

Détermination explicite de la direction de phase stationnaire lors de la transmission d'une onde électromagnétique d'un milieu isotrope absorbant à un autre

par B. ROEHNER *,

Groupe de Recherches Ionosphériques du C.N.R.S.,
4, avenue de Neptune
94 - Saint-Maur-des-Fossés

RÉSUMÉ. — *On applique des résultats généraux décrits dans un article précédent, donnant la direction de phase stationnaire dans un milieu absorbant, au cas d'un rayon se propageant à travers trois milieux successifs homogènes et isotropes et dont les deux derniers sont absorbants. On écrit les expressions analytiques donnant la direction de phase stationnaire en fonction des caractéristiques des milieux successifs. Puis on exploite numériquement ces résultats analytiques pour montrer jusqu'à quel point l'approximation des milieux quasi transparents reste valable et pour étudier le cas limite des milieux très absorbants. Enfin, on donne un exemple illustrant les idées qui sont à la base de notre étude.*

ABSTRACT. — *General results obtained in a previous paper, giving the direction of stationary phase in an absorbent medium, are applied to the case of a ray propagated through three successive homogeneous isotropic media, the last two of which are absorbent. Analytic expressions are derived for the direction of stationary phase as a function of the characteristics of the successive media. Then these analytic results are exploited numerically so as to show to what extent the approximation of quasi-transparent media remains valid, and to study the limiting case of highly absorbent media. Finally, a worked example is given to illustrate the basic ideas of this study.*

Dans un milieu absorbant, le passage d'une onde électromagnétique donne lieu à une dissipation d'énergie d'où résulte un affaiblissement progressif de l'onde. Certains milieux (air, et plus généralement la plupart des diélectriques à l'égard des ondes basse fréquence) peuvent se traiter en première approximation comme des milieux non dissipatifs (que nous appellerons transparents). Dans de nombreux cas, cependant (milieu ionisé suffisamment dense, et la plupart des diélectriques à l'égard des ondes de fréquence élevée), cette approximation n'est plus suffisante et c'est cette étude (entreprise dans l'article

cité en référence) de la propagation des ondes électromagnétiques dans de tels milieux absorbants, que nous poursuivons ici.

Nous avions montré dans cet article que la direction de phase stationnaire (*D.P.S.*) d'un faisceau d'ondes se propageant dans un milieu homogène, isotrope et absorbant, n'est entièrement définie que si l'on se donne, en plus des vecteurs \vec{k}_r et \vec{k}_i (parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde) un ensemble de quatre coefficients reliant leurs variations de direction respective; nous avions aussi donné l'expression analytique de la *D.P.S.*

* Adresse actuelle : Collège de France, Laboratoire de Physique Atomique, place Marcelin-Berthelot, Paris (5^e).

En appliquant ces résultats à un cas concret simple :

1. on montrera que nos résultats généraux sont aisément utilisables dans la pratique pour le tracé de rayon;

2. on examinera à partir de quelles valeurs du rapport χ/μ (où $n = \mu + i\chi$ est l'indice complexe du milieu) que nous appellerons rapport d'absorption, les phénomènes diffèrent notablement de ceux que l'on aurait en milieu transparent. On étudiera aussi le cas limite où le rapport d'absorption devient important;

3. enfin, on mettra nettement en évidence sur un cas typique l'idée centrale de cette étude : pour définir un faisceau d'ondes dans un milieu absorbant, il ne suffit pas de se donner les vecteurs \vec{k}_r et \vec{k}_i .

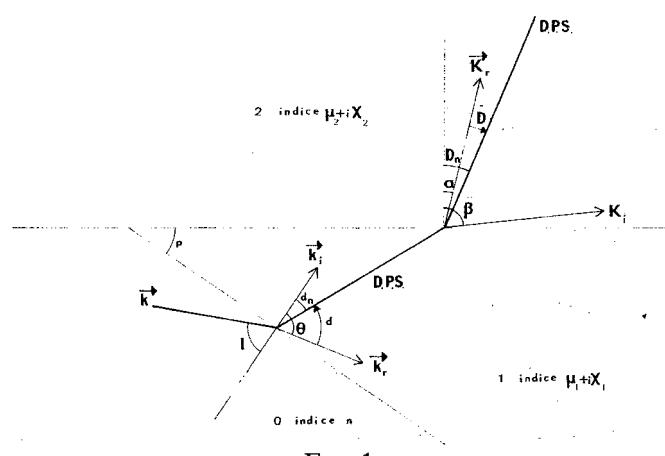


FIG. 1
Le système physique étudié.

L'exemple qu'on va étudier est représenté sur la figure 1. Un paquet d'ondes dont les vecteurs d'onde sont dispersés en direction mais non en amplitude passe du milieu non absorbant 0 (où il est supposé produit) au milieu absorbant 1. Le vecteur \vec{k}_i du milieu 1 est perpendiculaire à la surface de séparation de sorte que tous les coefficients $a_{\phi\phi}$, $a_{\psi\psi}$, $a_{\phi\psi}$ et $a_{\psi\phi}$ sont nuls. Il n'en est plus de même dans le milieu 2 ($a_{\phi\phi} \neq 0$) et cette considération explique le choix d'un tel exemple. Tous les milieux envisagés sont supposés homogènes et isotropes.

I. RÉSOLUTION ANALYTIQUE

Notre problème étant à deux dimensions, il n'y a pas de dépendance en ψ de sorte que les quantités $\partial K_r / \partial \psi_r$, $a_{\psi\psi}$, $a_{\phi\psi}$ et $a_{\psi\phi}$ sont nulles. La D.P.S. est donc donnée par l'expression * : $\hat{x} - \hat{y}(\partial K_r / \partial \phi_r) / K_r$. Sachant que (dans un milieu isotrope)

$$D_r(\vec{K}_r, \vec{K}_i) = K_r^2 - K_i^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\mu_2^2 - \chi_2^2)$$

$$\text{et } D_r(\vec{K}_r, \vec{K}_i) = K_r \hat{K}_i \hat{K}_r \cdot \hat{K}_i - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \chi_2$$

il est facile de calculer les jacobiens intervenant dans l'expression de $\partial K_r / \partial \phi_r$. On trouve finalement

$$\operatorname{tg} D = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{R^2} (1 - a_{\phi\phi}) \quad \text{avec } R = \frac{K_r}{K_i}$$

I.1. Calcul de $a_{\phi\phi}$.

Par définition $a_{\phi\phi}$ est égal au rapport des variations (autour de la valeur centrale) des angles repérant respectivement K_i et K_r soit $a_{\phi\phi} = d\beta/d\alpha$. Nous allons calculer ce rapport en faisant un développement limité au premier ordre des équations du problème :

$$k \sin I = k_r \sin \theta \quad (1.1)$$

$$k_r^2 - k_i^2 = a \quad (1.2)$$

$$k_r k_i \cos \theta = b \quad (1.3)$$

$$k_i \sin p = K_i \sin \beta \quad (1.4)$$

$$k_r \sin(p + \theta) = K_r \sin \alpha \quad (1.5)$$

$$K_r^2 - K_i^2 = A \quad (1.6)$$

$$K_r K_i \cos(\beta - \alpha) = B \quad (1.7)$$

Les équations (1.1 à 1.3) constituent le système I ; les équations (1.4 à 1.7) constituent le système II.

On a posé

$$a = \mu_1^2 - \chi_1^2 \quad A = \mu_2^2 - \chi_2^2$$

$$b = \mu_1 \chi_1 \quad B = \mu_2 \chi_2$$

Le développement du premier système nous fournit le rapport $d\theta/dI$. Le développement du deuxième, nous conduit à un système de deux équations aux inconnues $d\alpha$ et $d\beta$ dont la résolution donnera $a_{\phi\phi}$. Comme nous aurons plutôt besoin de $1 - a_{\phi\phi}$, c'est cette expression que nous retiendrons :

* Une erreur typographique s'est glissée dans la formule (4) de l'article cité en référence : il faut lire pour les composantes du gradient en coordonnées sphériques

$$\frac{\partial F}{\partial k_r}, \frac{1}{k_r \cos \psi} \frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{1}{k_r} \frac{\partial F}{\partial \psi}$$

et la formule (5) s'écrit donc

$$\hat{x} - \frac{1}{k_r \cos \psi} \left(\frac{\partial k_r}{\partial \phi} \right) \hat{y} - \frac{1}{k_r} \left(\frac{\partial k_r}{\partial \psi} \right) \hat{z}$$

$$1 - a_{\phi\phi} = (1 + R^2) \frac{\cot \beta_0 [\Delta k_r + m \cot(p + \theta_0)] - \Delta k_i \cot \alpha_0}{[(1 + R^2) \cot \beta_0 + R^2 \tan(\beta_0 - \alpha_0)] [\Delta k_r + m \cot(p + \theta_0)] - \Delta k_i \tan(\beta_0 - \alpha_0)}$$

On a posé

$$m = \cot I_0 \frac{r^2 + 1}{r^2 \cot \theta_0 + \cot \theta_0 + \tan \theta_0} \quad \text{avec} \quad r = \frac{k_r}{k_i}$$

$$\Delta k_r = \cot I_0 - m \cot \theta_0, \quad \Delta k_i = -\cot I_0 + m (\cot \theta_0 + \tan \theta_0)$$

L'indice zéro désigne partout les valeurs centrales du paquet d'ondes.

I.2. Calcul des valeurs centrales.

Il nous faut maintenant calculer ces valeurs centrales et pour cela résoudre successivement les systèmes I et II.

a) En divisant membre à membre les équations (1.1) (préalablement élevées au carré) et (1.3), on aboutit à une équation du deuxième degré en $\cos\theta$ qui n'a qu'une solution inférieure à 1 en valeur absolue. Faisons aussi le rapport membre à membre des équations (1.2) et (1.3) et remplaçons-y $\cos\theta$ par son expression en fonction de $r = k_r/k_i$; on aboutit ainsi à une équation bi-carrée en r dont les deux solutions positives sont

$$r = [-P \pm (P^2 + Q)^{1/2}]^{1/2}$$

avec

$$P = \frac{aU}{2b} - \frac{a^2}{2b^2} - 1, \quad Q = \frac{a^2 U^2}{4b^2} - \left(\frac{aU}{2b} - 1 \right)^2, \\ U = \frac{k^2}{b} \sin^2 I$$

Il conviendra bien sûr, lors du calcul numérique, de choisir entre ces deux solutions par une vérification directe. Ayant r , le terme $\cos\theta$ s'en déduit de suite.

b) En procédant de la même façon que précédemment, on remplace le système II par le système

$$R - \frac{1}{R} = \frac{A}{B} \cos(\beta - \alpha) \quad (1.1')$$

$$R \sin^2 \alpha = V \cos(\beta - \alpha) \quad (1.2')$$

$$R \sin \alpha = W \sin \beta \quad (1.3')$$

où

$$V = \frac{k^2}{B} \sin^2(p + \theta) \frac{\sin^2 I}{\sin^2 \theta}, \quad W = r \frac{\sin(p + \theta)}{\sin p}$$

Moyennant quelques calculs, il est facile de voir qu'on peut éliminer R entre (1.1') (1.2') (1.3'). Les

deux équations résultant de cette élimination s'expriment au moyen de deux inconnues :

$$u = \sin^2 \alpha, \quad w = \cos^2(\beta - \alpha)$$

Tirant w de la plus simple, on est conduit à une équation du deuxième degré en u :

$$u^2 \left(\frac{2V - W}{VW} + \frac{A}{B} \right) - u \left(\frac{A}{B} + \frac{V}{W^2} + V \right) + V = 0$$

Ainsi voit-on que le système des sept équations qui régissent le problème peut être entièrement résolu analytiquement. C'est là un résultat assez remarquable pour mériter d'être souligné.

II. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans la première partie, nous venons donc d'obtenir toutes les expressions analytiques nécessaires à la détermination de la D.P.S. au passage d'un milieu non-absorbant à un milieu absorbant d'une part, puis au passage de ce milieu absorbant à un deuxième milieu absorbant. L'exploitation numérique va nous permettre de réaliser les autres objectifs qu'on s'était fixés au début de ce travail.

II.1. Importance des phénomènes d'absorption aux faibles taux d'absorption.

Il est naturel de se demander, tout d'abord, à partir de quelles valeurs de rapport d'absorption l'approximation des milieux quasitransparents cesse d'être valable. La figure 2 répond à cette question. Avec $n/\mu_1 = 1$ (n étant l'indice du milieu 0 de la figure 1) et un rayon incident rasant ($I = 90^\circ$) l'angle de réfraction sera (dans le cas où $\chi_1 = 0$) égal à 90° . La différence $e = 90^\circ - d_n$ (la signification de d_n est précisée sur la figure 1) dont le graphique 1 donne les variations en fonction du rapport d'absorption du milieu 1, représente donc l'écart vis-à-vis du cas d'un milieu 1 transparent. On voit que cet écart atteint déjà 10° pour un rapport égal à 10^{-2} . On peut donc conclure que l'importance des phénomènes d'absorption devient très vite décisive.

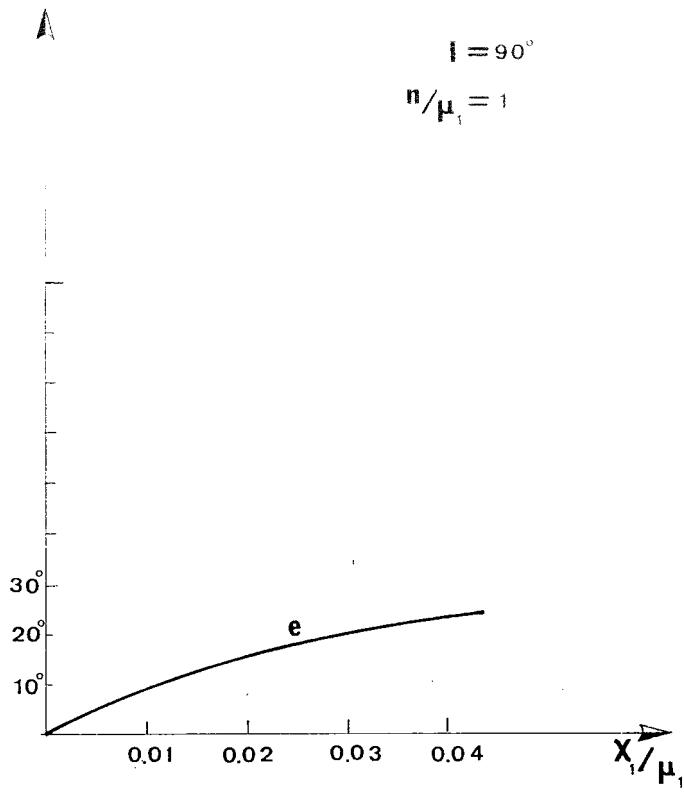


FIG. 2

Courbes caractérisant l'écart entre un milieu transparent et le milieu correspondant ayant une petite absorption.

II.2. Passage d'un milieu non absorbant à un milieu absorbant.

II.2 a. Passage à la limite.

Nous allons montrer que lorsque l'absorption du milieu 1 augmente, c'est-à-dire lorsque le rapport $s = \mu_1/\chi_1$ tend vers zéro, la D.P.S. tend à devenir normale à l'interface. Nous utilisons le symbole \sim pour « du même ordre de grandeur que... ». On vérifie aisément que (avec les notations de la première partie)

$$P \sim -\frac{1}{s^2} \quad , \quad Q \sim \text{Cte}$$

Le remplacement numérique des solutions dans les équations initiales montre que c'est la solution tendant vers zéro qui est à retenir pour r^2 : $r^2 \sim s^2$.

Il en résulte :

- d'une part que $\cos\theta \rightarrow \text{Cte}$, ce qui définit un angle limite θ_0 ,
- d'autre part que $\operatorname{tg}d_n \sim s^2 \rightarrow 0$.

Remarque : L'expression donnant la D.P.S. dans le cas simple du passage d'un milieu non-absorbant à un milieu absorbant s'obtient par un calcul élémentaire :

$$\operatorname{tg}d_n = \frac{r^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2 \cos^2\theta + 1}$$

C'est cette expression que nous avons utilisée ici.

La configuration de l'onde dans le milieu absorbant est donc, à la limite des grandes absorptions, donnée par la figure 3.

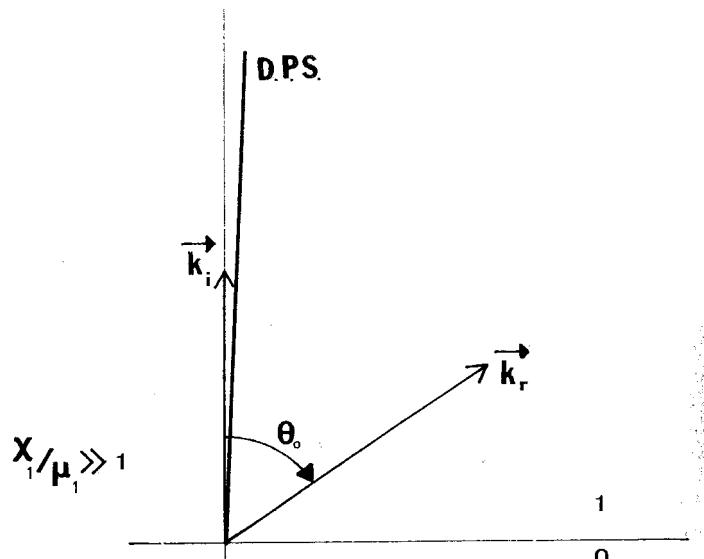


FIG. 3

Disposition des vecteurs d'onde après passage d'un milieu transparent à un milieu très absorbant.

II.2 b. Résultats numériques.

Ils vont nous dire à partir de quelles valeurs du rapport d'absorption les effets précédents ont lieu. La figure 4 donne les variations de θ et de d_n en fonction des rapports d'absorption et montre que, pour des rapports de l'ordre de 5, les limites prévues sont déjà atteintes à 5 % près.

II.3. Passage d'un milieu très absorbant à un milieu peu absorbant.

II.3 a. Passage à la limite.

Qu'obtient-on lorsque χ_1/μ_1 prend de très grandes valeurs ? Procédons comme plus haut, en faisant tendre s vers zéro dans les solutions du milieu 2. Nous trouvons d'abord que V tend vers une valeur constante, pendant que les quantités W , r et s deviennent à peu près égales. Il en résulte que

$$\frac{2V - W}{VW} + \frac{A}{B} \sim \frac{1}{s}$$

et

$$\frac{A}{B} + \frac{V}{W^2} + V \sim \frac{1}{s^2}$$

d'où

$$u \sim \frac{1 \mp (1 - s^3)^{1/2}}{s}$$

D'autre part, comme

$$\operatorname{tg} D = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{R^2} (1 - a_{\phi\phi})$$

on aura $\operatorname{tg} D \sim s^3/s^2$ soit $D \sim s$.

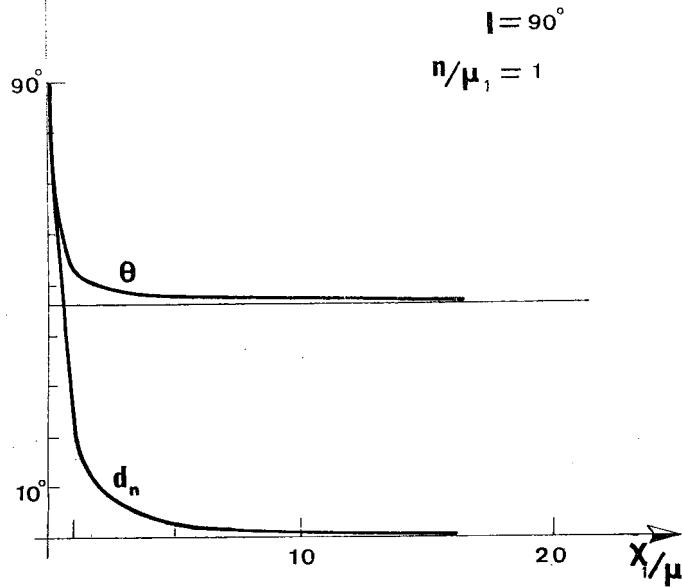


FIG. 4

Courbes caractérisant le passage d'un milieu transparent à un milieu fortement absorbant.

Comme $|u|$ doit être inférieure à 1, seul le signe négatif convient. Il s'ensuit que α est du même ordre que s et que

$$w \sim s^4 \rightarrow \beta - \alpha \sim \frac{\pi}{2} - s^2,$$

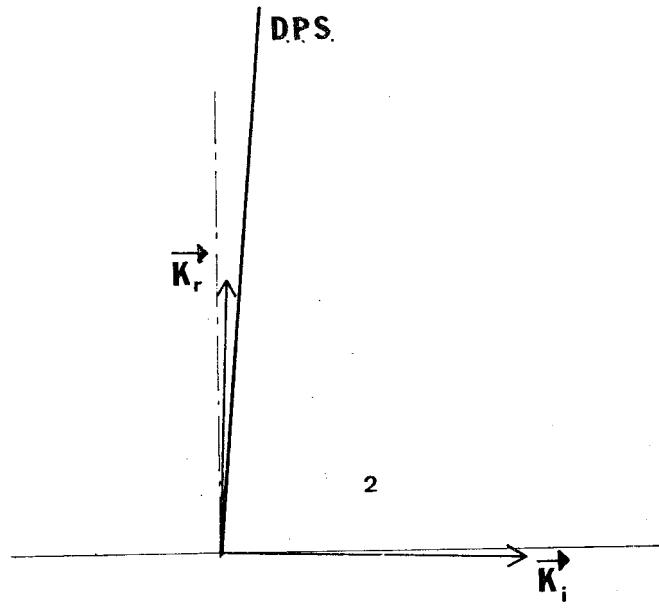
soit

$$\beta \sim \frac{\pi}{2} + s$$

par conséquent

$$R = W \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sim s \frac{1}{s} \rightarrow \text{Cte}$$

Or, on sait que, pour un ϵ infiniment petit, $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right)$ se comporte comme ϵ^{-1} . Puisque Δk_i se comporte comme r^2 c'est-à-dire comme s^2 , on aura donc pour $1 - a_{\phi\phi}$ l'équivalence suivante :



X₁/μ₁ ≫ 1

FIG. 5

Disposition des vecteurs d'onde après passage d'un milieu très absorbant à un milieu peu absorbant.

La configuration de l'onde dans le milieu 2 est donc, à la limite des grands χ_1/μ_1 , donnée par la figure 5; si l'on compare les figures 3 et 5, on voit, que dans les deux cas, la D.P.S. est normale à l'interface, mais sa disposition par rapport aux vecteurs \vec{K}_r et \vec{K}_i moyens est toute différente : colinéaire à \vec{K}_i dans la figure 3 et à \vec{K}_r dans la figure 5. La figure 6 donne les variations des angles α , β et D_n en fonction du rapport d'absorption. On voit que ces angles tendent bien vers les limites prévues, mais bien plus lentement que dans le cas de la figure 4, c'est-à-dire du passage d'un milieu non-absorbant à un milieu absorbant.

II.4. Un cas typique.

En rassemblant les résultats auxquels nous venons de parvenir en II.2 et II.3, nous allons pouvoir réaliser le troisième objectif qu'on s'était fixé au début de ce travail : montrer sur un exemple que pour définir un faisceau d'ondes dans un milieu absorbant, il ne

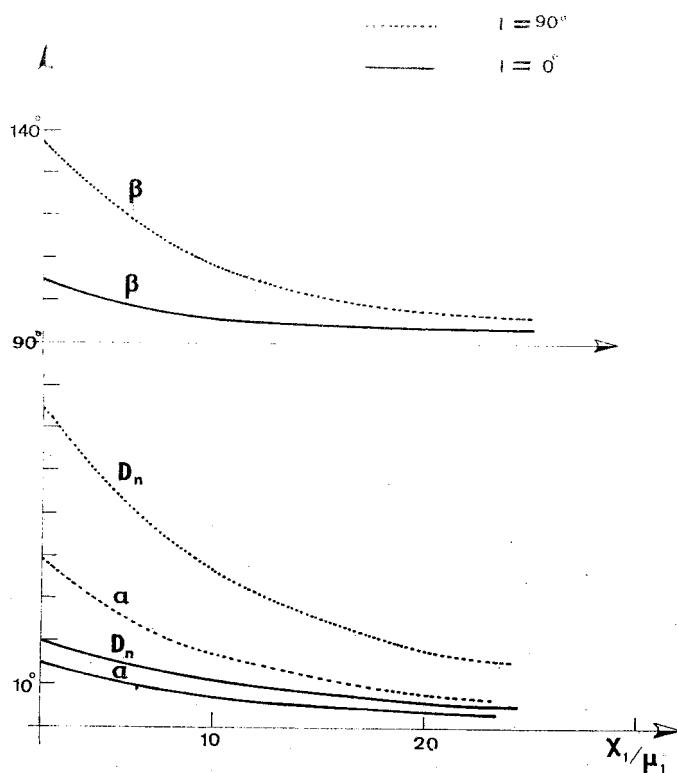


FIG. 6

Courbes caractérisant le passage d'un milieu fortement absorbant à un milieu peu absorbant.

suffit pas de se donner les vecteurs \vec{K}_r et \vec{K}_i . Cet exemple est représenté sur la figure 7 : une onde passe d'un milieu non-absorbant 0 à un milieu absorbant 2 d'une part directement, d'autre part après passage dans un milieu absorbant 1. Si l'on suppose que $\chi_1/\mu_1 \gg \chi_2/\mu_2 \gg 1$, on voit déjà que les D.P.S. finales seront quasi-perpendiculaires pour ces deux ondes, cet effet étant lié à la disposition adoptée pour les interfaces entre les divers milieux. D'autre part, le calcul montre qu'en jouant sur le rapport n/μ_2 on peut obtenir un angle (\vec{K}'_i, \vec{K}'_r) aussi voisin de $\pi/2$ que l'on veut. Les deux ondes se trouvent donc avoir, dans le milieu 2, des vecteurs \vec{K}_i et \vec{K}_r parallèles alors que leurs D.P.S. sont complètement différentes.

CONCLUSION

Cette étude conduit aux considérations suivantes :

1. Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe II.1, l'approximation des milieux quasi-transparents n'est guère valable, même pour des milieux peu absorbants.
2. L'exemple que nous venons de traiter permet d'étudier, au prix d'une simple itération, la propa-

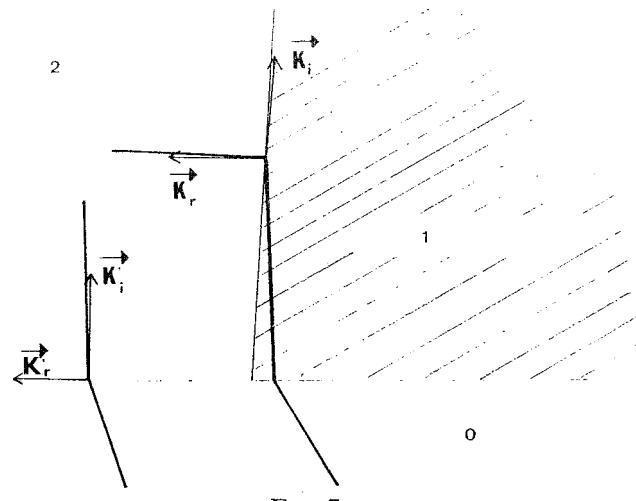


FIG. 7

Un exemple typique où les mêmes couples (\vec{k}_r, \vec{k}_i) correspondent à des D.P.S. différentes.

gation d'un rayon à travers un milieu isotrope absorbant et stratifié du point de vue de l'homogénéité. La généralisation au cas d'un milieu dont les caractéristiques varient de façon continue d'un point à un autre et au cas d'un milieu anisotrope constituerait un prolongement de notre étude.

3. D'un point de vue plus fondamental, il convient d'étudier dans quelles conditions la D.P.S. coïncide avec la direction de propagation de l'énergie du faisceau. Une telle étude vient d'être effectuée par Storey (communication privée). Les résultats confirment l'identité de ces deux directions dans le cadre de l'optique géométrique.

REMERCIEMENTS

Cette étude a été entreprise sur une suggestion du docteur L. R. O. Storey et nous lui exprimons ici notre reconnaissance. Nous tenons aussi à remercier le docteur K. Suchy dont les appréciations nous furent fort utiles.

Cette étude fait partie d'un programme de recherches financé par le Centre national d'Études spatiales.

Version révisée reçue le 26 août 1971.

BIBLIOGRAPHIE

STOREY O. et ROEHNER B., « La direction de phase stationnaire dans un milieu absorbant », *C.R. Acad. Sc. Paris*, **270**, 301-304, 1970.