer)

2° Tout vecteur $\vec{x}$ de H peut être approché d'autant près que l'on veut par des combinaisons linéaires finies des $\vec{e}_i$.

Remarque : comparaison des deux définitions. Nous n'avons cité la première qu'à titre indicatif (pour montrer que ce genre de définition ne "tombe pas du ciel" mais résulte d'un choix) : elle est beaucoup trop restrictive. Ce qui signifie qu'à base égale, elle ne permet d'engendrer qu'un espace beaucoup plus petit que le deuxième : ainsi si on prend pour base les puissances de x : $\{x^n\}$ $n=0, 1, 2, \dots$ la définition 1 permet d'engendrer tous les polynômes à une variable, alors que la définition 2 permet d'engendrer toutes les fonctions développables en série. Inversement, à espace égal la base correspondant à 1 devra compter ^{*} beaucoup plus de vecteurs (et sera souvent très défective).

Nous mettons entre guillemets, puisqu'il s'agit de comparer des nombres infinis.

déterminer) que la base correspondant à 2.

Que devient le théorème d'Hilbert ?

Pour qu'un ensemble orthonormé $\{\vec{e}_i\}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert de dimension infinie soit total il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

$$1^\circ \quad (\vec{e}_i, \vec{x}) = 0 \quad \forall i \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$2^\circ \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H} \quad (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} (\vec{x}, \vec{e}_i)(\vec{e}_i, \vec{y})$$

équation de Parseval appelée aussi relation de fermeture.

$$3^\circ \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{H} \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(\vec{e}_i, \vec{x})|^2$$

Et dans ce cas la série $\sum_{i=1}^{\infty} (\vec{e}_i, \vec{x}) \vec{e}_i$ converge dans $\mathcal{H}$ vers le vecteur $\vec{x}$.

Insistons sur le fait que lorsqu'on énonce ce théorème dans le cas de la dimension infinie, cela nécessite une définition spéciale pour "total": explicitement notre énoncé de la page précédente nous pouvons dire aussi :

Si pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{H}$, on peut trouver une suite de coefficients $\{x_i\}$ tels que les sommes partielles $\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ convergent vers $\vec{x}$ (au sens de la norme définie dans l'espace considéré) alors on peut dire que les $\{\vec{e}_i\}$ forment un système de vecteurs total.

Il semblerait que nous n'ayons guère eu besoin jusqu'ici de notre hypothèse concernant la complétude de l'espace. En fait la démonstration tierce 1° l'utilise explicitement et comme cette condition est, d'un certain point de vue, la plus importante des trois, on voit que cette hypothèse était tout à fait possible.

Exemples de bases hilbertiennes

Considérons l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$:

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

Telles que l'intégrale $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ existe : on dit qu'elles sont de carré intégrable.

Munissons cet espace vectoriel du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x) g(x) dx.$$

On note $\mathbb{L}^2(a, b)$ l'espace vectoriel normé correspondant.

S'agit-il d'un espace de Hilbert ?

Qu'il soit hermitien résulte de suite de la définition du produit scalaire, mais est-il complet ? Cela, un théorème important de l'analyse nous l'apprend ; il s'agit du :

th de Fischer - Riesz.

$\mathbb{L}^2(a, b)$ est complet.

Preions : $a=0$, $b=2\pi$.

On peut alors vérifier que les vecteurs $\left\{ \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ $n=0, \pm 1, \pm 2$ forment un système orthonormé.

En effet $(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\theta} d\theta$ et l'intégrale est bien

nulle lorsque $k \neq l$ et égale à 2π lorsque $k=l$.

On peut aussi montrer (mais nous ne le ferons pas ici) que ce système est total. On peut donc écrire, pour toute fonction de $\mathbb{L}^2(0, 2\pi)$ le développement suivant :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta} \quad (1)$$

et le deuxième membre converge vers $f(x)$ au sens de la norme définie dans $\mathbb{L}^2$.

Ce développement n'est autre que le développement en série de Fourier d'une fonction.

Preons $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et considérons les polynômes :

$$\bar{P}_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Nous nous sommes $\bar{P}_n$ d'une barre car la notation P_n désigne localement les polynômes de Legendre :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

Il s'agit là d'un exemple moins classique que le précédent mais très important aussi et nous le traiterons en détail.

Montrons que les $\bar{P}_n$ constituent un système orthonormé.

Il nous faut donc calculer :

$$(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \int_{-1}^{+1} \bar{P}_n(x) \bar{P}_m(x) dx$$

c.à.d. (en notant C les facteurs constants).

$$(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = C \int_{-1}^{+1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} dx$$

Intégrons cette intégrale par parties :

$$u = \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m}$$

$$du = \frac{d^{m+1} (x^2-1)^m}{dx^{m+1}}$$

$$v = \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$

$$dv = \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

$$(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \left[\frac{d^{m-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} \right]_{-1}^{+1} - C \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-2} (x^2-1)^n}{dx^{n-2}} \frac{d^{m+2} (x^2-1)^m}{dx^{m+2}}$$

$$\frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$

contiendra x^2-1 en facteur ; il en résulte que pour $n \neq \pm 1$ ce terme est nul.

Nous pouvons encore intégrer l'intégrale restante par parties et en itérant cette opération n fois on obtient (le terme tout intégré étant nul à chaque fois)

$$(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = (-1)^n C \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \frac{d^{m+n} (x^2-1)^m}{dx^{m+n}} dx.$$

Supposons maintenant que $m > n$, par exemple ; alors : $m+n > 2n$
 c.à.d. que $\frac{d^{m+n}(x^2-1)^n}{dx^{m+n}} = 0$ ce qui prouve donc l'orthogonalité.

Si maintenant $m=n$: $(\vec{e}_m, \vec{e}_n) = \frac{(2n+1)(-1)^n}{2^{2n+1}(n!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}$

Comme $(x^2-1)^n$ est un polynôme dont le terme de degré le plus élevé est x^{2n} , sa dérivée $2n$ ième sera $(2n)!$ et :

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_n) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx$$

Calcul de l'intégrale $I_n = \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx$

La forme x^2-1 nous suggère un changement de variable du type $x = \cos \theta$

$$I_n = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx = (-1)^n \int_{\pi}^0 (1-\cos^2 \theta)^n d(\cos \theta) = (-1)^n \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^{2n+1} \theta d\theta}_{I'_n}$$

Cherchons à quelle relation de récurrence obéit I'_n :

$$u = \sin^{2n} \theta$$

$$du = 2n \sin^{2n-1} \theta \cos \theta d\theta$$

$$v = -\cos \theta$$

$$v = \sin \theta d\theta$$

$$I'_n = - \underbrace{[\cos \theta \sin^{2n} \theta]_0^{\pi}}_0 + 2n \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta$$

$$I'_n = 2n \int_0^{\pi} (1-\sin^2 \theta) \sin^{2n-1} \theta d\theta = 2n (I'_{n-1} - I'_n)$$

$$I'_n = \frac{2n}{2n+1} I'_{n-1}$$

Ainsi :
$$I'_n = \frac{2n \cdot 2(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2n+1)[2(n-1)+1] \dots 3} I'_0$$

or :
$$I'_0 = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2$$

soit
$$I'_n = \frac{2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n+1)}$$

et cette valeur de I_n on voit qu'on aura bien : $(\vec{e}_n, \vec{e}_n) = 1$

Montrons que le système des $\bar{P}_n$ est total.

Nous allons pour cela utiliser le critère n° 1 du théorème d'Habman, c.e.d. que nous voulons montrer que toute fonction orthogonale à tous les $\bar{P}_n$ ne peut être que la fonction nulle. Même sous cette forme le problème est cependant encore relativement insurmontable et nous devons nous armer, au préalable, d'un autre théorème important de l'analyse :

de Weierstrass.

Toute fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ peut être approchée d'autant près qu'on veut par une suite de polynômes (au sens de la norme de $\mathbb{R}^2$).

Les polynômes Q_n dont il est question dans ce théorème n'ont certes aucune raison (et de fait ils ne le sont pas) d'être les polynômes de Legendre. Mais on peut toujours exprimer les uns en fonction des autres par :

$$Q_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{P}_k.$$

(ce qui correspond à un simple changement de base dans l'espace vectoriel des polynômes de degré n).

Reprenons maintenant notre idée de départ et soit f une fonction continue orthogonale à tous les $\bar{P}_k$; elle est donc aussi orthogonale à tous les Q_n .

Mais par suite du théorème de Weierstrass nous savons que : $\|f - Q_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$\text{or : } \|f - Q_n\|^2 = (f - Q_n, f - Q_n) = \|f\|^2 + \|Q_n\|^2$$

pour que cette expression puisse tendre vers 0 il faut que $\|f\| = 0$ c.e.d. $f = 0$.

Remarque. Nous venons seulement de montrer que les $\bar{P}_n$ forment un système total dans l'espace des fonctions continues sur $[-1, +1]$; or on dit que fonction continue et carré intégrable, l'univers bien entendu n'est pas vrai. Pour compléter notre démonstration nous devons faire appel à un nouveau

Théorème de l'analyse.

Th

Toute fonction de carré intégrable peut être approchée aussi près qu'on veut (au sens de la norme de L^2) par une fonction continue.

Bibliographie.

Dans chaque rubrique les ouvrages sont en principe cités dans un ordre de difficulté croissant.

A. Sur les symétries en physique.

1. Weyl

Symmetry (1952)

- Un ouvrage de synthèse et de vulgarisation (la plupart des photos du chapitre 1 en sont extraites) écrit par un grand mathématicien.

2. Fonda & Ghirardi

Symmetry principles in Quantum physics (1970)

- Clair, détaillé. Couvrent en 500 pages des applications les plus simples de la théorie des groupes à ses utilisations les plus récentes.

3. Lopez

Lectures on Symmetries

- Cet ouvrage traite aussi du rôle général des symétries en physique. Mais d'un niveau élevé et écrit dans un style assez condensé, il est d'une lecture difficile.

B. Ouvrages généraux.

4. Revue du Cethedec n° 10 Représentation des groupes finis. Application à la

mécanique quantique. (1967)

- Un exposé moderne d'une lecture très aisée et agréable. A recommander.

5. Janssen & Boon

Theory of finite groups. Applications in physics. (1967)

- Le formalisme mathématique est présenté de façon très soignée et détaillée.

6. Miller

Symmetry groups and their applications (1972)

- Clair, précis, rigoureux. Des applications et exemples très enrichissants. A recommander. Le dernier du texte rend toutefois la lecture assez difficile.

7. Lomont

Applications of finite groups (1959)

- Couvre un large éventail de problèmes. Quelque fois un peu elliptique.

C. Le point de vue : fonctions spéciales et théorie des groupes.

8. Vilenkin

Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes (1968)

- Une excellente introduction. Les idées principales sont quelque fois noyées dans le flot (60 pages !)
- Un ouvrage de référence : quasiment toutes les fonctions spéciales sont passées en revue.

9. Tolman

Special functions. A group theoretic approach (1968)

- Simple et pourtant rigoureux d'un point de vue mathématique. Dégage sur quelques exemples les principales idées. A recommander.

10. Miller

Lie theory and special functions (1968)

- Un point de vue plus synthétique que les deux ouvrages précédents. Sa lecture exige un niveau mathématique bien supérieur.

Attons par ailleurs:

11. Hall

Applied group theory 1967

12. Lyubarskii

The application of group theory in physics (1960)

13. Petrachine & Tribovov

Applications de la théorie des groupes à la mécanique quantique (1970)

14. Roman

Advanced Quantum theory (1965)

Troisième partie et appendice 2.

15. Byron & Fuller

Mathematics of classical and quantum physics (1970)

Chapitre 10.

16. Mal'cev

Mathematics. Its content, methods, and meaning. (ouvrage collectif) (1963)

Chapitre 20.

On a essentiellement utilisé :

Chapitre 1 : 1, 3, 9.

Chapitre 2 : 11, 8, 6, 15.

Chapitre 3 : 4, 9, 8.

Index.

Le chiffre romain désigne le numéro du chapitre.

Application	d'un ensemble dans un ensemble	II 9
	linéaire	I 27
espace	fonctionnel	II 25, Annexe
	homogène	III 65
	des polynômes homogènes	III 28
dimension	d'une représentation	II 15
	d'un tenseur	II 13
fonctions	associées de Legendre	III 51
formules	d'addition	III 55
	de Rodriguez	III 52, III 53.
groupe	définition	I 2
	compact	III 27
	$SO(3)$	I 17
	$SU(2)$	I 33
	de symétrie	I 12
	de transformations	I 14
homogénéité	et isotropie de l'espace	I 14
homomorphisme	définition	II 8
	de $SU(2)$ sur $SO(3)$	II 34
isomorphisme		II 8
polynômes	espace de polynômes	III 32
	de Legendre	III 52

produit	tenseuriel	II 46, III 69
représentation	définition	II 15
	complètement réductible	III 18.
	équivalentes	III 3
	irréductible	II 15, III 28.
	matricielle	II 22
	réductible	III 15
	régulière	II 23
	unitaire	III 22.
Schrödinger	équation	II 30
structure	algébrique	I 13
sous-espace	orthogonal	III 22
	stable	III 14
spinew		II 49
symétries		I 4
tenseur		II 12
transformation	hermitienne	I 21
	orthogonale	
	symétrique	
	unitaire	
	stéréographique	II 39.