

Introduction à la théorie de la représentation des groupes

Introduction to the theory of group representation

Bertrand Roehner

Université de Paris, Cours de maîtrise

University of Paris, Master course

1973

Introduction.

La théorie des groupes constitue une sorte de corrépondance mathématique : on y utilise l'algèbre linéaire et le calcul matriciel, la théorie des espaces vectoriels normés et les espaces de fonctions (auxquels est consacrée une somme) et aussi toute l'analyse dès qu'on aborde le lien entre algèbres et groupes de Lie. C'est ce qui fait son charme et aussi sa difficulté.

D'un point de vue historique, on peut dire que la théorie des groupes a connu une longue maturation durant la dernière moitié du 19^e siècle. Depuis plus d'une trentaine d'années sa fructueuse application à la physique (cristallographie, mécanique quantique, particules élémentaires) l'a fait largement connaître. Pourtant, il s'agit encore d'une branche relativement "jeune" et pourtant, pleine de promesses.

Il existe de nombreux ouvrages sur la théorie des groupes et son application à la physique, mais fort peu sont d'un niveau convenant à un étudiant de 2^e cycle. Pourtant, on peut d'une certaine façon considérer que la théorie des groupes est au moins aussi indispensable pour une bonne compréhension de la mécanique quantique que la théorie des espaces de Hilbert. Cette dernière constitue certes la base du formalisme ; mais la notion de spin, la théorie du moment angulaire et de leur addition restent de simples artifices techniques si on ne les replace pas dans leur cadre naturel :

les représentations du groupe des rotations. (sans même parler de l'atome d'hydrogène et de l'équation de Dirac).

Ce cours correspond à un enseignement donné en 1973-74 à l'Université Paris VII à des étudiants en maîtrise de physique* qui suivaient parallèlement un cours de mécanique quantique. Cela explique l'orientation choisie, centrée sur le groupe des rotations (et de façon générale sur les groupes continus) et les représentations dans les espaces de fonctions. Dans le fascicule suivant, consacré aux algèbres et groupes de Lie, le lien avec la mécanique quantique apparaîtra encore plus nettement.

Dans l'exposé, nous avons essayé :

1° d'introduire les définitions de façon progressive en les préparant au besoin par des exemples.

2° de limiter les notions introduites à celles qui s'avèreraient indispensables (sous-groupe invariant, classes conjuguées, fonction caractéristique, représentation induite, tout cela a été perçu sans silence) pour établir les résultats poursuivis.

3° de donner ou de suggérer des applications des résultats obtenus (que ce soit pour la physique ou dans le cadre des mathématiques elles-mêmes) afin d'en montrer l'intérêt.

Toutes les remarques du lecteur seront toujours les bienvenues.

* Dans le cadre du "CO" de D. Saint-James.

Table des matières.

Introduction

Table des matières

Chapitre 1 : les symétries dans la nature et la notion de groupe. 1

- I - Symétries dans la nature et dans les arts
 - A - La symétrie bilatérale
 - B - Symétrie de translation
 - C - Symétrie de rotation
 - D - Symétrie de rotation dans l'espace.
 - II - La notion de groupe et son rapport avec les symétries
 - A - La notion de groupe; le point de vue : groupe de symétrie.
 - B - La notion de groupe réfléchi dans son contexte mathématique.
 - III - L'utilisation des symétries dans les théories physiques.
 - IV - Exemples de groupes.
 - A - Le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$
 - B - Le groupe des matrices unitaires et de déterminant +1.
- Exercice

Chapitre 2 : la notion de représentation d'un groupe. 40

- I - La notion d'homomorphisme et d'isomorphisme de groupe
 - A - Comment apparaît l'idée d'isomorphisme et d'homomorphisme

- B - La notion d'homomorphisme dans le contexte général des mathématiques.
- II - La notion de groupe de transformations.
La notion de tenseur.
- III - La notion de représentation d'un groupe.
 - A - Définition.
 - B - Exemples.
 - C - Exemples classiques de représentation d'un groupe.
- IV - L'homomorphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$.
 - A - Mise en évidence de l'homomorphisme
 - B - Propriétés complémentaires
- V - Une conséquence de l'homomorphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$: la notion de spineur.
 - A - La notion de produit tensoriel de deux espaces vectoriels
 - B - Le spineur

Exercices.

Chapitre 3 : propriétés fondamentales des représentations et application au groupe des rotations.

98

- I - Equivalence, irréductibilité et unitarité des représentations.
 - A - la notion de représentations équivalentes.
 - B - Notion de représentation irréductible et complètement réductible.
 - C - L'importance des représentations unitaires.
 - D - Critère d'irréductibilité.

II - Application au groupe des rotations propres.

A - Représentations unitaires de $SU(2)$ et $SO(3)$.

B - Relation entre les représentations du groupe des rotations et certaines fonctions spéciales.

C - Passage de la représentation polynomiale à une représentation dans l'espace des fonctions définies sur la sphère.

Exercices 164

Annexe au chapitre 3. 175

Annexe relative à l'espace de Hilbert. 179

Bibliographie. 193

Index. 197