

II - Application au groupe des rotations propres : $SO(3)$

En fait, ce sont plutôt les représentations du groupe $SU(2)$ des matrices 2×2 unitaires et de déterminant $+1$ que nous allons chercher, pour commencer. Pourquoi?

- Tout d'abord l'homomorphisme (établi au chapitre 1 I C 2) entre $SO(3)$ et $SU(2)$ nous laisse espérer que nous pourrions facilement déduire des représentations de $SO(3)$ à partir de celles de $SU(2)$.
- De plus, il y a, à cette façon de procéder une raison tout à fait fondamentale que nous verrons plus loin.
- Enfin une matrice 2×2 est plus facile à manipuler qu'une matrice 3×3 !

A - Représentations unitaires de $SU(2)$ et $SO(3)$.

1 - Représentation dans l'espace des polynômes homogènes.

Nous avons déjà vu un certain nombre d'exemples de représentation. En voici encore un autre : une représentation dans un espace de fonctions mais de dimension finie.

Considérons l'ensemble des polynômes homogènes à deux variables complexes de degré $2j$: j pourra donc prendre les valeurs :

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$$

c.à.d. des valeurs entières ou demi entières. Les polynômes sont de la forme :

$$P_{2j}(z_1, z_2) = a_j z_1^{2j} + a_{j-1} z_1^{2j-1} z_2 + \dots + a_{-j+1} z_1 z_2^{2j-1} + a_{-j} z_2^{2j}$$

$$a_j, \dots, a_{-j} \in \mathbb{C}$$

L'ensemble de ces polynômes forme un espace vectoriel que nous noterons : E_{2j+1}

L'ensemble des monômes :

$$z_1^{j+m} z_2^{j-m}$$

où $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$

en constitue une base. L'espace est donc de dimension $2j+1$.

Etant donné un groupe quelconque de matrices complexes 2×2 , on peut en définir une représentation par (nous notons $\vec{z}$ le couple de variables z_1, z_2) : $\vec{z}$ représente donc le vecteur colonne $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = g \xrightarrow{\quad \circ \quad} D^j(g) \xrightarrow[\substack{P_{2j}(\vec{z}) \\ \in E_{2j+1}}]{\quad \circ \quad} [D^j(g) P_{2j}](\vec{z}) = P_{2j}(g^{-1} \vec{z})$$

nous mettons un indice j à $D(g)$ pour noter que cette représentation est une représentation de dimension $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ selon que j prend les valeurs $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

$D^j(g) P_{2j}$ est bien un polynôme homogène de degré $2j$: il s'avère en effet :

$$P(\alpha' z_1 + \beta' z_2, \gamma' z_1 + \delta' z_2)$$

où

$$\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix}$$

dénique la matrice inverse de $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

En substituant à z_1, z_2 , des combinaisons linéaires de z_1, z_2 on obtiendra bien une somme de monômes de degré $2j$ en z_1, z_2 .

De plus, il s'agit bien d'une représentation : cela résulte de ce que nous avons dit de façon générale au chapitre 2 sur les représentations dans les espaces de fonctions.

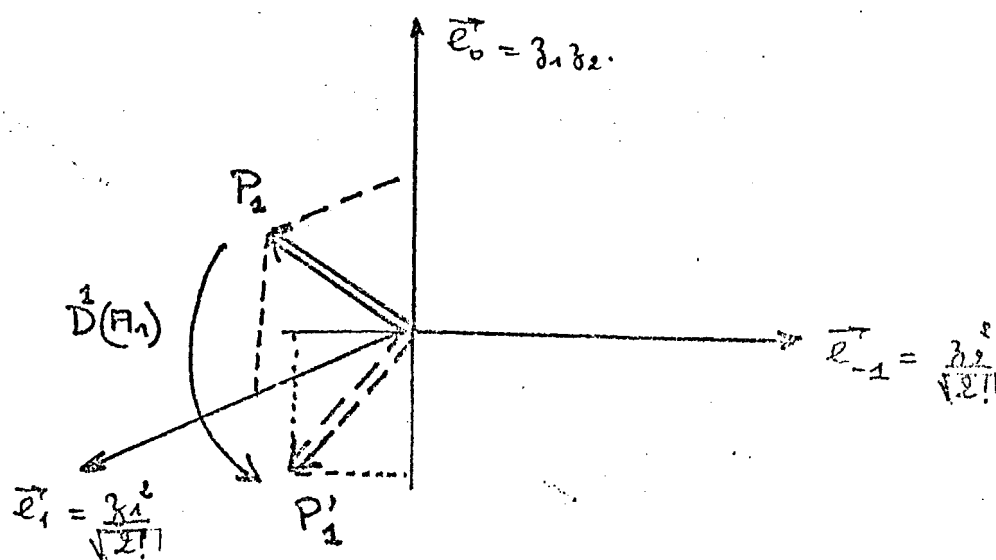
Exemple Prenons nous par exemple dans le cas $j=1$ et considérons :

$$P_1(\vec{z}) = z_1 z_2 + \frac{z_1^2}{\sqrt{2!}}.$$

La base de E_3 est constituée par les 3 vecteurs :

$$e_1 = \frac{z_1^2}{\sqrt{2!}} \quad e_0 = z_1 z_2 \quad e_{-1} = \frac{z_2^2}{\sqrt{2!}}.$$

On peut donc représenter géométriquement le polynôme P_1 par :



Cherchons le transformé de P_1 par la matrice :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in SU(2)$$

$$\text{¶ } A_1^{-1} \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iz_2 \\ -iz_1 \end{bmatrix}$$

$$P_1(A_1^{-1} \vec{z}) = (-iz_2)(-iz_1) + \frac{(-iz_2)^2}{2!} = -z_1 z_2 - \frac{z_2^2}{2!} = P'_1.$$

Remarque Plus généralement on peut envisager des représentations dans l'espace des fonctions homogènes de degré ν (où $\nu \in \mathbb{R}$ ou même à $\mathbb{C}$). On nomme ainsi toutes les fonctions telles que:

$$f(c\vec{z}) = c^\nu f(\vec{z}) \quad \forall \vec{z} \quad \forall c \in \mathbb{C}.$$

Cet espace est de dimension infinie et on l'utilise par exemple pour construire des représentations unitaires (de dimension infinie) du groupe de Lorentz.

3. A la recherche d'une représentation unitaire pour $SU(2)$

Nous avons déjà noté que les représentations unitaires sont particulièrement commodes pour le mathématicien (à cause du théorème de IC₁). A la fin du chapitre 2 nous avons donné un exemple d'une représentation importante en physique (dans l'espace des solutions de l'équation de Schrödinger) et on a pu voir qu'à cause du formalisme de la mécanique quantique elle s'est trouvée être unitaire. C'est là une propriété générale pour les représentations ayant une signification physique en théorie.

quantique

C'est pour toutes ces raisons que nous tenons absolument à ce que les représentations que nous allons construire soient unitaires.

Puisque le théorème de IC 2 nous affirme que pour un groupe compact (et $SU(2)$ de même que $SO(3)$ est compact) il existe un produit scalaire rendant toute représentation de degré fini régularisée unitaire, nous savons que cela est possible: il suffit de trouver le bon produit scalaire.

Il est toujours de bonne stratégie, avant d'attaquer un problème dans sa généralité, de s'en faire une idée sur quelques cas particuliers. Pour essayer d'avoir quelques renseignements sur la forme du bon produit scalaire, nous allons écrire l'unitarité par rapport à certains sous-groupes de $SU(2)$.

Prenez d'abord le sous groupe :

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & -i\varphi \end{bmatrix}$$

Nous allons écrire que :

$$(D^j(\omega_3) \vec{e}_k, D^j(\omega_3) \vec{e}_m) = (\vec{e}_k, \vec{e}_m) \quad (1)$$

où D^j désigne la représentation précédemment définie.

et où les $\vec{e}_k$ sont les vecteurs de base : $\vec{e}_k = \begin{pmatrix} j+k \\ j-k \end{pmatrix}$.

$$D^j(\omega_3) \vec{e}_k(\vec{z}) = \vec{e}_k(\omega_3^{-1} \vec{z}) = \begin{pmatrix} -i\varphi & \\ e & z_1 \end{pmatrix}^{j+k} \begin{pmatrix} i\varphi & \\ e & z_2 \end{pmatrix}^{j-k} = e^{-2i\varphi k} \vec{e}_k$$

La relation (1) s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} -2i\varphi(m-k) & \\ e & -1 \end{bmatrix} (\vec{e}_k, \vec{e}_m) = 0 \quad (2)$$

Comme le crochet est différent de 0 pour $m \neq k$, la relation (2) nous

apprend que nous avons intérêt à prendre un produit scalaire rendant les vecteurs de base orthogonaux. Un résultat auquel nous nous attendions.

Il serait beaucoup plus intéressant pour nous de pouvoir calculer $(\vec{e}_k, \vec{e}_k)$: cela définirait en effet entièrement le produit scalaire (puisque le fait de connaître le produit scalaire des vecteurs de base entre eux permet le calcul du produit scalaire de deux vecteurs quelconques). Mais ce n'est pas là un problème simple *. Nous pourrions certes essayer d'utiliser d'autres sous groupes par exemple :

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

mais le calcul de : $(D^j(\omega_2) \vec{e}_k, D^j(\omega_2) \vec{e}_k)$ fait intervenir, outre la norme de $\vec{e}_k$, également la norme des autres vecteurs de base ; et si nous essayons de donner à θ une valeur particulière, par exemple $\theta = 0$, pour isoler un terme, l'équation (1) devient une simple identité.

Nous en sommes donc réduits à utiliser un procédé qui paraîtra pour l'instant très artificiel, mais qu'on comprendra mieux lorsque nous aurons parlé de l'algèbre de Lie de $SO(2)$ et de ses générateurs. La démonstration qui suit pourra donc être lue en première lecture.

Puisque les vecteurs $\vec{e}_m$ sont pas orthogonaux deux à deux on a (en postulant l'unicité) :

* Remarquons que la formule qui nous a servi dans la démonstration : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{\theta} (T(\theta) \vec{x}, T(\theta) \vec{y})$ devient ici une intégrale triple relative aux trois paramètres θ, φ, ψ et, vue sa complexité, elle ne nous est d'aucune utilité.

$$(D^j(\omega_2) \vec{e}_m, D^j(\omega_2) \vec{e}_{m-1}) = (\vec{e}_m, \vec{e}_{m-1}) = 0$$

on obtient de suite :

$$D^j(\omega_2) \vec{e}_m = (\cos \theta z_1 + \sin \theta z_2)^{j+m} (-\sin \theta z_1 + \cos \theta z_2)^{j-m}$$

Avant de remplacer, dérivons la relation ci dessus par rapport à θ et faisons $\theta = 0$; on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt} D^j(\omega_2) \vec{e}_m \right) \Big|_{\theta=0}, D^j(\omega_2) \vec{e}_{m-1} \Big|_{\theta=0} \Big) + \left(D^j(\omega_2) \vec{e}_m \Big|_{\theta=0}, \frac{d}{dt} (D^j(\omega_2) \vec{e}_{m-1}) \Big|_{\theta=0} \right) = 0$$

$$1^\circ \quad D^j(\omega_2) \vec{e}_m \Big|_{\theta=0} = \vec{e}_m.$$

2° Un calcul facile donne :

$$\frac{d}{dt} (D^j(\omega_2) \vec{e}_m) \Big|_{\theta=0} = -(j-m) \vec{e}_{m+1} + (j+m) \vec{e}_{m-1}$$

d'où :

$$(j+m)(\vec{e}_{m-1}, \vec{e}_{m-1}) - [j-(m-1)](\vec{e}_m, \vec{e}_m) = 0$$

soit :

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_m) = \frac{j+m}{j-(m-1)} (\vec{e}_{m-1}, \vec{e}_{m-1})$$

En itérant cette relation de récurrence on obtient :

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_m) = \frac{(j+m) \cdots [j+(-j+1)]}{[j-(m-1)] \cdots [j-(-j)]} (\vec{e}_{-j}, \vec{e}_{-j})$$

le dénominateur s'écrit aussi :

$$\frac{(2j)!}{(j-m)!}$$

soit :

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_m) = \frac{(j+m)(j-m)!}{(2j)!} (\vec{e}_{-j}, \vec{e}_{-j})$$

Le produit scalaire est ainsi défini au facteur constant $(\vec{e}_{-j}, \vec{e}_{-j})$ près : nous le prendrons égal à $(2j)!$ de sorte que :

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_m) = (j+m)! (j-m)!$$

Autrement dit, si nous voulons que les $\vec{e}_m$ constituent une base orthonormée pour le produit scalaire ainsi défini, nous devons prendre :

$$\vec{e}_m = \frac{z_1^{j+m} z_2^{j-m}}{[(j+m)! (j-m)!]^{1/2}}$$

4- Calcul des éléments matriciels de la représentation.

Ne pas s'effrayer : Dans toute la suite, nous allons être amené à faire des calculs assez lourds. Si le lecteur veut se donner la peine d'avancer pas à pas à son rythme, il se rendra compte que ces calculs quoique lourds, sont finalement simples.

Appliquant au cas de $SU(2)$ le schéma général de 1 nous voyons que les représentations cherchées seront définies par :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta e^{i\varphi} & i \sin \theta e^{i\varphi} \\ i \sin \theta e^{i\varphi} & \cos \theta e^{i\varphi} \end{bmatrix} = A \xrightarrow{P_{E_j}} D^j(A) \xrightarrow{P_{E_{j+1}}} P'_{E_j} = P(A^{-1} \vec{z})$$

et nous savons maintenant que dans l'espace E_{j+1} des polynômes homogènes de degré j , une base orthonormée est donnée par :

$$\vec{e}_m = \frac{z_1^{j+m} z_2^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}$$

Rappelons que, par définition de la matrice d'une application linéaire, on a :

$$D_{mn} = (\vec{e}_m, D^j(A) \vec{e}_n)$$

c.à.d

$$D_{mn} = (\vec{e}_m, \vec{e}_n (A^{-1} \vec{z}))$$

Calculons $\vec{e}_m (A^{-1} \vec{z})$. Puisque les matrices A sont unitaires on a : $A^{-1} = A^+$ c.à.d que :

$$A^{-1} \vec{z} = \begin{bmatrix} \cos \theta e^{-i\varphi} & -i \sin \theta e^{-i\varphi} \\ -i \sin \theta e^{-i\varphi} & \cos \theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\vec{e}_m (A^{-1} \vec{z}) = \frac{(\cos \theta e^{-i\varphi} z_1 - i \sin \theta e^{-i\varphi} z_2)^{j+m} (-i \sin \theta e^{-i\varphi} z_1 + \cos \theta e^{-i\varphi} z_2)^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}$$

Développons grâce à la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^n \underbrace{\frac{n!}{s!(n-s)!}}_{C_n^s} a^{n-s} b^s$$

$$\begin{aligned}
 e_m(A^{-1} \vec{z}) &= \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}} \sum_{s=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{s!(j+m-s)!} (\cos \theta e^{-i\psi} z_1)^s (-i \sin \theta e^{i\psi} z_2)^{j+m-s} \\
 &\quad \sum_{t=0}^{j-m} \frac{(j-m)!}{t!(j-m-t)!} (-i \sin \theta e^{-i\psi} z_1)^t (\cos \theta e^{i\psi} z_2)^{j-m-t} \\
 &= \sum_{s,t} (-i)^{j+m-s+t} \frac{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}{s!(j+m-s)! t!(j-m-t)!} (\cos \theta)^{j-m-t+s} (\sin \theta)^{j+m-s-t} \\
 &\quad e^{i\psi(j-m-t-s)} e^{i\psi(j+m-s-t)} z_1^{s+t} z_2^{j-s-t}
 \end{aligned}$$

Pour obtenir l'élément matriciel D_{mn} il faut multiplier cette expression successivement par $\vec{e}_m$. Or :

$$z_1^{s+t} z_2^{j-s-t} = z_1^{j+(s+t-j)} z_2^{j-(s+t-j)} = \vec{e}_{s+t-j}(\vec{z}) [(s+t)!(j-s-t)!]^{1/2}$$

Il va donc apparaître, par le produit scalaire, un facteur :

$$\delta_{m, s+t-j} [(s+t)!(j-s-t)!]^{1/2}$$

Autrement dit, seuls les termes pour lesquels on aura :

$$m = s+t-j \quad \text{c-à-d} \quad s = m+j-t$$

seront non nuls ; la double sommation précédente devient donc une sommation simple :

$$\begin{aligned}
 D_{mn} &= \sum_t (-i)^{j+m-m-j+t+t} \frac{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2} [(m+j-t+t)!(2j-m-j+t+t)!]^{1/2}}{(m+j-t)!(j+m-m-j+t)! t!(j-m-t)!} \\
 &\quad (\cos \theta)^{j-m-t+m+j-t} (\sin \theta)^{j+m-m-j+t+t} e^{i\psi(j-m-t-m-j+t)} e^{i\psi(j+m-m-j+t)}
 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$D_{mm}^j(A) = \sum_t i^{m-n} (-1)^t \frac{[(j+n)!(j-n)!(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}{(j+m-t)!(n-m+t)! t! (j-n-t)!} \quad (1)$$

$$(\cos\theta)^{j+m-n-2t} (\sin\theta)^{2t+m-n} e^{-i\psi(m+n)} e^{i\psi(m-n)}$$

Dans la sommation nous n'avons pas indiqué entre quelles valeurs varie t : c'est ce point qu'il nous faut préciser maintenant. Puisque nous avons posé: $s = j+m-t$, nous ne pouvons retenir que les valeurs de t qui satisfont la condition: $0 \leq t \leq j-n$, satisfait la condition:

$$0 \leq j+m-t \leq j+n \quad \text{c.e.d} \quad m-n \leq t \leq j+m$$

Comme ces deux conditions doivent être satisfaites en même temps, la sommation en t se fera du nombre: $M = \text{Max}(0, m-n)$ au nombre: $N = \text{Min}(j-n, j+m)$

Exemple Faisons $j=1/2$ et essayons d'écrire la représentation de dimension 2. On aura par exemple:

$$D_{-1/2, -1/2}^{1/2} = \cos\theta e^{i\psi} \quad ; \text{un seul terme correspondant à } t=0.$$

En procédant de même pour les 3 autres termes, on obtient:

$$D^{1/2}(A) = \begin{matrix} -1/2 & +1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \cos\theta e^{i\psi} & -i\sin\theta e^{i\psi} \\ -i\sin\theta e^{-i\psi} & \cos\theta e^{-i\psi} \end{bmatrix}$$

qui est donc A^{-1} .

Ce résultat, qu'on peut aussi trouver directement (ce qui permet de vérifier notre formule générale: sage précaution après le calcul relativement compliqué qui nous y a conduit) provient simplement de la façon dont la représentation a été définie.

Rappelons que j peut prendre les valeurs: $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$.
 Comme l'espace correspondant est de dimension $2j+1$, nous voyons que nous venons d'obtenir une série de représentations de $SU(2)$ dans des espaces de dimension: $1, 2, 3, 4, \dots$.

La première question qui se pose au sujet de ces représentations est:
 sont-elles irréductibles?

Si elles le sont, la deuxième question sera:

est-ce que cet ensemble (infini, dénombrable) de représentations épuise toutes les représentations irréductibles de $SU(2)$ possible?

La réponse à la première question est donnée au paragraphe suivant; la deuxième question est beaucoup plus difficile: on trouvera des indications à ce propos à la fin du chapitre 4 (la réponse est oui également).

5- Cette représentation est irréductible.

Appliquant le lemme de Schur, nous allons montrer que toute matrice M qui commute avec $D^j(A) \quad \forall A \in SU(2)$ ne peut être qu'un multiple de la matrice unité.

Selon une méthode qui nous est maintenant familière nous allons, au lieu d'attaquer ce problème de front, dans sa généralité, exprimer que M commute avec les matrices de divers sous-groupes de $SU(2)$.

Prenons d'abord:

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice ne dépendant pas de φ , $D^j(A)$ ne doit pas non plus en dépendre; l'expression (1) montre qu'on doit donc avoir $m = m'$ et que ces matrices sont diagonales.

Comme A ne dépend pas davantage de θ , on aura de même: $l = l'$.

c.-à-d. que la somme ne comporte en fait qu'un seul terme :

$$D^j(A)_{mn} = \frac{-\sin^j \varphi}{e} \delta_{mn}$$

Exprimons maintenant que M commute avec cette matrice (on note α_i les éléments diagonaux de $D^j(A)$):

$$D^j(A) M - M D^j(A) = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i \delta_{ij} M_{jk} - \sum_j M_{ij} \delta_{jk} \alpha_k = 0$$

soit :

$$M_{ik} (\alpha_i - \alpha_k) = 0$$

d'où il résulte que : $M_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ à condition que $\alpha_i \neq \alpha_k$. Or si on choisit par exemple $0 < \varphi < \pi/2j$ on aura bien $\alpha_i \neq \alpha_k$ pour $i \neq k$ (en effet, $|i|$ et $|k|$ étant tous deux inférieurs à j , leur écart est nécessairement inférieur à $2j$)

Nous savons donc que M devra être diagonale. Mais il est facile de voir (par un calcul tout à fait semblable à celui qu'on vient de faire) que le commutateur d'une matrice diagonale (dont nous notons λ_m les éléments diagonaux) et d'une matrice quelconque : $D^j(A)$ vaut :

$$(\lambda_m - \lambda_n) D_{mn} = 0$$

En particulier si on choisit, une fois pour toutes, n égal à j on aura :

$$(\lambda_m - \lambda_j) D_{mj} = 0$$

Si nous pouvons montrer que $D_{mj} \neq 0$, nous pourrions en conclure que

$$\lambda_m = \lambda_j \quad \forall m$$

donc que M se réduit à un multiple de la matrice unité et que la représentation est (en vertu du lemme de Schur) irréductible.

Or si nous faisons $m=j$ dans l'expression (1), nous obtenons

(d'après les limites de variation de t) que t ne peut prendre que la valeur 0 et :

$$D_{mj} = i^{m-j} \frac{[(j+m)(j-m)!(2j)!]^{1/2}}{(j+m)!(j-m)!} (\cos \theta)^{j+m} (\sin \theta)^{j-m} e^{-i(j+m)\varphi} e^{i(j-m)\psi}$$

pour $\theta \neq 0$, cet élément est lui non nul.

B. Relation entre les représentations du groupe des rotations et certaines fonctions spéciales.

1. Les représentations du groupe des rotations.

A cause de l'homomorphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$ certaines des représentations que nous venons de construire fournissent des représentations de $SO(3)$. Nous avons écrit "certaines" ; on sait en effet qu'une matrice A et $-A$ correspondent la même rotation. Donc si nous voulons avoir vraiment une représentation du groupe des rotations, il faut qu'il y ait identité entre les matrices : $D^j(A)$ et $D^j(-A)$.

Si θ, φ, ψ sont les paramètres de A , ceux de $-A$ seront : $\theta, \varphi + \pi, \psi + \pi$.

et l'expression (1) montre que l'on doit donc avoir :

$$\frac{e^{\pm i(m+m)\pi}}{e^{\pm i(m-m)\pi}} = 1$$

$$\frac{e^{\pm i\pi}}{e^{\pm i\pi}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{e^{\pm i\pi}}{e^{\pm i\pi}} = 1.$$

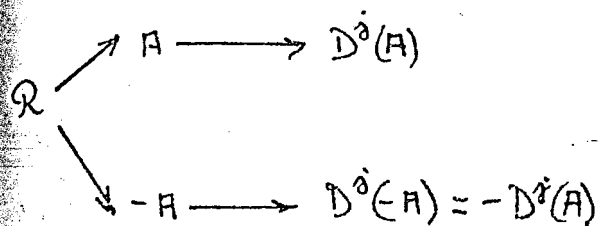
et

Ces deux conditions seront bien réalisées si m et n sont des entiers, par contre lorsque j vaut $1/2, 3/2, 5/2 \dots$ m et n prennent aussi des valeurs demi entières et les conditions ne sont pas satisfaites.

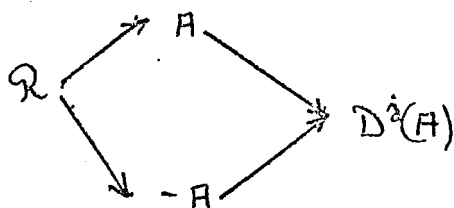
Autrement dit, parmi les représentations que nous avons construites seules celles qui correspondent à des valeurs de j entières donnent des représentations du groupe des rotations. Pour distinguer nous noterons D les valeurs de j entières.

Remarque 1. Nous pouvons résumer la situation par les 2 schémas :

j demi-entier



j entier.



Remarque 2 Ce que nous venons de dire ne signifie pas que les représentations correspondant à j non entières soient physiquement sans intérêt. Indiquons ici simplement qu'un état physique n'est en fait pas décrit strictement par une fonction d'onde Ψ , mais par toutes les fonctions d'onde $e^{i\gamma} \Psi$ où $0 \leq \gamma < 2\pi$.

(Ceci provient du fait, qu'aucune mesure physique ne permet de définir la fonction d'onde mieux qu'à une phase près).

On appelle l'ensemble de ces fonctions d'onde, une voie de l'espace de Hilbert.

Cependant, on peut montrer qu'il est possible de choisir la fonction d'onde Ψ de façon que tous ses transformés (par une rotation) coïncident avec $\gamma=0$ ou $\gamma=\pi$. Ce dernier cas correspond donc à des valeurs de j demi-entières.

Puisque nous voulons maintenant écrire une représentation du groupe des rotations, il est normal de revenir aux angles d'Euler α, β, γ par les relations (voir chapitre 2 I 2 et 2) :

$$\theta = \beta/2$$

$$\varphi = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

$$\psi = \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

Remplaçant dans l'expression (1), on obtient :

$$D^l(\alpha, \beta, \gamma)_{mn} = \sum_t i^{m-n} (-1)^t \frac{[(l+m)!(l-n)!(l+m)!(l-n)!]^{1/2}}{(l+m-t)!(n-m+t)!t!(l-n-t)!} \\ (\cos \beta/2)^{l+m-n-2t} \left(\sin \beta/2 \right)^{2t+m-n} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}(m+n)} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}(n-m)}$$

Nous posons :

$$d^l_{mn}(\beta) = \sum_t (-1)^t \frac{[(l+m)!(l-n)!(l+m)!(l-n)!]^{1/2}}{(l+m-t)!(l-n-t)!t!(l-m+t)!} (\cos \beta/2)^{l+m-n-2t} (\sin \beta/2)^{2t+m-n}$$

Avec cette notation les éléments matriciels s'écrivent :

$$D^l(\alpha, \beta, \gamma)_{mn} = i^{m-n} e^{-i\alpha m} d^l_{mn}(\beta) e^{-i\gamma n}$$

2 - Relation avec les fonctions spéciales.

a) Nous ne nous intéressons qu'à la partie d^l_{mn} ; nous pouvons donc faire $\alpha = \gamma = 0$, ce qui réduit les éléments matriciels à :

$$D^l(0, \beta, 0)_{mn} = i^{m-n} d^l_{mn}(\beta)$$

Pour pouvoir faire le lien avec les fonctions spéciales, nous devons mettre les éléments matriciels que nous venons d'obtenir sous une forme différente. Et pour cela, le plus simple sera de reprendre le calcul que nous avons fait en A4 selon une autre méthode. Il s'agit là purement de calcul algébrique qu'on pourra sauter en première lecture.

Rappelons que nous cherchons le coefficient de :

$$\vec{z}_m = \frac{z_1^{l+m} z_2^{l+m}}{[(l+m)!(l-m)!]^{1/2}}$$

dans :

$$e_m(R^{-1}\vec{z}) = \frac{(\cos(\beta/2) z_1 - i \sin(\beta/2) z_2)^{l+m} (-i \sin(\beta/2) z_1 + \cos(\beta/2) z_2)^{l-m}}{[(l+m)!(l-m)!]^{1/2}}$$

Afin de mettre cette expression sous la forme d'un polynôme à une seule variable, nous posons : $z_1 = z$ $z_2 = 1$

Et nous cherchons dans $e_m(R^{-1}\vec{z})$ qui est maintenant de la forme :

$$e_m(R^{-1}\vec{z}) = a_{2l} z^{2l} + \dots + a_{l+m} z^{l+m} + \dots + a_0.$$

le coefficient de : $\frac{z^{l+m}}{[(l+m)!(l-m)!]^{1/2}}$

$$\text{c.e.d (puisque le terme correspondant peut s'écrire : } a_{l+m} \left[\frac{z^{l+m}}{[(l+m)!(l-m)!]^{1/2}} \right] \\ a_{l+m} [(l+m)!(l-m)!]^{1/2}$$

Or :

$$a_{l+m} = \frac{1}{(l+m)!} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} [e_m(R^{-1}\vec{z})] \Big|_{z=0}$$

d'où :

$$i^{m-n} d_{mn}^l(\rho) = \frac{1}{(l+m)!} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} \left[\frac{(\cos \frac{\rho}{2} z - i \sin \frac{\rho}{2})^{l+m} (-i \sin \frac{\rho}{2} + \cos \frac{\rho}{2})^{l-n}}{[(l+m)!(l-n)]^{1/2}} \right] \Big|_{z=0}$$

Afin de mettre l'expression entre crochets sous une forme plus agréable nous allons faire deux changements de variable :

$$1^\circ \text{ nous posons } z' = (\cos \frac{\rho}{2} z - i \sin \frac{\rho}{2})(-i \sin \frac{\rho}{2})$$

ce qui donne :

$$-i \sin \frac{\rho}{2} z + \cos \frac{\rho}{2} = \frac{z'+1}{\cos \frac{\rho}{2}} \quad dz' = -i \cos \frac{\rho}{2} \sin \frac{\rho}{2} dz$$

$$i^{m-n} d_{mn}^l(\rho) = \underbrace{\left[\frac{(l-n)!}{(l+m)!(l+n)!(l-n)!} \right]^{1/2}}_C (-i \cos \frac{\rho}{2} \sin \frac{\rho}{2}) \frac{1}{(-i \sin \frac{\rho}{2})^{l+m} (\cos \frac{\rho}{2})^{l-n}} \frac{d^{l+m}}{dz'^{l+m}} \left[z'^{l+m} (z'+1)^{l-n} \right] \Big|_{z' = -\sin^2 \frac{\rho}{2}}$$

2° pour rendre cette expression plus symétrique nous posons :

$$z' = \frac{z''-1}{2}$$

$$i^{m-n} d_{mn}^l(\rho) = C \frac{(-i \cos \frac{\rho}{2} \sin \frac{\rho}{2})^{l+m}}{(-i \sin \frac{\rho}{2})^{l+m} (\cos \frac{\rho}{2})^{l-n}} 2^{l+m} \frac{1}{2^{2l}} \frac{d^{l+m}}{dz''^{l+m}} \left[\left(\frac{z''-1}{2} \right)^{l+m} \left(\frac{z''+1}{2} \right)^{l-n} \right] \Big|_{z'' = -2 \sin^2 \frac{\rho}{2}}$$

Dans cette expression, on dérive un polynôme en z'' par rapport à z'' puis on y fait : $z'' = -2 \sin^2 \frac{\rho}{2} + 1 = \cos \rho$

Il revient bien sûr au même de dériver directement le polynôme correspondant en $\cos \rho$, par rapport à $\cos \rho$. D'où (rajoutant au numérateur et au dénominateur un facteur $\cos^n \frac{\rho}{2}$) :

$$i^{m-n} d_{mn}^l(\beta) = C \frac{(-i)^{l+m}}{(-i)^{l+m}} \frac{(\sin \beta/2 \cos \beta/2)^{l+m} \cos^m \beta/2 \cos^n \beta/2}{(\sin \beta/2 \cos \beta/2)^l \sin^n \beta/2 \cos^m \beta/2} 2^{l-m} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \beta)^{l+m}} [(\cos \beta - 1)^{l+m} (\cos \beta + 1)^{l-n}]$$

$$= C i^{m-n} (-1)^{m-n} \left(\frac{\sin \beta/2}{2} \right)^{m-n} \left(\frac{1 + \cos \beta}{2} \right)^m \frac{1}{2^{l-m}} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \beta)^{l+m}} [(\cos \beta - 1)^{l+m} (\cos \beta + 1)^{l-n}]$$

soit finalement :

$$d_{mn}^l(\beta) = \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)! (l+n)! (l-n)!} \right]^{1/2} \frac{(-\sin \beta)^{m-n} (1 + \cos \beta)^n}{2^l} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \beta)^{l+m}} [(\cos \beta - 1)^{l+m} (\cos \beta + 1)^{l-n}] \quad (1')$$

b) Cas particuliers

a) Faisons dans (1') $m = 0$.

$$d_{m0}^l(\beta) = \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \frac{1}{l!} \frac{\sin^m \beta}{2^l} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \beta)^{l+m}} (\cos^2 \beta - 1)^l.$$

L'expression qu'on vient d'obtenir est celle (les 2 premiers facteurs mis à part) des fonctions associées de Legendre :

$$P_l^m(\cos \beta) = \frac{(1 - \cos^2 \beta)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \beta)^{l+m}} (\cos^2 \beta - 1)^l \quad (1)$$

c.à.d que :

$$d_{m0}^l(\beta) = (-1)^m \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \beta) \quad (2)$$

Ainsi une partie des éléments matriciels des représentations du groupe des

rotation s'exprime en fonction des fonctions associées de Legendre.

Remarque 1. La formule (1) ne définit $P_l^m(z)$ que pour z réel et inférieur à 1 ; mais par le procédé habituel du prolongement analytique on peut étendre sa validité à toute valeur complexe de z :

$$P_l^m(z) = \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} (z^2-1)^l \quad (3)$$

Remarque 2

Comme toutes les fonctions spéciales, les fonctions associées de Legendre sont susceptibles de plusieurs définitions : sous forme d'une somme de termes, d'une intégrale, d'une expression dérivée. Ainsi notre résultat du paragraphe 1 pouvait déjà (pour $n=0$) être rattachée aux fonctions associées de Legendre dont l'expression sous forme d'une telle somme est bien connue (dans les ouvrages classiques sur les fonctions spéciales).

Nous nous sommes toutefois préféré reprendre le calcul pour obtenir l'expression (1) qui est connue sous le nom de formule de Rodriguez.

Celle-ci est bien plus maniable et permet en particulier de vérifier (assez facilement à condition d'être patient !) que les polynômes fonctions associées de Legendre vérifient l'équation différentielle :

$$\left[\frac{d}{dz} (1-z^2) \frac{d}{dz} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] P_l^m(z) = 0$$

Lorsque nous aurons vu les méthodes liées aux algèbres de Lie, nous pourrons obtenir cette équation directement, pratiquement sans aucun calcul.

(3) Si on fait dans (3) $m=0$ on obtient la définition des polynômes de Legendre :

$$P_l^0(z) = P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2-1)^l.$$

Leur relation avec les éléments matriciels est :

$$d_{00}^l(\beta) = P_l(\cos \beta).$$

γ) Signalons encore les fonctions :

$$Y_{lm}(\beta, \varphi) = \frac{(-\sin \beta \hat{e}^{\varphi})^m}{2^l l!} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \beta)^{l+m}} (\cos^2 \beta - 1)^l$$

qui portent le nom d'harmoniques* sphériques.

Leur relation avec les éléments matriciels s'écrit :

$$Y_{lm}(\beta, \varphi) = e^{im\varphi} d_{m0}^l(\beta).$$

3. Formule d'addition pour les polynômes de Legendre.

Puisque les éléments matriciels appartiennent aux matrices d'une représentation, ils satisfont la relation d'homomorphisme :

$$D^l(R_1 R_2) = D^l(R_1) D^l(R_2) \quad \text{c.a.d.} \quad D_{mm}^l(R_1 R_2) = \sum_{m'k} D_{m'k}^l(R_1) D_{km}^l(R_2)$$

Exprimant les éléments matriciels en fonction des fonctions spéciales qui

* Une fonction harmonique est une fonction qui satisfait à l'équation de Laplace. En fait les Y_{lm} ne représentent que la partie angulaire de celle-ci, qui s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0$$

évidentes, cette relation nous permet d'obtenir pour ces fonctions des formules intéressantes.

Nous nous limiterons pour notre part à la formule que l'on obtient en prenant pour

R_1 une rotation d'angles d'Euler $0, \beta_1, 0$

R_2 ————— $0, \beta_2, 0$

et en choisissant $m = n = 0$.

Dans ce cas, la rotation $R_1 \circ R_2$ aura pour angles d'Euler :

$$0, \beta_1 + \beta_2, 0.$$

et la relation ci dessus s'écrit :

$$d_{00}^l(\beta_1 + \beta_2) = \sum_{k=-l}^l i^{-k} d_{0k}^l(\beta_1) i^k d_{k0}^l(\beta_2).$$

La formule (2) nous permettra bien sûr d'exprimer d_{k0}^l par les fonctions associées de Legendre, mais pour exprimer d_{0k}^l de même nous devons en préalable établir la relation existant entre d_{0k}^l et d_{-k0}^l .

Reprenons la première expression de $d_{mn}^l(\beta)$.

$$d_{mn}^l(\beta) = \sum_{t=\max(0, m-n)}^{\min(j-n, j+m)} (-1)^t \frac{[(l+m)!(l-m)!(l+n)!(l-n)!]^{1/2}}{(l+m-t)!(t+m-n)! t! (l-m-t)!} (\cos \beta/2)^{2l+m-n-2t} (\sin \beta/2)^{2t+n-m}$$

nous en déduisons que :

$$d_{-m-n}^l(\beta) = \sum_{t=\max(0, -n+m)}^{\min(j+m, j-n)} (-1)^t \frac{[(l-n)!(l+n)!(l-m)!(l+m)!]^{1/2}}{(l-n-t)!(t-n+m)! t! (l+m-t)!} (\cos \beta/2)^{2l-m+n-2t} (\sin \beta/2)^{2t-m}$$

c.a.d. que :

$$d_{-m-n}^l(\beta) = d_{mn}^l(\beta).$$

d'où:
$$x_{0k}^l(\beta) = x_{-k0}^l(\beta)$$

Notre relation de départ s'écrit donc:

$$P^l(\cos(\beta_1 + \beta_2)) = \sum_{k=-l}^l (-1)^k \left[\frac{(l+k)!}{(l-k)!} \right]^{1/2} P_l^k(\cos \beta_1) (-1)^k \left[\frac{(l-k)!}{(l+k)!} \right]^{1/2} P_l^k(\cos \beta_2)$$

c.à.d.:

$$P^l(\cos(\beta_1 + \beta_2)) = \sum_{k=-l}^l P_l^{-k}(\cos \beta_1) P_l^k(\cos \beta_2)$$

Remarque: On obtient exactement de la même façon la formule un peu plus générale:

$$P^l(\cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \varphi) = \sum_{k=-l}^l e^{-ik\varphi} P_l^{-k}(\cos \beta_1) P_l^{+k}(\cos \beta_2)$$

ou d'autres formules du même type encore plus générales (et aussi plus compliquées).

Voici donc une relation qu'il ne serait pas facile de démontrer directement et que nous avons obtenue sans aucune difficulté par la seule interprétation de ces fonctions comme éléments matriciels d'une représentation. Il s'agit là d'une démarche très générale: on peut obtenir de nombreuses propriétés intéressantes des fonctions spéciales de cette façon.

C. Passage de la représentation polynomiale à une représentation dans l'espace des fonctions définies sur la sphère.

Nous venons d'obtenir les harmoniques sphériques comme éléments matriciels de représentations polynomiales de $SO(3)$. Le lecteur familiarisé avec la mécanique quantique pourra faire la remarque que dans la théorie du moment angulaire on obtient les harmoniques sphériques comme vecteurs propres des opérateurs carré et composante selon Oz du moment angulaire. (pour le lecteur à qui ce résultat n'est pas familier, la suite ne présentera qu'un intérêt assez lointain).

Existe-t-il donc un lien entre ces deux résultats ?

Oui, il y a en effet un lien très étroit. Nous ne pouvons pas le préciser complètement (sauf à recourir à des procédés indirects comme l'obtention de l'équation différentielle vérifiée par Y_{lm} à partir de sa formule de Rodriguez); il faudrait disposer pour cela de l'outil que constituent les générateurs infinitésimaux (lié à la théorie des algèbres et groupes de Lie).

Mais nous allons cependant pouvoir déduire de nos représentations polynomiales des représentations dans l'espace des fonctions définies sur la sphère (unité par exemple), c.à.d. des fonctions de la forme :

$$Y(\theta, \varphi)$$

où θ, φ sont les angles sphériques d'un point.

Et montrer que dans ce cas, les Y_{lm} constituent bien des vecteurs de base pour cette représentation.

Afin de permettre au lecteur d'utiliser lui-même les notions présentées dans ce chapitre, nous précisons pour cette étude quelques notions.

1- Comment déduire une représentation pour des fonctions $f(g)$ $g \in G$ à partir de n'importe quelle représentation irréductible.

Exercice.

On considère la représentation dans $\mathbb{R}^3$ du groupe $SO(3)$ (par les matrices habituelles paramétrées à l'aide des angles d'Euler par exemple); représentation qui est, comme on sait, irréductible. On la note $T(R)$, bien qu'il n'agisse simplement des matrices R , en vue d'une généralisation ultérieure.

A chaque vecteur de $\mathbb{R}^3$ on associe une fonction de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \vec{f} & \xrightarrow{\quad \lambda \quad} & \lambda(\vec{f}) = (\vec{a}, T(R)\vec{f}) \\ \in \mathbb{R}^3 & & \in E \end{array}$$

Dans l'expression $(\vec{a}, T(R)\vec{f})$ la parenthèse désigne le produit scalaire (euclidien) de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{a}$ un vecteur fixe de $\mathbb{R}^3$, choisi une fois pour toutes.

$\lambda(\vec{f})$ est une quantité dépendant de R (c.-à-d. des angles d'Euler α, β, γ par exemple); nous noterons cette fonction :

$$\lambda(\vec{f}) = F(R)$$

et soit E l'ensemble des F .

1° Pour se faire une idée de l'application λ , on commence par traiter un exemple. On prend $\vec{a} = \vec{e}_1$ (où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ désigne une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$) et on demande de calculer :

$$E_k(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda(\vec{e}_k) \quad k=1,2,3.$$

2° a) Revenant au cas général, on demande à titre de leçon de montrer que si : $F = \lambda(\vec{f})$, l'image par λ du vecteur

$T(R_0) \vec{e}$ (où R_0 désigne un élément donné de $SO(3)$) est la fonction F' définie par:

$$F'(R) = F(RR_0).$$

b) Montrer que l'application linéaire λ est inversible. (on utilisera le fait que T est une représentation irréductible).

(3°) On définit les E_k , images par λ de la base $\vec{e}_k$ de $\mathbb{R}^3$.

$$E_k(R) = (\vec{a}, T(R) \vec{e}_k).$$

Montrer que les E_k constituent une base de E .

(4°) A l'aide de l'application inversible λ , on peut construire dans E une représentation Q associée à $T(R)$. Quelle sera sa définition?

T et Q sont-elles équivalentes?

(5°) Montrer que la matrice de la représentation Q par rapport à la base E_k est la même que la matrice de la représentation T par rapport à la base correspondante $\vec{e}_k$.

Solution.

La première difficulté est de bien comprendre que l'application λ associée à un vecteur de $\mathbb{R}^3$ une fonction de R (c.-à-d. par exemple de $SO(3)$). Voici un exemple du même type et plus simple:

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \in N & & \end{array}$$

(1°)

Notons $[R_{ij}]$ la matrice de $T(R)$. On a:

$$\vec{E}_k = (\vec{e}_i, T(R)\vec{e}_k) = (T(R)\vec{e}_k)_i$$

$$\text{or: } (T(R)\vec{e}_k)_i = \sum_j R_{ij} (e_k)_j = \sum_j R_{ij} \delta_{kj} = R_{ik}.$$

d'où:

$$E_k = R_{1k}.$$

on a en remplaçant par l'expression explicite en fonction des angles d'Euler:

$$E_1 = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma$$

$$E_2 = -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$E_3 = \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(2^\circ) \quad a) \quad F'(R) = \lambda(T(R)\vec{f}) = (\vec{a}, T(R)(T(R_0)\vec{f}))$$

$$T \text{ est un homomorphisme} \quad = (\vec{a}, T(RR_0)\vec{f})$$

$$= F(RR_0).$$

b) C'est la question clé. La plus importante et la plus difficile.

Pour montrer que l'application linéaire λ est inversible, on va montrer qu'elle est bijective.

D'une part, elle est surjective puisque par définition l'espace arrive coïncide avec l'espace image.

Pour montrer qu'elle est injective on va montrer (d'après un théorème d'algèbre linéaire) que son noyau se réduit au vecteur nul. Le noyau N est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si on pouvait montrer qu'il est nul.

pour la représentation T on conclure par suite de l'irréductibilité que N est soit N soit $\mathbb{R}^3$ entier soit le vecteur nul.

Or le noyau ne peut être $\mathbb{R}^3$ en entier; cela voudrait dire que l'image de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est la fonction nulle ce qui n'est pas le cas. Il suffit pour le voir de prendre $\vec{f} = \vec{x} \neq \vec{0}$: la fonction

$$(\vec{x}, T(R)\vec{x})$$

est alors non nulle au moins pour $R = I$ puisqu'elle vaut $\|\vec{x}\|^2$.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que N est stable. Soit donc $\vec{n} \in N$, son image $F = \lambda(\vec{n})$ est donc la fonction nulle. Mais l'image de $T(R_0)\vec{n}$ est (en vertu de α) la fonction:

$$F'(R) = F(R R_0)$$

et puisque F est la fonction nulle, le second membre est nul $\forall R \in SO(3)$, il en résulte donc bien que F' est aussi une fonction nulle et par suite $T(R_0)\vec{n} \in N$.

③ Il suffit d'invoquer le théorème d'algèbre linéaire:

Th. Pour que l'application linéaire de E dans F soit bijective, il faut et il suffit que f transforme toute base de E en une base de F .

④ Q est définie à l'aide de λ par le schéma:

$$\begin{array}{ccc} \vec{f} \in \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{T(R_0)} & T(R_0)\vec{f} \in \mathbb{R}^3 \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ F(R) \in E & \xrightarrow{Q(R_0)} & F' = F(R R_0) \in E \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{en vertu} \\ \text{de 2}^\circ \alpha. \end{array}$$

Par définition on a donc :

$$Q(R) = \lambda \circ T(R) \circ \lambda^{-1} \quad (1)$$

i.e.d que les représentations Q et T sont équivalentes.

(5°) Les éléments matriciels de la représentation Q sont définis par :

$$Q(R) \vec{E}_i = \sum_j Q_{ji} \vec{E}_j$$

ce qui s'écrit, compte tenu de (1) :

$$\lambda \circ T(R) \circ \underbrace{\lambda^{-1} \vec{E}_i}_{\vec{e}_i} = \sum_j Q_{ji} \vec{E}_j$$

multiplions les 2 membres par λ^{-1} en utilisant encore une fois le fait que : $\lambda^{-1}(\vec{E}_j) = \vec{e}_j$:

$$T(R) \vec{e}_i = \sum_j Q_{ji} \vec{e}_j$$

relation qui montre bien que les Q_{ji} coïncident avec des éléments matriciels T_{ji} de T relativement à la base $\vec{e}_i$.

Conclusion. Dans ce problème nous avons envisagé une représentation $T(R)$ du groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$, par être concret. Mais toutes les démonstrations données s'appliqueraient aussi bien à une représentation irréductible quelconque d'un groupe donné. Nous pouvons donc énoncer :

Th :

A partir de toute représentation irréductible $T(\cdot)$ d'un groupe G dans un espace V , on peut définir une représentation Q par des fonctions scalaires définies sur le groupe de la forme :

$$F(g) = (\vec{a}, T(g) \vec{f}) \quad \vec{f}, \vec{a} \in V \\ g \in G$$

qui lui est équivalente.

De plus, ces deux représentations ont même matrice relativement aux bases $\vec{e}_i$ pour T et $E_i = (\vec{e}_i, T(g) \vec{e}_i)$ pour Q .

Application. Ce théorème nous permet donc de définir à partir des représentations physiques des représentations par des fonctions :

$$F(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{des angles d'Euler.}$$

Mais nous voulons en fait aboutir à des représentations par des fonctions

$$Y(\theta, \varphi)$$

définies sur la sphère. En fait nous allons voir qu'il n'est pas difficile de passer de l'un à l'autre.

2 - Bijection entre les points d'un espace homogène et les classes d'un groupe.

Commençons, de même qu'en 1, par un exercice concret :

Exercice.

Soit H le sous-groupe des éléments de $SU(2)$ de la forme :

$$h = \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix}$$

On définit une relation d'équivalence dans $SU(2)$ par :

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists h \in H \mid A' = hA$$

- ① Quelle est la classe d'équivalence d'un élément A_0 ?
Ecrire pour chaque classe un représentant particulièrement simple.

- ② En faisant agir les rotations correspondantes sur le point $P(0,0,1)$, montrer qu'il y a une bijection entre les classes précédentes et les points d'une sphère.

Solution.

Soit :

$$A_0 = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_0/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_0/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta_0/2) & i\sin(\beta_0/2) \\ i\sin(\beta_0/2) & \cos(\beta_0/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\delta_0/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_0/2} \end{bmatrix}$$

un élément donné de $SU(2)$.

La classe d'équivalence $\bar{A}_0$ de A_0 sera constituée par tous les éléments de la forme :

$$h A_0 \quad \text{où } h \text{ décrit } H.$$

Un représentant $\bar{A}$ simple de cette classe s'obtiendra en prenant :

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0.$$

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & i \sin(\beta/2) \\ i \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix}$$

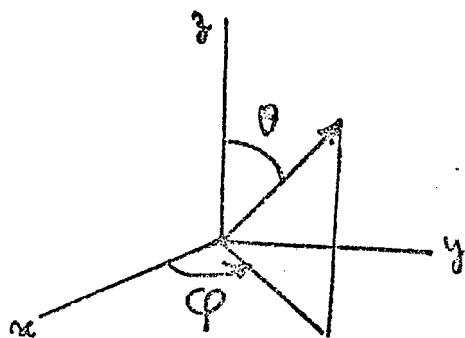
(2°) La rotation correspondante à $\overline{A}_0$ s'écrit :

$$R_{\overline{A}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}}_{\text{rotation autour de } O_x} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{rotation autour de } O_y}.$$

Si on fait agir directement sur $P(0,0,1)$ on voit que l'angle γ n'interviendra pas dans l'expression des coordonnées du transformé P' (la rotation d'angle γ laissant P invariant). En outre en partant de la rotation correspondant à $\overline{A}_0^{-1}$ on obtient :

$$R_{\overline{A}_0^{-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\gamma \sin\beta \\ \cos\gamma \sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} \quad (1) \quad \text{avec rappels de : } 0 \leq \beta < \pi, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi$$

Les coordonnées d'un point de la sphère :



Le fait de devoir prendre $\overline{A}_0^{-1}$ au lieu de $\overline{A}_0$ provient simplement du fait que nous avons considéré les choses à droite $H \underline{A}_0$ et non les choses à gauche $\underline{A}_0 H$.

s'expriment en fonction des coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (2) \quad \text{avec:} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad 0 \leq \theta < \pi$$

La comparaison de (1) et (2) définit de façon biunivoque une correspondance:

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi/2 - \gamma \\ \theta &= \beta \end{aligned}$$

Généralisation. Ce que nous venons de faire tient plutôt du "bricolage" que d'une méthode. Cependant il s'agit d'un théorème général (et dont l'application à $SO(3)$ est classique).

Th.

Lorsqu'un sous-groupe H d'un groupe de transformation G agit dans un espace homogène $\mathcal{C}b^*$ contient tous les éléments laissant invariant un point $x \in \mathcal{C}b^{**}$, alors il existe une bijection entre les points de $\mathcal{C}b$ et les classes à gauche (ou à droite):

$$gH.$$

Démonstration. Définissons la correspondance par:

On dit qu'un espace $\mathcal{C}b$ est homogène par rapport à un groupe G si:

$$\forall x, y \in \mathcal{C}b, \exists g \in G \mid y = gx.$$

Un tel sous-groupe H s'appelle alors

$$\vec{g} = g H \xrightarrow{\delta} \alpha = g H a$$

$\in$ l'ensemble des classes à gauche $\in \mathcal{C}_b$

Surjectif. Comme l'espace est homogène relativement à G :

$$\forall \alpha \in \mathcal{C}_b: \exists g \in G \mid \alpha = g a = g H a.$$

Injectif. $\delta(\vec{g}) = \delta(\vec{g}') \stackrel{?}{\Rightarrow} \vec{g} = \vec{g}' \text{ (c.a.d. } g = g'h)$

$$g H a = g' H a \Rightarrow g'^{-1} g H a = a \Rightarrow g'^{-1} g a = a$$

$$\Rightarrow g'^{-1} g \in H \text{ autrement dit: } g = g'h.$$

3. Conclusion.

Résumons:

1° L'application (où $\vec{a}$ est pour l'instant arbitraire):

$$\vec{P}_{ij} \longrightarrow (\vec{a}, D(R) \vec{P}_{ij}) = F(R)$$

nous permet de définir à partir de la représentation polynomiale (et plus généralement à partir de n'importe quelle représentation irréductible) une représentation dans l'espace des fonctions définies sur le groupe.

2° Il existe une bijection entre les classes $H R$ (H : groupe des rotations d'axe Oz) et les points d'une sphère.

Pour atteindre notre objectif, il nous suffira de montrer qu'on peut choisir $\vec{a}$ de façon que les fonctions $F(R)$ soient non des fonctions de R mais des fonctions de $H R$, autrement dit qu'elles soient constantes.

sur une même chose.

Il suffit pour cela de prendre pour $\vec{e}$ un vecteur invariant par $D(h)$. Supposant qu'un tel vecteur existe on aura en effet (on le note $\vec{e}_0$) :

$$F(hR) = (\vec{e}_0, D(hR) \vec{p}_{e_j})$$

$$D \text{ est une représentation: } = (\vec{e}_0, D(h) D(R) \vec{p}_{e_j})$$

$$D \text{ est unitaire: } = (D(h)^{-1} \vec{e}_0, D(h)^{-1} D(h) D(R) \vec{p}_{e_j})$$

$$\vec{e}_0 \text{ invariant par } D(h): = (\vec{e}_0, D(R) \vec{p}_{e_j})$$

$$= F(R)$$

Un tel vecteur invariant par $D(h)$ existe-t-il ?

Oui, il suffit de prendre :

$$\vec{e}_0 = \frac{z_1^j z_2^j}{j!}$$

vérifie bien que :

$$\begin{aligned} \vec{e}_0(h^{-1}\vec{z}) &= \frac{\left(\frac{-i\alpha/2}{e} z_1\right)^j \left(\frac{i\alpha/2}{e} z_2\right)^j}{j!} \\ &= \frac{z_1^j z_2^j}{j!} \end{aligned}$$

et dans ce cas, les vecteurs de base de la représentation $\mathcal{Q}$:

$$E_k = (\vec{e}_0, D(\mathcal{Q}) \vec{e}_k)$$

sont bien les harmoniques sphériques: $E_k = D_{0k}(R)$.

des polynômes de phase près, du moins.

Exercices.

A

On considère les matrices de la forme:

$$g = \begin{bmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1°

Vérifier qu'elles forment un groupe G .

Est-il abélien ?

Est-il compact ?

2°

On considère la représentation dans $\mathbb{C}^2$ de ce groupe de matrices. Montrer que cette représentation a un sous-espace stable.

Est-elle complètement réductible ou non ? Ce résultat vous surprend-il ?

B

Cet exercice fournit une illustration, sur un exemple simple, de la méthode par laquelle nous avons construit les représentations de $SU(2)$.

On considère la représentation du groupe des rotations planes (qui est bien sûr un sous-groupe de $SU(2)$) dans l'espace des polynômes homogènes à deux variables de degré 2, définie de la même façon que les représentations générales de $SU(2)$ dans l'espace des polynômes homogènes de degré $2j$.

Ecrire la matrice de cette représentation.

Cette représentation est-elle réductible ? complètement réductible ?

Indiquez comment vous procédez pour trouver les sous-espaces stables.

C On considère la représentation tensorielle à 4 dimensions du groupe $SU(2)$:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & T(U) \\
 \in SU(2) & & \\
 (i_1, i_2 = 1, 2) & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 x_{i_1 i_2} & \xrightarrow{\quad} & x'_{i_1 i_2} = \sum_{j_1, j_2=1}^2 U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} x_{j_1 j_2} \\
 \in \mathbb{R}^4 & & \in \mathbb{R}^4
 \end{array}$$

1° On commence par étudier un exemple simple en se restreignant aux matrices de $SU(2)$ de la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R$$

Ecrire dans ce cas la matrice 4×4 de la représentation.

Remarquer que cette matrice peut s'écrire symboliquement :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta R & -\sin \theta R \\ \sin \theta R & \cos \theta R \end{bmatrix}$$

on dit que cette matrice 4×4 est le produit tensoriel $R \otimes R$ de R par elle-même.

2° On revient maintenant au cas général et on se propose de chercher s'il existe dans l'espace (à 4 dimensions) de la représentation construite par les tenseurs d'ordre 2 $x_{i_1 i_2}$, des sous-espaces stables.

a) On dit qu'un tenseur d'ordre 2 (à deux indices donc) est symétrique si :

$$S_{ij} = S_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$$

antisymétrique si :

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

Combien de composantes indépendantes possèdent ces deux types de tenseurs ?

b) Montrer que le sous-espace constitué par les tenseurs symétriques est stable, ainsi que celui constitué par les tenseurs antisymétriques. Quelle est la dimension de ces deux sous-espaces ?

c) Montrer que tout tenseur d'ordre 2 peut se mettre sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. En déduire que la représentation tensorielle se décompose en une somme de deux représentations.

D

Si nous avions voulu définir directement une représentation polynomiale de $SO(3)$ (sans passer par l'intermédiaire de $SU(2)$, comme nous l'avons fait), il aurait fallu se placer dans un espace de polynômes homogènes à 3 variables (et non plus 2). Dites pourquoi. C'est ce qu'on a proposé de faire dans cet exercice.

Soit donc S_l l'espace des polynômes P_l homogènes de degré l à 3 variables x, y, z .

① Indiquer une base de cet espace. Quelle est sa dimension ?

Indiquer comment sera définie la représentation de $SO(3)$ dans S_l .

② On considère le sous-espace S'_l constitué par les polynômes de la forme :

$$(x^2 + y^2 + z^2) P_{l-2}$$

P_{l-2} est un polynôme homogène de degré $l-2$ (à 3 variables x, y, z) quelconque.

a) Quelle est la dimension de S'_l ?

b) Montrer que S'_l est un sous-espace stable de la représentation

dans S_e .

c) Quelle est la dimension du sous-espace $S_e^\perp$ orthogonal à S_e (on suppose qu'un produit scalaire a été défini).

Remarque: On peut montrer que la représentation réduite à $S_e^\perp$ est irréductible et équivalente à la représentation de même dimension définie par l'autre méthode (en passant par $SU(2)$).

Solution.

A (1°) - la multiplication est bien une loi de composition interne pour cet ensemble de matrices; les paramètres du produit de deux matrices de paramètres (a, b) et (a', b') sont: $(a+a', b'e^a + b e^{-a'})$

- Point n'est besoin de vérifier l'associativité puisque de façon générale le produit de matrices carrées est associatif.

- L'élément neutre $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ s'obtient pour $a=0, b=0$

- L'inverse g' de g s'obtient pour $a' = -a$ $b' = -b$.

Le groupe n'est pas abélien et il n'est pas compact non plus puisque les paramètres appartiennent à $\mathbb{R}$ qui n'est pas un domaine borné.*

(2°) On vérifie de suite que le sous-espace $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ est stable.

Remarquons que pour démontrer que la représentation n'est pas complètement

* C'est en fait le premier exemple (à part le groupe des translations qui lui est abélien) de groupe non compact que nous voyons.

réductible, il ne suffit pas de vérifier que le sous-espace $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ n'est pas stable, car il pourrait très bien y avoir un sous-espace stable de la forme: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ (a, b : nombres fixes).

Si la représentation est complètement réductible elle est somme nécessairement de deux représentations de dimension 1 et équivalente à une représentation par des matrices diagonales. Autrement dit, les matrices du groupe doivent être diagonalisables avec des vecteurs propres (et donc la matrice de passage) ne dépendant pas des paramètres a, b .

$$D(g) = P \cdot T(g) P^{-1} \quad \begin{array}{l} T(g) : \text{représentation initiale} \\ D(g) : \text{représentation diagonale} \end{array}$$

La diagonalisation (par la méthode habituelle) fournit les valeurs propres $\bar{a}$ et $\bar{a}^*$ et les vecteurs propres:

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{indépendant de } a, b \text{ et qui nous redonne donc le sous-espace stable déjà trouvé.}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b}{a - \bar{a}^*} y \\ y \end{bmatrix} \quad \text{qui dépend de } a \text{ et } b. \quad \text{Donc la représentation}$$

T n'est pas complètement réductible, ce qui n'est bien sûr possible que parce que le groupe G n'est pas compact (cf la remarque de I.B.2).

Soit $SO(2)$ le groupe des rotations planes constituées des matrices de la forme:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

On considère la représentation :

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\quad} & T(R) & & \\ \in SO(2) & & & & \\ & P(\vec{g}) & \xrightarrow{\quad} & P'(\vec{g}) = P(R^{-1}\vec{g}) & \\ & E & & E & \end{array}$$

Choisissons dans l'espace E des polynômes homogènes de degré 2, la base orthonormée :

$$\vec{e}_1 = \frac{z^2}{\sqrt{2}} \quad \vec{e}_0 = z_1 z_2 \quad \vec{e}_{-1} = \frac{z_1^2}{\sqrt{2}}$$

A cette seule condition la représentation correspondante sera unitaire.

On obtient par exemple :

$$T(g)\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta)^2 = \frac{z_1^2}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta + \sqrt{2} z_1 z_2 \sin \theta \cos \theta + \frac{z_2^2}{\sqrt{2}} \cos^2 \theta$$

On trouve ainsi la matrice :

	$T(g) \frac{z_1^2}{\sqrt{2}}$	$T(g) z_1 z_2$	$T(g) \frac{z_2^2}{\sqrt{2}}$
$\frac{z_1^2}{\sqrt{2}}$	$\cos^2 \theta$	$-\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$	$\sin^2 \theta$
$z_1 z_2$	$\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$	$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$	$-\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$
$\frac{z_2^2}{\sqrt{2}}$	$\sin^2 \theta$	$\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$	$\cos^2 \theta$

Pour répondre aux autres questions il suffit d'invoquer les théorèmes suivants :

Les seules représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1.

Donc notre représentation, qui est de dimension 3, est réductible.

De plus, comme toute représentation unitaire de dimension finie est complètement réductible si elle est réductible, notre représentation est complètement réductible.

Pour trouver les sous-espaces stables, il suffit comme à l'exercice A de chercher valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de la représentation.

Autre méthode. On voit que la représentation à deux dimensions du groupe des rotations planes par les matrices:

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

est elle-même complètement réductible et équivalente à la représentation "diagonale":

$$\bar{g}(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

Nous aurions donc pu prendre comme point de départ cette forme réduite et nous aurions de suite obtenu une représentation équivalente à la précédente puisque:

$$\bar{g}(\theta) = P g(\theta) P^{-1} \Rightarrow T(\bar{g}(\theta)) = \underbrace{T(P)}_P T(g(\theta)) \underbrace{T(P^{-1})}_{P^{-1}}$$

et beaucoup plus simple puisque sa matrice est:

$$\begin{bmatrix} e^{-2i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i\theta} \end{bmatrix}$$

sur laquelle les propriétés de réductibilité se lisent de suite.

C

1° On a par exemple :

$$x'_{11} = R_{11} R_{11} x_{11} + R_{11} R_{12} x_{12} + R_{12} R_{11} x_{21} + R_{12} R_{12} x_{22}.$$

En procédant de même pour les autres composantes on obtient bien la matrice, produit tensoriel de R par elle-même.

2° a) Les composantes d'un tenseur symétrique à 2 dimensions sont au nombre de 3 :

$$S_{11} \quad S_{12} = S_{21} \quad S_{22} :$$

et pour un tenseur antisymétrique au nombre de 1 :

$$A_{11} = 0 \quad A_{12} = -A_{21} \quad A_{22} = 0$$

b) Montrons que si on a :

$$S_{ij} = S_{ji} \text{ ou aussi}$$

$$S'_{ij} = S'_{ji}.$$

$$S'_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} S_{j_1 j_2}.$$

$$S'_{i_2 i_1} = \sum_{j_1 j_2} U_{i_2 j_1} U_{i_1 j_2} S_{j_1 j_2}$$

Permutons les noms des indices de sommation et tenons compte de $S_{j_1 j_2} = S_{j_2 j_1}$

$$S'_{i_2 i_1} = \sum_{j_2 j_1} U_{i_2 j_2} U_{i_1 j_1} S_{j_1 j_2} = S'_{i_1 i_2}.$$

La démonstration est similaire pour $A_{j_1 j_2}$.

c) Procédons par la méthode d'analyse synthétique.

Analyse. Supposons que la décomposition d'un tenseur en une partie symétrique et antisymétrique existe bien :

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}$$

Pour traduire la symétrie et l'antisymétrie échangeons j et i :

$$T_{ji} = S_{ij} - A_{ji}.$$

d'où :

$$S_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} \quad A_{ij} = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2}$$

même si la décomposition existe, elle est bien unique.

Synthèse. Il s'agit de vérifier, ce qui n'est ici que la simplicité des manipulations de l'analyse, que la réponse qu'on vient de trouver est bien une solution du problème.

On peut faire la même genre de démonstration pour montrer que toute fonction peut se mettre sous la forme d'une somme d'une partie paire et d'une autre impaire, etc.

L'espace des tenseurs d'ordre 2 est donc bien somme directe de 2 sous-espaces stables.

① Une base de cet espace sera constituée par les monômes.

$$x^r y^s z^{l-r-s}$$

Pour une valeur de x fixée, s peut prendre les valeurs:

$$0, 1, \dots, l-x$$

il y aura donc en tout :

$$\sum_{x=0}^l (l-x+1) \quad \text{monômes.}$$

cette somme vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^l (l+1) - \sum_{x=0}^l x &= (l+1)(l+1) - \frac{l(l+1)}{2} \\ &= \frac{(l+1)(l+2)}{2} \end{aligned}$$

qui est la dimension cherchée.

La représentation sera définie par :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & T(R) \\ \in SO(3) & P(\vec{x}) \xrightarrow{\quad} & P' = P(\vec{x}') \text{ avec } \vec{x}' = R^{-1} \vec{x} \end{array}$$

(2°) a) la dimension de $\mathcal{B}_l'$ est :

$$\frac{(l-2+1)(l-2+2)}{2} = \frac{(l-1)l}{2}$$

Le fait de multiplier tous les polynômes par $x^2 + y^2 + z^2$ ne rajoute pas de coefficient arbitraire et donc n'augmente pas la dimension.

$$b) \quad T(R) [(x^2 + y^2 + z^2) P_{l-2}(\vec{x})] = (x'^2 + y'^2 + z'^2) P_{l-2}(\vec{x}')$$

puisque $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ où R est une rotation orthogonale.

brei sûr: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

Ainsi (puisque par ailleurs $P_{l-2}(\vec{x}')$ sera encore un polynôme de degré $l-2$), $T(R)$ transforme bien un élément de S_{l-2} en un autre élément de S_{l-2} .

$$\begin{aligned} c) \quad \dim S_l^{\perp} &= \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{l(l-1)}{2} \\ &= 2l+1. \end{aligned}$$

Annexe au chapitre 3 : notion intuitive de représentation.

L'analogie que je vais développer pour expliquer intuitivement la notion de représentation (et quelques unes des propriétés que nous avons vues au chapitre 3) pourra pêter à sourire. Comme pour toute analogie il ne faut pas essayer de la pousser jusqu'à dans le moindre détail. Il s'agit cependant d'une analogie qui est plus que superficielle.

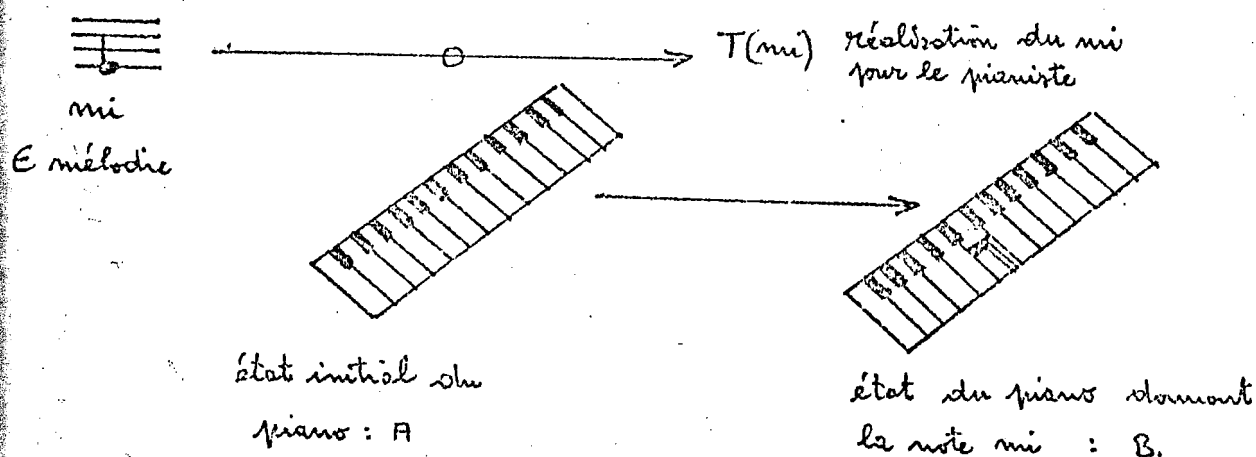
Je commence par rappeler le schéma habituel définissant une représentation :

$$\begin{array}{ccccc}
 g & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xrightarrow{\quad} & T(g) \\
 \in \text{ groupe } G & & \vec{\alpha} & \xrightarrow{\quad} & \vec{\alpha}' = T(g) \vec{\alpha} \\
 & & \in \text{ espace } E & & \in \text{ espace } E.
 \end{array}$$

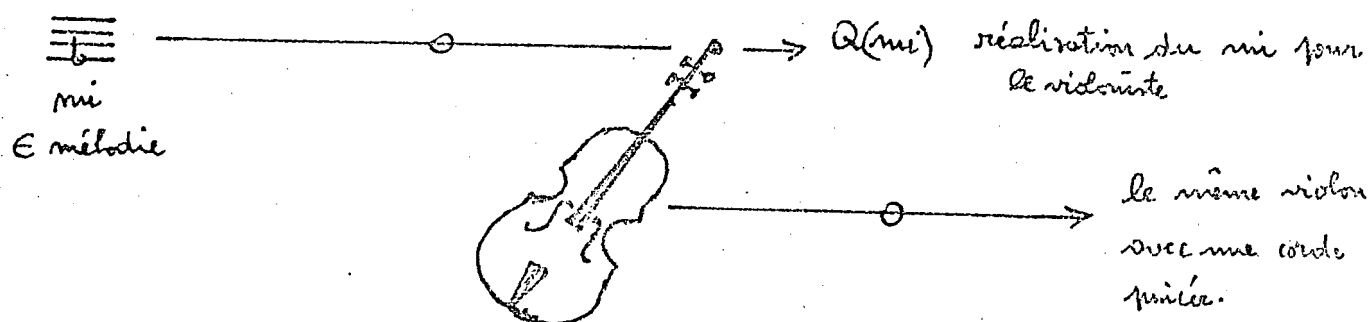
Et voici l'analogie. Imaginons qu'on dispose d'une mélodie écrite sur des portées et, pour interpréter cette mélodie, d'un piano et d'un violon.

Pour obtenir la note "mi" par exemple, le pianiste enfoncera une certaine touche, le violoniste attaquera une corde avec l'archet après l'avoir pincé au bon endroit.

Nous pouvons donc dire que la note "mi" a 2 réalisations différentes selon l'instrument qu'on considère. Pour le piano, par exemple, nous pouvons faire un schéma analogue à celui qui définit une représentation :



Pour le violon on aura de même :



Nous allons maintenant examiner comment se transportent dans l'analogie les diverses propriétés d'une représentation que nous avons vues jusqu'ici.

La représentation est un homomorphisme

Cela signifie, nous le savons, que T transmet les propriétés du groupe initial aux éléments $T(g)$: chacune des représentations d'un groupe permet de reconnaître ce groupe.

Ici de même, nous avons un lien très étroit entre les notes écrites sur la partition et les sons $T(do)$, $T(mi)$... qui seront émis quand le piano passera de son état initial A à son état final B . Lien étroit qui

permet en particulier de reconnaître la mélodie dont il s'agit qu'elle soit jouée par le piano ou par le violon.

Espace et dimension de la représentation.

Pour un piano ayant N touches, il n'existe qu'un nombre fini d'états possibles : 2^N puisqu'une touche peut être ou bien levée ou bien enfoncée. * On peut donc dire que l'analogue de l'espace vectoriel E est l'espace des états du piano : la représentation dans l'espace du piano a pour réalisation dimension 2^N .

Par contre, les cordes d'un violon peuvent être pincées en quelque endroit qu'on désire : le violon peut rendre un nombre de sons (théoriquement) infini. L'espace des états du violon a donc un nombre de dimensions infini. On a là l'analogue d'une représentation de dimension infini.

Représentations équivalentes.

Nous avons vu que deux représentations sont dites équivalentes si elles ne diffèrent qu'en apparence (par exemple parce qu'on a choisi une base différente dans les deux cas) mais sont au fond identiques.

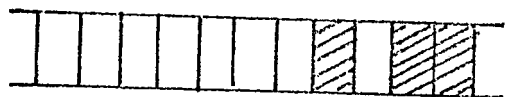
De même, une mélodie donnée peut être exécutée sur un piano ou un clavier : les sons auront certes une tonalité différente, mais une étude un peu plus approfondie montrera de suite qu'on peut établir une bijection entre les touches du piano et celles du clavier qui ont été successivement enfoncées (surtout si l'on suppose que les deux claviers ont le même nombre de touches).

On peut faire la même remarque pour un violon et un violoncelle.

* On suppose que la mélodie est jouée avec un seul doigt (même en incluant les accords le nombre d'états possibles est de toute façon fini)

Sous-espace stable - Représentation réductible et irréductible.

Imaginons que nous ayons à jouer une mélodie ne comportant qu'un petit nombre de notes différentes (la mélodie peut être néanmoins assez longue à condition que ce soient toujours les mêmes notes qui reviennent) sur un piano. Il est alors fort probable que certaines touches ne seront jamais utilisées. Si, comme sur la figure,



trois touches restent inutilisées, nous pouvons considérer le sous-espace des états du piano constitué par les $N-3$ touches restantes. Tout état de ce sous-espace sera transformé par la mélodie toutes les notes de la mélodie considérée en un état du même sous-espace. Nous sommes donc là l'analogue de la notion de sous-espace stable d'une représentation.

Le piano possédant juste le nombre minimum de touches requises pour jouer une mélodie déterminée, constituera l'analogue d'une représentation irréductible.