C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 301-304 (26 janvier 1970). Série B

IONOSPHÈRE. — *La direction de phase stationnaire dans un milieu absorbant.*

Note (*) de MM. **Owen Storey** et **Bertrand Roehner**, présentée par M. Jean Coulomb.

On donne l'expression générale de la direction de phase stationnaire pour un faisceau d'ondes dans un milieu absorbant, en fonction des paramètres suivants qui caractérisent la structure du faisceau : directions moyennes des parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde; quatre coefficients qui précisent les corrélations entre les variations de ces deux directions autour de leurs valeurs moyennes.

La détermination de la direction de propagation d'un faisceau d'ondes, ce que l'on appelle le traçage de rayon, occupe une place centrale dans l'étude de la propagation des ondes radioélectriques dans l'ionosphère. On sait que ce problème a reçu une solution à peu près complète dans le cas d'un milieu anisotrope non absorbant (c'est-à-dire, transparent), grâce notamment aux travaux de Booker [1], Poeverlein [2] et Haselgrove [3]. Toutefois, l'ionosphère est un milieu absorbant aussi bien qu'anisotrope, au moins dans les régions D et E où les collisions électrons-neutres dissipent l'énergie des ondes. Il est donc de première nécessité de disposer d'une méthode correcte, générale, simple, et pratique permettant le tracé de rayon en milieu absorbant. A notre connaissance une telle méthode n'existe pas actuellement et nous nous proposons d'en donner ici l'un des éléments fondamentaux.

Celui-ci concerne la direction du faisceau, que nous identifions avec la direction de phase stationnaire (D.P.S.), c'est-à-dire la direction dans laquelle sont conservées les phases relatives des diverses ondes planes élémentaires dont se compose le faisceau. Toutes les méthodes de traçage de rayon en milieu transparent utilisent le principe de phase stationnaire. Divers arguments justifient l'extension de l'emploi de ce principe au milieu absorbant, du moins dans les limites de validité de l'optique géométrique, limites qui sont plus étroites que pour un milieu transparent; ces arguments feront l'objet d'une publication ultérieure. Ici notre propos est seulement de développer l'expression analytique de la D.P.S. et ce faisant de dégager certains aspects apparemment méconnus de la structure d'un faisceau en milieu absorbant.

Dans notre étude nous supposerons, pour des raisons qui apparaîtront par la suite, que le faisceau d'ondes provient (éventuellement par l'intermédiaire d'autres milieux absorbants ou non) d'un milieu transparent où il a été produit. Afin de traduire l'amortissement que subit une onde dans un milieu absorbant, on attribue au vecteur d'onde une partie imaginaire : ainsi $\vec{k} = \vec{k}_r - i\vec{k}_i$. Le terme d'amortissement s'écrit alors $\exp\left(-\vec{k}_i . \vec{r}\right)$. Les vecteurs $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_i$ sont normaux aux surfaces équiphase et équi-amplitude respectivement. Ils sont reliés par l'équation de dispersion (dans laquelle on omet la fréquence qui restera fixe dans tout ce qui suit) : $D(\vec{k}_r, \vec{k}_i) = 0$. On en obtient deux relations distinctes en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$D_r(\vec{k}_r, \vec{k}_i) = 0, \qquad D_i(\vec{k}_r, \vec{k}_i) = 0. \tag{1}$$

Or, il en résulte de l'hypothèse de l'origine du faisceau dans un milieu transparent, jointe aux lois de réfraction qui régissent son passage au milieu absorbant, qu'à chaque valeur réelle $\vec{k}_0$ du vecteur d'onde dans

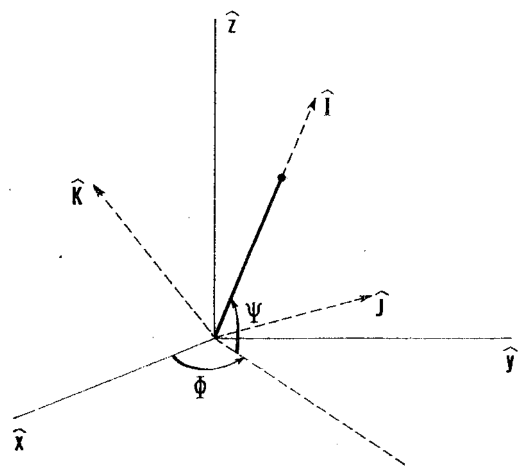

Fig. 1.

la très petite gamme que comprend le faisceau original, correspond une paire unique de vecteurs $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_i$ dans le milieu absorbant. Ainsi, en chaque point de ce milieu, la direction du vecteur $\vec{k}_i$ est une fonction univalente de la direction du vecteur $\vec{k}_r$. Caractérisons ces directions par les vecteurs unitaires $\hat{k}_i$ et $\hat{k}_r$. Nous avons alors

$$\hat{k}_i = f(\hat{k}_r). \tag{2}$$

En repérant une direction de l'espace par les deux angles φ et ψ des coordonnées sphériques (*fig.* 1) on exprime cette relation sous la forme différentielle de son développement au premier ordre :

$$d\varphi_i = a_{\varphi\varphi}\, d\varphi_r + a_{\varphi\psi}\, d\psi_r, \qquad d\psi_i = a_{\psi\varphi}\, d\varphi_r + a_{\psi\psi}\, d\psi_r. \tag{3}$$

Ainsi, dans un milieu absorbant, la structure d'un faisceau d'ondes est définie non seulement par les deux vecteurs $\hat{k}_r$ et $\hat{k}_i$, mais aussi par les quatre coefficients $a_{\varphi\varphi}$, $a_{\varphi\psi}$, $a_{\psi\varphi}$ et $a_{\psi\psi}$. C'est donc de l'ensemble de ces paramètres que dépendra la D.P.S., dont nous allons donner maintenant l'expression explicite.

De l'expression même du principe de phase stationnaire, il résulte de suite que la D.P.S. est donnée par la normale à la « surface des $\vec{k}_r$ », c'est-à-dire la surface que trace l'extrémité du vecteur $\vec{k}_r$ en prenant toutes ses directions possibles. Dans le cas du milieu transparent, l'équation de cette surface est simplement $D(\vec{k}) = 0$. Dans le cas du milieu absorbant, ce qui précède va nous permettre de l'écrire sans difficultés. En éliminant, en effet, le module k_i du vecteur $\vec{k}_i$ entre les deux parties de (1), on obtient une relation de la forme $G(\vec{k}_r, \hat{k}_i) = 0$; puis le remplacement

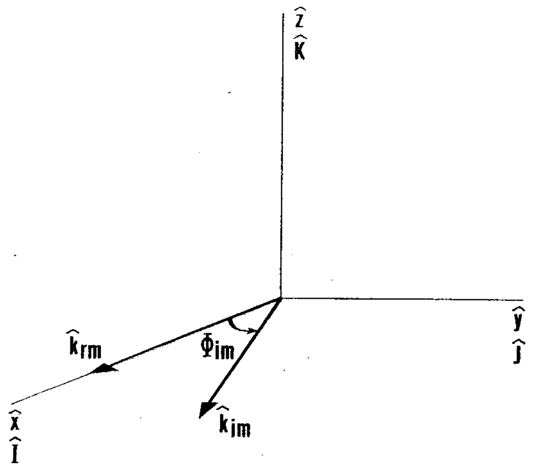

Fig. 2.

de $\hat{k}_i$ par son expression (2) conduit bien à une équation reliant le module k_r du vecteur $\vec{k}_r$ à sa direction, soit $F(k_r, \hat{k}_r) = 0$. On peut écrire aussi $k_r = k_r(\hat{k}_r)$.

On sait que dans les axes $\hat{I}$, $\hat{J}$, $\hat{K}$, des coordonnées sphériques (*fig.* 1), les composantes de la normale en un point quelconque de la surface d'équation $F(\vec{k}_r) = 0$ sont proportionnelles à celles du gradient de F dans l'espace des $\vec{k}_r$, à savoir

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial k_r}, \quad \frac{1}{k_r \cos\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{k_r}\frac{\partial F}{\partial \psi}.$$

Si l'on choisit le repère (x, y, z) de façon que $\hat{x}$ soit colinéaire à $\hat{k}_r$ ainsi qu'il est indiqué sur la figure 2, les axes $\hat{I}$, $\hat{J}$, $\hat{K}$ viennent se confondre avec $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ et la D.P.S. est parallèle au vecteur

$$(5) \qquad \hat{x} - \frac{1}{k_r}\left(\frac{\partial k_r}{\partial \varphi}\right)\hat{y} - \frac{1}{k_r}\left(\frac{\partial k_r}{\partial \psi}\right)\hat{z},$$

qu'on peut normaliser à module unitaire si l'on veut.

Pour avoir l'expression explicite cherchée, il ne reste donc qu'à calculer les dérivées utilisées dans (5), ceci pour les valeurs suivantes des variables (*fig.* 2) : $k_r = k_{rm}$; $k_i = k_{im}$; $\varphi_r = 0$; $\psi_r = 0$; $\varphi_i = \varphi_{im}$; $\psi_i = 0$ (l'indice m désigne la valeur moyenne des vecteurs d'onde dans la très petite gamme considérée). Nous procédons pour cela de la même façon que nous l'avons fait pour trouver l'équation de la surface des $\vec{k}_r$, mais en remplaçant les relations algébriques par les relations différentielles correspondantes : on élimine dk_i entre les relations $d\mathrm{D}_r = 0$ et $d\mathrm{D}_i = 0$; dans le résultat obtenu, on reporte les expressions (3) qui donnent $d\varphi_i$ et $d\psi_i$ en fonction de $d\varphi_r$ et $d\psi_r$, de façon à ne plus avoir que des termes se rapportant au vecteur $\vec{k}_r$. On obtient ainsi

$$(6)\quad \frac{\partial k_r}{\partial \varphi_r} = -\frac{\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, \varphi_r) + a_{\varphi\varphi}\,\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, \varphi_i) + a_{\psi\varphi}\,\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, \psi_i)}{\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, k_r)},$$

$$(7)\quad \frac{\partial k_r}{\partial \psi_r} = -\frac{\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, \psi_r) + a_{\varphi\psi}\,\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, \varphi_i) + a_{\psi\psi}\,\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, \psi_i)}{\partial(\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_r)/\partial(k_i, k_r)},$$

où les termes du type $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ sont des jacobiens.

Ces relations achèvent le programme qu'on s'était fixé au début de cette Note. Dans la suite on se propose de développer, à partir des lois fondamentales de réfraction, les équations qui gouvernent l'évolution des vecteurs unitaires $\hat{k}_r$ et $\hat{k}_i$, ainsi que des coefficients $a_{\varphi\varphi}$, $a_{\varphi\psi}$, $a_{\psi\varphi}$ et $a_{\psi\psi}$, le long de la trajectoire dont la direction locale est la D.P.S. On sera alors en mesure de tracer correctement des rayons en milieux absorbants.

Cette étude fait partie d'un programme de recherches financé par le Centre National d'Études Spatiales. Elle a été commencée pendant que l'un de nous (O. S.) était en visite à l'Université de Toronto, à l'invitation du Professeur C. O. Hines.

(*) Séance du 12 janvier 1970.

(1) H. G. Booker, *Proc. Roy. Soc.*, A, 155, 1936, p. 235.
(2) H. Poeverlein, *S.B. bayer Akad. Wiss.*, 1948, p. 175.
(3) J. Haselgrove, *The physics of the ionosphere*, The Physical Society, London, 1955, p. 355.

(*Groupe de Recherches ionosphériques du C.N.R.S.,*
4, avenue de Neptune,
94-Saint-Maur-des-Fossés,
Val-de-Marne.)

181170. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.