

IV. Exemples de groupes.

Nous avons déjà vu quelques exemples de groupes (il s'agissait de groupes laissant une figure donnée globalement inchangée : nous les avions appelés groupes de symétrie). Nous allons en donner deux autres exemples que nous reprendrons constamment dans toute la suite.

Il a déjà été dit qu'on pouvait se donner un groupe de plusieurs façons (par ses éléments, par sa table de multiplication). De façon plus précise, l'étude d'un groupe se fait en général en plusieurs étapes :

- ① Il faut définir le groupe.
- ② Eventuellement en donner une interprétation géométrique.
- ③ Il faut (pour pouvoir calculer avec) écrire ses éléments de façon explicite en fonction d'un certain nombre de paramètres : c'est le paramétrage du groupe.
- ④ Étudier son lien éventuel avec d'autres groupes, afin de faire par son étude "d'une pierre deux coups" (cf homomorphismes).

A. Le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$.

1. Qu'est-ce qu'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

a) Pour définir une rotation dans $\mathbb{R}^3$, nous avons le choix entre plusieurs approches. Nous pouvons dire :

Une rotation R de $\mathbb{R}^3$ est une transformation* de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

* Dans toute la suite, les mots "transformations", "application linéaire", ou (plus loin) "opérateur" seront utilisés comme des synonymes.

qui conserve le produit scalaire, c.à.d. que :

$$(\mathcal{R}\vec{A}, \mathcal{R}\vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B}) \quad \forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3.$$

ou bien :

Le groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$ est le groupe des matrices orthogonales 3×3 c.à.d. des matrices R telles que :

$$R^{-1} = \tilde{R} \quad (\tilde{} : \text{transposée}).$$

ou bien encore :

Pour toute rotation R de $\mathbb{R}^3$ il existe une droite qu'elle conserve et la rotation R se réduit à une rotation plane dans le plan perpendiculaire à cette droite.

Nous avons donc là :

- une définition que l'on peut qualifier de métrique (puisque elle fait intervenir la notion de produit scalaire, c.à.d. de longueur)
- une définition matricielle
- une définition géométrique.

Il va nous servir que ces trois définitions sont équivalentes et que l'on peut passer chacune de l'une à l'autre. Pour notre part, nous choisirons comme point de départ la première définition qui n'est certes pas la plus " parlante " mais qui est la plus générale. La 2^e, en effet, fait intervenir la notion de repère (pour pouvoir écrire la matrice de la transformation, il faut avoir choisi un repère) la 3^e enfin est spécifique à $\mathbb{R}^3$ et ne se prête qu'à une généralisation à $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5 \dots$

Nous dirons donc :

Déf:

Le groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$ est le groupe des transformations de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui conservent le produit scalaire euclidien :

$$(R\vec{A}, R\vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B}) \quad \forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Interprétation matricielle.

Après avoir choisi d'une base orthonormée nous pouvons écrire :

$$\vec{A} = \sum_i a_i \vec{e}_i \Rightarrow R\vec{A} = \sum_i \left(\sum_j R_{ij} a_j \right) \vec{e}_i$$

d'où :

$$\begin{aligned} (R\vec{A}, R\vec{B}) &= \left(\sum_{i,j} R_{ij} a_j \vec{e}_i, \sum_{k,l} R_{kl} b_l \vec{e}_k \right) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} R_{ij} R_{kl} a_j b_l \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{\delta_{ik}} \\ &= \sum_{j,l} \sum_i R_{ij} R_{il} a_j b_l \end{aligned}$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) = \sum_j a_j b_j$$

et :

$$(R\vec{A}, R\vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B}) \Rightarrow \sum_i R_{ij} R_{il} = \delta_{jl}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_i (\tilde{R})_{ji} R_{il} = \delta_{jl}$$

soit

$$\tilde{R} R = I.$$

Remarquons que ce résultat n'est valable que parce que la base est orthonormée.

Nous voyons donc que :

Th :

La matrice qui représente une rotation est une matrice orthogonale. Le groupe des matrices orthogonales ^{3x3} est noté $O(3)$.

Il résulte de : $R^T R = I$ que : $\det R = \pm 1$

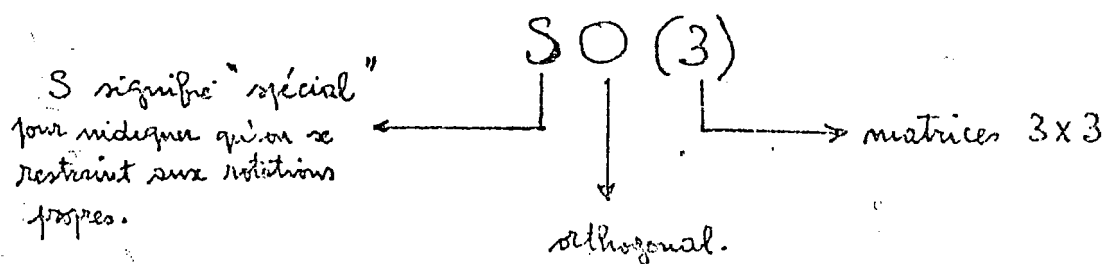
Pour notre part, nous nous limiterons, pour la simplicité, aux matrices telles que :

$$\det R = +1$$

Les matrices forment un sous-groupe du groupe complet $O(3)$. (puce que $(+1)(+1) = +1$) ; remarquons bien que les autres matrices, de déterminant -1 , ne forment pas, elles, un sous-groupe (car $(-1)(-1) = +1$)

On appelle ces matrices de déterminant $+1$, des matrices orthogonales propres (et les rotations correspondantes s'appellent des rotations propres*)

On note ce groupe des transformations orthogonales propres soit $O(3)^+$ soit (et c'est la notation que nous adopterons) :



* Signalons (sans le montrer) que, d'un point de vue géométrique, les rotations qui ne sont pas propres sont celles qui contiennent une symétrie par rapport à l'origine (la matrice d'une telle symétrie est $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$)

Rappel.

Ouvrons une parenthèse importante pour faire quelques rappels de vocabulaire qui nous serviront souvent par la suite.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, à 3 dimensions, dans lequel on a défini un produit scalaire euclidien (les notions d'un tel produit scalaire sont les mêmes que ceux du produit scalaire hermitien donné en Annexe mais avec tous les nombres complexes remplacés par des nombres réels).

Transformation orthogonale de E dans E : $(R\vec{A}, R\vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B})$
Matrice orthogonale (correspondante) $\tilde{R} = R^{-1}$

Propo.: Les valeurs propres d'une telle matrice ont pour module 1 *
 et ses vecteurs propres (correspondants à des valeurs propres différentes) sont orthogonaux **

$$** \quad \left. \begin{array}{l} R\vec{A}_1 = \lambda_1 \vec{A}_1 \\ R\vec{A}_2 = \lambda_2 \vec{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1^* \lambda_2 (\vec{A}_1, \vec{A}_2) = (\vec{A}_1, \vec{A}_2)$$

$$\text{Or } \lambda_1^* \lambda_1 = |\lambda_1|^2 = 1, \text{ donc } \lambda_2 / \lambda_1 (\vec{A}_1, \vec{A}_2) = (\vec{A}_1, \vec{A}_2) \text{ et } (\lambda_1^{-1} \lambda_2) (\vec{A}_1, \vec{A}_2)$$

$$* \text{ En effet: } \left. \begin{array}{l} R\vec{A} = \lambda \vec{A} \\ (1) \quad (R\vec{A}, R\vec{A}) = (\vec{A}, \vec{A}) \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$$

Pourquoi avons nous mis $|\lambda|^2$, alors qu'on pourrait :

$$(R\vec{A}, R\vec{A}) = (\lambda \vec{A}, \lambda \vec{A}) = \lambda^2 (\vec{A}, \vec{A})$$

Il y a là une difficulté à bien noter. λ s'obtient en résolvant l'équation aux valeurs propres qui est du 3^e degré, et peut donc fort bien être complexe; et où il résulte que le vecteur propre $\vec{A}$ le sera aussi. Pour que le produit scalaire utilisé dans (1) puisse inclure ces vecteurs complexes, il faut le supposer hermitien. Autrement dit, nous immergeons notre espace réel dans un espace hermitien plus grand où :

$$(R\vec{A}, R\vec{A}) = \lambda \lambda^* (\vec{A}, \vec{A})$$

- II -

Transformation symétrique de E dans E : $(\mathcal{Y} \vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \mathcal{Y} \vec{B})$

Matrice symétrique (correspondante) : $\tilde{S} = S$

Propriétés. Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles.
Ses valeurs propres (correspondants à des valeurs propres distinctes) sont orthogonales.

Donnons l'analogie de ces notions dans le cas d'un espace vectoriel E où a été défini un produit scalaire hermitien.

- I' -

Transformation unitaire de E dans E : $(U \vec{A}, U \vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B})$

Matrice unitaire (correspondante) $U^+ = U^{-1}$ avec $U^+ = \bar{U}^T$

Propriétés: Concernant valeurs propres et vecteurs propres on a les mêmes propriétés que pour les matrices orthogonales.

- II' -

Transformation hermitienne de E dans E : $(\mathcal{H} \vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \mathcal{H} \vec{B})$

Matrice hermitienne (correspondante) : $H^+ = H$

Propriétés: Concernant valeurs propres et vecteurs propres on a la même propriété que pour les matrices symétriques.

c) Le nombre de paramètres indépendants dépend une matrice orthogonale?

Oublions un moment que nous étudions les rotations dans $\mathbb{R}^3$ et les matrices orthogonales 3×3 correspondantes et plongeons nous dans le cas général d'une matrice orthogonale $n \times n$.

Elle a n^2 éléments, mais il est bien clair que par suite de relations

d'orthogonalité :

$$\sum_i R_{ij} R_{il} = \delta_{jl}$$

ces éléments ne sont pas tous indépendants.

Combien de relations d'orthogonalité différentes a-t-on ? n^2 à priori, mais en fait la relation écrite pour $j=1, l=2$ soit :

$$\sum_i R_{i1} R_{i2} = 0$$

est identique à celle que l'on a pour $j=2, l=1$ soit :

$$\sum_i R_{i2} R_{i1} = 0$$

ainsi le nombre de relations différentes est (on met n pour les relations avec j et l égaux) :

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Or le nombre de paramètres indépendants s'obtient bien sûr par :

$$\begin{array}{l} \text{nb de paramètres} \\ \text{indépendants} \end{array} = \begin{array}{l} \text{nb total de} \\ \text{paramètres} \end{array} - \begin{array}{l} \text{nb de relations} \\ \text{différentes qui les} \\ \text{lient.} \end{array}$$

Ainsi une transformation orthogonale agissant dans un espace à n dimensions dépend de :

$$\begin{array}{l} \text{paramètres indépendants.} \end{array} \quad n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Cas particuliers

- Pour $n=2$, nous retrouvons le résultat bien connu selon lequel une rotation plane dépend d'un seul paramètre : son angle de rotation.
- Pour $n=3$, nous retrouvons un résultat connu également : une rotation

de $\mathbb{R}^3$ dépend de 3 paramètres.

□ Pour $n=4$, nous trouvons qu'une rotation dépend dans $\mathbb{R}^4$ de 6 paramètres, résultat qu'on peut mettre en parallèle avec le fait qu'une transformation de Lorentz (qui n'est rien d'autre qu'une rotation dans l'espace de Minkowski) dépend de 6 paramètres : les 3 paramètres d'une rotation et les 3 paramètres d'un vecteur vitesse.

2- Interprétation géométrique d'une rotation.

Nous essayons ici de faire le lien avec la troisième définition citée en 1 a. En première lecture, on pourra sauter ce paragraphe (relativement délicat) et n'en retenir que la conclusion.

Nous voudrions par exemple savoir si une rotation laisse invariant un point, une droite ou un plan. Sur cela, nous allons en quelque sorte diagonaliser la matrice orthogonale R . Je dis en quelque sorte car si on cherche vraiment ses vecteurs propres on obtient (comme on l'a déjà remarqué dans la note concernant le "rappel") des vecteurs complexes qui pour l'interprétation géométrique ne sont pas d'une grande utilité.

Nous allons nous servir des deux propriétés rappelées plus haut des transformations orthogonales :

- 1° Toute valeur propre a pour module 1
- 2° Les vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

L'équation aux valeurs propres de notre matrice orthogonale, qui est de degré 3 et à coefficients réels a toujours nécessairement une racine réelle*.

* Un théorème d'algèbre nous apprend en effet qu'une équation à coefficients réels a ses racines 2 à 2 complexes conjuguées. Donc, si elle en a un nombre impair (3 ici), il y en a sûrement une qui est réelle.

Cette valeur propre vaut $+1$ ou -1 en vertu du fait que toute valeur propre a pour module 1. Par ailleurs le produit des 3 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ est égal au déterminant de la matrice de déport, qui vaut $+1$ puisque nous nous sommes limités aux transformations orthogonales propres: si λ_1 est la valeur propre réelle et λ_2, λ_3 le couple de valeurs propres complexes conjuguées on aura donc (en posant $\lambda_2 = e^{i\phi}$):

$$\lambda_1 e^{i\phi} e^{-i\phi} = +1 \quad \text{soit} \quad \lambda_1 = +1$$

Il existe donc un vecteur $\vec{u}$ tel que:

$$R \vec{u} = \vec{u}$$

Autrement dit, la droite portée par $\vec{u}$ est invariante par la rotation et peut donc être interprétée comme étant l'axe de la rotation.

Les deux autres vecteurs propres sont complexes; écrivons celui correspondant à λ_2 sous la forme: $\vec{v} + i\vec{w}$

où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs réels.

on aura donc:

$$(1) \quad R(\vec{v} + i\vec{w}) = e^{i\phi}(\vec{v} + i\vec{w})$$

En prenant la complexe conjuguée de cette relation, on voit de suite que le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_3 = e^{-i\phi}$ est: $\vec{v} - i\vec{w}$:

$$R(\vec{v} - i\vec{w}) = e^{-i\phi}(\vec{v} - i\vec{w})$$

Or ces vecteurs sont (en vertu de la 2^e propriété) orthogonaux:

$$(\vec{v} + i\vec{w}, \vec{v} - i\vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 + 2i(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

d'où il résulte que:

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \quad \text{et} \quad (\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

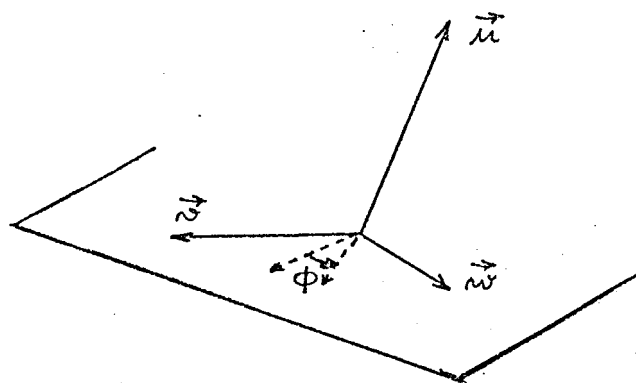
De plus (toujours en vertu de la 2^e propriété), $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v} + i\vec{w}$:

$$(\vec{u}, \vec{v} + i\vec{w}) = 0 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

Ainsi, les 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont 2 à 2 orthogonaux et si on explicite la relation (1) en séparant la partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} R\vec{v} = \cos\phi \vec{v} + \sin\phi \vec{w} \\ R\vec{w} = -\sin\phi \vec{v} + \cos\phi \vec{w} \end{cases}$$

R agit donc dans le plan $\vec{v}, \vec{w}$ comme une rotation plane, ce que traduit la figure 2



2 Rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle ϕ .

Ainsi nous avons retrouvé le résultat bien connu*

Th:

Toute rotation de $\mathbb{R}^3$ laisse invariant une droite et se ramène à une rotation plane dans un plan perpendiculaire à cette droite.

* Par une méthode généralisable (et c'est le sujet) à $\mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$. Le fait !

Voici la 3^e étape de l'étude d'un groupe : le paramétrage.

3- Angles d'Euler*

Nous avons vu qu'une matrice orthogonale 3×3 dépend toujours de 3 paramètres. Mais nous avons une grande latitude dans le choix de ces paramètres.

Nous pouvons prendre par exemple :

- les 2 composantes indépendantes d'un vecteur unitaire de l'axe de rotation et l'angle de rotation. (cf exercice A à la fin du chapitre)

Un paramétrage certes moins naturel mais bien plus pratique pour bien des usages est celui fourni par les trois angles d'Euler que nous allons voir maintenant.

Mais auparavant nous allons faire un rappel important concernant la matrice d'une application linéaire, notion que nous utiliserons constamment par la suite :

Rappel : Définition de la matrice d'une application linéaire.

Considérons une application f d'un espace vectoriel E dans lui-même. Cette application sera complètement définie si je sais écrire le transformé de tout vecteur de E ; mais puisque ces vecteurs s'expriment en fonction des vecteurs de base :

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$$

il suffit, pour définir complètement f , de connaître les transformées de tous les $\vec{e}_i$.

* Euler est né en 1707 à Bâle. Par la suite, il vécut tour à tour en Prusse et en Russie sous la protection en particulier de Frédéric II et de Catherine II. Exploitant systématiquement les ressources du calcul infinitésimal (entre autres) il laisse une œuvre considérable. Ses "Oeuvres complètes" comptent plus de 40 000 pages !

On se donne ces transformées par un tableau :

$$\begin{array}{c}
 \vec{e}_1 \\
 \vdots \\
 \vec{e}_j \\
 \vdots \\
 \vec{e}_m
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 f(\vec{e}_1) \dots \dots f(\vec{e}_i) \dots \dots f(\vec{e}_m) \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 f_{11} & \dots & f_{1i} & \dots & f_{1m} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 f_{j1} & \dots & f_{ji} & \dots & f_{jm} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 f_{m1} & \dots & f_{mi} & \dots & f_{mn}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Tableau, qui se lit par colonnes (conformément aux règles générales du calcul matriciel) de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}
 f(\vec{e}_1) = f_{11} \vec{e}_1 + f_{21} \vec{e}_2 + \dots + f_{m1} \vec{e}_m \\
 \vdots
 \end{array}$$

Par définition, on dit que ce tableau constitue la :
matrice de l'application linéaire f

Remarque: Notons bien qu'on aurait aussi pu construire ce tableau autrement, par exemple :

(la lecture se faisant bien sûr toujours par colonnes)

$$\begin{array}{c}
 f(\vec{e}_1) \\
 \vdots \\
 f(\vec{e}_m)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \vec{e}_1 \dots \dots \vec{e}_m \\
 \left[\begin{array}{c} \textcircled{2} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Définition, qui conduit à une matrice inverse de la précédente.

Le choix que nous avons fait se justifie essentiellement par la simplicité de la formule :

$$\vec{e}_i \left| \begin{matrix} f(\vec{e}_i) \\ \alpha'_i \end{matrix} \right| = \left[\begin{matrix} \text{matrice de} \\ \text{l'application } f \end{matrix} \right] \vec{e}_i \left| \begin{matrix} \vec{\alpha} \\ \alpha_i \end{matrix} \right|$$

c.o.d. que les composantes d'un vecteur transformé s'obtiennent en fonction des composantes du vecteur initial par la matrice de l'application f .

Démontrons ce résultat :

$$\vec{\alpha} = \sum_i \alpha_i \vec{e}_i$$

$$f(\vec{\alpha}) = f\left(\sum_i \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_i \alpha_i f(\vec{e}_i)$$

$$\text{or: } f(\vec{e}_i) = \sum_j b_{ji} \vec{e}_j$$

$$f(\vec{\alpha}) = \sum_i \alpha_i \sum_j b_{ji} \vec{e}_j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i b_{ji} \alpha_i \right) \vec{e}_j$$

produit de la matrice $[b.]$ par le vecteur colonne $[\alpha]$

Remarque. Par contre, les composantes du même vecteur $\vec{\alpha}$ dans la base $f(\vec{e}_i)$ s'obtiennent en fonction de celles de $\vec{\alpha}$ dans la base $\vec{e}_i$ à l'aide de la matrice inverse :

$$f(\vec{e}_i) \left| \begin{matrix} \vec{\alpha} \\ \alpha_i \end{matrix} \right| = f(\vec{e}_i) \left| \begin{matrix} \vec{e}_i \\ [b.]^{-1} \end{matrix} \right| \vec{e}_i \left| \begin{matrix} \vec{\alpha} \\ \alpha_i \end{matrix} \right|$$

Dans ce cas, la définition (2) serait donc mieux adoptée : on peut donc dire que le choix que nous avons fait correspond au point de vue

où on transforme les vecteurs de l'espace (la base restant fixe), plutôt que celui où on transforme la base (les vecteurs restant fixes).

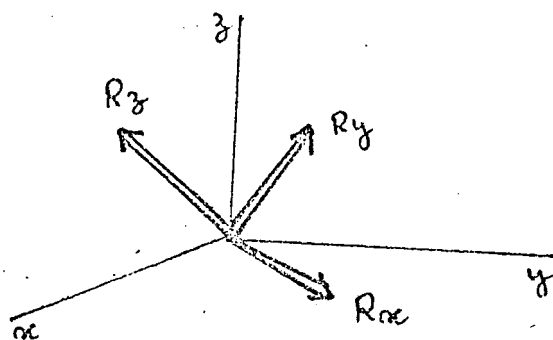
□ Notons aussi un résultat qui nous sera utile dans la suite.

Si on définit un produit scalaire dans E et si on suppose la base $\vec{e}_i$ orthogonale, alors les éléments de la matrice de l'application s'expriment par (on le verra de suite):

$$g_{ji} = (\vec{e}_j, f(\vec{e}_i)).$$

Ceci rappelé, revenons aux angles d'Euler.

Toute rotation de $\mathbb{R}^3$ est donc définie par la donnée de trois axes x, y, z et de leurs transformés.



Nous allons montrer qu'on peut passer des axes x, y, z aux axes Rx, Ry, Rz par trois rotations partielles qui (et ce sera l'un de leurs intérêts) auront chacune une matrice simple.

Cette décomposition d'une rotation en 3 rotations partielles est bien sûr possible de bien des façons différentes. Voici une façon de procéder:

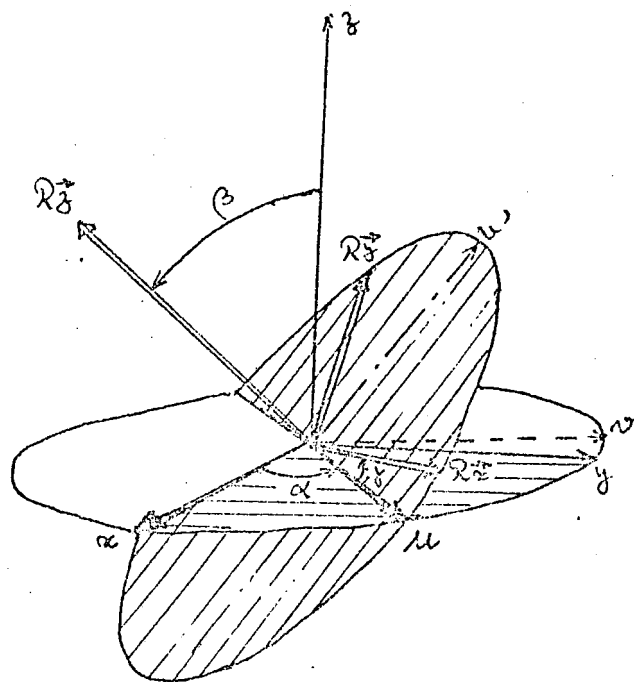
on commence par définir la droite Ox intersection des plans Oxy et Oxz puis on fait successivement:

- 1° une rotation d'axe Oz et d'angle α
- 2° une rotation d'axe Ox et d'angle β
- 3° une rotation d'axe Oz et d'angle γ .

Cela permet d'obtenir la matrice d'une rotation quelconque en fonction des 3 paramètres α, β, γ qu'on appelle les angles d'Euler de la rotation.

$$R(\vec{x}) R(\vec{y}) R(\vec{z}) = \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{z} \\ \vec{x} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vec{y} & \end{matrix} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v}' & R(\vec{z}) \\ \vec{u} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ \vec{v} & \end{matrix} \begin{matrix} R(\vec{x}) & R(\vec{y}) & R(\vec{z}) \\ \vec{u} & \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vec{v} & \end{matrix}$$

Nous n'avons pas écrit la matrice produit pour bien montrer que cette forme développée est souvent beaucoup moins utile que la décomposition ci-dessus.



$$0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi$$

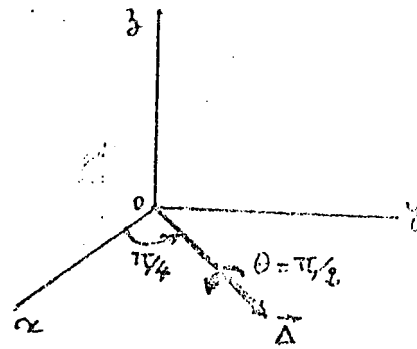
par contre β qui est l'angle de 2 plans peut être pris entre 0 et π .

3

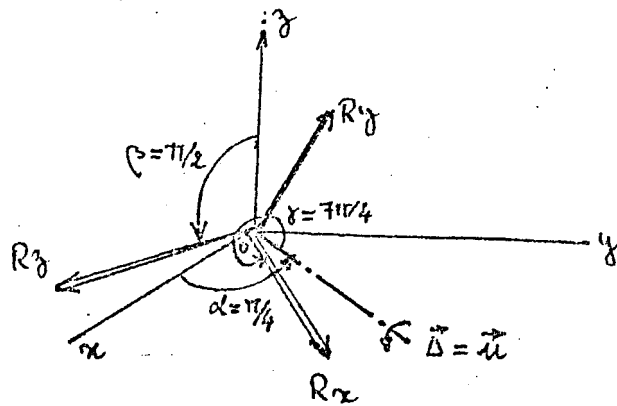
Les angles d'Euler α, β, γ .

Exemple d'utilisation des angles d'Euler.

Proposons nous d'écrire la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ et qui a pour axe: $\vec{\Delta}$ qui a pour composantes $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$



Commençons par dessiner les transformés des axes Ox, Oy, Oz :



Les trois matrices s'écrivent donc:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

et la matrice produit sera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

résultat que l'on peut bien sûr vérifier par un calcul direct à l'aide de la formule obtenue à la question 2 de l'exercice E1. Mais attention.

encore une fois sur le fait que pour nous, c'est la forme factorisée (1) qui sera la plus utile le plus souvent.

Il nous resterait maintenant à réviser la 4^e étape de notre programme, mais il s'agit là d'une étude déjà fort délicate pour laquelle nous ne disposons pas encore des outils suffisants; nous verrons cela à la fin du chapitre 2.

B. Le groupe des matrices unitaires et de déterminant +1.

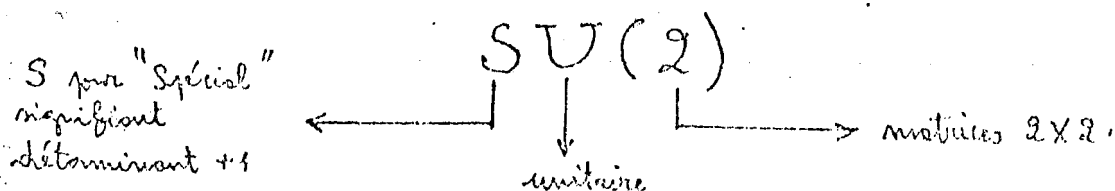
Donnons encore un autre exemple de groupe, très important dans la suite et qui a d'ailleurs (comme on le verra au chapitre 2) un lien très étroit avec $SO(3)$.

1. Définition.

Considérons les matrices complexes 2×2 qui sont unitaires c.e.d satisfaisant à:

$$A^+ = A = I$$

Leur déterminant est en module égal à ± 1 . Nous nous restreignons à celles de ces matrices qui ont un déterminant égal à $+1$. Ces matrices forment un groupe (ainsi qu'on peut le voir facilement) qu'on note



Alors cherchons donc à paramétriser 4 nombres complexes satisfaisant aux relations (que l'on obtient de suite en écrivant que $A^\dagger = A^{-1}$ et $\det A = 1$) :

$$(1) |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 = 1 \quad (1') |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = 1 \quad (1'') a_{11}^* a_{21} + a_{12}^* a_{22} = 0$$

$$(2) a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1.$$

Nous commençons par réaliser (1) en posant :

$$a_{11} = \cos \theta e^{i\varphi} \quad a_{12} = i \sin \theta e^{i\psi}$$

(le i a été mis pour nous conformer aux notations introduites au Ch. 2.)
 $\cos \theta$ et $\sin \theta$ représentant les modules ou à bien sûr :

$$0 \leq \theta < \pi/2.$$

alors que φ et ψ étant les arguments :

$$0 \leq \varphi, \psi < 2\pi.$$

(1') et (1'') seront satisfaites avec :

$$a_{21} = -a_{12}^* e^{i\alpha} \quad a_{22} = a_{11}^* e^{i\alpha}$$

où $e^{i\alpha}$ est un nombre réel qui reste à déterminer. (2) exige que :

$$e^{i\alpha} = 1$$

Une matrice de $SU(2)$ se met donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta e^{i\varphi} & i\sin\theta e^{i\varphi} \\ i\sin\theta e^{-i\varphi} & \cos\theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix}$$

avec : $0 \leq \theta < \pi/2$ $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$.

Remarque. Pour $\theta = 0$, on peut donner à φ n'importe quelle valeur : autrement dit la paramétrisation n'est pas biunivoque en ce point là. En $\theta = \pi/2$, on peut de même donner à φ une valeur quelconque.

Il nous resterait à examiner s'il existe une interprétation géométrique de ce groupe. Comme il s'agit de matrices complexes, on aurait tendance à en douter. Cependant à cause du lien entre $SU(2)$ et $SO(3)$, nous verrons au chapitre 2 qu'une telle interprétation existe en effet du moins en un certain sens.

Exercice.

A ①° On considère dans $\mathbb{R}^3$ une rotation d'axe $\vec{u}$ ($\vec{u}$ étant un vecteur unitaire) et d'angle θ .

Montrer que le transformé $\vec{x}'$ d'un vecteur $\vec{x}$ par une telle rotation peut s'écrire :

$$\vec{x}' = \vec{x} \cos \theta + (1 - \cos \theta) (\vec{x} \cdot \vec{u}) \vec{u} + \sin \theta (\vec{u} \wedge \vec{x})$$

(on décompose le vecteur $\vec{x}$ selon une composante portée par $\vec{u}$ et une autre perpendiculaire à $\vec{u}$).

②° En déduire la matrice R de cette rotation, relativement aux paramètres u_1, u_2, u_3 (composantes de $\vec{u}$) et θ .

③° Montrer que la matrice R peut aussi s'écrire :

$$R = e^{\theta \vec{u} \cdot \vec{M}}$$

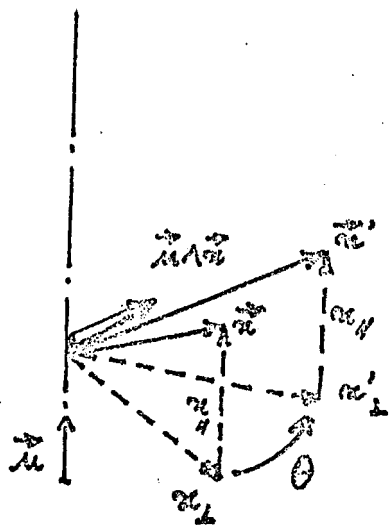
où $\vec{M}$ est un vecteur qui a pour composantes les 3 matrices :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque: Cet exercice donne un exemple de paramétrisation de $SO(3)$ différente de celle par les angles d'Euler; et à la question 3 on met la matrice correspondante sous une forme exponentielle qui trouve son origine dans la théorie des algèbres et groupes de Lie.

Solution de l'exercice.

1°



- Puisque seule la composante de $\vec{r}$ perpendiculaire à l'axe de rotation $\vec{u}$ va être transformée, nous décomposons $\vec{r}$ en ces deux composants :

$$\vec{r}_{\parallel} \text{ et } \vec{r}_{\perp} \quad \text{avec :} \quad \vec{r}_{\parallel} = (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u} \quad \text{d'où :} \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

- $\vec{r}_{\perp}$ et $\vec{u} \wedge \vec{r}_{\perp}$ (attention à l'ordre !) constituant un repère dans le plan de rotation ; nous aurons donc :

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \cos \theta + (\vec{u} \wedge \vec{r}_{\perp}) \sin \theta.$$

d'où (en remarquant que $\vec{u} \wedge \vec{r}_{\perp} = \vec{u} \wedge \vec{r}$) :

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} \cos \theta - (\vec{r} \cdot \vec{u}) \cos \theta \vec{u} + (\vec{u} \wedge \vec{r}) \sin \theta + (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u} \\ &= \vec{r} \cos \theta + (1 - \cos \theta) (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u} + (\vec{u} \wedge \vec{r}) \sin \theta. \end{aligned}$$

(2°) Il suffit de développer l'expression précédente pour écrire la matrice de la rotation correspondante :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)u_1^2 & (1-\cos\theta)u_1u_2 - u_3\sin\theta & (1-\cos\theta)u_1u_3 + u_2\sin\theta \\ (1-\cos\theta)u_1u_2 + u_3\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)u_2^2 & (1-\cos\theta)u_2u_3 - u_1\sin\theta \\ (1-\cos\theta)u_1u_3 - u_2\sin\theta & (1-\cos\theta)u_2u_3 + u_1\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)u_3^2 \end{bmatrix}$$

(3°) On vérifie aisément, compte tenu de l'égalité :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

que: $(\vec{u} \cdot \vec{M})^3 = -(\vec{u} \cdot \vec{M})$

Cette relation de récurrence va nous permettre de calculer toutes les puissances de la matrice $\vec{u} \cdot \vec{M}$ intervenant dans le développement en série de l'exponentielle. Posant $\vec{u} \cdot \vec{M} = \tilde{u}$ on a :

$$\begin{aligned} R &= I + \theta \tilde{u} + \frac{\theta^2}{2!} \tilde{u}^2 + \frac{\theta^3}{3!} \tilde{u}^3 + \dots \\ &= I + \tilde{u} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) + \tilde{u}^2 \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= I + \tilde{u} \sin\theta + \tilde{u}^2 (1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Comme :

$$\tilde{u}^2 = \begin{bmatrix} -1+u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & -1+u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & -1+u_3^2 \end{bmatrix}$$

on voit que l'expression (1) coïncide bien avec celle obtenue en 2°.

Autre méthode. Pour calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice on dispose d'un autre moyen : la diagonaliser (quand elle est diagonalisable). Indiquons ici simplement le principe de cette méthode.

On commence par calculer les valeurs propres de la matrice $\tilde{u}$: on trouve 0 et $\mp i$. Comme elles sont distinctes, cela nous apprend déjà que l'application linéaire correspondante est diagonalisable.

Puis on calcule les trois vecteurs propres : ceux-ci sont, comme on le vérifie de suite, orthogonaux (comme ils sont complexes, il faut utiliser un produit scalaire hermitien); on a intérêt à les normaliser, car ainsi la matrice de passage P s'inverse simplement (puisque elle devient alors unitaire). Ainsi :

$$\begin{aligned} \theta \tilde{u} &= P d P^{-1} & d &= \theta \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d'où :} & & \theta^m \tilde{u}^m &= P d^m P^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{et :} \quad \theta \frac{\tilde{u}}{e} = P \begin{bmatrix} 0 & i\theta & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & -i\theta \end{bmatrix} P^{-1}$$

Il ne reste plus alors qu'à faire le produit des 3 matrices, ce qui est assez fastidieux.