

Chapitre I

Introduction :

Les symétries dans la nature et la notion de groupe.

Les quatre axiomes de définition d'un groupe.

Déf:

On dit qu'une collection d'éléments $a, b, c, \dots$ forme un groupe G si on peut les combiner l'un à l'autre d'une façon qui respecte les 4 axiomes suivants :

1° Loi de composition interne Le produit¹⁾ de 2 éléments a, b de G est un élément unique c qui appartient encore à G .

2° Associativité $\forall a, b, c \in G \quad (a b) c = a (b c)$

3° Élément neutre Il existe un élément neutre e tel que :

$$\forall a \in G : \quad e a = a e = a \quad 2)$$

4° Inverse Tout élément a de G a un inverse tel que :

$$a a^{-1} = a^{-1} a = e$$

Pourquoi, entre plusieurs systèmes d'axiomes (plus ou moins restrictifs), a-t-on justement choisi ceux là ?

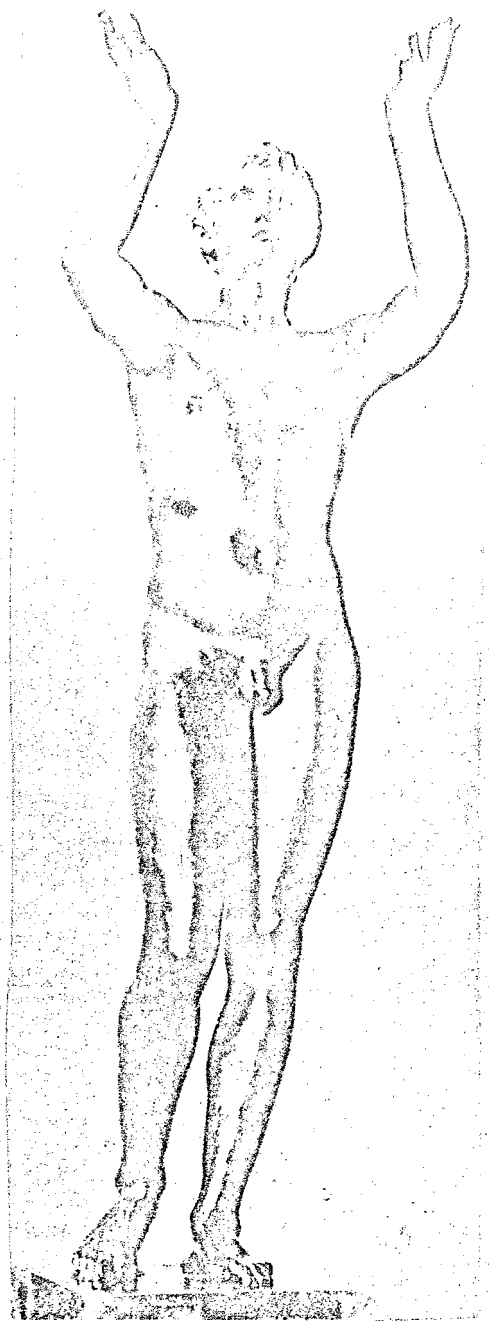
Pour la simplicité du vocabulaire et des notations on a l'habitude de noter la loi de composition interne comme si il s'agissait d'une multiplication. Ceci est une pure convention de langage et ne préjuge en rien de la nature réelle de la loi de composition envisagée.

De façon abrégée on écrirait : $\exists e \in G \mid \forall a \in G \quad e a = a e = a$

rappelez que : $\exists$ signifie "il existe au moins un.."

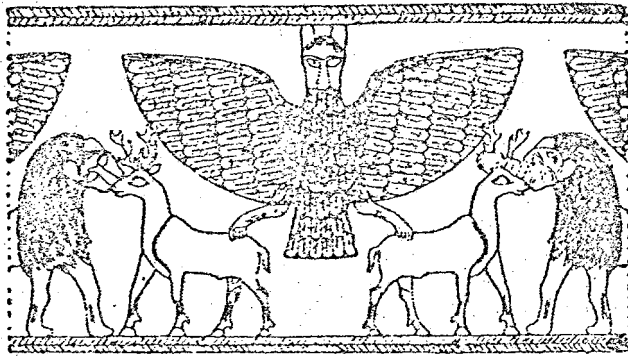
$\mid$ signifie "tel que".

1 Jeune homme
en prière.
Sculpture grecque
du 1^{er} siècle
avant J.C.



Dans la nature, ainsi que dans les productions artistiques de l'humanité, on rencontre beaucoup d'exemples de symétrie.

Quel est le lien entre la notion de groupe et celle de symétrie?



2 Motif d'un vase en argent
sumérien (~ 2700)

LECTURES ON SYMMETRIES

J. LEITE LOPES *

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro

and
Carnegie-Mellon University
Pittsburgh, Pennsylvania

Pourtant, si on parcourt le livre ci contre, on y chercherait en vain un lien avec les exemples précédents de symétrie.

Par quelles étapes est-on passé de la notion élémentaire de symétrie au langage mathématique actuel?

* Le professeur a été depuis (comme bien d'autres intellectuels brésiliens) d'expatrié. Il enseigne actuellement

I - Symétries dans la nature et dans les arts.

4

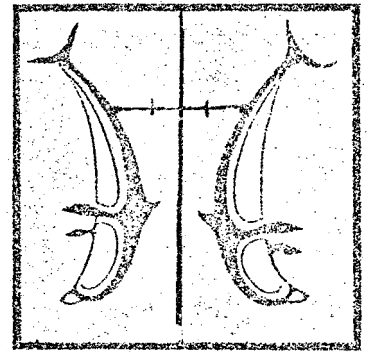
Le mot "symétrie" nous vient des Grecs (de $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ pour être précis!). Pour eux, il signifiait : harmonie, sens de la mesure et de l'équilibre et s'appliquait donc à tous les arts.

De nos jours, il a pris dans le langage courant, un sens plus géométrique de symétrie par rapport à une droite (symétrie bilatérale), un point ou un plan.

Dans les sciences le mot a pris par extension le sens plus général de toute transformation qui ^(laisse) inchangée (on dit aussi invariante) un système, une propriété ou encore une loi physique (c'est à dire une certaine équation mathématique).

A - La symétrie bilatérale

1. Il s'agit de la symétrie par rapport à une droite [1], [2], [3]



2. Cependant, il existe aussi de nombreux exemples où la symétrie n'est que partielle. Ainsi le corps humain [1] présente bien une symétrie externe mais pas une symétrie interne. Un problème intéressant de la biologie consiste d'ailleurs à étudier à partir de quel stade de développement de l'embryon cette dissymétrie apparaît.

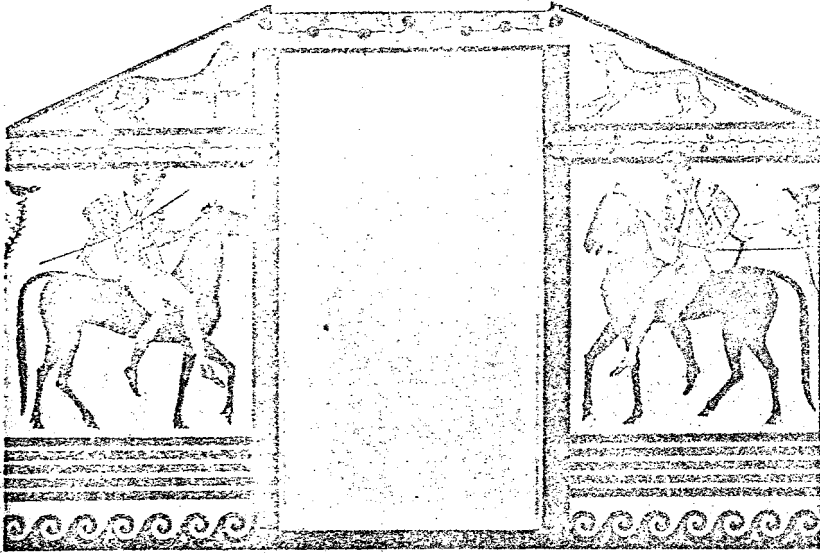
[3] Dauphins.

Cette œuvre provient de Tyrinthe, une ville de l'Argolide proche de Mycènes, qui connaît son apogée à l'époque créto-mycénienne (-1200).

Avons une parenthèse. Vous savez qu'il existe des substances (comme l'acide tartarique) qui existent sous deux formes différentes suivant qu'elles font tourner le plan de polarisation d'une lumière polarisée à droite ou à gauche : la forme lévogyre et la forme dextrogyre. Ces deux formes sont rigoureusement identiques du point de vue de l'analyse chimique et pourtant dans la nature (dans le raisin par exemple) une seule forme d'acide tartarique est produite. On peut même donner un exemple encore plus

proppant de cette spirale. La phénylalanine est une substance existant également sous les deux formes dextre et lév. Mais que l'absorption de la dextre ne produit aucun effet notable, l'absorption de la forme lév est à l'origine d'une forme de folie appelée phénylketonuria. (5)

De même dans des œuvres d'art, comme [4], l'esprit de la composition



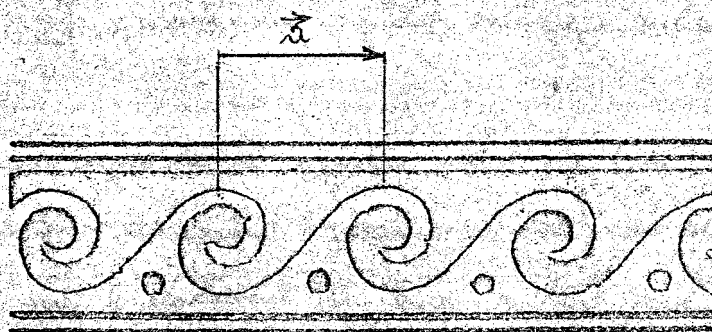
[4] Motif d'une tombe
Etrusque.

relève bien de la symétrie, mais certains détails viennent rompre cette symétrie. Il semble même qu'il s'agit là d'une caractéristique de l'art occidental par rapport à l'art oriental.

Nous pouvons dès maintenant retenir cette notion de "symétrie rompue". Nous verrons qu'en physique sur les lois de symétrie qu'on peut trouver ne sont souvent qu'approchées et rompues par certains phénomènes accessoires (négligeables en première approximation).

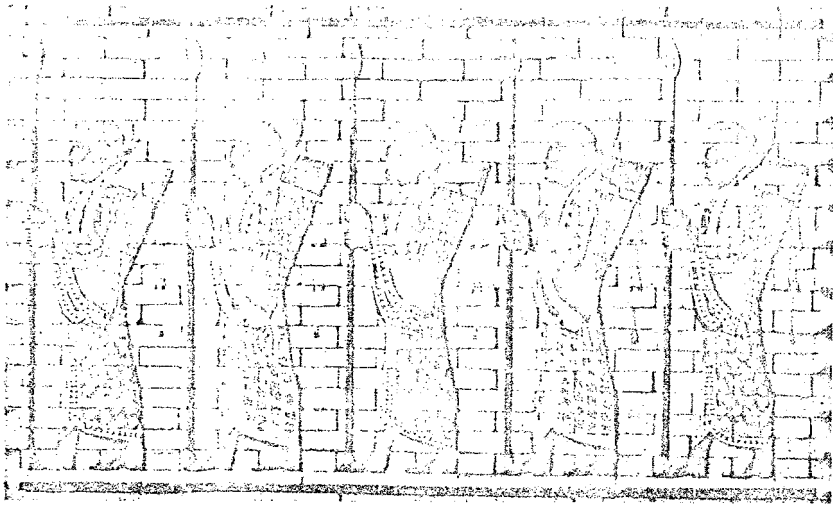
B - Symétrie de translation.

Il s'agit d'une symétrie où un motif se déduit de l'autre par une translation



[5] Art grec.

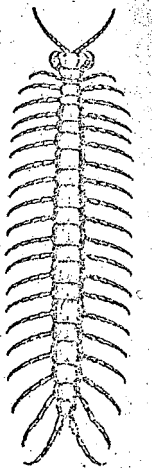
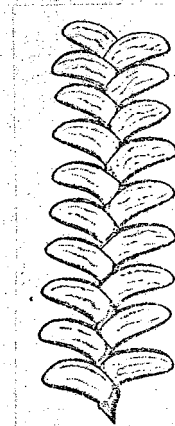
d'un vecteur constant $\vec{a}$: [5]



[6] Frise du Palais de Darius à Suse.

Ce genre de symétrie se rencontre bien sûr de façon courante dans les frises [6] ; mais également en musique : les chœurs, le rythme et une batterie.¹⁾

La nature présente également des exemples de symétrie (partielle, en ce sens qu'on n'a jamais une répétition infinie des motifs élémentaires) de translation. [7]



[7]

C. Symétrie de rotation.

1. Si au lieu de dessiner notre frise sur une surface plane nous la dessinons sur un cylindre (ou plus généralement une surface ^{de révolution} ~~cyindrique~~) nous obtenons une bande [8] dont les motifs se déduisent les uns des autres par une rotation d'angle constant.

La figure [9] présente un symbole magique ancien. Quant à la figure

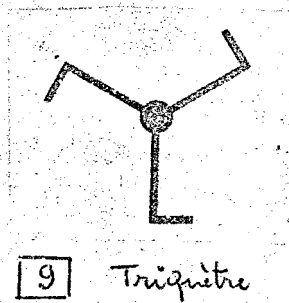
Remarquons que l'analogue de la symétrie bilatérale (un morceau de musique commençant par la fin et remontant jusqu'au début) ne se voit guère. Ceci, probablement, parce que l'écoulement du temps se fait par les organismes vivants à sens unique.

que l'on obtiendrait avec une répétition singulière de $\pi/2$ au lieu de $2\pi/3$, on vous laisse deviner de quoi il s'agit.

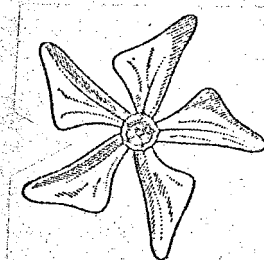
La nature présente aussi de nombreux exemples : les fleurs [10]



[8] (7) Cruche de Rhodes
Style Ionien
(-700)

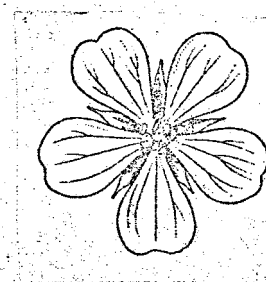


[9] Triquètre



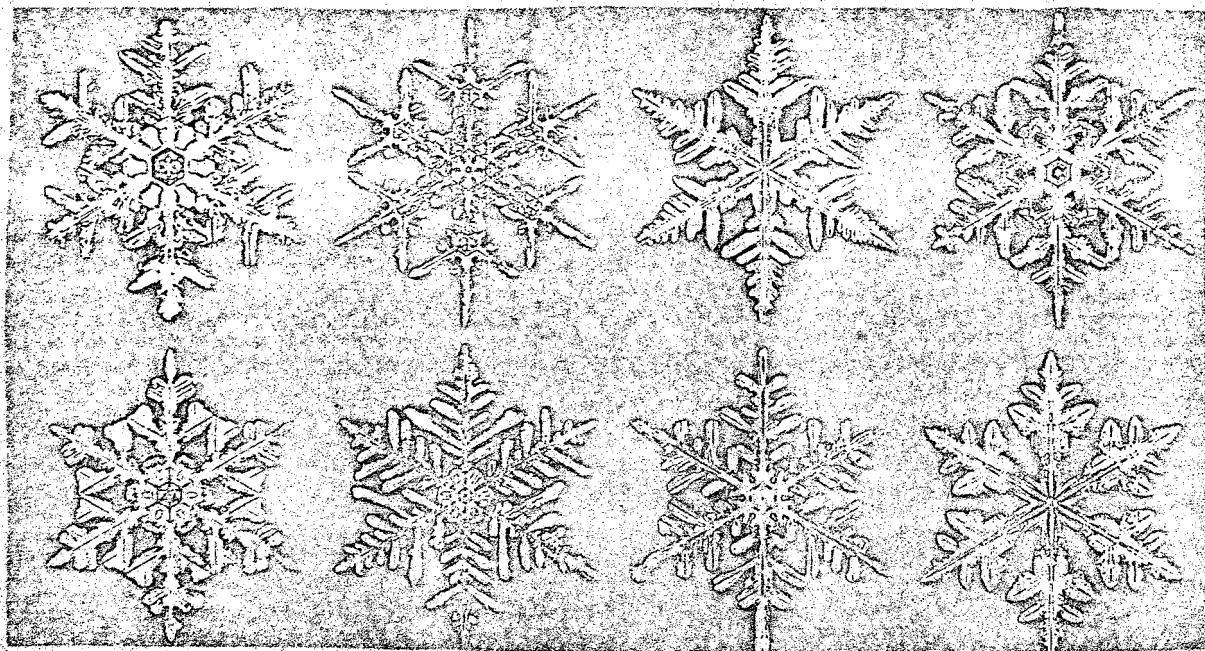
[10] Vinca Herbacea.

2- Toutefois, la symétrie que présente le plus souvent la nature comporte, en plus de la symétrie par rotation, des symétries bilatérales. Ainsi la fleur



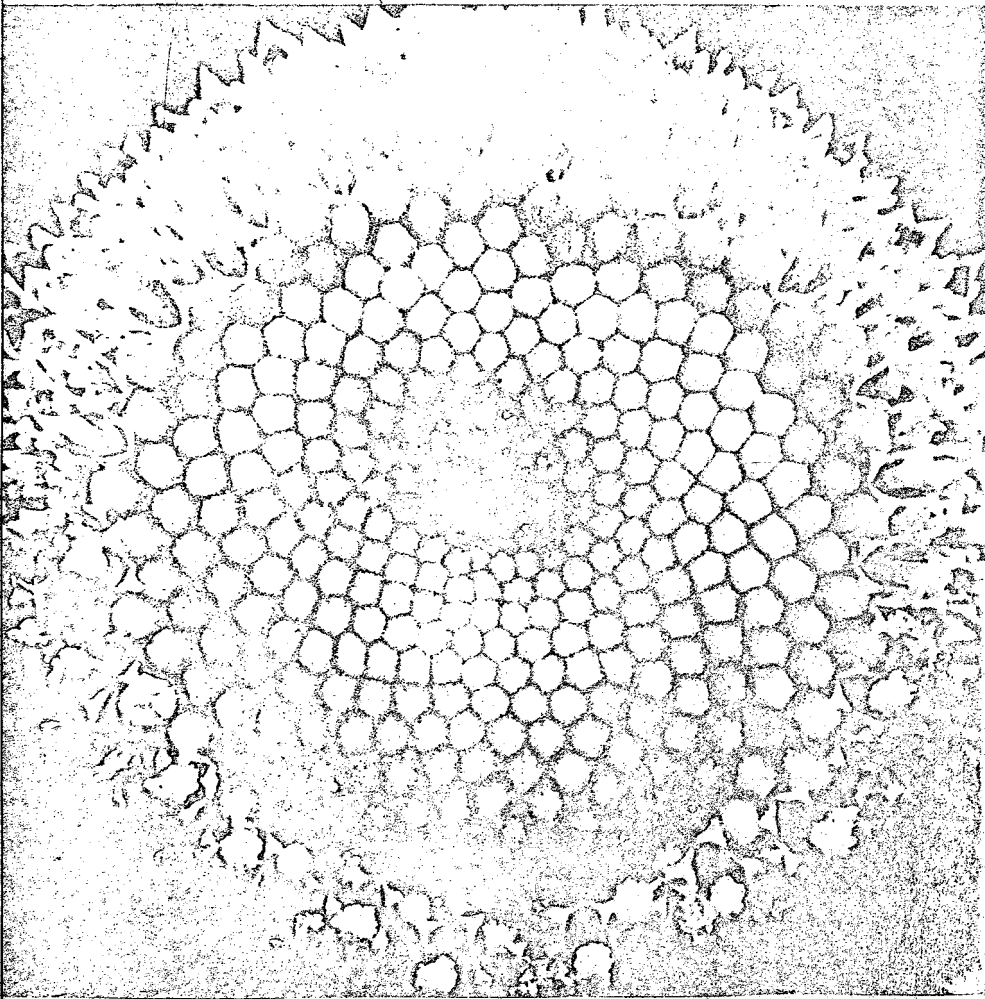
[11] Geranium

[11] ou les cristaux de neige [12]



[12] Cristaux de neige.

3. Si à une rotation continue nous associons une homothétie de centre O un point partant de l'origine et se déplaçant continuellement sous l'action de ces deux transformations décrit une spirale logarithmique que l'on retrouve sous de multiples formes de la nature. [13], [14], [15]



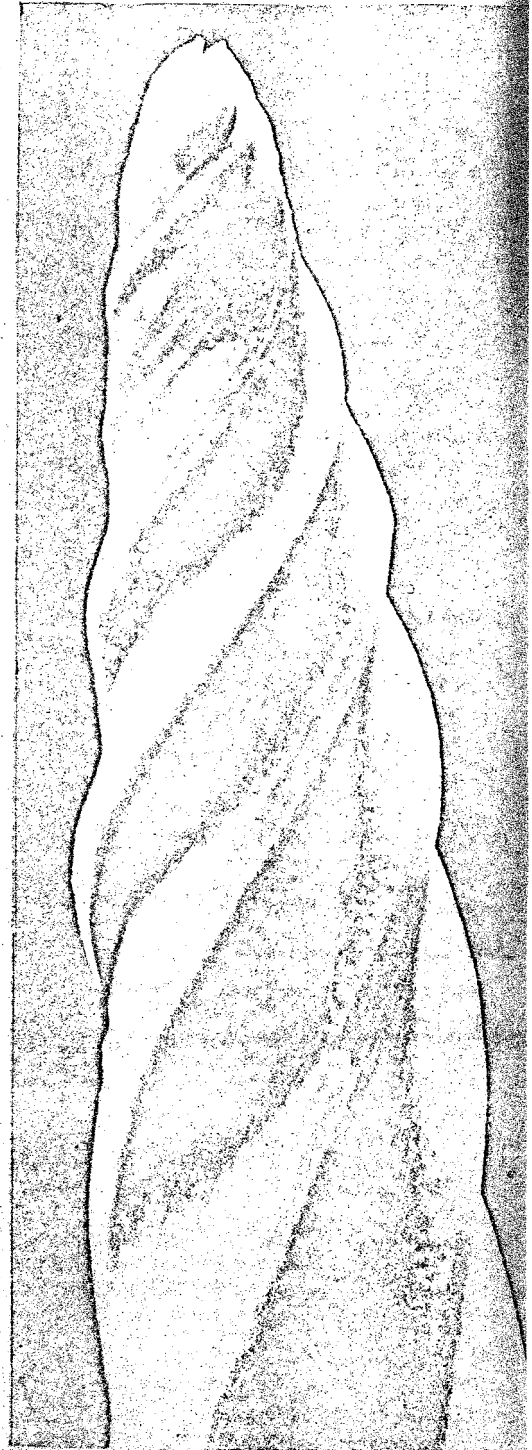
[13]

Fleur de
Tournesol



[14]

Coquille du
Nautilus

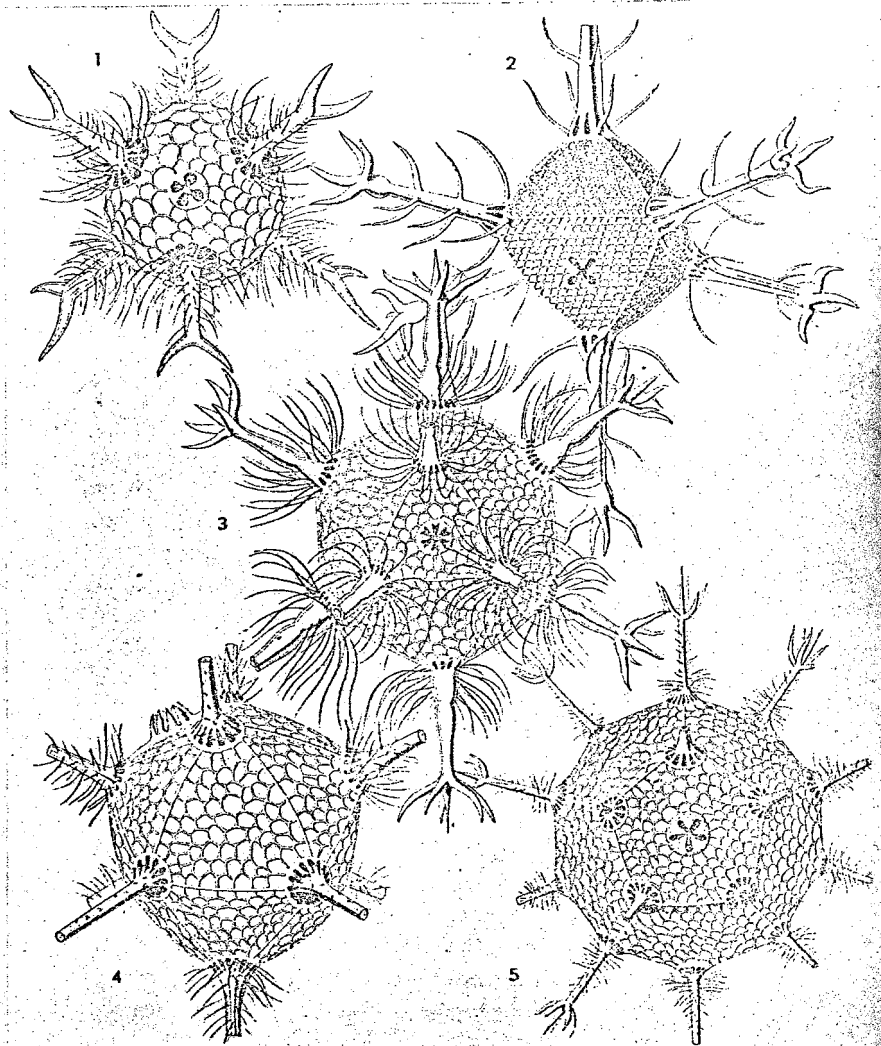


[15]

Bourgeon de Volubilis

Tout ce que nous venons de voir jusqu'ici est, d'un point de vue mathématique, relativement trivial. Par contre, il n'est pas du tout évident que le groupe des rotations de l'espace à 3 dimensions ne possède que 5 types de sous-groupes ayant un nombre fini d'éléments (nous aurons l'occasion de revenir là dessus). Le fait qu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers¹⁾ (c'est à dire dont toutes les faces et côtés sont égaux) est lié à ce résultat. [16]

Des exemples de telles symétries existent dans le monde vivant [17], mais surtout dans le



[17]

Radiolaires: protozoaires (c.e.s. et animaux unicellulaires) des mers chaudes formés d'un squelette siliceux

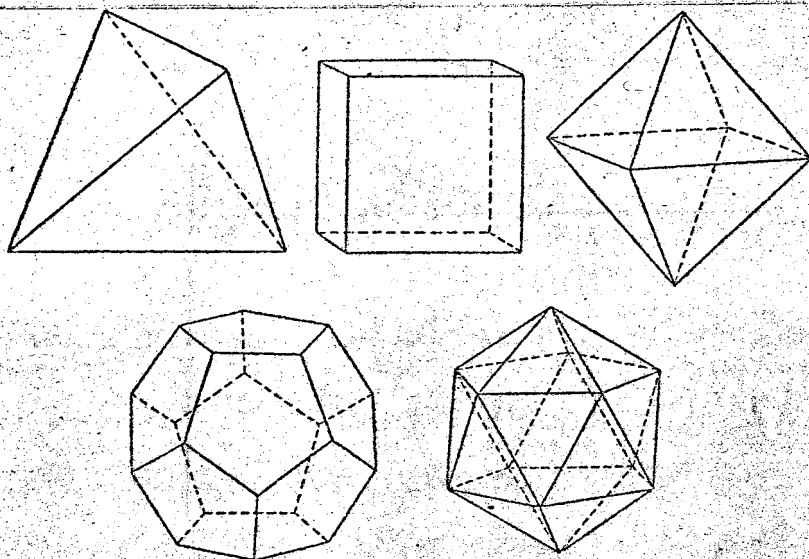
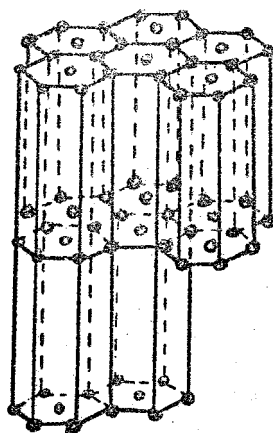
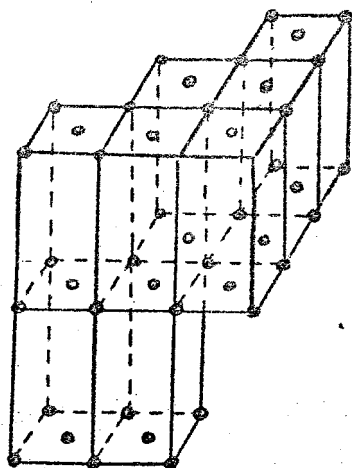


Fig. 16. — Les cinq polyèdres réguliers :
Tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre
4 6 8 12 20

cube = 6 faces
octa (latin) : 8
dodéca (grec) : 12
icosa (grec) : 20

1) Alors que le nombre de polyèdres réguliers est bien sûr infini.

monde minéral : ce sont les multiples sites de cristallisation. A propos de ce réseau cristallin se pose la question importante : combien existe-t-il de motifs différents pouvant se répéter ainsi et quels sont-ils ? 18


18

II - La notion de groupe et son rapport avec les symétries.

A - La notion de groupe : le point de vue, groupe de symétrie.

Il y a différentes façons de se donner un groupe.

- on peut se donner de façon explicite chaque élément (sous forme matricielle par exemple)

- on peut aussi se donner la table de multiplication du groupe,

	e	a	b	c	...
e	e	a	b	c	...
a	a	aa	ab	ac	
b	b	ba	bb	bc	
c	c	ca	cb	cc	
⋮	⋮				

qui à tout couple d'éléments associe son produit.

Nous avons donné en I divers exemples de groupes.

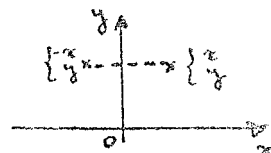
1° Le groupe associé à la symétrie bilatérale.

Si on choisit un repère dont l'axe Ox coïncide avec l'axe de symétrie, les

deux éléments de ce groupe s'écrivent : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La table de multiplication s'écrit :

	I	I'
I	I	I'
I'	I'	I



Remarquons que l'on a, dans ce cas, la propriété $I'^2 = I$

2° Le groupe associé à une translation (de vecteur $\vec{a}$)

Si $T(\vec{a})$ désigne la translation de vecteur $\vec{a}$, les différents éléments de ce groupe seront : l'élément neutre I , $T(\vec{a})$, $T^2(\vec{a})$, $T^3(\vec{a})$...

C'est là un groupe qui a un nombre infini d'éléments (mais que l'on génère entièrement à partir de l'un d'entre eux). Remarquons qu'il y a seulement "autant d'éléments que de nombres entiers", et pas "autant que de nombres réels". On dit qu'on a un groupe discret. Il est de plus commutatif; on dit aussi abélien¹⁾

3° Le groupe des rotations d'angle constant.

Si R désigne la rotation d'angle $2\pi/n$ tous les éléments du groupe s'écrivent : $R, R^2, \dots, R^{n-1}, R^n = I$

On note en général ce groupe C_n . Il est aussi abélien.

4° Le groupe des rotations planes associées à une homothétie.

Une rotation plane peut s'écrire, sous une forme très compacte souvent pratique :

$$z' = e^{i\theta} z$$

en séparant la partie réelle et imaginaire on obtient bien en effet la forme habituelle :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

¹⁾ Niels Henrik Abel fut un mathématicien norvégien né en 1802 à une époque où le Norvège se détache juste du protectorat danois. Il est mort à 25 ans et son œuvre ne sera en grande partie reconnue qu'après sa mort.

La rotation homothétique s'écrit donc : $z' = e^{i\theta} z$

Nous voyons qu'à chaque valeur de θ (comprise entre 0 et $+\infty$) correspond un élément différent. Il y a donc "autant d'éléments que le nombre réels".

On dit qu'il s'agit d'un groupe continu.

Plus généralement, supposons qu'une figure F soit conservée par des transformations $a, b, c, \dots$ d'un ensemble G , alors :

1° le produit de deux éléments quelconques conserve encore F ; en effet :

$$a(bF) = aF = F.$$

2° l'élément neutre, bien sûr conserve F

3° l'inverse de chaque élément conserve encore F ; en effet :

$$a^{-1}F = a^{-1}(aF) = eF = F$$

4° De plus la propriété d'associativité est trivialement vérifiée.

Ainsi nous voyons comment l'étude des transformations conservant une figure donnée a pu conduire à choisir les axiomes de groupe que nous avons donnés au début. Ce groupe de transformations s'appelle le groupe de symétrie de la figure F .

B- La notion de groupe replacé dans son contexte mathématique

S'il est utile de se rendre compte comment une notion mathématique s'est introduite par des considérations somme toute assez pratiques, il peut aussi être éclairant de la replacer dans le cadre plus général du champ mathématique.

Au début se trouve la notion d'ensemble¹⁾, pourrions-nous dire. C'est là en effet une des notions les plus générales.

Puis on peut munir cet ensemble E d'une structure, c'est à dire d'un ensemble de relations entre les éléments de l'ensemble :

- ce peut être une structure d'ordre $a < b$

- si on définit la notion de voisinage d'un élément cela permettra d'introduire des notions aussi importantes que celle de limite. C'est une struc-

1) C'est un de ces mots impossible à définir. Si on cherche sa définition dans le Petit Larousse, elle renvoie à "un tout", elle de "tout" à "totalité" et celle de "totalité" à "ensemble".

ture topologique

— enfin, on peut définir une loi de composition interne en donnant le moyen d'associer à tout couple d'éléments de l'ensemble, un autre élément de E et un seul. On a alors un ensemble avec une structure algébrique. Un groupe appartient à ce type là.

III - L'utilisation des symétries dans les théories physiques

1. Petit historique

a) Durant toute la période classique (Galilée, Newton, Maxwell) les physiciens étaient en mesure d'écrire de façon explicite les équations gouvernant les phénomènes qu'ils étudiaient. Ainsi Galilée exprimait la loi de la chute des corps par :

$$z = \frac{1}{2} g t^2 \quad g = \text{accélération de la pesanteur.}$$

Newton exprimait la loi fondamentale de la mécanique par :

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = k \frac{m m'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} (\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{dans le cas de l'attrac-}$$

tion gravitationnelle, de deux corps célestes par exemple.

Quant à Maxwell, il pouvait écrire ses équations bien connues.

Ils pouvaient éventuellement, la loi une fois écrite, étudier quel groupe de transformations la laisse inchangée. Mais c'était là un luxe qui n'apportait pas grand chose de plus.

b) Avec l'avènement de la mécanique quantique et l'étude des interactions des particules élémentaires, le tableau change complètement.

En mécanique quantique on sait encore ^{écrire} une équation donnant (mais de façon indirecte par l'intermédiaire de la fonction d'onde ψ) l'état du système étudié : c'est l'équation de Schrödinger ou plus généralement les équations aux valeurs propres. Mais pour la résoudre (surtout que pour de multiples calculs concrets) on s'appuie explicitement sur les symétries qu'elle laisse apparaître.

Dans le cas des particules élémentaires, on ne sait même souvent (interactions fortes par exemple) plus écrire d'équation rendant compte de façon sûre du système

étudiée (et encore moins la résoudre !). L'étude des symétries constitue ¹¹⁴ alors un des moyens d'investigation essentiels et on fait largement appel aux méthodes de théorie des groupes.

2. Un exemple d'utilisation.

a) Le problème Comme, pour l'instant, nous ne supposons pas connu le formalisme de la mécanique quantique, nous n'allons pouvoir donner qu'un exemple classique. Ce qui sera par conséquent peu probant. Nous reviendrons sur la mécanique quantique par la suite.

Nous allons essayer de montrer comment on peut préciser la loi fondamentale de la dynamique (rappelée plus haut).

Etant donnée une particule 1 entourée de $N-1$ autres particules, il est raisonnable d'écrire que les composantes de son accélération sont une fonction de la position de toutes les particules, de leur vitesse et du temps. Autrement dit : ¹⁾

$$(1) \quad m^1 \ddot{x}_j^1 = F_j(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^N; \dot{\vec{x}}^1, \dots, \dot{\vec{x}}^N; t)$$

$j = 1, 2, 3 \quad \cdot = \frac{d}{dt}$

b) Homogénéité de l'espace

Introduisons maintenant le fait que l'espace est inchangé par translation (c'est à dire homogène). Autrement dit, l'équation (1) devra être la même, si je change l'origine de mon repère (point de vue ^{dit} positif) ou, ce qui revient au même, si je transporte les N particules globalement dans un autre lieu de l'espace (point de vue dit actif).

Cette translation s'exprime par le changement de coordonnées : $\vec{x}'^n = \vec{x}^n - \vec{a}$

- 1) Pour étudier un système physique, il faut choisir un système de coordonnées. Dans des systèmes différents, les lois du mouvement n'ont pas, en général, la même forme. Si on prend un système de coordonnées mal choisi (curviligne et en mouvement par rapport au système étudié par exemple) les équations peuvent y être très compliquées. Naturellement on doit choisir un repère qui conduit aux formes les plus simples. Ici nous prendrons simplement un repère cartésien orthonormé.

(1) devient en substituant :

(15)

$$(1') \quad m^1 \ddot{x}_j^{1'} = F_j (\vec{x}^{1'} + \vec{a}, \dots, \vec{x}^{N'} + \vec{a}; \vec{x}^{1'}, \dots, \vec{x}^{N'}; t)$$

(1') n'a pas la même forme que (1) que si F_j dépend non pas des positions $\vec{x}^n$ mais des différences $\vec{x}^n - \vec{x}^1$ et comme nous nous intéressons au comportement de la particule 1 il est naturel de lui faire jouer un rôle privilégié à $\vec{x}^1$ et de s'imposer une forme :

$$F_j (\vec{x}^2 - \vec{x}^1, \vec{x}^3 - \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^N - \vec{x}^1; \vec{x}^{1'}, \dots, \vec{x}^{N'}; t)$$

Notre exigence d'invariance par translation ne nous a pas permis de préciser la dépendance en $\vec{x}^j$. Mais nous aurions pu nous imposer une translation de la forme : $\vec{x}^{1'} = \vec{x}^1 - \vec{a} \cdot t$ ce qui correspond simplement à une

translation uniforme du repère ; dans ces conditions, nous obtenons pour les $\vec{x}^{1'}$ le même résultat que pour les $\vec{x}^1$ et (1) s'écrit donc sous la forme

plus précise : (2) $m^1 \ddot{x}_j^{1'} = F_j (\vec{x}^{k1}; \vec{x}^{k1}; t) \quad k = 2 \text{ à } N$
 $\vec{x}^{k1} = \vec{x}^k - \vec{x}^1 \quad j = 1 \text{ à } 3$

c) Isotropie de l'espace

Nous allons maintenant exiger que (2) reste inchangée si l'on fait une rotation R du repère. Cela se traduira par le changement de coordonnées :

$$x_j^n = \sum_l a_{je} x_e^{1'} \quad [a_{je}] \text{ matrice de rotation.}$$

La substitution dans (2) conduit à :

$$m^1 \sum_{e=1}^3 a_{je} \ddot{x}_e^{1'} = F'_j (R \vec{x}^{k1}; R \vec{x}^{k1}; t)$$

F'_j est une fonction nouvelle. Bien que nous ayons donné à F un indice nous ne voulons pas, en effet, faire, a priori, l'hypothèse que les quantités se transforment comme un vecteur.

Pour mettre cette équation sous la forme (2) nous multiplions par la matrice inverse de $[a_{je}]$ en tenant compte du fait que c'est une matrice orthogonale.

$$m^1 \sum_e \underbrace{\sum_j a_{ji} a_{je}}_{\delta_{ie}} \ddot{x}_e^{1'} = \sum_j a_{ji} F'_j (R \vec{x}^{k1}; R \vec{x}^{k1}; t)$$

Si e

Pour retrouver la forme (2) nous devons donc écrire :

(16)

$$\sum_j a_{ji} F_j^i(R \vec{a}^{k1}; R \vec{a}^{k1}, t) = F_i(\vec{a}^{k1}; \vec{a}^{k1}, t)$$

Autrement dit, comme nous le verrons par la suite, F doit être ce qu'on appelle une fonction vectorielle : $\vec{F}(\vec{x})$ c'est à dire une fonction qui dépend d'un vecteur variable et se comporte elle-même comme un vecteur.

Nous pouvons remarquer par finis que l'expression de la force gravitationnelle (cité plus haut) a bien tous les caractères que nous venons de trouver, mais nos considérations de symétrie sont restées trop générales pour nous donner une expression explicite.

Remarque Il se trouve, dans le cas présent, que les transformations que nous avons effectuées sont physiquement réalisables (déplacement de l'appareil de mesure ou du système étudié). Mais souvent (en théorie quantique) on est amené à s'imposer des invariances par rapport à des transformations non directement réalisables (par exemple renversement du sens d'écoulement du temps.) parce qu'on sait, par leurs conséquences, que ces invariances sont physiquement vérifiées dans la nature.