
Verres, optimisation et & trous noirs : des liens surprenants

Leticia F. Cugliandolo

Sorbonne Université

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies

Institut Universitaire de France

`leticia@lpthe.jussieu.fr`




`www.lpthe.jussieu.fr/~leticia/seminars`

Cargèse, France, 2023

Optimisation Computationnelle

Un problème facile



Sortir dîner

Vous		Marie
Vous		Jean
Marie		Jean

Dîner heureux

Un problème facile

Sortir dîner : donner une note




Vous		Marie	-1
Vous		Jean	-1
Marie		Jean	-1

Dîner heureux -3

La règle est d'ajouter -1 si la paire est heureuse




Facile vs contraint

Sortir dîner : donner une note

Vous  Marie -1
Vous  Jean -1
Marie  Jean -1

Dîner heureux

-3

Vous  Marie -1
Vous  Jean -1
Marie  Jean $+1$




Dîner conflictuel

-1




La règle est d'ajouter -1 (ou $+1$) si la paire est heureuse (ou malheureuse)

Facile vs contraint

Sortir dîner : donner une note

Vous  Marie -1
Vous  Jean -1
Marie  Jean -1

Dîner heureux -3

Vous  Marie -1
Vous  Jean -1
Marie  Jean $+1$

Dîner conflictuel -1




La règle est d'ajouter -1 (ou $+1$) si la paire est heureuse (ou malheureuse)

La **fonction de coût** prend une valeur plus élevée s'il y a la **frustration**

Un problème d'optimisation

Modifier la proposition : diviser le groupe en deux

Trois cas

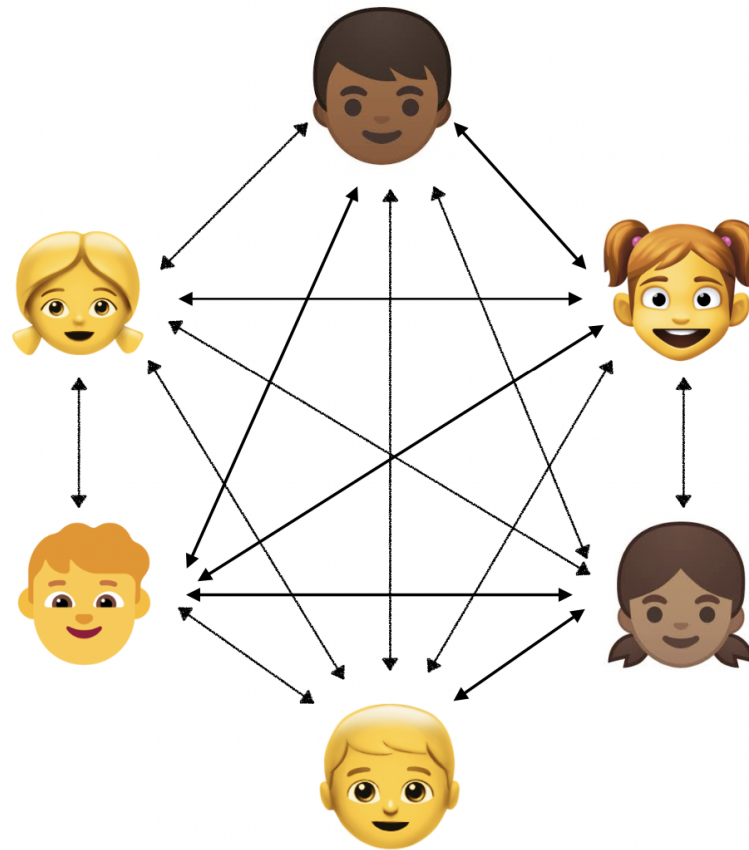
(Vous & Marie  sortent)	(Jean n'est pas invitée)	✓	-1
(Vous & Jean  sortent)	(Marie n'est pas invitée)	✓	-1
(Marie & Jean  sortent)	(Vous n'êtes pas invité)	✗	+1

il y a deux solutions **optimales** qui **minimisent** la **fonction de coût**

La fonction de coût additionne ± 1 selon quel couple sort ensemble

Un problème d'optimisation

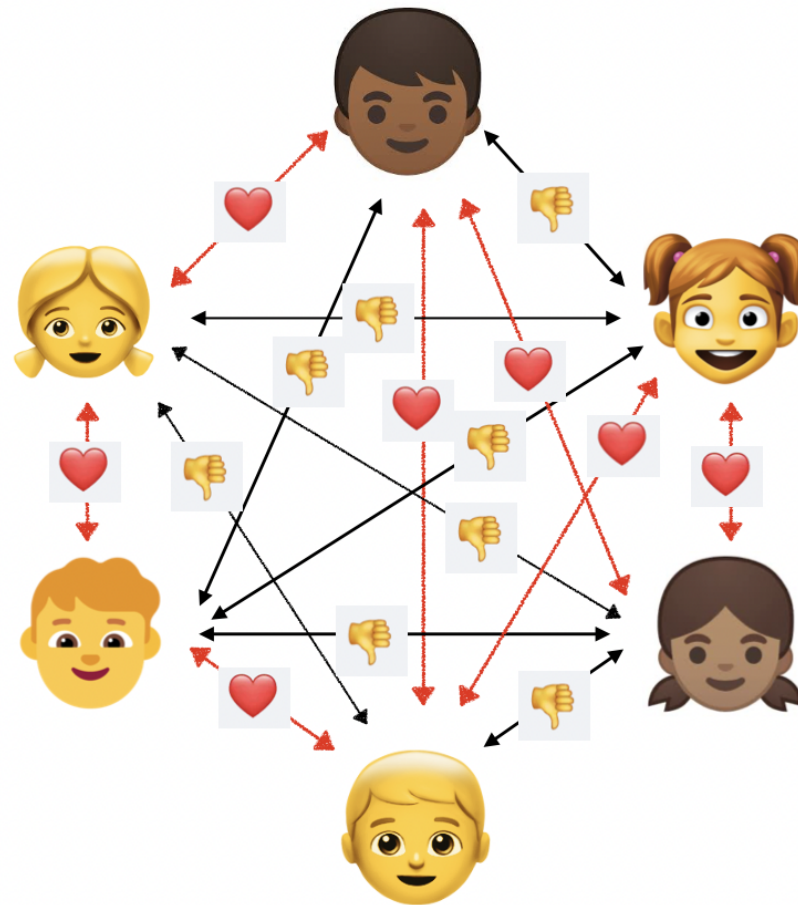
Plus de personnes, beaucoup plus de connexions



6 enfants et chacun a 5 connexions. Il y a $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ connexions

Un problème d'optimisation

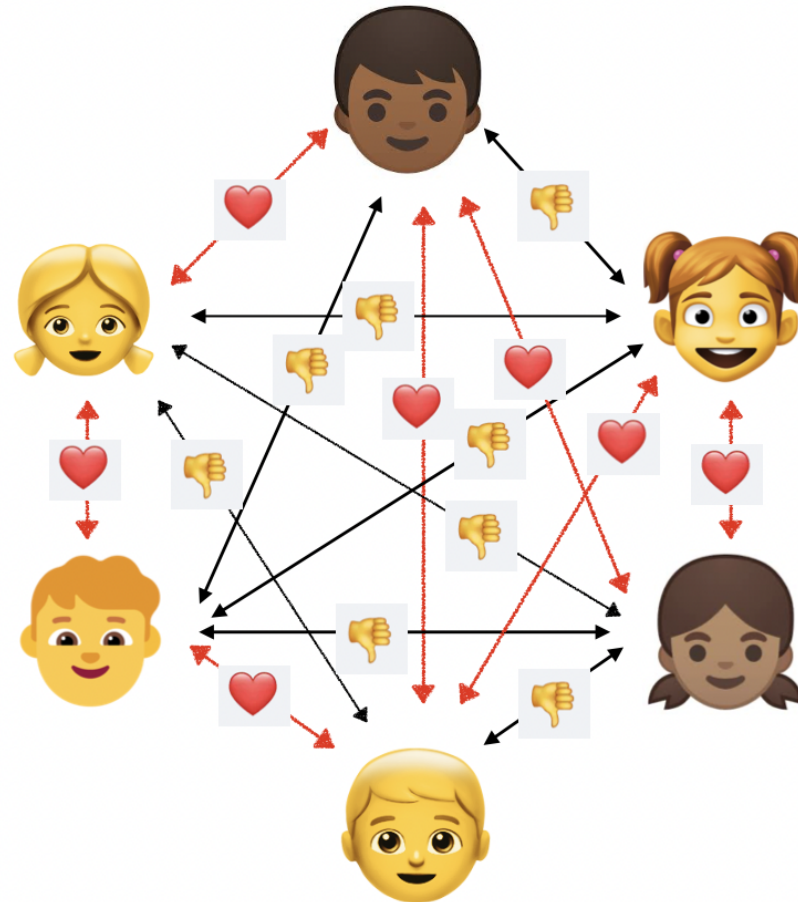
Plus de gens donnent plus de possibilités et la complexité augmente



Grosso modo, moitié/moitié s'aiment bien 🍷 / se détestent 👎 réciproquement

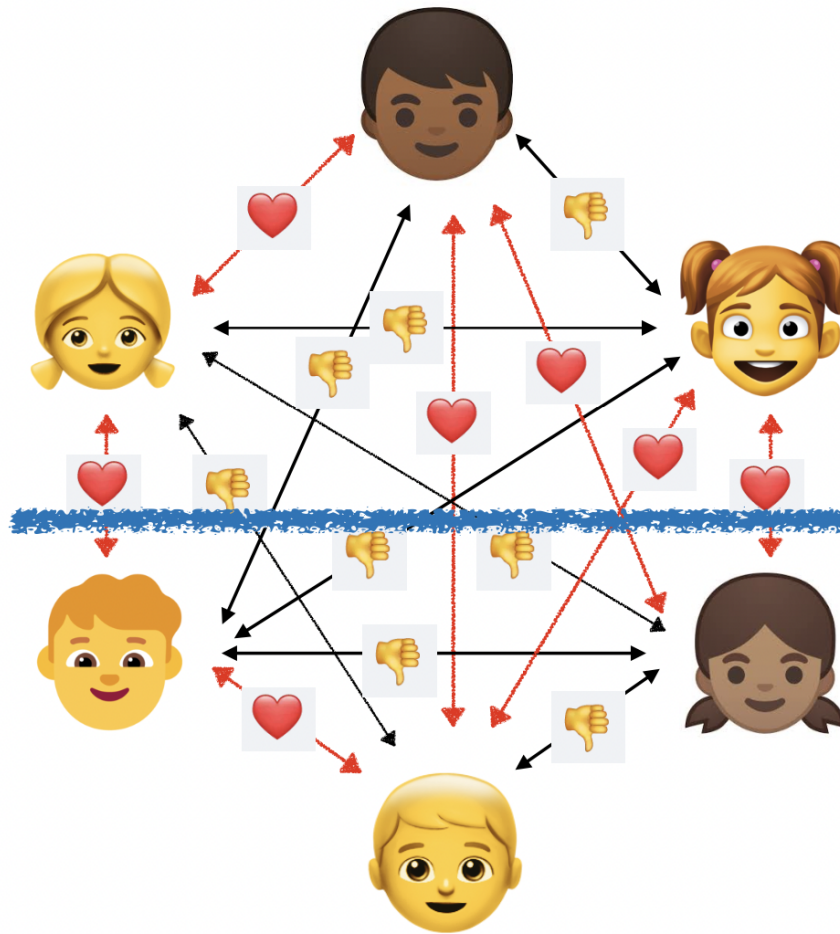
Un problème d'optimisation

Comment diviser le groupe de manière égale (pour faire deux fêtes) ?



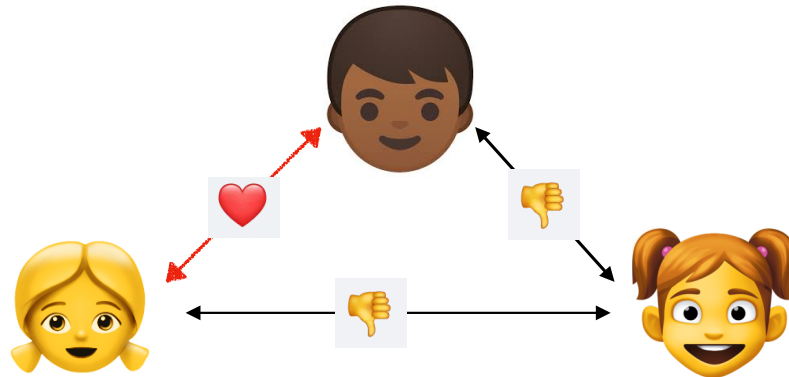
Un problème d'optimisation

Une possibilité, mais est-elle bonne ?

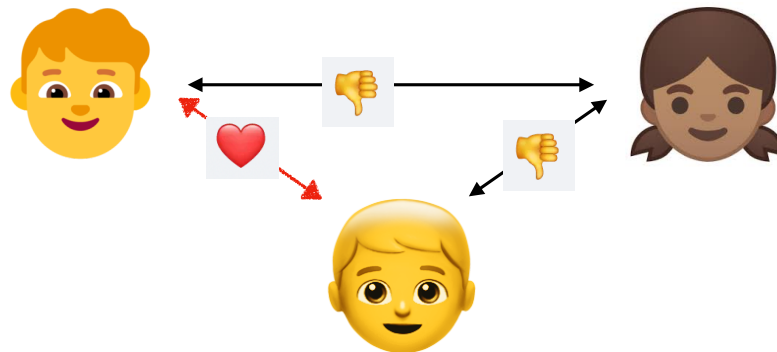


Un problème d'optimisation

Évaluer la fonction de coût : dans ce cas $C = +2$



$$C_A = +1$$

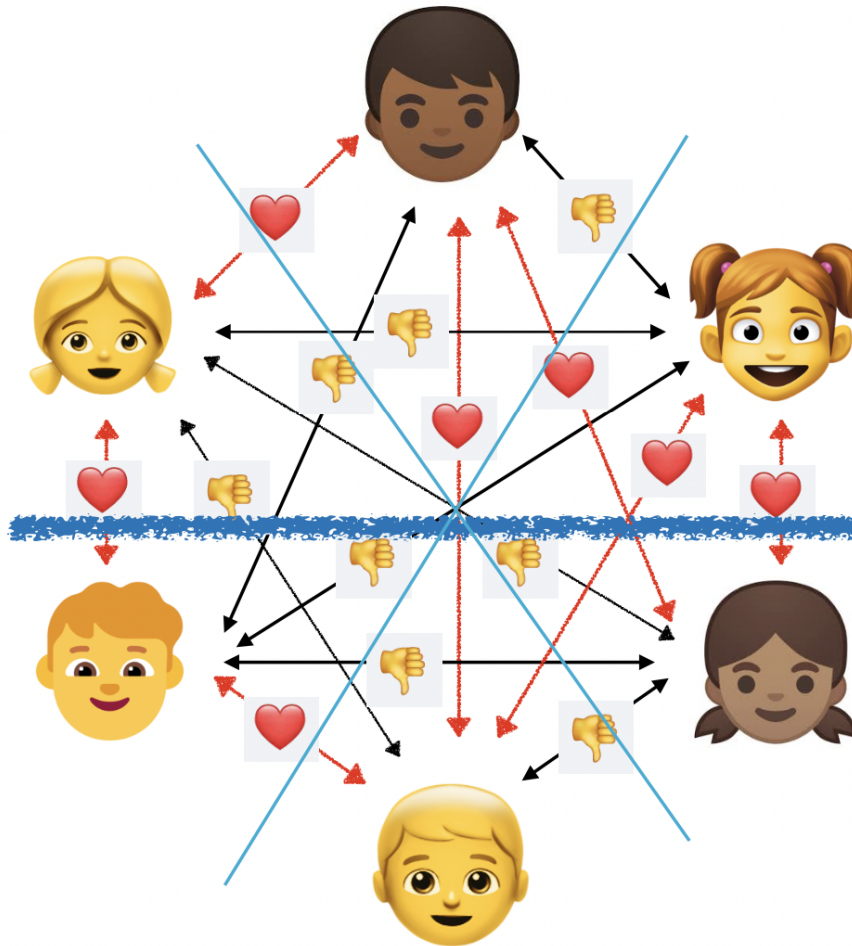


$$C_B = +1$$

Si deux qui s'aiment/détestent (❤️ (👎)) sont dans le même groupe, $-1(+1)$:

Un problème d'optimisation

Quelle est la partition optimale ? Un problème difficile



On peut tout essayer si le nombre de personnes est petit
mais ça devient pénible s'il est grand ! (exponentiel en N)

Représentation mathématique

Fonction de coût

Une seule équation (et retour rapide aux dessins)

Dans l'exemple du **partitionnement graphique** - **fractionnement de groupe**


$i = 1, \dots, N$ étiquete les personnes. Par ex. $i = 1$ est Marie, 2 est Jean, etc.

Fonction de coût

Une seule équation (et retour rapide aux dessins)

Dans l'exemple du **partitionnement graphique** - **fractionnement de groupe**

$i = 1, \dots, N$ étiquete les personnes. Par ex. $i = 1$ est Marie, 2 est Jean, etc.

$J_{ij} = +1$ ou -1 prédéterminé pour sentiments d'amour  ou haine 



Fonction de coût

Une seule équation (et retour rapide aux dessins)

Dans l'exemple du **partitionnement graphique** - **fractionnement de groupe**

$i = 1, \dots, N$ étiquete les personnes. Par ex. $i = 1$ est Marie, 2 est Jean, etc.

$J_{ij} = +1$ ou -1 prédéterminé pour sentiments d'amour  ou haine  

$s_i = +1$ en groupe A ou $s_i = -1$ en groupe B

Fonction de coût

Une seule équation (et retour rapide aux dessins)

Dans l'exemple du **partitionnement graphique** - **fractionnement de groupe**

$i = 1, \dots, N$ étiquete les personnes. Par ex. $i = 1$ est Marie, 2 est Jean, etc.

$J_{ij} = +1$ ou -1 prédéterminé pour sentiments d'amour  ou haine  

$s_i = +1$ en groupe A ou $s_i = -1$ en groupe B

trouver l'affectation $\{s_i = \pm 1\}$ telle que

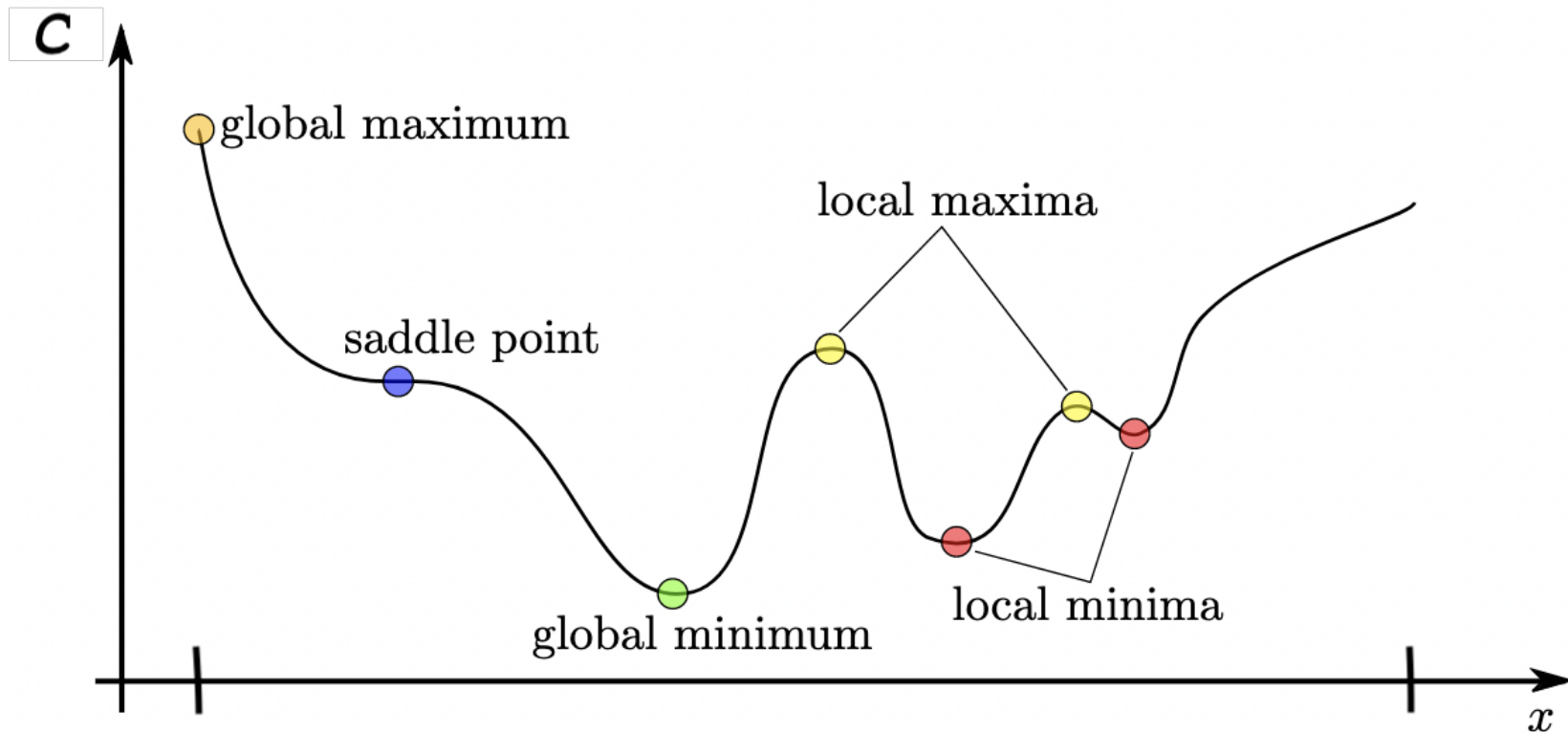
Fonction de coût		condition	
$C = - \sum_{i \neq j}$	J_{ij} amour/haine	avec	$\sum_i s_i = 0$ groupes de même taille
	$\left(\frac{1 + s_i s_j}{2} \right)$ sélectionne paires en même groupe		

est **minimisée**

Fonction de coût

Qu'est-ce qu'une fonction ?

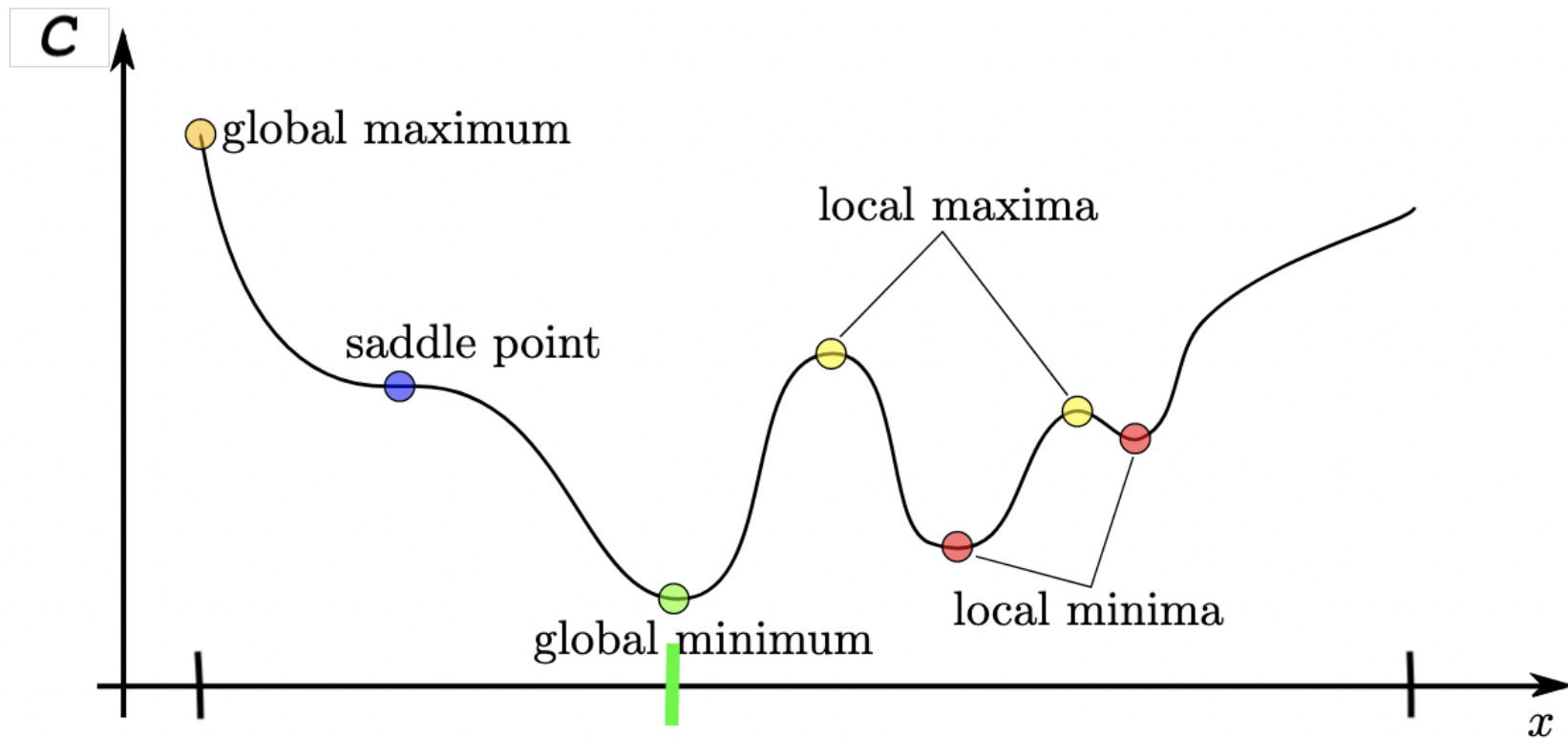
Pensez à des montagnes russes linéaires



Une fonction C d'une variable x

Fonction de coût

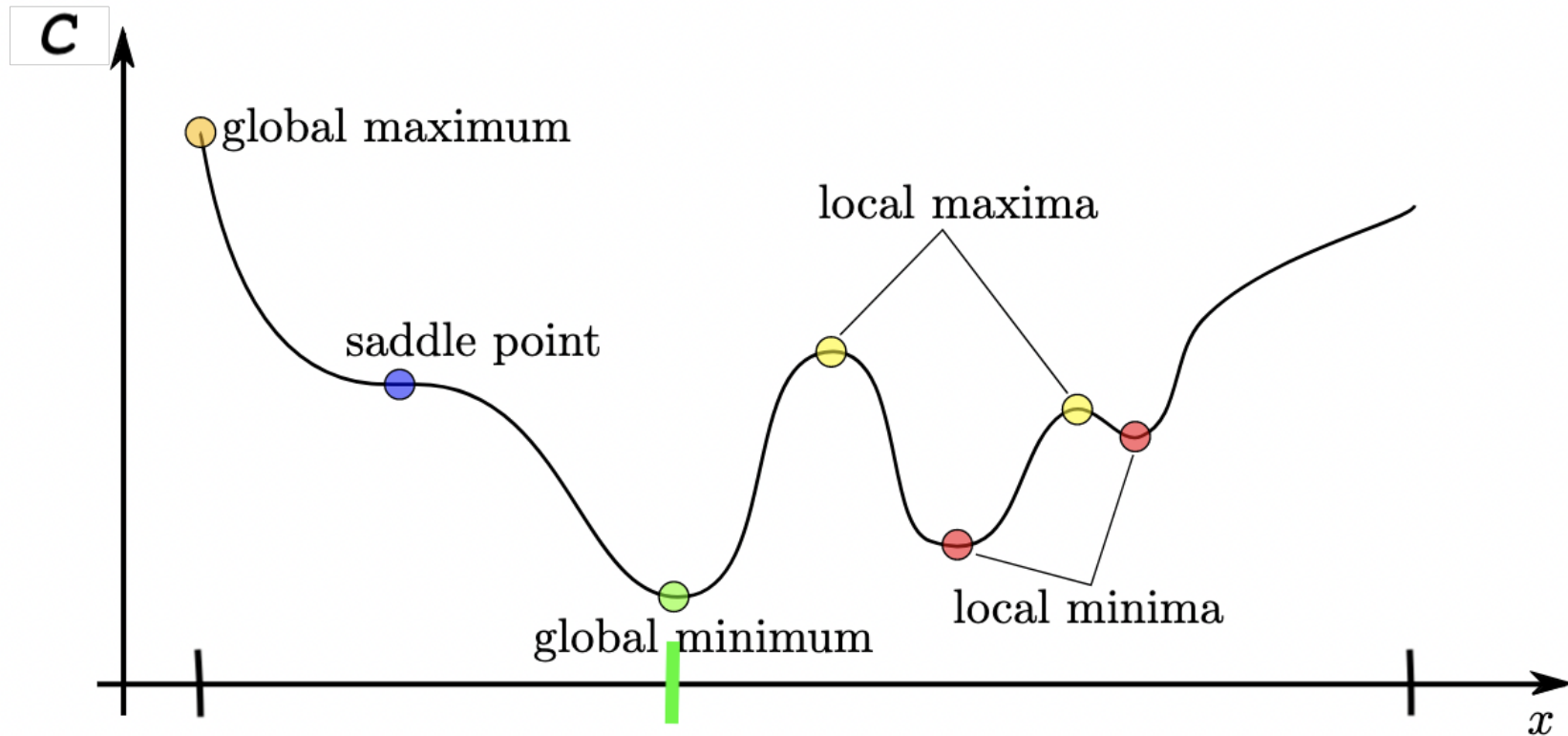
Quel est le but avec la fonction de coût ?



Trouver le minimum absolu x_{\min}

Fonction de coût

Quel est le but avec la fonction de coût ?



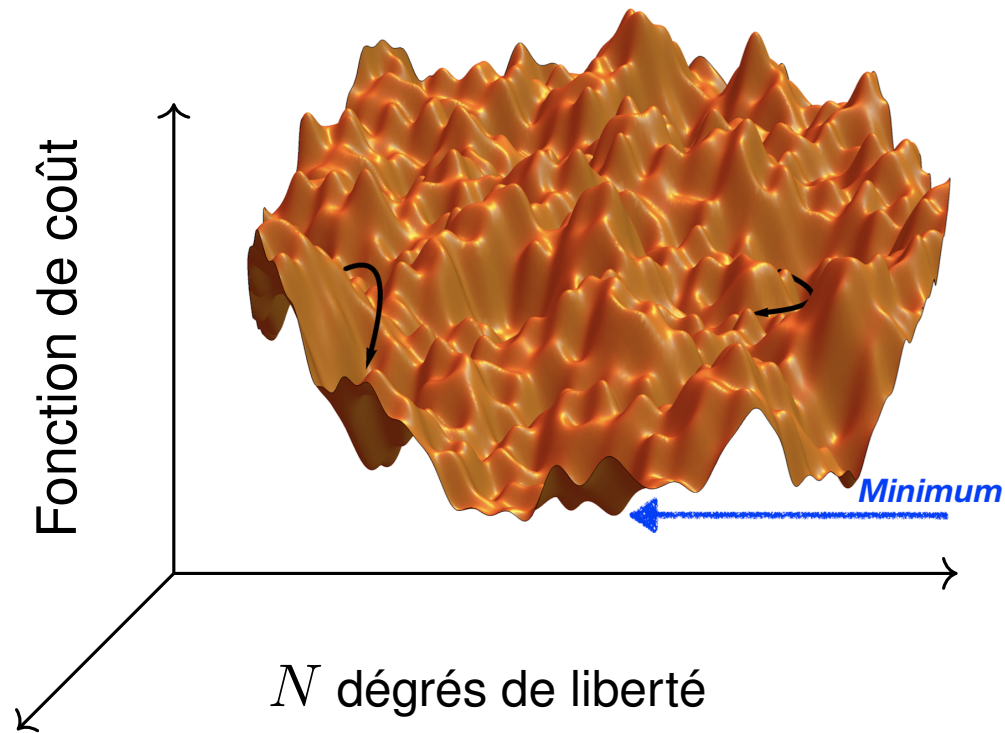
Comment se déplace-t-on sur ce **paysage** pour trouver x_{\min} ?

Pensez à un ballon dévaler les pentes sous l'effet du frottement :

- s'il part de l'extrême droit, il s'arrêtera dans le premier (ou deuxième) minimum local x_{\min}
- s'il part de l'extrême gauche, il passera le col et s'arrêtera dans le minimum absolu x_{\min}

Paysages accidentés

Dans des espaces de grandes dimensions



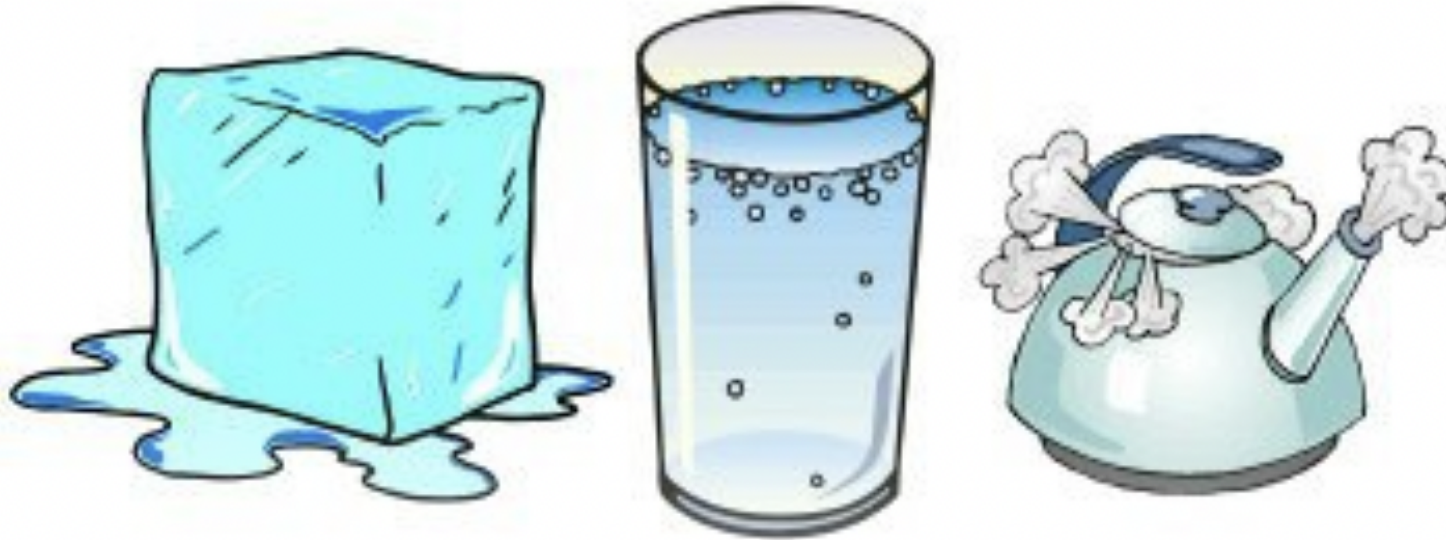
Comment atteindre le minimum absolu ?

Des algorithmes efficaces (rapides) ?

Maintenant, la physique

Etats de la matière

Les plus répandus - vision macroscopique



Solide
glace

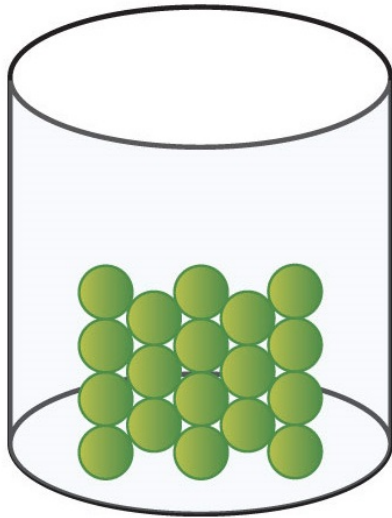
Liquide
eau

Gaz
vapeur

Drawing V. K. Singh (taken from the web)

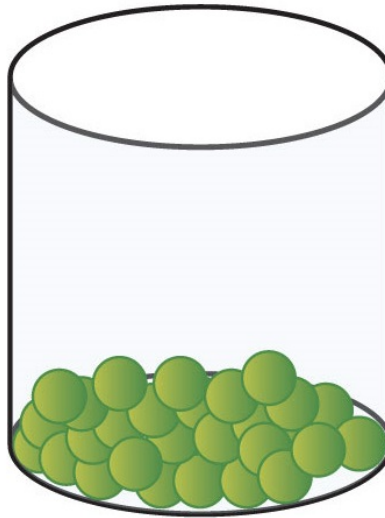
Etats de la matière

Les plus répandus - vision microscopique



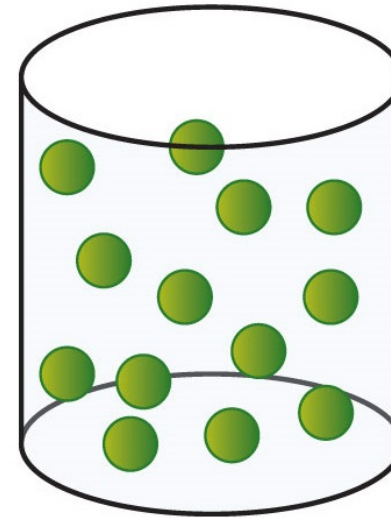
Solide

rigide
forme fixe
difficile à compresser
ne coule pas



Liquide

souple
sans forme fixe
difficile à compresser
coule



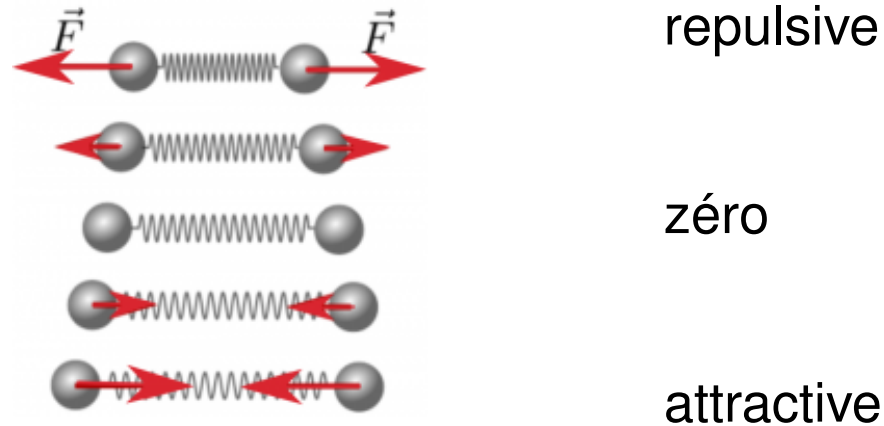
Gaz

souple
sans forme fixe
facile à compresser
coule

La matière

Modélisation des interactions entre particules

Typiquement, repulsive ou attractive selon leur séparation distance



Pensez à deux billes attachées par un ressort

Comment un ensemble de telles particules en interaction par paires s'arrange dans l'espace ? Nouvelles "phases vitreuses"

Verres

Ancients - modernes

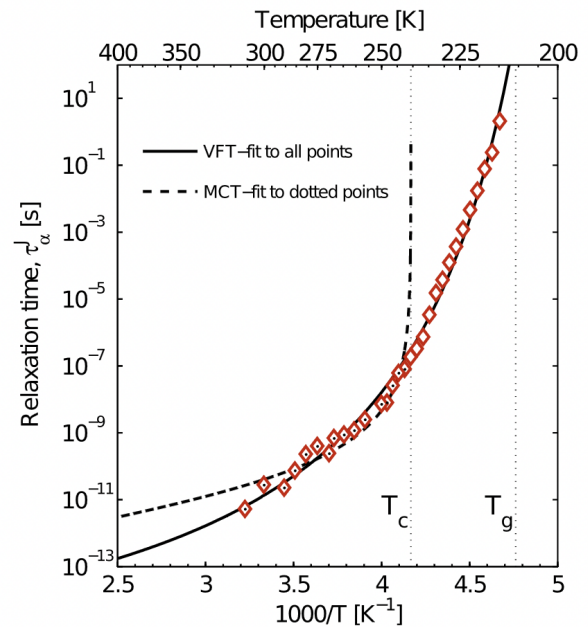


Verres

Propriétés physiques particulières

Temps de relaxation vs. inverse de la température

- Rigide mais désordonné au niveau microscopique (très différent d'un cristal)
- Dynamique macroscopique très lente
temps de relaxation croît plusieurs ordres de grandeur
sous petits changements des conditions externes
- Evolution hors l'équilibre
(un peu plus technique)



liquide surfondu verre

Expériences

Fonction de coût

Une autre équation - le modèle de la “vache sphérique”



Le **modèle standard** du comportement vitreux

Saut conceptuel!

$$C = - \sum_{i \neq j \neq k \neq l} \underbrace{J_{ijkl}}_{\text{couplages}} \underbrace{s_i s_j s_k s_l}_{\text{interactions}}$$

Il y a $i = 1, \dots, N$ variables $s_i = \pm 1$

et $N(N-1)(N-2)/3$ couplages prédéterminés

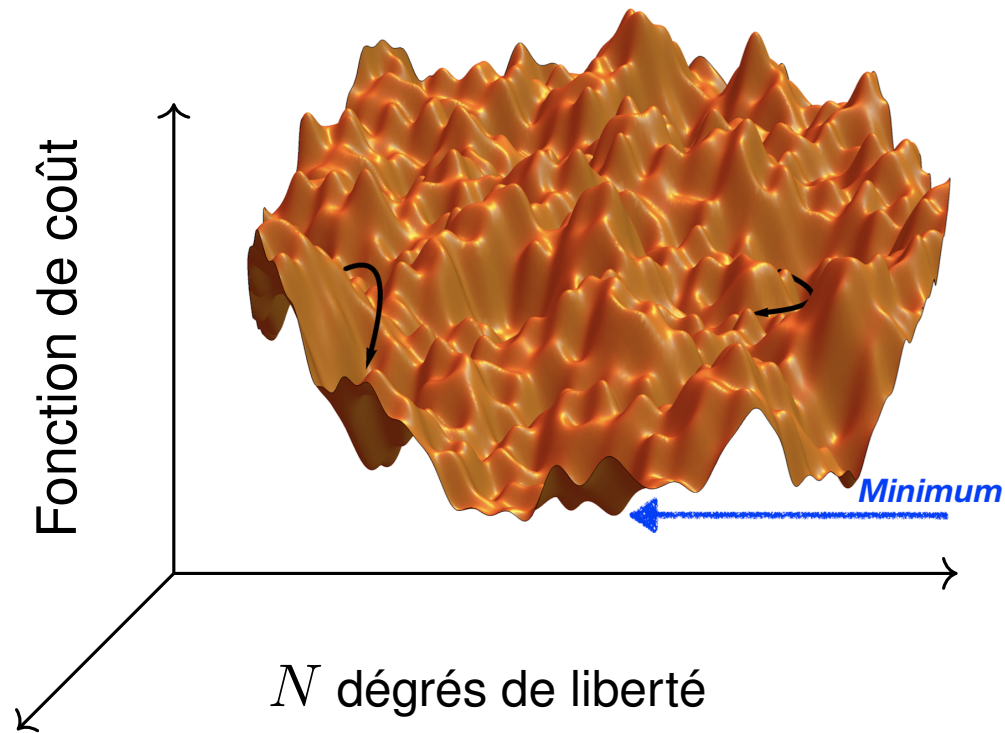
(aléatoires  :  $J_{ijkl} = +1$ ou  $J_{ijkl} = -1$)

Nous avons “tué” le cristal. Mais il y a d’autres modèles similaires où il existe et correspond à une attribution des $s_i = +1$ ou $s_i = -1$ qui minimise la fonction de **coût** C

Similarités : **temps de relaxation**, **paysage accidenté**, thermodynamique, etc.

Paysages accidentés

Dans des espaces de grandes dimensions



Comment atteindre le minimum absolu ? En physique, le cristal
D'autres régions du paysage correspondent au verre : intéressantes !

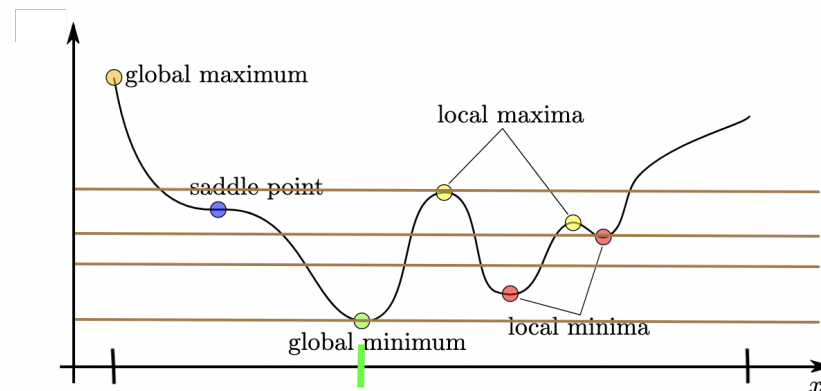
Paysages accidentés

Dans des espaces de grandes dimensions

Difficile de réfléchir dans des espaces à grand nombre de dimensions :
manque d'intuition

Dans les problèmes d'optimisation ou les verres

un nombre exponentiel de
minima/maxima/points col $e^{N\Sigma}$
à \neq altitudes dans le paysage



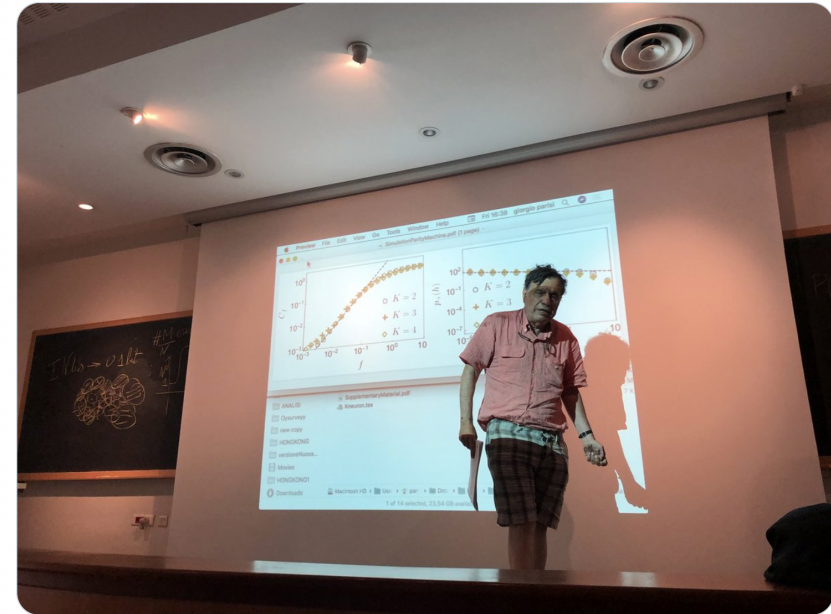
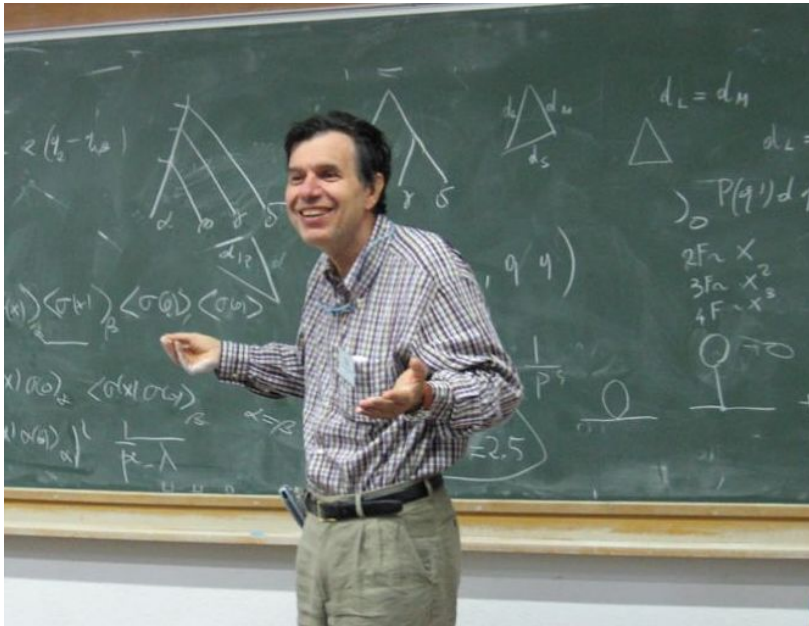
Σ s'appelle l'**entropie configurationnelle** ou **complexité**

De nombreux travaux sur l'analyse des paysages, d'abord en physique théorique, plus récemment en mathématique

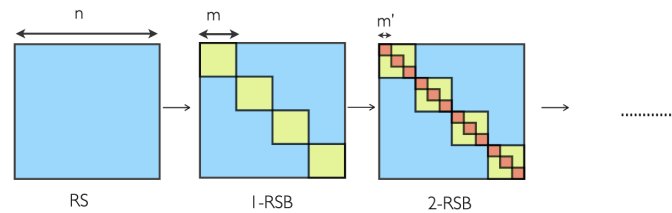
Giorgio Parisi

Nobel 2021

The last talk at [#cargese2018](#) was given by the great Giorgio Parisi!



Replica Symmetry Breaking (fin des années 70)



Lécole

Carte de co-auteurs ~ 300



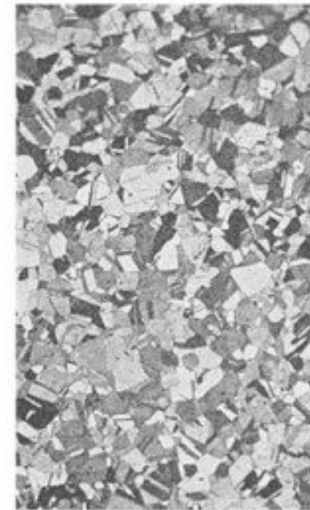
**Stratégies familiales pour
skier (et remonter)
le paysage accidenté**

Recuit

Des épées médiévales aux cellules solaires



Cold-rolled



550 °C anneal for 1 hour



650 °C anneal for 1 hour

ARMS ⊕ ARMOR

acier (alliage de fer et carbone)
le recuit fait déplacer le carbone

Solar cells

La cristallisation contrôlable joue un rôle crucial dans la formation de pérovskites de haute qualité

Modification des conditions ambiantes avec un protocole utile

Recuit

Aussi des expériences de la vie quotidienne



secouer la matière granulaire pour la compacter
et la laisser tenir dans un bocal

Modification des conditions ambiantes avec un protocole utile

Recuit

Réel et simulé

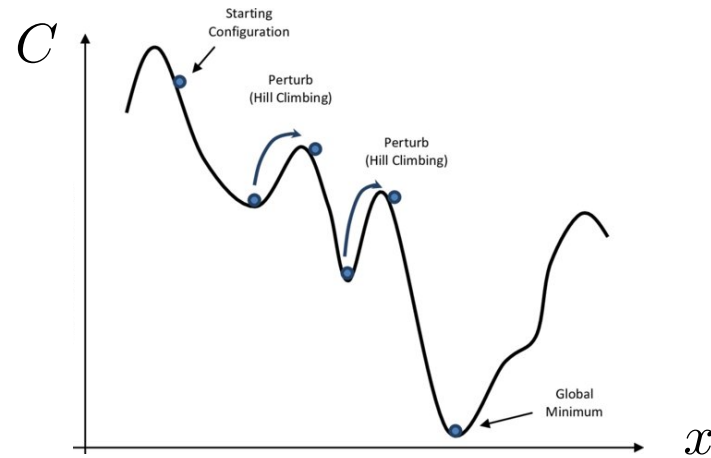


Figure from O. Ghasemalizadeh et al. 16

Mais, il n'arrive pas à résoudre les problèmes le plus difficiles

Reliée à l'un des Clay Mathematics Institute Millennium Prize Problems : P égal ou différent à NP ?

Trous noirs

Trous noirs

Que sont-ils ?

- Une (minuscule) région de l'espace-temps où la **gravité** est si forte que rien, pas même la lumière, ne peut y échapper
- La théorie de la **relativité générale** prédit qu'une masse suffisamment compacte peut déformer l'espace-temps pour former un trou noir
- Ils peuvent se former par l'effondrement d'une grande étoile
- Ils peuvent être **détectés indirectement**, en remarquant comment les étoiles proches d'un trou noir agissent différemment des étoiles éloignées

Trous noirs

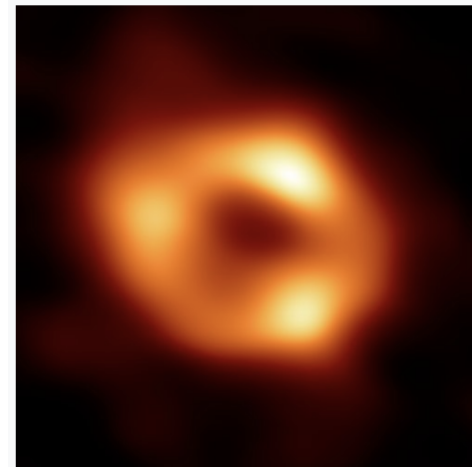
Ils sont nombreux à proximité

Sagittarius A* est un trou noir supermassif au centre galactique de la voie Lactée

À 27000 années-lumière de la Terre

masse un million de fois celle du Soleil

emballé dans 4000 fois le diamètre de la Terre



R. Genzel (Munich) et Andrea Ghez (Los Angeles)

Event Horizon Telescope, un réseau mondial d'observatoires radio

Quelques valeurs : $d_{\text{soleil}} = 109 d_{\text{terre}}$, $m_{\text{soleil}} \sim 333000 m_{\text{terre}}$, le soleil est à 1.58×10^{-5} années-lumière de la terre, Proxima Centauri b est l'exo planète le plus proche à 4.2 années-lumière

Fonction de coût

Troisième équation - un autre modèle de vache sphérique



Un simple **modèle quantique** d'un trou noir

$$C = - \sum_{i \neq j \neq k \neq l} \underbrace{J_{ijkl}}_{\text{couplages}} \underbrace{\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l}_{\text{interactions}}$$

Il y a $i = 1, \dots, N$ variables (Majorana) fermioniques ψ_i

$$\psi_i \psi_j = -\psi_j \psi_i \text{ et } \psi_i^2 = 1$$

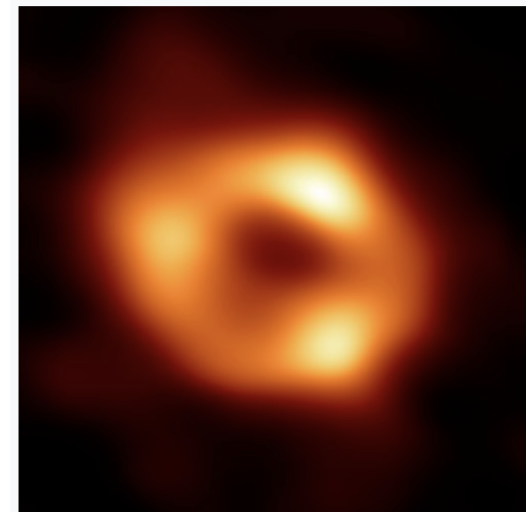
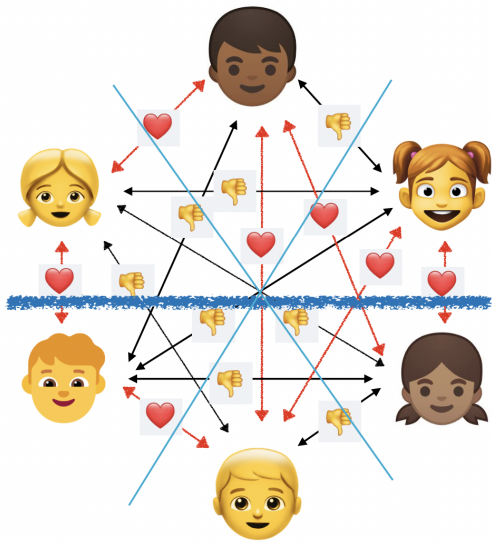
Des interactions aléatoires, par ex. $J_{ijkl} = +1$ ou $J_{ijkl} = -1$

Le **paysage accidenté** a les propriétés attendus pour un trou noir

et l'évolution temporelle également

Conclusions

Trois problèmes *a priori* très différents



Quelques mots clés :

desordre - interactions aléatoires \Rightarrow

fonctions de coût génèrent des paysages accidentés