

Chapitre 3

Propriétés fondamentales des représentations

et

application au groupe des rotations.

Au chapitre précédent, nous avons montré comment on peut obtenir de nombreuses et diverses représentations d'un groupe donné. En mettant à profit tout le matériel mathématique dont vous disposez (transformations géométriques, matrices, fonctions, polynômes) vous pourrez, sans trop de peine, construire de multiples autres exemples.

Selon une démarche habituelle en mathématiques nous allons maintenant essayer d'y voir plus clair et de discerner selon quelle structure est organisée cette profusion d'objets mathématiques nouveaux que nous venons de créer.

Par exemple certaines représentations d'aspect a priori différent se révéleront d'un certain point de vue (à préciser) identiques. Voici la notion de représentations équivalentes.

Toutes les représentations ne sont pas également utiles; se pose alors le problème de savoir celles qui sont fondamentales (en un sens à préciser) et celles qui sont accessoires. Voici la notion de représentation réductible et irréductible.

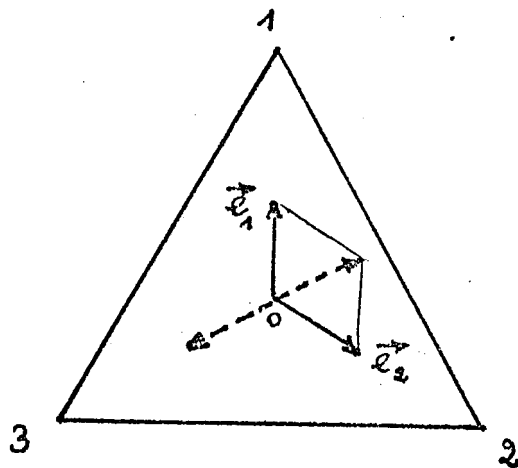
Enfin, le mathématicien ne se satisfait jamais de pouvoir construire quelques représentations. Il désire très vite, pour un groupe donné, pouvoir énumérer toutes les représentations possibles (en un sens à préciser). Voici les indications figurant à la fin de ce chapitre.

I. Equivalence, irréductibilité et unitarité des représentations.

A. Notion de représentations équivalentes.

1. Introduction de la notion de représentations équivalentes.

Considérons le groupe de toutes les transformations du plan qui laissent un triangle équilatéral inchangé; nous dirons plus brièvement qu'il s'agit du groupe G_3 des symétries d'un triangle équilatéral.



[1] Choix d'un repère non orthogonormal pour la représentation des symétries d'un triangle équilatéral.

Ce groupe comprend 6 transformations :

1° Trois symétries par rapport à chacune des médiatrices de chacun des côtés: σ_1 , σ_2 , σ_3 .

2° Trois rotations d'angle: 0 , $2\pi/3$, $4\pi/3$ et de centre O . Nous noterons ces rotations: I , C_3 , C_3^2 .

Pour représenter ces transformations sous forme matricielle, choisissons un repère. Prenons pour commencer celui de [1].

Matrice de σ_1

$$\sigma_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$$

$$\sigma_1(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \begin{matrix} \sigma_1(\vec{e}_1) & \sigma_1(\vec{e}_2) \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} = D(\sigma_1)$$

On obtient de même :

$$D(\sigma_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et aussi :

$$D(C_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(C_3^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bien entendu, ces matrices constituent une représentation matricielle de dimension 2 du groupe G_3 .

Nous aurions bien sûr aussi pu choisir un autre repère, celui de

2 par exemple.

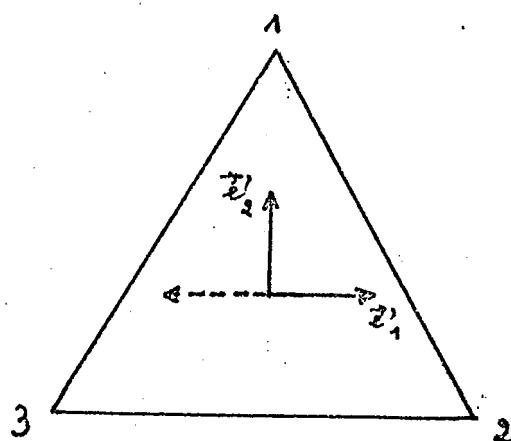
Matrice de σ_1

$$\sigma_1(\vec{e}'_1) = -\vec{e}'_1$$

$$\sigma_1(\vec{e}'_2) = \vec{e}'_2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{matrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{matrix} \begin{matrix} \sigma_1(\vec{e}'_1) & \sigma_1(\vec{e}'_2) \\ \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} = D'(\sigma_1)$$



2) Choix d'un repère orthonormé pour la représentation des symétries d'un triangle équilatéral.

On obtiendra de même:

$$D'(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$D'(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$D'(C_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$D'(C_3^2) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Remarque On peut vérifier aisément que les matrices D' sont orthogonales, c.à.d. que:

$$D' D'^t = D'^t D' = I$$

alors que les matrices D ne le sont pas. Il ne s'agit là bien sûr que d'un cas particulier d'une proposition générale:

La matrice d'une transformation orthogonale (c.à.d. conservant le produit scalaire euclidien*) est une matrice orthogonale, à condition

* Rappelons que l'analogue complexe d'une transformation orthogonale est une transformation unitaire qui, elle, conserve le produit scalaire hermitien.

que le repère qu'on se choisit soit orthonormé. *

Les matrices D' ne diffèrent des matrices D que par un simple changement de base, on passe des unes aux autres par la formule habituelle; **

$$\vec{e}'_i \left| \begin{array}{c} \sigma_1(\vec{e}'_i) \\ D'(\sigma_1) \end{array} \right. = \vec{e}'_i \left| \begin{array}{c} \vec{e}_i \\ P \end{array} \right. \vec{e}_i \left| \begin{array}{c} \sigma_1(\vec{e}_i) \\ D(\sigma_1) \end{array} \right. \sigma_1(\vec{e}_i) \left| \begin{array}{c} \sigma_1(\vec{e}'_i) \\ P^{-1} \end{array} \right.$$

La matrice de passage P est indépendante de la transformation envisagée et s'écrit :

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 \end{array} \right] \end{array}$$

Nous avons donc :

$$(1) \quad D'(g) = P \cdot D(g) P^{-1} \quad \text{et ceci} \quad \forall g \in G_3.$$

** Rappelons que les matrices $\vec{e}'_i \left| \begin{array}{c} \vec{e}_i \\ P \end{array} \right.$ et $\sigma_1(\vec{e}_i) \left| \begin{array}{c} \sigma_1(\vec{e}_i) \\ P \end{array} \right.$ sont égales à cause de la linéarité de σ_1 .

* On pourra se reporter à la démonstration donnée en note au chapitre 2 I C 1 a. On y utilise bien explicitement le fait que : $(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}$.

Cette écriture est certes tout à fait valable analogue à celle qu'on a pour des matrices semblables (et de fait $D'(g)$ et $D(g)$ sont semblables) mais ici la relation (1) relie non pas seulement deux matrices, mais deux groupes de matrices.

Il est naturel de considérer que les représentations D et D' ne sont pas fondamentalement différentes, ce qui nous amène à poser la définition :

2. Définition et exemples.

Def:

Si deux représentations D et D' ne diffèrent que par un changement de base, c.à.d. si on a :

$$(1) \quad D'(g) = P D(g) P^{-1} \quad \forall g \in G$$

elles sont dites équivalentes.

Remarque 1 Les deux représentations peuvent éventuellement avoir lieu dans deux espaces différents. La matrice de passage P relie alors ces deux espaces. En voici un exemple :

Exemple 1° Considérons l'espace E formé par les polynômes homogènes du 1^{er} degré par rapport aux deux variables complexes z_1, z_2 :

$$P(z_1, z_2) = a_1 z_1 + a_2 z_2 \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

C'est un espace vectoriel à 2 dimensions dont une base est constituée par les monômes :

$$P_1 = z_1$$

$$P_2 = z_2$$

Définissons dans cet espace une représentation du groupe des rotations planes :

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\quad} & T(g) \\ \text{rotation plane} & & \\ \text{d'angle } \theta & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & P' \\ \in E & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{défini par :} \\ P'(z_1, z_2) = a_1 z_1 e^{-i\theta} + a_2 z_2 e^{i\theta} \end{array}$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une représentation.

La matrice d'une rotation d'angle θ sera dans cette représentation :

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc} T(g) P_1 & T(g) P_2 \\ \left[\begin{array}{cc} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{array} \right] & \end{array} \right] = T$$

2° Cette représentation est-elle équivalente à la représentation d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$ qui s'écrit (on a choisi dans $\mathbb{R}^2$ une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) :

$$\begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \begin{matrix} T(g) \vec{e}_1 & T(g) \vec{e}_2 \\ \left[\begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right] \end{matrix} = Q$$

On vérifie de suite que :

$$Q = P T P^{-1}$$

où la matrice de passage P s'écrit :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Cette fois il est clair qu'on ne peut plus interpréter P comme une matrice de changement de base (puisque'elle relierait les bases de 2 espaces différents). P est la matrice d'une application linéaire μ de E dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\mu} & \mu(P_1) = \frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} \\ P_2 & & \mu(P_2) = \frac{i\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{2}} \\ \in E & & \end{array}$$

Remarque 2 Lorsque il s'agit de représentations de dimension infinie nous ne pouvons certes plus écrire de matrices. Mais notre définition précédente reste valable à condition d'y interpréter P non comme une matrice.

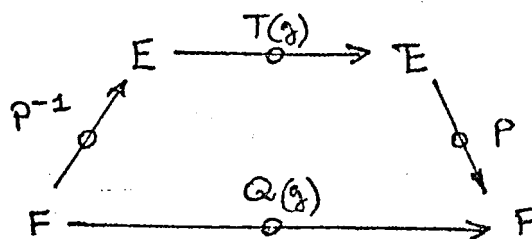
mais comme une application linéaire inversible.

Nous aurons donc la définition plus générale :

Déf:

On dira que deux représentations $T(g)$ et $Q(g)$ d'un groupe G respectivement dans des espaces E et F sont équivalentes, s'il existe une application linéaire inversible P de E dans F telle que :

$$Q(g) = P \circ T(g) \circ P^{-1} \quad \forall g \in G.$$



B - Notion de représentation irréductible et complètement réductible

1 - Introduction de ces notions.

Considérons le groupe S_3 des permutations à 3 éléments (que nous avons déjà rencontré au chapitre 2 I A 3). Un élément quelconque de ce groupe s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} \quad p, q, r : \text{permutation de } 1, 2, 3$$

Nous pouvons définir une représentation de S_3 dans $\mathbb{R}^3$ de la façon suivante (après avoir choisi une base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dans $\mathbb{R}^3$) :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad \circ \quad} T(g) \xrightarrow{\quad \circ \quad} T(g)\vec{x} = \vec{x}' \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$$

par exemple pour $g_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $T(g_c)\vec{x}$ aura pour composantes $\begin{cases} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{cases}$.

Pour cet élément, la matrice de la représentation s'écrit :

$$\begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{bmatrix} T(g_c)\vec{e}_1 & T(g_c)\vec{e}_2 & T(g_c)\vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une représentation, i.e. d. qu'on a :

$$T(g') \circ T(g) = T(g' \cdot g)$$

Preuve :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$g' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}$$

$$g' \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}$$

Ouvrons une parenthèse au sujet du produit de 2 permutations. Celui-ci peut en effet s'interpréter de 2 façons différentes.

1° on peut considérer S_3 comme un groupe abstrait et faire simplement le produit de 2 éléments comme nous l'avons fait au chapitre 2 I A 3.

2° on peut aussi considérer S_3 comme un groupe de transformation agissant dans l'ensemble des triplets de la forme (p, q, r) . Le produit de 2 éléments deviendra alors la composition des applications correspondantes et on aura:

$$[g' \circ g](1, 2, 3) = g'(g(1, 2, 3)) = g'(p, q, r) = (p', q', r')$$

comme nous venons de le faire ci dessus.

Les ouvrages adoptent soit l'une soit l'autre de ces conventions, d'où certaines contradictions apparentes (pour la table de multiplication par exemple).

Continuant notre démonstration de la formule d'homomorphisme, nous aurons:

$$T(g' \circ g) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{p'} \\ \alpha_{q'} \\ \alpha_{r'} \end{bmatrix}$$

Or:

$$[T(g') \circ T(g)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = T(g') \left(T(g) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \right) = T(g') \begin{bmatrix} \alpha_p \\ \alpha_q \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{p'} \\ \alpha_{q'} \\ \alpha_{r'} \end{bmatrix}$$

Ceci dit, remarquons que le groupe S_3 et le groupe du paragraphe A (G_3) sont isomorphes. Pour le voir, on peut bien sûr définir explicitement l'application de S_3 dans G_3 et vérifier que c'est un isomorphisme. Mais, on peut aussi remarquer simplement qu'une transformation qui laisse un triangle équilatéral inchangé ne fait que permuer ses 3 sommets; on comprend donc que l'ensemble de ces transformations soit identique à l'ensemble des permutations de 3 objets.

A cause de cet isomorphisme nous pouvons donc dire que nous avons deux représentations du groupe S_3 (et de même pour G_3 , bien sûr):

- celle que l'on vient de construire, de dimension 3
- celle construite en A, de dimension 2.

Remarque: Il va sans dire que pour n'importe quel groupe, on peut aussi définir une représentation de dimension 1, en associant à tout élément une transformation opérant sur des nombres (complexes par exemple)

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & \lambda(g) \\ & & z \xrightarrow{\quad \circ \quad} z' = z' = \lambda(g)z \end{array} \quad (1)$$

Nous voudrions savoir si chacune de ces deux représentations (nous laissons celle de dimension 1 de côté pour l'instant) est fondamentale ou non, ou, au contraire, l'une peut se déduire de l'autre. Si tel est le cas, nous pouvons d'ailleurs, à priori, supposer que c'est la représentation (plus compliquée) d'ordre 3 qui se décompose en représentations plus simples.

Remarquons, à tout hasard, que si nous définissons un nouveau repère de façon que :

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} T(g_6) \vec{e}'_1 &= T(g_6) \vec{e}_1 + T(g_6) \vec{e}_2 + T(g_6) \vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_3 + \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \\ &= \vec{e}'_1 \end{aligned}$$

et il en sera de même avec n'importe quel $T(g_i)$, $g_i \in S_3$.

On dit que le sous-espace (à une dimension) $\vec{e}'_1$ est stable pour la représentation considérée. (on dit aussi "invariant").

Plus généralement :

Déf:

On dit qu'un sous-espace E' de l'espace E d'une représentation T est stable pour T si :

$$\vec{\alpha} \in E' \Rightarrow T(g) \vec{\alpha} \in E' \quad \forall g \in G.$$

Dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, les matrices de la représentation seront de la forme :

$$\begin{array}{c} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} T(g_i) \vec{e}'_1 & T(g_i) \vec{e}_2 \quad T(g_i) \vec{e}_3 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & B & \\ 0 & & C \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

Le détail des blocs B et C ne nous intéresse pas ici.

Plus généralement, si le sous-espace stable E' est de dimension p , on peut choisir une base de E dont les p premiers vecteurs coïncident avec une base de E' (ceci grâce au théorème de la base incomplète).

Par rapport à cette base, les matrices de la représentation seront de la forme :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_p \\ \vec{e}_{p+1} \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{array}
 \begin{array}{|cc|}
 \hline
 \begin{array}{c} T(g)\vec{e}_1 \quad \dots \quad T(g)\vec{e}_p \\ \hline A \end{array} & \begin{array}{c} T(g)\vec{e}_{p+1} \quad \dots \quad T(g)\vec{e}_n \\ \hline B \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \quad \dots \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} & \begin{array}{c} C \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Def

Lorsque l'espace d'une représentation possède un sous-espace stable, on dit que la représentation est réductible (et ses matrices, dans le cas d'une représentation de dimension finie ont alors la forme ci dessus).

Lorsqu'il n'existe pas de sous-espace stable, on dit que la représentation est irréductible.

Revenant à la représentation de S_3 dans $\mathbb{R}^3$, nous complétons $\vec{e}_1$ par 2 autres vecteurs de base choisis de façon judicieuse :

$$\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

Que deviennent ces vecteurs si on leur applique $T(g)$? On aura, par exemple

$$T(g_0) \vec{e}'_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_0 = -\vec{e}'_3 \quad T(g_0) \vec{e}'_3 = \vec{e}_0 - \vec{e}_1 = -\vec{e}'_2$$

Plus généralement, on constate que les transformés de ces 2 vecteurs peuvent toujours s'exprimer en combinaison linéaire de $\vec{e}'_2$ et $\vec{e}'_3$. Autrement dit, le sous-espace (à 2 dimensions) engendré par $\vec{e}'_2$ et $\vec{e}'_3$ est stable.

Les matrices de la représentation dans cette nouvelle base auront donc la forme :

	$T(g_i) \vec{e}'_1$	$T(g_i) \vec{e}'_2$	$T(g_i) \vec{e}'_3$
$\vec{e}'_1$	1	0	0
$\vec{e}'_2$	0	D	
$\vec{e}'_3$	0		

Ainsi la représentation se décompose en 2 morceaux :

- 1° une représentation de dimension 1 (analogue à (1))
- 2° une représentation de dimension 2 définie dans le sous-espace engendré par $\vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

De façon équivalente, nous pouvons dire que $\mathbb{R}^3$ est somme directe des deux sous-espaces stables $\{e_1\}$ et $\{\vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$.

Rappelons cette notion de somme directe.

Déf.

On dit qu'un espace vectoriel E est somme directe de 2 sous espaces E_1 et E_2 (et on note: $E = E_1 \oplus E_2$) si:

1° tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \quad \text{où } \vec{x}_1 \in E_1, \vec{x}_2 \in E_2$$

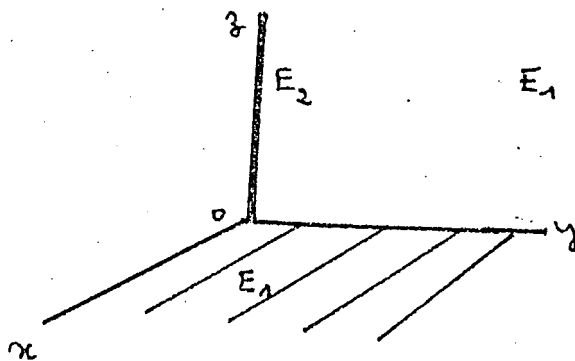
2° cette décomposition est unique

On démontre que ces deux conditions sont équivalentes aux deux conditions suivantes:

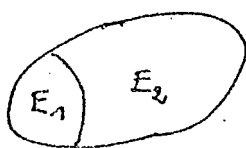
1° $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

2° $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Exemple: $\mathbb{R}^3$ est somme directe du sous espace formé par le plan xoy et du sous espace qui constituent les vecteurs parallèles à l'axe Oz :



Remarque: Il faut bien noter que la somme directe de 2 sous-espaces n'a rien à voir avec la réunion de 2 sous-ensembles:



Dans le cas de la réunion, si un élément n'appartient pas à E_1 , il

appartient obligatoirement à E_2 ; ce qui n'est absolument pas vrai pour une somme directe : un vecteur peut fort bien ne pas être parallèle à Ox ou être parallèle à Oz !

Revenant à la représentation, nous donnerons de façon générale la définition :

Déf :

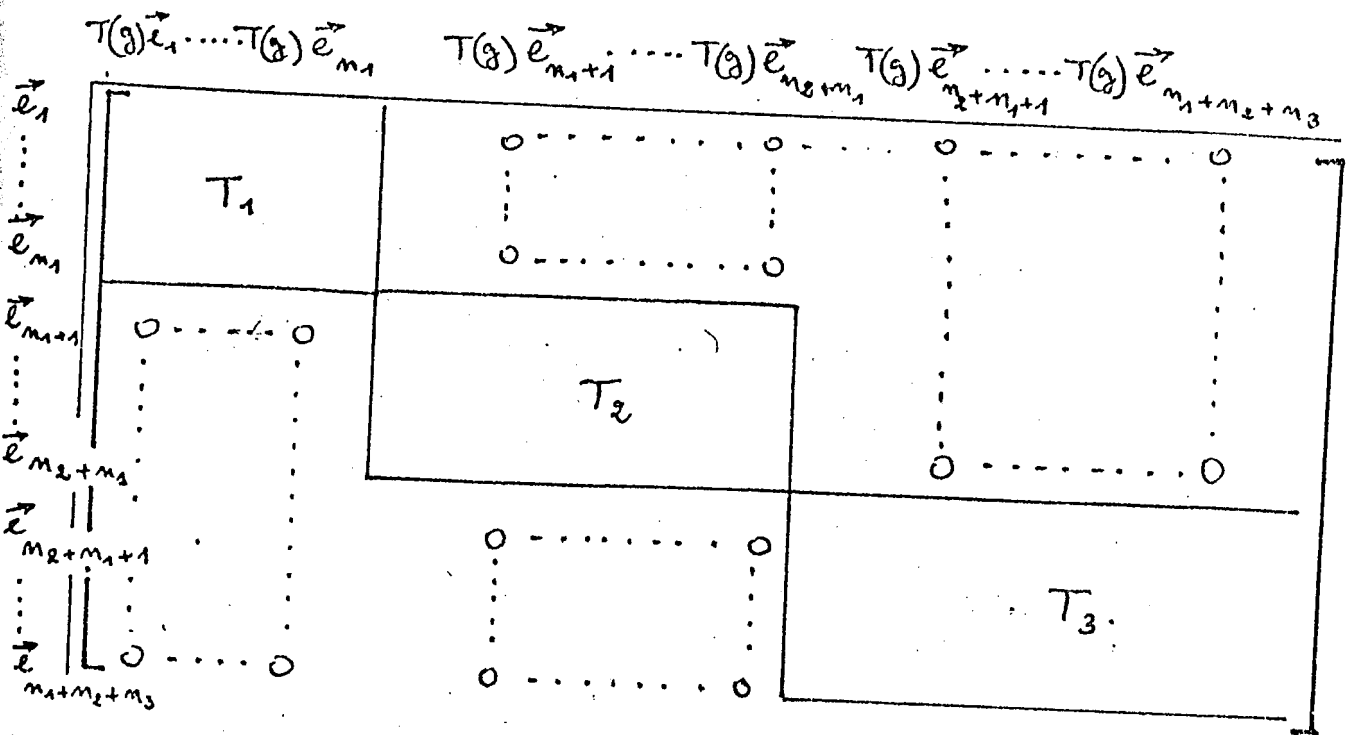
Lorsque l'espace d'une représentation est somme directe de sous-espaces stables correspondant à des représentations irréductibles, on dit qu'elle est complètement réductible.

Par extension, on dira que la représentation elle-même est somme directe des représentations irréductibles partielles.

Supposons donc que l'espace E d'une représentation T soit somme directe de 3 sous-espaces stables : E_1, E_2, E_3 respectivement de dimension n_1, n_2, n_3 . Choisissons dans E une base telle que les n_1 premiers vecteurs constituent une base de E_1 , les n_2 suivants une base de E_2 , et les restants une base de E_3 .

On dira que T est somme directe d'une représentation T_1 (ayant pour espace E_1) de dimension n_1 , d'une représentation T_2 (dans E_2) de dimension n_2 et d'une représentation T_3 (dans E_3) de dimension n_3 .

Et les matrices de la représentation dans cette base s'écriront :



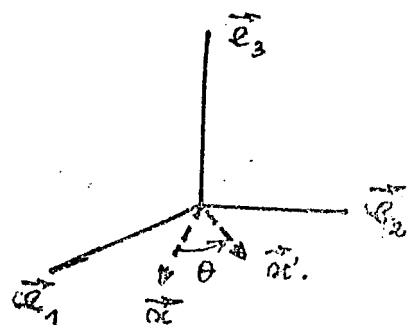
Cette forme par blocs, typique des représentations complètement réductibles rappelle la forme diagonale des matrices: il n'y a toutefois aucun lien particulier entre la diagonalisation d'une matrice et la réduction d'une représentation c.-à-d. d'un groupe de matrices.

Insistons bien sur le fait que toute représentation réductible n'est pas forcément complètement réductible. (cf. exercice C)

Exemple de représentation complètement réductible.

Considérons une représentation du groupe des rotations planes dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\quad T(g) \quad} & \vec{x}' \\ \text{rotation} & & \\ \text{d'angle } \theta & & \\ \vec{x} & \in \mathbb{R}^3 & \end{array}$$

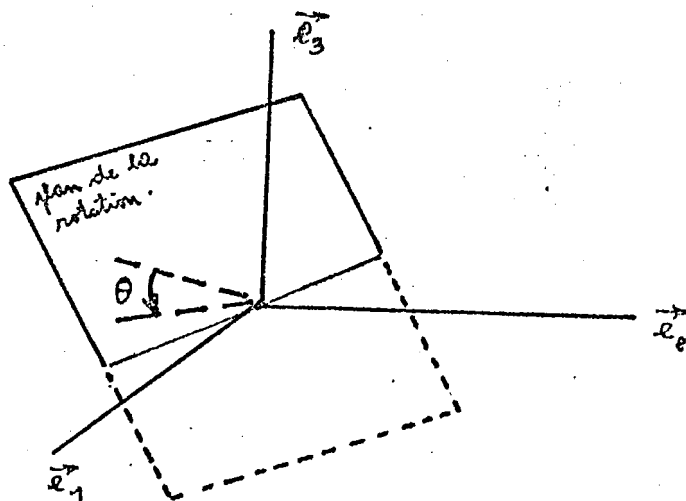


Si nous choisissons dans $\mathbb{R}^3$ une base telle que $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ appartiennent au plan de la rotation, les matrices de la représentation s'écrivent :

$$\begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} T(\theta) \vec{e}_1 & T(\theta) \vec{e}_2 & T(\theta) \vec{e}_3 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Ainsi on voit que T est somme d'une représentation de dimension 2 et d'une représentation de dimension 1.

Remarque. Si nous avions choisi une base moins commode, par exemple :



la décomposition de la représentation T ne serait pas apparente au premier coup d'œil sur les matrices comme cela s'est le cas ; il surdit bonne idée au préalable, pour clarifier la situation, un changement de base.

La représentation $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ est elle-même équivalente,

comme nous l'avons vu, à une représentation de la forme :

$$\begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

dont on voit bien qu'elle est somme de deux représentations de dimension 1.

Ainsi nous pouvons conclure que la représentation du groupe des rotations planes dans $\mathbb{R}^3$ est équivalente à une somme de 3 représentations de dimension 1.

Nous pouvons dès maintenant imaginer que les représentations irréductibles sont les favorites du mathématicien, car elles possèdent la précieuse propriété d'être fondamentales, essentielles. Les représentations complètement réductibles ne lui causeront guère de soucis puisqu'il pourra les ramener à des représentations irréductibles. Par contre, les représentations réductibles (sans l'être complètement) seront une source d'embarras.

Heureusement pour lui, il existe une large classe de représentations qui sont complètement réductibles : les représentations unitaires.

C'est ce que nous allons voir maintenant.

C - L'importance des représentations unitaires.

1. Une représentation unitaire est une représentation dont les opérateurs (c.à.d. les $T(g)$) sont unitaires, donc conservent le produit scalaire hermitien. Nous en avons déjà vu un exemple à la fin du chapitre 2.

Ainsi que nous l'avons annoncé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Th

Toute représentation unitaire d'ordre fini qui est réductible est complètement réductible.

Démontrons d'abord le lemme:

Lemme

Lorsqu'une représentation unitaire a un sous-espace stable H_1 , le sous-espace orthogonal H'_1 est stable aussi.

Avant d'en venir à la démonstration, rappelons ce qu'on entend par sous-espace orthogonal

Déf:

Dans un espace hermitien H , le sous-espace orthogonal H'_1 de H_1 est composé de tous les vecteurs de H orthogonaux à tous les vecteurs de H_1 .

$$\text{i.e.d: } \vec{y} \in H'_1 \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \forall x \in H_1.$$

La propriété fondamentale de H_1 et de son orthogonal H'_1 est que:

$$H = H_1 \oplus H'_1.$$

Venons en maintenant à la démonstration.

La représentation considérée étant unitaire, nous sommes dans la situation:

$$\begin{array}{ccccc}
 g & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & T(g) \\
 \in G & & & & \\
 & & \vec{x} & \xrightarrow{\quad} & T(g)\vec{x} \\
 & & \in H & & \in H
 \end{array}$$

où H est un espace muni d'un produit scalaire hermitien et où $T(g)$ est un opérateur unitaire :

$$(T(g)\vec{x}, T(g)\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H \\
 \forall g \in G$$

On veut montrer que : $y \in H'_1 \Rightarrow T(g)y \in H'_1$

ce qui revient à montrer (d'après la définition d'un sous-espace orthogonal) que :

$$(\vec{x}, T(g)\vec{y}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in H_1.$$

Soit donc un $y \in H'_1$ c.-à-d. que : $(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in H_1.$

$T(g)$ étant unitaire, il en résulte : $(T(g)\vec{x}, T(g)\vec{y}) = 0 \quad \forall g \in G$

$T(g)\vec{y}$ est donc orthogonal à tous les $T(g)\vec{x}$ et puisque $T(g)$ est (par définition d'une représentation) une application bijective, $T(g)\vec{x}$ décrit bien tout H_1 , quand $\vec{x}$ décrit H_1 .

Le lemme est donc démontré et H est ainsi somme directe de deux sous-espaces stables.

Venons en maintenant à la démonstration du théorème.

La représentation dans H étant réductible, elle a par définition un sous-espace stable H_1 et par suite du lemme, H est somme directe de H_1 et de son orthogonal H'_1 :

$$H = H_1 \oplus H'_1.$$

H_1 (par exemple) étant stable on peut y définir une représentation du groupe G . Celle-ci peut être irréductible ou réductible. Dans ce dernier cas on recommence pour H_1 ce que nous venons de faire pour H ce qui nous conduit à :

$$H_1 = H_2 \oplus H'_2.$$

Faisant de même pour H_2 , nous pouvons itérer ainsi jusqu'à ce que nous ayons décomposé la représentation unitaire en une somme de représentations irréductibles.

Remarque. Notre démonstration est valable que G soit un groupe fini ou infini.

Est-elle également valable lorsque la représentation est d'ordre infini, c.-à-d. quand H est de dimension infini. Le lemme reste valable, mais nous ne pouvons plus affirmer (c'est d'ailleurs en général faux) que notre itération nous conduira à une somme directe de sous-espaces irréductibles au bout d'un nombre fini d'opérations. Il faut alors envisager l'introduction de sommes infinies de sous-espaces et tout se complique. Pour notre propos, nous pouvons nous limiter au théorème précédent.

2 - Application aux groupes finis.

Si nous pouvions montrer de plus que toute représentation est équivalente à une représentation unitaire, le problème de la classification de toutes les représentations possibles s'en trouverait complètement résolu, du moins théoriquement.

Or nous allons en effet démontrer (et très facilement) un tel résultat, mais, hélas, pour un certain type de groupe seulement : les groupes finis.

Th

Lorsqu'on considère la représentation d'un groupe fini, il existe un produit scalaire hermitien tel que tous les opérateurs $T(g)$ de la représentation soient unitaires.

Donc toute représentation de degré fini d'un groupe fini est complètement réductible.

Démonstration. Soit donc, G un groupe fini et T l'une quelconque de ses représentations dans un espace vectoriel E . Dans E définissons un produit scalaire hermitien quelconque $(\vec{x}, \vec{y})$. Nous allons montrer qu'on peut, à partir de ce premier produit scalaire, en définir un deuxième que nous noterons $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (uniquement pour le différentier du premier) qui rend $T(g)$ unitaire.

Con

Considérons l'application :

$$\alpha, \gamma \longmapsto \sum_{g \in G} (T(g)\vec{\alpha}, T(g)\vec{\gamma}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle$$

et vérifions qu'il s'agit bien là d'un produit scalaire hermitien.

$$1^{\circ} \text{ on a bien sur } \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle \geq 0$$

De plus :

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{g \in G} (T(g) \vec{x}, T(g) \vec{x}) \implies (T(g) \vec{x}, T(g) \vec{x}) = 0 \quad \forall g \in G$$

somme de
termes ≥ 0

d'où il résulte que :

$$T(g) \vec{x} = \vec{0} \quad \forall g \in G$$

et comme $T(g)$ est inversible, il s'en suit que :

$$\vec{x} = T(g)^{-1} \vec{0} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle &= \sum_g (T(g) (\vec{x}_1 + \vec{x}_2), T(g) \vec{y}) \\ &= \sum_g (T(g) \vec{x}_1 + T(g) \vec{x}_2, T(g) \vec{y}) = \sum_g [(T(g) \vec{x}_1, T(g) \vec{y}) + (T(g) \vec{x}_2, T(g) \vec{y})] \\ &= \sum_g (T(g) \vec{x}_1, T(g) \vec{y}) + \sum_g (T(g) \vec{x}_2, T(g) \vec{y}) = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

3° La démonstration de :

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

est analogue à la précédente.

$$4^\circ \quad \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \sum_g (T(g) \vec{y}, T(g) \vec{x}) = \sum_g (T(g) \vec{x}, T(g) \vec{y})^* = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^*$$

Montrons maintenant que le produit scalaire rend bien les $T(g)$ unitaires :

$$\begin{aligned} \langle T(g_0)\vec{x}, T(g_0)\vec{y} \rangle &= \sum_g (T(g)T(g_0)\vec{x}, T(g)T(g_0)\vec{y}) \\ &= \sum_g (T(gg_0)\vec{x}, T(gg_0)\vec{y}) \end{aligned}$$

Du fait que G est un groupe fini, gg_0 parcourt simplement G lorsque g parcourt G .

En effet: $g \neq g' \Rightarrow gg_0 \neq g'g_0$ (il suffit de multiplier à droite par g_0^{-1} pour le voir). Ainsi quand g prend les N valeurs distinctes, gg_0 prend aussi N valeurs distinctes et comme le groupe n'a que N éléments, ce sont les mêmes. Ainsi:

$$\langle T(g_0)\vec{x}, T(g_0)\vec{y} \rangle = \sum_{gg_0 \in G} (T(gg_0)\vec{x}, T(gg_0)\vec{y})$$

soit en posant $gg_0 = g'$ (simple changement de notation)

$$= \sum_{g'} (T(g')\vec{x}, T(g')\vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Remarque importante. Si le théorème que nous venons de trouver n'était vrai que pour les groupes finis, il ne nous serait pas d'une grande utilité. Nous nous proposons en effet essentiellement d'étudier le groupe des rotations qui est un groupe continu.

Heureusement, le théorème précédent est valable également pour une certaine classe de groupes continus: les groupes de Lie compacts.

Nous aurons l'occasion d'expliquer ce qu'est un groupe de Lie.

Compact signifie simplement qu'on peut trouver une paramétrisation du groupe telle que les paramètres restent dans un nombre fini de

domaines bornés.

Or le groupe des rotations peut être paramétré par ses trois angles d'Euler par exemple ce qui fait 3 domaines, qui sont bien sûr bornés puisqu'ils sont contenus dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Nous savons donc, du moins en théorie, que nous pouvons décomposer toute représentation unitaire en somme de représentations irréductibles.

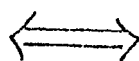
Malgré si, en pratique, nous n'avons pas un critère pour reconnaître une représentation irréductible, d'une représentation réductible le théorème précédent ne nous servirait à rien.

Or, un tel critère existe comme nous allons le voir.

D. Critère d'irréductibilité *

Critère

Une représentation $D(g)$ dans un espace vectoriel E (sur $\mathbb{C}$) de dimension finie est irréductible



Les seuls opérateurs qui commutent avec tous les opérateurs $D(g)$ de la représentation sont des multiples λI de l'identité.

* On désigne habituellement ce critère par "lemme de Schur"; en fait c'est un théorème de toute première importance.

Commençons par démontrer l'implication dans le sens $\Rightarrow$

Démonstration. Nous supposons donc que $D(g)$ est une représentation irréductible et soit X un opérateur tel que :

$$X D(g) = D(g) X \quad \forall g.$$

Nous voudrions montrer que X ne peut qu'être un multiple de l'application identité I .

Considérons l'équation aux valeurs propres de l'opérateur X . Elle a nécessairement une racine λ_0 (puisque dans $\mathbb{C}$ toute équation de degré n a n racines : c'est donc à cette étape de la démonstration que l'hypothèse "sur $\mathbb{C}$ " est indispensable.)

A cette valeur propre correspondent un certain nombre de vecteurs propres qui forment un sous-espace M de E . Ce sous-espace est stable c.-à-d. que si $\vec{x} \in M$ il en résulte que $D(g)\vec{x}$ est aussi un vecteur propre (correspondant à la valeur propre λ_0) ; en effet :

$$X(D(g)\vec{x}) = D(g)X\vec{x} = D(g)\lambda_0\vec{x} = \lambda_0(D(g)\vec{x}).$$

Comme on a supposé la représentation D irréductible, elle ne peut avoir d'autre sous-espace stable que l'espace E lui-même. Autrement dit $M = E$ et on a :

$$X\vec{x} = \lambda_0\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in E \quad \text{c.-à-d.} \quad X = \lambda_0 I.$$

$\Leftarrow$ Avec l'hypothèse que les seuls opérateurs qui commutent avec les $D(g)$ sont les multiples de I , nous allons montrer que le seul sous-espace stable de E est E lui-même.

Soit donc V l'éventuel sous-espace stable de E . Définissons une application J telle que :

$$\begin{aligned} J(\vec{x}) &= 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \\ J(\vec{x}) &= \vec{x} & \text{si } \vec{x} \in V \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} [D(g) \circ J] \vec{x} &= 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \\ [D(g) \circ J] \vec{x} &= D(g) \vec{x} & \text{si } \vec{x} \in V \end{aligned}$$

mais puisque V est stable :

$$\begin{aligned} \vec{x} \in V &\Rightarrow D(g) \vec{x} \in V & \text{donc } [J \circ D(g)] \vec{x} &= D(g) \vec{x} \\ \text{et : } \vec{x} \notin V &\Rightarrow D(g) \vec{x} \notin V & \text{donc } [J \circ D(g)] \vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

per conséquent :

$$[J \circ D(g)](\vec{x}) = [D(g) \circ J] \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in E$$

et J commute avec $D(g)$ $\forall g \in G$. Il résulte alors de l'hypothèse que $J = \lambda I$ et V ne peut donc être que E lui-même.

Exemple Au paragraphe B nous avons vu, dans un exemple que la représentation de dimension 3 du groupe des rotations planes se décompose en 3 représentations de dimension 1. Or un caractère important du groupe des rotations planes est d'être commutatif. Cela nous suggère une généralisation possible : est-ce que toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont obligatoirement de dimension 1. La réponse est oui et cela résulte directement du critère d'irréductibilité. En effet :

Soit g_0 un élément du groupe.

$$D(g_0)D(g) = D(g_0 g) = D(g g_0) = D(g)D(g_0) \quad \forall g \in G$$

Ainsi $D(g_0)$ commute avec tous les opérateurs de la représentation et si on suppose elle à irréductible, il résulte du critère que

$$D(g_0) = \lambda I$$

mais une représentation par des matrices unité ne peut être irréductible que si celles ci sont de dimension 1; ce qui montre donc que:

Th

Les seules représentations irréductibles des groupes abéliens sont de dimension 1.