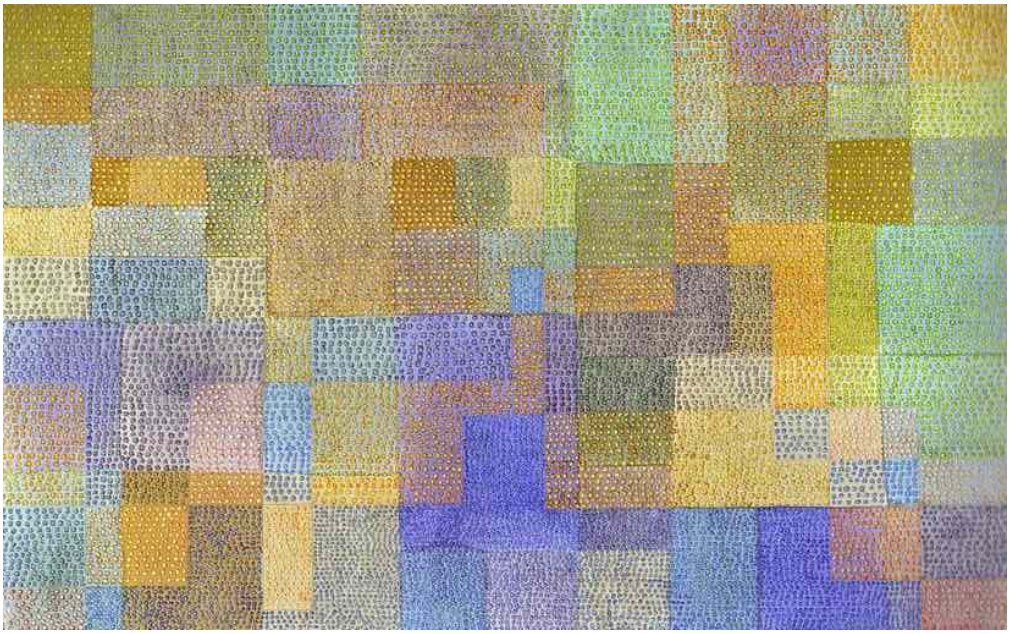
SORBONNE UNIVERSITÉ

Licence de physique intensive Sprint

Méthodes mathématiques I

Analyse vectorielle

Dan Israël (israel@lpthe.jussieu.fr)



Paul Klee, *Polyphonie* (1932), Kunstmuseum, Bâle.

Ces notes de cours sont fondées sur le cours de « Méthodes mathématiques I » dispensé par l'auteur à Sorbonne Université dans le cadre de la licence de physique intensive Sprint lors de l'année universitaire 2020–2021.

Cet enseignement couvre plusieurs aspects d'analyse vectorielle, plus particulièrement en vue de ses applications à l'électromagnétisme. Notre approche de l'analyse vectorielle, fondée sur les formes différentielles, est plus formelle que celle employée habituellement ; elle présente néanmoins plusieurs avantages, comme de permettre un traitement unifié de nombreux théorèmes et d'obtenir de maniere aisée les expressions associées aux différents systèmes de coordonnées curvilignes.

Deux limites de ce cours sont à noter. Premièrement, les applications envisagées de ce cours concernant la géométrie euclidienne, et pour éviter d'introduire formellement la notion de variété différentielle, le domaine d'applicabilité d'un certain nombre de propriétés et de résultats ne sera pas donné précisément. Deuxièmement, étant donné que la théorie de l'intégration de Lebesgue n'est pas au programme (et qu'il ne s'agit pas d'ailleurs d'un cours d'analyse) le niveau de rigueur du chapitre traitant des intégrales multiples sera inférieur à celui du reste de ce cours.

Note : les section marquées d'un étoile $\star$ sont d'un niveau mathématique plus élevé et leur étude approfondie n'est pas exigée ; cependant il faut avoir connaissance des notions qui y sont développées.

Dernière mise à jour

Le 14 novembre 2023

Table des matières

1 Introduction et motivations physiques **5**

2 Applications et espaces vectoriels **9**
2.1 Applications 9
2.2 Espaces vectoriels 10
2.3 Applications linéaires 13
2.4 Formes linéaires 14
2.5 Produit scalaire 15
2.6 Espace euclidien 18

3 Applications à plusieurs variables **20**
3.1 Voisinage, continuité, limite 20
3.2 Différentielle 22
3.3 Dérivées partielles, dérivées selon une courbe 25
3.4 Espace tangent $\star$ 34
3.5 Quelques résultats utiles 38

4 Coordonnées curvilignes **41**
4.1 Coordonnées curvilignes usuelles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ 41
4.2 Coordonnées curvilignes : approche générale 46
4.3 Bases locales 53

5 Gradient et intégrales curvilignes **65**
5.1 Courbes 65
5.2 Gradient 70
5.3 Intégrale curviligne 77

6 Formes différentielles et dérivées extérieures **86**
6.1 Produit vectoriel et déterminant 86
6.2 p-formes différentielles 90
6.3 Dérivée extérieure 103
6.4 Rotationnel 106
6.5 Divergence et laplacien 113

7 Intégration et théorème de Stokes **122**
7.1 Intégrales multiples 122
7.2 Intégrales de volume 139
7.3 Intégration sur des surfaces 151
7.4 Théorème de Stokes 162

Cours n°1

Introduction et motivations physiques

L'objectif principal de ce cours est de développer les outils d'*analyse vectorielle* qui vous seront nécessaires en premier lieu pour l'étude de la théorie de l'électromagnétisme. Nous emploierons des méthodes « modernes » qui ont une portée mathématique plus importante et peuvent être directement généralisées pour aborder des sujets plus avancés comme la relativité générale.

L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques à l'intersection de l'analyse et de la géométrie, dont l'objet est l'étude des *champs scalaires* et des *champs de vecteurs* – ou plus généralement des *champs de tenseurs* – dans l'espace euclidien à trois dimensions, de leur différentiation et de leur intégration. [1] De tels objets et concepts apparaissent naturellement dans la description de systèmes continus, comme en mécanique des fluides ou en électromagnétisme. Mathématiquement, l'analyse vectorielle est englobée dans un domaine bien plus vaste, la *géométrie différentielle*, donc quelques notions élémentaires apparaîtront dans ce cours.

Champs scalaires

Dans un certain nombre de systèmes physiques, les grandeurs physiques décrivant les propriétés du système sont des grandeurs scalaires, c.-à.-d. données par un seul nombre réel dépendant, *à un instant t donné*, de la position où elle cette grandeur est mesurée ; on parle alors de *champ scalaire*. On peut citer ainsi :

— le champ de température $T(\vec{x})$;

— la densité de masse $\rho_m(\vec{x})$;

— le champ de pression $P(\vec{x})$;

— la densité de charge électrique $\rho_q(\vec{x})$.

1. Dans le cadre de la géométrie différentielle, de tels concepts sont étendus aux géométries non-euclidiennes, pertinentes en particulier pour la relativité générale.

Dans tous ces exemples, il faut comprendre la quantité considérée comme résultant de la moyenne, dans un volume infinitésimal centré en $\vec{x}$, du comportement d'un ensemble de particules (donc d'un système discret).

Les champs scalaires ne sont pas nécessairement directement associés en eux-mêmes à des grandeurs physiques mesurables. Dans les cas suivants :

— le potentiel gravitationnel $\Phi(\vec{x})$,

— le potentiel scalaire électromagnétique $V(\vec{x})$,

la grandeur physique pertinente (respectivement le champ de gravitation et le champ électrique) *dérive* de ce potentiel scalaire, mais le potentiel associé à une certaine valeur de cette grandeur n'est pas unique et n'a pas en lui-même de réalité physique.

Une caractérisation mathématiquement plus pertinente d'une grandeur scalaire, comme nous le verrons plus loin, est d'examiner la manière dont cette grandeur se comporte lorsqu'on effectue une rotation de l'espace euclidien autour du point de coordonnées $\vec{x}$ où cette grandeur est mesurée ; une grandeur scalaire est par définition *invariante* sous une telle rotation.

Champs vectoriels

D'autres grandeurs physiques sont données, en un point de l'espace $\vec{x}$ et à un certain instant, par les trois composantes d'un vecteur de l'espace. On peut citer :

— le champ de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$ dans un fluide,

— le champ électrique $\vec{E}(\vec{x}, t)$,

— le champ magnétique $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

La description de l'électromagnétisme fait aussi appel à un *potentiel vecteur* $\vec{A}(\vec{x})$ qui, comme le potentiel scalaire, n'est pas directement mesurable.

Comme pour les champs scalaires, un champ vectoriel $\vec{V}(\vec{x})$ est caractérisé par ses lois de transformation, en particulier sous les rotations de l'espace. Il ne s'agit donc pas de la donnée de trois fonctions de l'espace $V_x(\vec{x})$, $V_y(\vec{x})$ et $V_z(\vec{x})$ quelconques, car ces trois composantes se mélangent entre elles lors d'une rotation de l'espace autour du point de coordonnées $\vec{x}$ de manière bien déterminée. Concrètement on peut concevoir un vecteur $\vec{V}$ de l'espace euclidien à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ comme un objet à trois composantes qui se transforme par une rotation selon :

$$\vec{V} \mapsto \vec{V}' = R\,\vec{V}, \tag{1.1}$$

où R est une matrice de rotation (c.-à.-d. une matrice 3×3 orthogonale de déterminant unité). Par exemple, si (v_x, v_y, v_z) sont les composantes du vecteur vitesse, $(v_x, v_x^2, v_z - v_y v_x)$ ne sont pas les composantes d'un vecteur !

Opérateurs différentiels

Qu'il s'agisse de champs scalaires ou de champs vectoriels, il sera naturel d'imposer, au moins lorsque le milieu dans lequel sont définies ces quantités ne change pas, une certaine

régularité – au sens de l'analyse – aux fonctions associées. On peut alors vouloir définir pour ces objets une notion de dérivation, généralisant la notion de dérivation d'une fonction d'une variable.

Rappelons que la dérivée d'une fonction d'une variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point x est définie par la limite suivante, si elle existe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon \neq 0}} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \tag{1.2}$$

et donne le taux d'accroissement de la fonction f au voisinage de x.

Si on munit l'espace euclidien à trois dimensions d'une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on peut de manière analogue définir la notion de *dérivée partielle* donnant le taux d'accroissement d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ au voisinage du point de coordonnées $\vec{x}$ lorsqu'on se déplace dans une des directions spécifiées par les trois vecteurs de base $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ou $\vec{e}_z$. La dérivée partielle selon x est ainsi définie par la limite suivante, si elle existe :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon \neq 0}} \frac{f(x+\epsilon,y,z) - f(x,y,z)}{\epsilon}, \tag{1.3}$$

avec une définition analogue pour les dérivées partielles par rapport à y et z.

Cette définition appelle trois remarques. Premièrement, cette notion est plus « faible » que celle de dérivation pour des fonctions d'une variable réelle, dans le sens où l'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.

Deuxièmement, il est souhaitable d'obtenir des méthodes de dérivation indépendantes du systèmes de coordonnées choisi ; il est en effet souvent commode, lorsque les symétries du problème l'exigent, de considérer un système de coordonnées curvilignes. Par exemple, pour décrire le champ de gravitation autour de la Terre, il est évident que les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées et que la distance au centre de la Terre est une direction privilégiée.

Troisièmement, il est nécessaire de considérer des combinaisons de dérivées partielles qui se transforment « correctement » sous des rotations de l'espace, c.-à.-d. comme des scalaires ou des vecteurs. Par exemple, le *gradient* d'un champ scalaire f se transforme comme un vecteur. En coordonnées cartésiennes nous avons :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} f\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z, \tag{1.4}$$

qui définit un champ vectoriel. Un exemple physique classique est une force conservative qui dérive d'un potentiel Φ, $\vec{F} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\Phi$. La nature vectorielle du vecteur $\vec{F}$ est assurée par les propriétés du gradient que nous examinerons en détail.

De manière plus abstraite, le gradient associe à une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction vectorielle $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, et peut être vu comme une application d'un espace de fonctions vers un autre :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} : f \mapsto \overrightarrow{\operatorname{grad}} f. \tag{1.5}$$

En utilisant ce point de vue nous considérerons le gradient comme un *opérateur différentiel* agissant sur un espace de fonctions. L'étude des opérateurs différentiels (gradient, rotationnel, divergence, laplacien), de leurs propriétés et de leurs expressions dans différents systèmes de coordonnées constitue le cœur de cet enseignement.

Nous utiliserons pour cela un formalisme très puissant et commode, celui des *formes différentielles*, qui permettra de traiter de tous ces objets de manière unifiée et systématique.

Intégration

L'étude des champs scalaires et des champs de vecteurs nous amène également à considérer la question de l'intégration de tels objets. La généralisation de l'intégrale unidimensionnelle d'une fonction (continue) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sur un intervalle $[a, b]$,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \ , \quad F'(x) = f(x) \tag{1.6}$$

pose un certain nombres de questions. Premièrement, une fonction d'une variable $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ou un champ vectoriel peuvent être intégrés sur :

— une courbe, fermée ou non ;

— une surface, compacte ou non ;

— un domaine de $\mathbb{R}^3$, compact ou non.

Deuxièmement, la généralisation de la propriété (1.6) des intégrales sur l'axe réel au différents types d'intégrales mentionnés conduit à des théorèmes fondamentaux d'analyse vectorielle :

— théorème d'Ostrogradsky, appelé également théorème de Green-Ostrograsky et théorème de Gauß par les physiciens ;

— théorème de Stokes, appelé également théorème de Kelvin-Stokes ;

— théorème de Green ;

— théorème du gradient.

Dans le formalisme des formes différentielles que nous utiliserons, ces différentes propriétés sont les conséquences d'un théorème unique, appelé génériquement *théorème de Stokes*.

Ces théorèmes d'analyse vectorielle jouent un rôle fondamental en physique, que ce soit pour le calcul du travail d'une force conservative pour le calcul du flux d'un champ magnétique à travers une surface.

Cours n°2

Applications et espaces vectoriels

L'objectif de ce chapitre est de poser les fondements mathématiques nécessaires à l'exposé de l'analyse vectorielle. Ces concepts seront également indispensables pour le cours de méthodes mathématiques du second semestre.

2.1 Applications

Définition 1 (application). *Soient* E *et* F *deux ensembles. Une application* f *de* E *vers* F *associe à tout élement* $\mathsf{x} \in \mathsf{E}$ *un unique élement* $\mathsf{y} \in \mathsf{F}$ *:*

$$\mathsf{f} : \begin{cases} \mathsf{E} & \to & \mathsf{F} \\ \mathsf{x} & \mapsto & \mathsf{y} = \mathsf{f}(\mathsf{x}) \end{cases} \tag{2.1}$$

La donnée d'une application est donc constituée de trois éléments : l'ensemble de départ E, l'ensemble d'arrivée F et une règle associant à chaque élément de E un élément de F.

Pour un élément $\mathsf{y} \in \mathsf{F}$ donné, il peut exister aucun, un seul ou plusieurs éléments $\mathsf{x} \in \mathsf{E}$ tels que $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{y}$. De manière générale :

Définition 2 (antécédent). *L'ensemble*

$$\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{y}) \overset{\text{déf.}}{=} \{\mathsf{x} \in \mathsf{E} \,|\, \mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{y}\} \subset \mathsf{E} \tag{2.2}$$

est un sous-ensemble de E*, éventuellement vide, appelé ensemble des antécédents de* y*.*

Plus globalement, l'ensemble des $\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{y})$ pour tous les $\mathsf{y} \in \mathsf{B}$, où B est une partie de F, est appelé *image réciproque* de B par f et notée $\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{B})$.

L'ensemble des éléments $\mathsf{y} \in \mathsf{F}$ atteints par l'application f ne couvre pas nécessairement l'ensemble F. On définit ainsi :

Définition 3 (image). *L'ensemble*

$$\operatorname{Im} \mathsf{f} \overset{\text{déf.}}{=} \{\mathsf{y} \in \mathsf{F} \,|\, \exists \mathsf{x} \in \mathsf{E} \,|\, \mathsf{y} = \mathsf{f}(\mathsf{x})\} \subset \mathsf{F} \tag{2.3}$$

est un sous-ensemble de F *appelé image de l'ensemble* E *par l'application* f*, qui se note également* $\mathsf{f}(\mathsf{E})$*.*

Exemple 1 (exponentielle). Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \exp x \end{cases} \tag{2.4}$$

Pour tout $y > 0$, $f^{-1}(y) = \{\ln y\}$ et pour tout $y \leqslant 0$, $f^{-1}(y) = \emptyset$. Nous avons également $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} \exp = \mathbb{R}_+^*$.

*
* *

Certaines applications jouissent de propriétés particulières et sont caractérisées par une appellation correspondante.

Définition 4 (injection, surjection, bijection). *Soit* $f : E \to F$ *une application :*

- *si* $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ *alors* f *est une injection ;*
- *si* $\forall y \in F,\ f^{-1}(y) \neq \emptyset$ *alors* f *est une surjection ;*
- *si* f *est à la fois une injection et une surjection,* f *est appelée bijection.*

Une bijection associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $y \in F$, comme toute application, mais également à tout élément $y \in F$ un unique antécédent $x \in E$, via l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$.

Définition 5 (injection canonique). *Soit* E *un ensemble et* $A \subseteq E$ *une partie de* E*. On définit l'injection canonique de* A *dans* E*, notée* ι_A*, comme :*

$$\iota_A : \begin{cases} A & \hookrightarrow & E \\ x & \mapsto & \iota_A(x) = x \end{cases} \tag{2.5}$$

Un cas particulier d'injection canonique est l'**application identité**

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{cases} \tag{2.6}$$

(exercice : vérifier que ι *est une injection et* id *une bijection.)*

2.2 Espaces vectoriels

La notion familière de vecteurs du plan et de l'espace se généralise en un notion plus générale d'espace vectoriel. Par simplicité nous ne considérerons que les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, c.-à.-d. définis sur le corps des réels.

Définition 6 ($\mathbb{R}$-espace vectoriel). *Un ensemble* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, dont les éléments sont appelés vecteurs, s'il est muni des opérations suivantes :*

— *addition de deux vecteurs* $\begin{cases} E \times E & \to & E \\ (x, x') & \mapsto & x + x' \end{cases}$

— *multiplication par un nombre réel (loi de composition externe)* $\begin{cases} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{cases}$

où ces opérations satisfont aux axiomes suivants :

— $\forall x, x' \in E$, $x + x' = x' + x$ *(commutativité) ;*

— $\forall x, x', x'' \in E$, $(x + x') + x'' = x + (x' + x'')$ *(associativité) ;*

— *il existe un vecteur nul* 0_E *tel que* $\forall x \in E$, $x + 0_E = x$ *;*

— *pour tout* $x \in E$ *il existe un vecteur opposé* $(-x) \in E$ *tel que* $x + (-x) = 0_E$ *;*

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, x' \in E$, $\lambda(x + x') = \lambda x + \lambda x'$ *;*

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ *;*

— $\forall x \in E$, $1x = x$.

Définition 7 (dépendance linéaire). *Soit une famille de* n *vecteurs* $x_1, x_2, \dots x_n \in E$*. Considérons l'équation*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0\,. \tag{2.7}$$

où $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *sont les inconnues.*

S'il existe une solution non-triviale de cette équation, c.-à.-d. tels que les λ_i *ne sont pas tous nuls, alors les vecteurs* $x_1, x_2, \dots x_n$ *sont dits linéairement dépendants et la famille de vecteurs appelée famille liée.*

Dans le cas contraire (c.-à.-d. si la seule solution est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$*) ces vecteurs sont dits linéairement indépendants, et la famille de vecteurs appelée famille libre.*

En effet, si la famille est liée il existe au moins un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $\lambda_k \neq 0$ tout en satisfaisant la relation (2.7). On peut alors exprimer le vecteur x_k en termes des autres vecteurs :

$$x_k = -\frac{1}{\lambda_k}\left(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n\right). \tag{2.8}$$

Définition 8 (sous-espace engendré). *Considérons une famille de vecteurs* $x_1, x_2, \dots x_n \in E$*, linéairement indépendants ou non. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs, noté* $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$*,*

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \subseteq E\,, \tag{2.9}$$

est un sous-espace vectoriel de E*, le sous-espace engendré par cette famille de vecteurs.*

Premièrement, $\forall \lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nous avons $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in E$ donc $\mathrm{Vect}(x_k) \subset E$. Deuxièmement, ce sous-ensemble de E est en lui-même un espace vectoriel, exemple de *sous-espace vectoriel* de E. En effet,

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n) = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + \cdots (\lambda_n + \mu_n)x_n \in \mathrm{Vect}(x_k)\,,$$

ainsi que

$$\mu(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n) = (\mu\lambda_1)x_1 + (\mu\lambda_n)x_n \in \mathrm{Vect}(x_k)\,.$$

Définition 9 (famille génératrice). *Soit* E *un espace vectoriel et* $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathsf{E}$ *une famille de vecteurs. Cette famille est dite génératrice de* E *si*

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{E} \tag{2.10}$$

Il existe naturellement une infinité de familles génératrices pour un espace vectoriel donné ; en outre une famille génératrice peut être libre ou liée. Cependant la description d'un espace vectoriel en termes d'une famille génératrice liée n'est pas « optimale », car certains vecteurs peuvent s'exprimer en termes des autres, voir l'éqn. (2.8).

Définition 10 (base d'un espace vectoriel). *Soit* E *un espace vectoriel. Une base de* E *est une famille* $\{e_1, \dots, e_n \in \mathsf{E}\}$ *libre et génératrice. L'entier* n *positif, indépendant de la base choisie, est la dimension* $\dim \mathsf{E}$ *de l'espace vectoriel* E*.* [1]

La propriété cruciale d'une base d'un espace vectoriel est qu'il est possible de décomposer de manière *unique* tout vecteur $u \in \mathsf{E}$ sur cette base. Premièrement, étant donné qu'une base est une famille génératrice de E,

$$\forall u \in \mathsf{E}\,,\ \exists u^1 \dots, u^n \in \mathbb{R}\ \ \text{t.q.}\ \ u = u^1 e_1 + \cdots + u^n e_n\,. \tag{2.11}$$

Deuxièmement, supposons l'existence de deux décompositions différentes d'un vecteur $u \in \mathsf{E}$ sur une certaine base de E. Nous avons alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & u^1 e_1 + \cdots + u^n e_n \\ u & = & v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n \end{array} \right. \implies 0 = (u^1 - v^1) e_1 + \cdots + (u^n - v^n) e_n\,. \tag{2.12}$$

La famille $e_1, \dots, e_n$ étant libre par définition, nous avons alors, pour tout k, $u^k = v^k$, prouvant l'unicité de la décomposition d'un vecteur *sur une base donnée*.

Ainsi, dans un espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base, la donnée d'un vecteur $u \in \mathsf{E}$ est équivalente à la donnée d'un n-uplet de réels, appelés *coordonnées* du vecteur :

$$u = u^1 e_1 + \cdots + u^n e_n \in \mathsf{E} \quad \Leftrightarrow \quad u \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.13}$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ possède lui-même la structure d'un espace vectoriel

$$\lambda \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u^1 + \mu v^1 \\ \vdots \\ \lambda u^n + \mu v^n \end{pmatrix}\,, \tag{2.14}$$

et il existe ainsi, une fois une base de E choisie, une correspondance univoque entre les vecteurs de E et les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. On supposera toujours dans ce cours que cette dimension est finie.

2.3 Applications linéaires

Il est intéressant de considérer des applications entre espaces vectoriels qui, d'une certaine manière, transmettent les « bonnes » propriétés attachées à ceux-ci.

Définition 11 (application linéaire). *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels et* $f : E \to F$ *une application. On dit que* f *est une application linéaire si :*

— $\forall u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$;

— $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

ou, d'une manière plus condensée, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Propriété 1 (image, noyau). *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels et* $f : E \to F$ *une application linéaire. Les deux sous-ensembles suivants :*

— *le noyau de* f, $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\} \subset E$

— *l'image de* f, $\operatorname{Im} f = \{y \in F \,|\, \exists x \in E \,|\, f(x) = y\} \subset F$.

sont respectivement un sous-espace vectoriel de E *et un sous-espace vectoriel de* F.

Montrons premièrement que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $x, x' \in \operatorname{Ker} f$ alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x') = 0_F$ donc $\lambda x + \mu x' \in \operatorname{Ker} f$. Deuxièmement, si $y, y' \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a alors $\lambda y + \mu y' = \lambda f(x) + \mu f(x') = f(\lambda x + \mu x') \in \operatorname{Im} f$ par linéarité de l'application f. □

Définition 12 (isomorphisme). *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels et* $f : E \to F$ *une application linéaire bijective. Cette application définit un isomorphisme entre les espaces vectoriels* E *et* F.

Démontrons que si $\{e_i, i = 1, .., n\}$ est une base de E, alors $\{f(e_i), i = 1, .., n\}$ est une base de F. Montrons premièrement que cette famille est libre. Par linéarité de f, si $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$ alors $f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$. L'application f étant une injection, cf. la définition 4, on a nécessairement [2] $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ par hypothèse. Montrons deuxièmement que cette famille est génératrice. L'application f étant une surjection par hypothèse, pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On peut décomposer x sur la base de E choisie : $x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$ d'où on obtient, par linéarité de f, que $y = x^1 f(e_1) + \cdots + x^n f(e_n)$. □

Une conséquence immédiate de cette propriété est que les deux espaces vectoriels ont même dimension : $\dim E = \dim F$. En outre, le fait que f soit linéaire fait que les propriétés de l'espace vectoriel E (addition de vecteurs et multiplication par un scalaire) se « transmettent » via l'application f. Si une telle application (linéaire et bijective) existe, on dit alors que E et F sont isomorphes (etymologiquement, *de même forme* en grec), ce qu'on note $E \cong F$.

Un exemple d'isomorphisme est donné par la relation (2.13) : tout espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, l'isomorphisme étant déterminé par le choix de base de E.

2. La contraposée de la définition 4 donne $f(x) = f(x') \implies x = x'$. Si f est une application linéaire entre espaces vectoriels, on choisit $x' = 0_E$ et on a $f(x) - f(0_E) = f(x)$ par linéarité d'où $f(x) = 0_F \implies x = 0_E$.

2.4 Formes linéaires

Un cas particulièrement important d'applications linéaires est constitué par les applications d'un espace vectoriel quelconque vers l'espace des nombres réels $\mathbb{R}$, qui est un espace vectoriel de dimension un.

Définition 13 (forme linéaire). *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* n*. Une forme linéaire sur* E *est une application linéaire* $f : E \to \mathbb{R}$*.*

Soit $\{e_k, k = 1, \ldots, n\}$ une base de E et $v = v^1 e_1 + \cdots v^n e_n$ un vecteur quelconque de E. L'application f étant linéaire, nous avons

$$f(v) = f(v^1 e_1 + \cdots v^n e_n) = v^1 f(e_1) + \cdots v^n f(e_n)\,, \tag{2.15}$$

et l'image par f de tout vecteur est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base, $\{f(e_k), k = 1, \ldots, n\}$.

Définition 14 (espace dual). *L'ensemble des formes linéaires sur* E *possède lui-même la structure d'un espace vectoriel. En effet, pour tout* $x \in E$*,*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\,. \tag{2.16}$$

Cet espace est appelé espace vectoriel dual de l'espace vectoriel E*, et noté* $E^\star$

Théorème 1 (base duale). *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n*, muni d'une base* $\{e_k, k = 1, \ldots, n\}$*. La dimension de son espace dual* $E^\star$ *est la même que celle de* E*,*

$$\dim E = \dim E^\star\,. \tag{2.17}$$

et une base de $E^\star$*, appelée base duale, est donnée par la famille de* n *formes linéaires sur* E*,* $\{e^{\star\ell}, \ell = 1, \ldots, n\}$*, déterminées par la relation :*

$$e^{\star\ell}(e_k) = \delta^\ell{}_k\,, \tag{2.18}$$

où nous avons introduit le symbole de Kronecker ,

$$\delta^\ell{}_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = \ell \\ 0 & si \quad k \neq \ell \end{cases}\,, \tag{2.19}$$

Montrons que cette famille forme une base de $E^\star$, tout d'abord qu'il s'agit d'une famille libre. Supposons

$$\lambda_1 e^{\star 1} + \cdots + \lambda_n e^{\star n} = 0 \tag{2.20}$$

On applique ensuite la forme linéaire $\lambda_1 e^{\star 1} + \cdots + \lambda_n e^{\star n}$ a un vecteur de base e_k de E donné, et on obtient, d'après la définition (3.69), $\lambda_k = 0$. Ce raisonnement s'appliquant pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on en déduit que la famille est libre. Montrons ensuite que cette famille est génératrice. Soit $f \in E^\star$ une forme linéaire arbitraire sur E, qui est déterminée uniquement,

comme nous l'avions noté, par les images $\{f(e_k), k = 1, \ldots, n\}$ des vecteurs de base de E. Il suffit d'écrire

$$f(e_k) = \sum_{\ell=1}^{n} f(e_\ell)\delta^\ell{}_k = \sum_{\ell=1}^{n} f(e_\ell)e^{\star\ell}(e_k) \tag{2.21}$$

pour montrer que toute forme linéaire f se décompose comme $f = \sum_{\ell=1}^{n} f(e_\ell)e^{\star\ell}$. □

Exemple 2 (vecteurs lignes et colonnes) Soit un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$. Une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ est alors obtenue via le produit scalaire de tout vecteur $\vec{v}$ avec $\vec{w}$:

$$\vec{w}\cdot : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \\ \vec{v} & \mapsto & \vec{w}\cdot\vec{v} = (w^1\, w^2\, w^3)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3 \end{cases} \tag{2.22}$$

Il est aisé de comprendre que l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ est décrit par les produits scalaires avec tous les vecteurs $\vec{w}$ possibles. De manière plus précise, il existe un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et son espace dual $\mathbb{R}^{3\star}$, réalisé en associant à tout vecteur colonne $\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$ le vecteur ligne correspondant $(w^1\, w^2\, w^3)$.

Remarque 1 (notation des vecteurs). *Dans la suite du cours, les vecteurs des espaces euclidiens à 2 et 3 dimensions seront notés avec une flèche, comme il en est l'usage ; nous l'omettrons, comme nous l'avons fait jusque là, pour les vecteurs dans un contexte plus large.*

2.5 Produit scalaire

Nous avons vu dans l'exemple précédent comment, via l'existence du produit scalaire, il était possible d'associer naturellement à tout vecteur d'un espace vectoriel E un vecteur de son espace dual $E^\star$. Nous allons dans cette partie développer ce point de manière plus générale. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire tout d'abord une généralisation évidente des formes linéaires.

Définition 15 (forme bilinéaire). *Soit E un espace vectoriel. Une forme bilinéaire est une application*

$$g : \begin{cases} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & g(u, v) \end{cases} \tag{2.23}$$

linéaire par rapport à chacun de ses arguments :

$$g(\lambda u + \lambda' u', v) = \lambda g(u, v) + \lambda' g(u', v) \tag{2.24a}$$
$$g(u, \mu v + \mu' v') = \mu g(u, v) + \mu' g(u, v') \tag{2.24b}$$

Ce concept se généralise à celui de forme multilinéaire, qui est une application $E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacun de ses arguments ; nous y reviendrons plus tard lorsque nous introduirons les formes différentielles.

Définition 16 (produit scalaire). *Soit* E *un espace vectoriel et* $g : E \times E \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire sur* E*. Cette forme définit un produit scalaire si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

- g *est symétrique, c.-à.-d. que* $\forall u, v \in E$, $g(u,v) = g(v,u)$
- g *est définie positive, c.-à.-d. que* $\forall u \in E$, $g(u,u) \geqslant 0$ *et* $g(u,u) = 0 \implies u = 0_E$

Il est immédiat de vérifier que le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^3$ vérifie ces propriétés.

Dans un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\{e_i\}$, la donnée d'un produit scalaire g équivaut à celle d'une matrice $n \times n$, correspondant au produit scalaire entre les vecteurs de la base choisie :

$$g_{ij} \overset{\text{déf.}}{=} g(e_i, e_j)\,. \tag{2.25}$$

Les propriétés de cette matrice découlent de celles du produit scalaire ; en particulier cette matrice est symétrique, c.-à.-d. que $g_{ij} = g_{ji}$, et inversible (nous y reviendrons au second semestre). Le produit scalaire de deux vecteurs u et v peut alors se décomposer comme :

$$g(u,v) = g\Big(\sum_i u^i e_i, \sum_j v^j e_j\Big) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j\,. \tag{2.26}$$

Dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire g, il est possible de construire explicitement un isomorphisme entre E et son espace dual $E^\star$, qui associe à tout vecteur $v \in E$ une forme linéaire $v^\star \in E^\star$, telle que l'image de tout vecteur w est son produit scalaire avec v :

$$v^\star : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & g(v,w) \end{cases} \tag{2.27}$$

Une forme explicite de cet isomorphisme peut être donnée si E est muni d'une base $\{e_i\}$. Le vecteur $v \in E$ se décompose dans cette base comme

$$v = \sum_{k=1}^{n} v^k e_k\,, \tag{2.28}$$

et peut lui associer une forme linéaire $v^\star \in E^\star$, se décomposant sur la base duale $\{e^{\star\,i}\}$ comme :

$$v^\star = \sum_{k=1}^{n} v_k e^{\star\,k}\,, \quad v_k = \sum_m g_{km} v^m\,. \tag{2.29}$$

Nous avons en effet, d'après la définition (3.69) de la base duale,

$$\begin{aligned} v^\star(w) &= \sum_{k=1}^{n} v_k e^{\star\,k}(w) = \sum_{k=1}^{n} v_k e^{\star\,k}\Big(\sum_\ell w^\ell e_\ell\Big) = \sum_{k,\ell} v_k w^\ell e^{\star\,k}(e_\ell) \\ &= \sum_{k,\ell,m} g_{km} v^m w^\ell \delta^k{}_\ell = \sum_{\ell,m} g_{\ell m} v^m w^\ell = g(v,w)\,, \end{aligned} \tag{2.30}$$

où nous avons utilisé également la définition (2.25) de la matrice g_{ij}.

Définition 17 (norme). *Soit* E *un espace vectoriel. Une norme sur* E *est une application*

$$\|\ \| : \begin{cases} \mathsf{E} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \|x\| & \end{cases} \tag{2.31}$$

qui satisfait les propriétés :
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire) ;*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *;*
- $\|x\| = 0 \implies x = 0_{\mathsf{E}}$.

Un espace muni d'une norme est appelé *espace normé*.

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont *équivalentes*, c.-à.-d. que si $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont des normes, il existe $a, b > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathsf{E}\ , \quad a\|x\|_1 \leqslant \|x_2\| \leqslant b\|x\|_1\ , \tag{2.32}$$

impliquant en particulier que les résultats des calculs de limite sont les mêmes quelle que soit la norme choisie.

Dans tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire g, une norme est naturellement donnée par

$$\|x\|_g \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{g(x,x)}\,. \tag{2.33}$$

(Exercice : le montrer).

Propriété 2 (base orthonormée). *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n *muni d'un produit scalaire* g. *Il est possible de construire une base orthonormée* $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$, *c.-à.-d. telle que*

$$g\,(e_i, e_j) = \delta_{ij}\,. \tag{2.34}$$

Notons qu'il existe une infinité de bases orthonormées. En particulier, par rotation une base orthonormée est transformée en une autre base orthonormée. Partant d'une base quelconque, il est possible de construire de manière unique une base orthonormée en utilisant l'*algorithme de Gram-Schmidt* (cf. cours du second semestre), prouvant l'existence d'une telle base.

Notation d'Einstein

Pour alléger les notations dans les expressions impliquant la décomposition de vecteurs, de formes linéaires ou plus généralement de tenseurs, on utilise souvent la *notation d'Einstein*, dans laquelle le signe somme est sous-entendu.

Dans la notation d'Einstein « stricte » la règle est la suivante : si la même étiquette i se trouve une fois en indice et une fois en exposant, le signe somme est sous-entendu. Par exemple :

$$g_{ij} v^i w^j \ \leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j\,. \tag{2.35}$$

Une version moins stricte de cette notation consiste à considerer que si la même étiquette $\mathfrak{i}$ apparaît deux fois, quelles que soient les positions (indice ou exposant), le signe somme est sous-entendu. Cette seconde version moins rigoureuse ne pose pas de problème lorsqu'une base orthonormée est utilisée.

2.6 Espace euclidien

Un espace euclidien, comme l'espace usuel à trois dimensions, est défini comme un ensemble de points muni d'une structure d'*espace affine*.

Définition 18 (espace affine). *Un espace affine $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, V)$ est donné par un espace de points $\mathcal{P}$ accompagné d'un espace vectoriel V (translations) agissant sur $\mathcal{P}$ de manière additive, et appelé direction de $\mathcal{E}$:*

$$\begin{cases} V \times \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ (\vec{v}, M) & \mapsto & M + \vec{v} \end{cases},$$

où $M + \vec{v}$ désigne le translaté du point M par le vecteur $\vec{v}$, et tel que

$$\forall\, M, N \in \mathcal{E}\ , \quad \exists !\ \vec{v} \in V\ , \quad t.q. \quad N = M + \vec{v}, \tag{2.36}$$

où on note $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. En d'autres termes, chaque paire de points de $\mathcal{E}$ définit un unique vecteur de V. Concrètement, partant d'un espace affine et choisissant une origine O, on définit un espace vectoriel où à chaque point M on associe un vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Pour définir, entre autres, la notion de limite dans un espace affine, il est nécessaire de définir une notion de *distance* entre les points.

Définition 19 (distance). *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble. Une distance sur $\mathcal{P}$ est une application $\mathfrak{d} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- $\mathfrak{d}(M, N) = \mathfrak{d}(N, M)$ *;*
- $\mathfrak{d}(M, N) = 0 \implies M = N$ *;*
- $\mathfrak{d}(O, M) + \mathfrak{d}(M, N) \geqslant \mathfrak{d}(O, N)$ *(inégalité triangulaire).*

Un ensemble muni d'une distance est appelé **espace métrique**. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine et que l'espace vectoriel V associé est muni d'un produit scalaire $\mathfrak{g}$, alors celui-ci induit une notion de distance, appelée *distance euclidienne* :

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{E}}(M, N) \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{\mathfrak{g}\Big(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN}\Big)}\,. \tag{2.37}$$

Cette distance n'est rien d'autre que la norme $\|\overrightarrow{MN}\|_{\mathfrak{g}}$ du vecteur $\overrightarrow{MN}$, telle que définie par l'équation (2.33), sur l'espace vectoriel associé.

Un **espace euclidien** de dimension $\mathfrak{n}$ est défini comme un espace affine associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel de dimension $\mathfrak{n}$ muni d'un produit scalaire. Comme tout espace vectoriel de dimension $\mathfrak{n}$ est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ obtenu par produit cartésien de l'ensemble des réels avec lui-même (voir ci-dessus), on peut alors utiliser la notations habituelle $\vec{v}$ pour les vecteurs et choisir comme produit scalaire $\mathfrak{g}$ le produit scalaire euclidien usuel $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Coordonnées cartésiennes

Considérons un espace eucliden $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, V)$ de dimension n. L'espace vectoriel V peut être muni du produit scalaire euclidien « $\cdot$ » et on peut toujours choisir une base orthonormée $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$, voir l'éqn. (2.34). Dans cette base le produit scalaire euclidien prend la forme habituelle :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i,j=1}^{n} v^i w^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i w^i \,, \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \,, \; \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w^i e_j \,. \tag{2.38}$$

En choisissant un point $O \in \mathcal{P}$ arbitraire comme origine des coordonnées, on peut alors donner les **coordonnées cartésiennes** $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ d'un point M en décomposant le vecteur $\overrightarrow{OM} \in V$ sur la base orthonormée de V :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \,. \tag{2.39}$$

En munissant un espace euclidien $\mathcal{E}$ de coordonnées cartésiennes, on peut donc associer à chaque point $M \in \mathcal{E}$ un n-uplet ordonné ou vecteur-colonne :

$$M \in \mathcal{E} \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,. \tag{2.40}$$

Cours n°3

Applications à plusieurs variables

Dans ce cours nous donnerons des propriétés élémentaires des applications à plusieurs variables, correspondant à des coordonnées cartésiennes sur un espace euclidien.

3.1 Voisinage, continuité, limite

On considère un espace métrique $(\mathcal{E}, d)$, c.-à.-d. un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une distance d (voir la définition 19 du cours n° 2) ; en pratique, cet espace sera un espace euclidien de dimension n, dont l'espace vectoriel associé est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 (ouvert). *Soit $\mathcal{E}$ un espace métrique et $U \subset \mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{E}$. U est un ouvert si pour tout $x \in U$ il existe un $\epsilon > 0$ tel que tout $y \in \mathcal{E}$ tel que $d(x, y) < \epsilon$ appartient également à U.*

En d'autres termes, dans un ouvert il n'existe pas d'éléments sur le « bord ». Ce concept généralise celui d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. *(Exercice : montrer qu'un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est un ouvert au sens de la définition ci-dessus.)*

L'existence d'une distance n'est pas nécessaire pour introduire la notion d'ouvert ; on peut se contenter du concept d'*espace topologique* plus général, espace admettant une collection d'ouverts. [1]

Définition 2 (voisinage). *Soit $x \in \mathcal{E}$ un élément d'un espace topologique. $N_x \subset \mathcal{E}$ est un voisinage de x si N_x contient (au moins) un ouvert $U \subset \mathcal{E}$ contenant x.*

Les structures d'espace topologique et d'espace métrique permettent d'introduire les notions habituelles d'analyse, en premier lieu celle de continuité.

Définition 3 (application continue). *Soit une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces topologiques. L'application f est continue si l'image inverse $f^{-1}(U)$ de tout ouvert $U \in \mathcal{F}$ est un ouvert de $\mathcal{E}$.*

1. Plus précisément, un espace topologique est un ensemble E muni d'une collection $\omega = \{U_1, U_2, \ldots\}$ de parties de E , appelées ouverts, telles que premièrement ω contient E lui-même et l'ensemble vide et deuxièmement toute union d'ouverts ou toute intersection finie d'ouverts appartient à ω.

Dans le cas d'une application entre espaces métriques, cette définition est équivalente à la définition plus usuelle de continuité en $x \in U$ (voir plus loin la notion de limite) :

$$\forall \epsilon > 0\ , \quad \exists \eta > 0\ , \quad \text{t.q.} \quad \forall y \in U\ , \quad d(x,y) < \eta \implies d(f(x),f(y)) < \epsilon\ . \tag{3.1}$$

Propriété 1 (continuité d'une application linéaire). *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire, où* E *est un espace vectoriel de dimension finie et* F *un espace vectoriel de dimension arbitraire. L'application* f *est continue sur* E*.*

Cette propriété sera admise dans le cadre de ce cours.

Exemple 1 (application de Heaviside.) Considérons par exemple l'application (dite de *Heaviside*) :

$$\Upsilon : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \\ x & \to & \Upsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 1 & \text{si} & x \geqslant 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.2}$$

Cette application n'est pas continue en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0^-} \Upsilon(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \Upsilon(x) = 1$. On remarque que $\Upsilon^{-1}\big(]1/2, 3/2[\big) = [0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle ouvert mais semi-ouvert, donc elle n'est pas non plus continue au sens de la définition 3.

*
* *

Le dernier concept important est celui de limite. Étant donné qu'on ne calcule pas nécessairement la limite d'une application pour un élément de l'ensemble de départ, nous avons besoin d'une notion supplémentaire.

Définition 4 (valeur d'adhérence). *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace topologique et* $A \subset \mathcal{E}$ *une partie de* $\mathcal{E}$*. Un élément* $x \in \mathcal{E}$ *est une valeur d'adhérence pour* A *si tout voisinage de* x *contient au moins un élément de* A *distinct de* x*.*

On voit par exemple que a est une valeur d'adhérence pour $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

Définition 5 (limite). *Soit une application* $f : A \to \mathcal{F}$ *où* $A \subset \mathcal{E}$*,* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *étant des espaces métriques. Pour tout* $a \in \mathcal{E}$ *valeur d'adhérence pour* A*, on dit que* f *a pour limite* $y \in \mathcal{F}$ *en* a*, ce qu'on note* $\lim_{x\to a} f(x) = y$*, si*

$$\forall\, \epsilon > 0\ , \quad \exists \eta > 0 \quad \textit{t.q.} \quad d_{\mathcal{E}}(x,a) < \eta \implies d_{\mathcal{F}}(f(x),y) < \epsilon \tag{3.3}$$

Dans un espace métrique la limite, si elle existe, est unique.

Il est important également de réaliser que cette notion de limite signifie que $f(x)$ s'« approche » de la valeur y quelle que soit la direction par laquelle x s'« approche » de a.

Exemple 2 Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{\sin x}{\sin y} \end{cases} \tag{3.4}$$

On s'intéresse à l'existence éventuelle d'une limite en $(x,y) = (0,0)$. On remarque que si on approche le point de coordonnées $(0,0)$ selon un axe vertical, c.-à.-d. pour $x = 0$, on a $f(0,\eta) = 0$ pour toute valeur de $\eta > 0$. Si en revanche on approche ce point suivant un axe incliné de $\pi/4$, c.-à.-d. défini par $y = x$, on a $f(\eta,\eta) = 1$ pour toute valeur de $\eta > 0$; on en conclut donc à l'absence de limite. De manière plus générale, on peut employer les coordonnées polaires dans le plan (voir plus loin) et poser $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. On montre aisément par un développement limité que $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \operatorname{cotan}\theta$.

3.2 Différentielle

Les notions de dérivation d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ sont centrales dans ce cours et, plus généralement, en géométrie différentielle. Comme en dimension un, la notion de dérivée est liée à l'approximation d'une application arbitraire par une application linéaire au voisinage d'un point.

On notera par la suite $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. L'espace des applications linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ étant de dimension n (cf. cours n° 2), $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est de dimension np, car on peut voir $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ comme une collections de p formes linéaires $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$. Ces applications peuvent donc se représenter comme des matrices à p lignes et n colonnes. On munira les espaces $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de la norme euclidienne $\|\ \|$.

Lemme 1 *Soient* $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *et* $L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *des applications linéaires.*

$$\lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \eta\neq 0}} \frac{L_1(\eta) - L_2(\eta)}{\|\eta\|} = 0 \implies L_1 = L_2\,. \tag{3.5}$$

Pour démontrer ce lemme, considérons $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, telle que $\lim_{\eta\to 0,\,\eta\neq 0} \frac{L(\eta)}{\|\eta\|} = 0$. Cela signifie que :

$$\forall \epsilon > 0\ , \quad \exists \delta > 0\ , \quad \|\eta\| < 2\delta \implies \|L(\eta)\| \leqslant \epsilon\|\eta\|\,. \tag{3.6}$$

Posons alors $\eta = \delta x$, avec $\|x\| \leqslant 1$. On a bien $\|\eta\| = \|\delta x\| \leqslant \|\delta\| < 2\|\delta\|$ et on en déduit que, en utilisant la linéarité de L :

$$\|L(x)\| = \frac{1}{\delta}\|L(\eta)\| \leqslant \frac{\epsilon\|\eta\|}{\delta} \leqslant \epsilon \tag{3.7}$$

soit, ϵ étant arbitraire, $L(x) = 0$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n\backslash 0$, on peut poser $x = y/\|y\|$ d'où on obtient $L(y) = 0$ et le résultat. □

Définition 6 (application différentiable). *Soit* ϕ *une application continue de* $U \subset \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *où* U *est un ouvert. Cette application est différentiable en* $x = (x^1, \ldots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$ *s'il existe une application linéaire* $L_x \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *telle que :*

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \neq 0}} \frac{\phi(x+\eta) - \phi(x) - L_x(\eta)}{\|\eta\|} = 0\,, \tag{3.8}$$

où $\eta \in \mathbb{R}^n$.

D'après le lemme 1, une telle application linéaire L_x *est unique si elle existe ; elle est également notée* $d\phi(x)$. *Si* ϕ *est différentiable pour tout* $x \in U$, *alors* ϕ *est dite différentiable sur* U.

L'application $d\phi(x)$ représente la « meilleure » approximation de ϕ au voisinage de $x \in \mathbb{R}^n$ par une application linéaire. Nous avons en effet

$$\phi(x+\eta) = \phi(x) + d\phi(x)(\eta) + o(\eta)\,, \tag{3.9}$$

où $o(\eta)$, qui se lit « petit o de η » signifie que cette quantité est négligeable devant η, c.-à.-d. qu'elle représente une application f arbitraire telle que $\lim_{\eta \to 0, \eta \neq 0} f(\eta)/\|\eta\| = 0$. Cette expression correspond à un développement de Taylor au premier ordre. De manière équivalente, on peut écrire (cf. formule de Taylor–Young) :

$$\phi(x+\eta) = \phi(x) + d\phi(x)(\eta) + \eta\epsilon(\eta)\,, \tag{3.10}$$

où ϵ est une application continue qui s'annule en $\eta = 0$.

Propriété 2 (continuité d'une application différentiable). *Soit* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *une application. Si* ϕ *est différentiable sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^n$ *alors* ϕ *est continue sur* U.

Partons de l'expression (3.9) pour $x \in U$ arbitraire. L'application $d\phi(x) : \eta \to d\phi(x)(\eta)$ étant linéaire, elle est continue en $\eta = 0$, voir la propriété 1. En outre si $f(\eta) = o(\eta)$ f est continue en $\eta = 0$ (car $\lim_{\eta \to 0} f(\eta) = 0 = f(0)$) donc ϕ est continue en x. □

La réciproque de cette propriété est évidemment fausse ; une application peut être continue en x sans être différentiable en x.

Exemple 3 Considérons l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \phi(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases} \tag{3.11}$$

Montrons que la différentielle de cette application est donnée, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$d\phi(x,y) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\eta_1, \eta_2) & \mapsto & d\phi(x,y)(\eta_1,\eta_2) = 2x\eta_1 + 2y\eta_2 \end{cases} \tag{3.12}$$

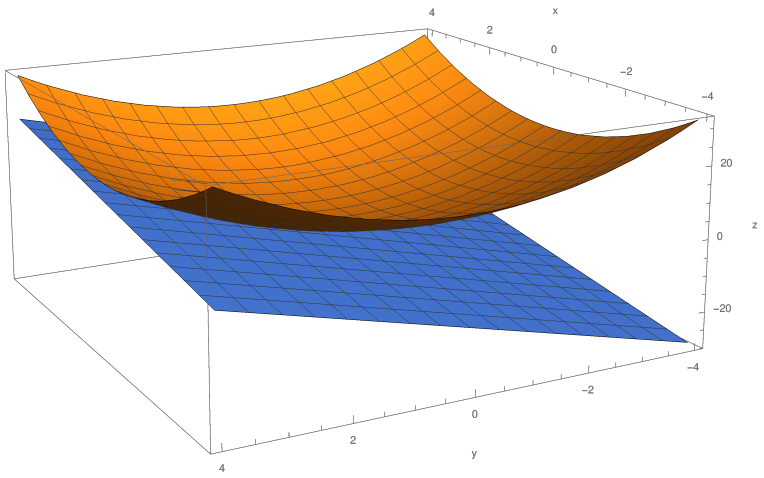


FIGURE 3.1 – Plan tangent à la surface $z = x^2 + y^2$ en $(x, y, z) = (1, 2, 5)$.

Nous avons en effet :

$$\phi(x + \eta_1, y + \eta_2) - \phi(x, y) - (2x\eta_1 + 2y\eta_2) = \eta_1^2 + \eta_2^2 \tag{3.13}$$

puis

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \neq 0}} \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} = 0\,. \tag{3.14}$$

Graphiquement, cette application peut être représentée par une surface dans $\mathbb{R}^3$, définie par l'équation $z = x^2 + y^2$. L'application linéaire $d\phi(x_0, y_0)$ représente alors, en posant $\eta_1 = x - x_0$ et $\eta_2 = y - y_0$, le plan tangent à cette surface au point (x_0, y_0), d'équation

$$z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)\,, \tag{3.15}$$

voir la figure 3.1.

Plus généralement, en dimension quelconque nous pouvons introduire la notion d'application affine tangente et d'hyperplan tangent.

Définition 7 (graphe). *Soit* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une application. Le graphe de* f*, noté* Γ_f*, est une partie de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *définie par*

$$\Gamma_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1},\, x \in U\right\}. \tag{3.16}$$

Définition 8 (hyperplan tangent). *Soit une application* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *différentiable en* x*. L'application affine tangente à* f *en* x_0 *est donnée par*

$$x \mapsto f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)\,, \tag{3.17}$$

et son graphe est appelé hyperplan tangent à f *en* x_0.

*
* *

Notons que si on munit l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^p$ d'une base, on peut considérer une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ comme une collection de p applications et donc toujours se ramener à l'étude de la différentiabilité des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons alors une forme linéaire

$$d\phi(x) : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \eta & \mapsto & d\phi(x)(\eta) \end{cases} \tag{3.18}$$

qui, comme nous l'avons expliqué dans le cours n° 2, est un élément de $\mathbb{R}^{n\star}$, espace dual de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Pour une application différentiable $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, il suffit donc de décomposer dans la base de $\mathbb{R}^p$ choisie,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^p \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

et nous avons la propriété suivante :

Propriété 3 $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *est différentiable sur* U *si et seulement si toutes les formes linéaires* $\{\phi^i, i = 1, \ldots, n\}$*, composantes des* ϕ *dans la base de* $\mathbb{R}^p$ *choisie, le sont. Sa différentielle en* $x \subset U$ *est donnée par :*

$$d\phi(x) = \begin{pmatrix} d\phi^1(x) \\ d\phi^2(x) \\ \vdots \\ d\phi^p(x) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

(Exercice : le montrer.)

3.3 Dérivées partielles, dérivées selon une courbe

Une notion de dérivation plus proche de celle rencontrée dans $\mathbb{R}$ est la dérivée selon une direction particulière, que nous presenterons de trois manières différentes, chacune ayant son utilité.

3.3.1 Dérivées partielles

Nous considérerons pour l'instant uniquement des applications dont l'espace de départ est contenu dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Définition 9 (dérivée selon un vecteur). *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert et* $f : U \to \mathbb{R}$ *une application. L'application* f *admet une dérivée en* $x \in U$ *suivant le vecteur* v *(distinct du vecteur nul), s'il existe* $\nabla_v f(x) \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x+tv) - f(x) - t\nabla_v f(x)}{t} = 0\,, \tag{3.21}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

La définition d'une dérivée selon un vecteur est indépendante du choix d'une base de $\mathbb{R}^n$.

Cette quantité mesure la manière dont f varie au voisinage de x, lorsque l'on s'approche selon une direction et une « vitesse » spécifiées par le vecteur v. [2]

Exemple 4 Reprenons l'étude de l'application $\phi : (x, y) \mapsto x^2+y^2$, considérée dans l'exemple 3.

La dérivée de ϕ en (x_0, y_0) et selon le vecteur $v = \binom{a}{b}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est donnée simplement par :

$$\nabla_v \phi(x_0, y_0) = 2ax_0 + 2by_0\,. \tag{3.22}$$

En effet nous avons

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{(x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 - (x_0^2 + y_0^2) - t(2ax_0 + 2by_0)}{t}\\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{(a^2 + b^2)t^2}{t} = 0\,.\end{aligned} \tag{3.23}$$

*
* *

Définition 10 (dérivées partielles). *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une application où* $U \subset \mathbb{R}^n$ *est un ouvert, et* $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ *une base de* $\mathbb{R}^n$. *L'application* f *admet une dérivée partielle en* $x = (x^1, \ldots, x^n)^T \in U$ *suivant* e_i, *s'il existe* $\partial_i f(x) = \nabla_{e_i} f(x) \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x + te_i) - f(x) - t\partial_i f(x)}{t} = 0\,, \tag{3.24}$$

On utilisera également la notation $\partial f/\partial x^i$. [3]

Les dérivées partielles mesurent le taux d'accroissement de la fonction au voisinage d'un point en approchant selon une direction donnée par un des axes de coordonnées.

2. Remarquons que v n'est pas nécessairement de norme unité, et donc que la spécialisation de cette définition aux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ diffère de la dérivation usuelle d'une application d'une variable réelle.

3. Notons que cette définition s'étend sans difficulté à un espace euclidien, qui est un espace affine. La dérivée partielle au point M suivant e_i est donnée, si elle existe, par la quantité $\partial_i f(M) \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(M+te_i) - f(M) - t\partial_i f(M)}{t} = 0$.

Exemple 5 Revenons à l'application $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, représentée graphiquement par la surface $\mathcal{S} : z = x^2 + y^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Les dérivées partielles sont évidemment $\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0$. Graphiquement, la droite d'équations $\{x = x_0, z = 2y_0(y - y_0)\}$, est située dans le plan (y, z) et tangente à $\mathcal{S}$; sa pente est donnée par $\partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0$, voir la figure 3.2.

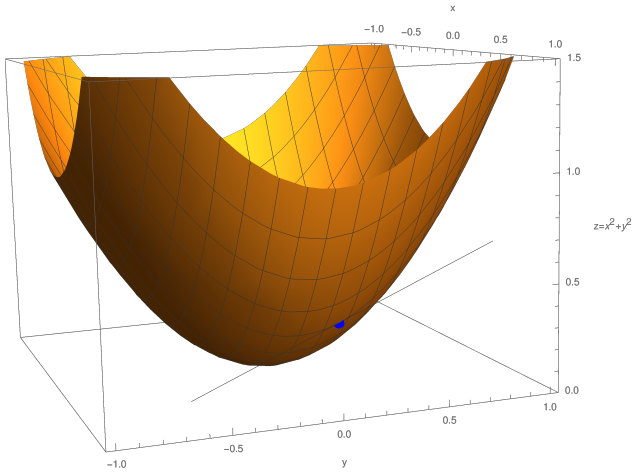


FIGURE 3.2 – Droite $\{x = x_0, z = 2y_0(y - y_0)\}$ tangente à $z = x^2 + y^2$ en $(x_0, y_0) = (0,5,\ 0,3)$.

*
* *

Les notions de dérivée selon un vecteur, et de dérivée partielle (qui en est un cas particulier) sont moins strictes que celles de différentiabilité, puisqu'on examine uniquement le taux d'accroissement de l'application selon une direction particulière.

Exemple 6 Prenons l'exemple d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \Upsilon(x^2 + y) \end{cases} \tag{3.25}$$

où Υ est l'application de Heaviside, voir l'exemple 1. Cette application possède naturellement une ligne de discontinuité le long de la courbe $x^2 + y = 0$, en particulier en $(x, y) = (0, 0)$, voir la figure 3.3.

Même si f est discontinue en $(0, 0)$, la dérivée partielle $\partial_x f(0, 0)$ existe et $\partial_x f(0, 0) = 0$. En effet,

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0) - t\partial_x f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{1 - 1 - t\partial_x f(0, 0)}{t} \implies \partial_x f(0, 0) = 0\,. \tag{3.26}$$

En revanche, la dérivée partielle $\partial_y f$ n'est pas définie en $(0, 0)$ car $f(0, t) - f(0, 0) = 0$ pour $t > 0$ et $f(0, t) - f(0, 0) = -1$ pour $t < 0$.

*
* *

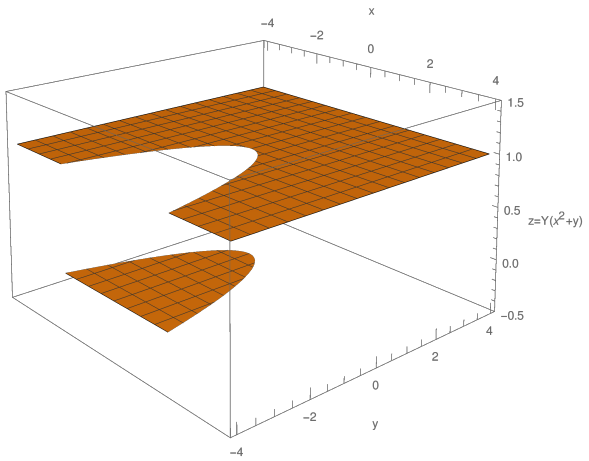


FIGURE 3.3 – Surface $z = \Upsilon(x^2 + y)$.

La différentiabilité étant plus stricte que l'existence des dérivées partielles, il est intuitif que la première implique la seconde.

Théorème 1 *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une application où* $U \subset \mathbb{R}^n$ *est un ouvert. Si* f *est différentiable en* $x \in U$*, alors pour tout vecteur* v *distinct du vecteur nul, la dérivée* $\nabla_v f(x)$ *existe et*

$$\nabla_v f(x) = df(x)(v)\,. \tag{3.27}$$

Si $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$*, les dérivées partielles* $\partial_i f(x)$ *existent, et*

$$\boxed{df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i f(x)} \tag{3.28}$$

où $v = \sum_i v^i e_i$.

L'application $f : U \to \mathbb{R}$ étant différentiable par hypothèse nous avons, d'après l'éqn. (3.9) et en posant $\eta = tv$

$$f(x + tv) = f(x) + df(tv) + o(tv) = f(x) + tdf(v) + o(tv)\,, \tag{3.29}$$

où nous avons utilisé la linéarité de $df(x)$. Nous avons donc :

$$f(x + tv) - f(x) - tdf(v) = o(tv) \;\Leftrightarrow\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x + tv) - f(x) - tdf(v)}{\|tv\|} = 0 \tag{3.30}$$

soit, comme $\|v\| \neq 0$,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x + tv) - f(x) - tdf(v)}{t} = 0\,, \tag{3.31}$$

ce qui permet l'identification $\nabla_v f(x) = df(x)(v)$.

La deuxième assertion du théorème s'en déduit immédiatement en décomposant v, dans la base de $\mathbb{R}^n$ choisie, comme $v = \sum_i v^i e_i$ et en utilisant la linéarité de la forme différentielle $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. □

Attention, la réciproque de ce théorème n'est absolument pas vraie ! Une application peut admettre des dérivées partielles en x sans qu'elle y soit différentiable pour autant.

Exemple 7 Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ y & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.32}$$

Montrons premièrement que cette application admet des dérivées selon tout vecteur, et donc en particulier des dérivées partielles, en $(x,y) = (0,0)$. Soit $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$. Il faut distinguer deux cas de figure :

— si $a = 0$ (et donc $b \neq 0$) nous avons $f(ta,tb) - f(0,0) = tb$ donc $\nabla_{\vec{v}} f(0,0) = b$;
— si $a \neq 0$ nous avons $f(ta,tb) - f(0,0) = tb^2/a$ donc $\nabla_{\vec{v}} f(0,0) = b^2/a$.

Deuxièmement, cette application n'est pas continue en $(x,y) = (0,0)$ car elle n'y admet pas de limite (bien qu'elle y soit définie comme $f(0,0) = 0$). En effet, pour tout $\eta > 0$, les valeurs prises par l'application f dans le disque de rayon η centré à l'origine ne sont pas bornées. On peut par exemple (pour $0 < \epsilon < \eta < 1$) choisir le point de coordonnées $(x,y) = (\epsilon^3, \epsilon/2)$ pour lequel $f(x,y) = 1/4\epsilon$ est arbitrairement grand.

L'application f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$, d'après la propriété 2, même si ses dérivées partielles existent en ce point.

Définition 11 (gradient). *Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en x. Le gradient de f en x, noté* $\operatorname{grad} f(x)$ *ou* $\nabla f(x)$*, est le vecteur défini par la relation*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \ , \quad df(x)(v) = v \cdot \operatorname{grad} f(x) \, . \tag{3.33}$$

Si $\{e^i, i = 1, \ldots, n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, le vecteur gradient a pour composante les dérivées partielles selon les directions correspondantes :

$$\operatorname{grad} f(x) \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix} \, . \tag{3.34}$$

En d'autres termes, on a utilisé l'isomorphisme entre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'espace vectoriel dual $\mathbb{R}^{n\star}$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ (voir la définition 14 dans le cours n° 2) pour associer à la forme linéaire $df(x)$ le vecteur $\operatorname{grad} f(x)$. L'ensemble des vecteurs $\operatorname{grad} f(x)$ pour tous les $x \in U$ consitue un exemple de *champ de vecteurs*.

Exemple 8 Soit l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{y^2+z^2+1} \end{cases} \tag{3.35}$$

Le vecteur gradient associé a pour composantes

$$\operatorname{grad}\phi(x,y,z) \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \frac{2x}{y^2+z^2+1} \\ -\frac{2x^2y}{(y^2+z^2+1)^2} \\ -\frac{2x^2z}{(y^2+z^2+1)^2} \end{pmatrix} . \tag{3.36}$$

*
* *

En pratique, il est bien plus simple d'étudier l'existence des dérivées partielles – qui se calculent comme les dérivées des applications d'une variable réelle – que celle de la différentielle. Pour induire la seconde de la première, il faut imposer une condition supplémentaire.

Définition 12 (application de classe $\mathcal{C}^1$). *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. f est dite de classe $\mathcal{C}^1(U)$ si les dérivées partielles $\{\partial_i f, i = 1, \ldots, n\}$ existent pour tout $x \in U$ et définissent des applications continues de U dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 2 (différentiabilité d'une application de classe $\mathcal{C}^1$). *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$ alors f est différentiable sur U. Sa différentielle s'exprime en termes des dérivées partielles comme :*

$$\boxed{df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} .} \tag{3.37}$$

Notons qu'il ne s'agit pas de l'exacte réciproque du théorème 1, car une application peut être différentiable en x sans que ses dérivées partielles y soient continues.

La démonstration de ce théorème est un peu technique ; on étudiera par simplicité de notation la différentiabilité en $x = 0$. On utilisera avantageusement dans ce qui suit la « norme infinie », définie par

$$\|x\|_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \max(x_1, \ldots, x_n) . \tag{3.38}$$

que l'on notera simplement $\|x\|$ par commodité.

Soit $r > 0$ tel que $\|x\| < r \implies x \in U$; en d'autres termes on considère une boule $\mathcal{B}$ de centre $x = 0$ et de rayon r contenue dans l'ouvert U. Par hypothèse les dérivées partielles $\{\partial_i f, i = 1, \ldots, n\}$ sont continues en $x = 0$; il existe donc $\delta_i \in]0, r[$ tels que

$$\|x\| < \delta_j \implies |\partial_i f(x) - \partial_i f(0)| < \epsilon/n . \tag{3.39}$$

Si $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{B}$, nous avons premièrement, comme la dérivée partielle $\partial_n f$ est définie dans $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$,

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, 0) + \eta_n \partial_n f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, 0) + \eta_n \phi_n(\eta)\,, \tag{3.40}$$

où ϕ_n est continue et nulle en $\eta_n = 0$. L'existence de $\partial_{n-1} f$ implique ensuite que

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, 0) = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-2}, \eta_{n-1}, 0) + \eta_{n-1} \partial_n f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-2}, 0, 0) + \eta_{n-1} \phi_{n-1}(\eta)\,, \tag{3.41}$$

et ainsi de suite. L'équation (3.39) implique ensuite que (la norme infinie est utilisée ici) :

$$\left| \eta_n \partial_n f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, 0) + \eta_{n-1} \partial_n f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-2}, 0, 0) + \cdots - \sum_{i=1}^{n} h_n \partial_n f(0, \ldots, 0) \right| \leqslant \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} |\eta_n| \leqslant \epsilon \|\eta\|\,. \tag{3.42}$$

Si on pose $\phi(\eta) = \sum_i |\phi_i(\eta)|$ nous avons ensuite :

$$\left| f(\eta_1, \ldots, \eta_n) - f(0, \ldots, 0) - \sum_{i=1}^{n} \eta_n \partial_i f(0) \right| \leqslant \|\eta\| \big(\epsilon + \phi(\eta)\big)\,. \tag{3.43}$$

L'application ϕ étant continue (comme les applications ϕ_i le sont), il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\|\eta\| < \delta_1 \implies \phi(\eta) < \epsilon$. Posons ensuite $\Delta = \max(\delta, \delta_1)$. Nous avons alors

$$\|\eta\| < \Delta \implies \left| f(\eta_1, \ldots, \eta_n) - f(0, \ldots, 0) - \sum_{i=1}^{n} \eta_n \partial_i f(0) \right| \leqslant 2\|\eta\|\epsilon\,. \tag{3.44}$$

Nous en déduisons donc que f est différentiable en 0, et sa différentielle y est donnée par :

$$df(0)(v) = \sum_{i=1}^{n} v^n \partial_i f(0)\,. \tag{3.45}$$

Cette démonstration s'étend sans difficulté à la différentiabilité en x quelconque, conduisant à l'éqn. 3.37. □

Exemple 9 (applications coordonnées). Soit $\{e_k, k = 1, \ldots\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On considère l'application

$$c^i : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ y = \sum_{k=1}^{n} y^k e_k & \mapsto & y^i \end{cases}, \tag{3.46}$$

c.-à.-d. l'application associant à tout $y \in \mathbb{R}^n$ sa i-ème coordonnée dans la base choisie. Sa différentielle est donnée, en utilisant la relation (3.37), par :

$$dc^i(y)(v) = \sum_{k=1}^{n} v^k \partial_k c^i(y) = \sum_{k=1}^{n} v^k \partial_k y^i = v^i \tag{3.47}$$

On voit ainsi que la forme linéaire dc^i, indépendament du point y où elle est calculée, associe à tout vecteur v sa composante v^i ; il est usage d'utiliser la notation dx^i pour la représenter.

Nous pouvons voir la famille de formes linéaires $\{dx^i, i = 1, \dots, n\}$ comme une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ (c.-à.-d. de l'espace dual $\mathbb{R}^{n\star}$ de $\mathbb{R}^n$). Il s'agit en réalité de la base duale de la base $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ car, d'après (3.47),

$$dx^i(e_j) = \delta^i{}_j \,. \tag{3.48}$$

Finalement on remarque que cette notation est en harmonie avec la notion intuitive de différentielle utilisée en physique. Reprenons en effet l'équation (3.37). Nous avons

$$\begin{aligned} df(x)\big(\sum_i v^i e_i\big) &= \sum_k v^k \partial_k f(x) = \sum_{j,k} v^k \partial_j f(x) \delta^j{}_k = \sum_{j,k} v^k \partial_j f(x) dx^j(e_k) \\ &= \sum_j \partial_j f(x) dx^j \left(\sum_k v^k e_k\right) = \sum_j \partial_j f(x) dx^j(v)\,, \end{aligned} \tag{3.49}$$

permettant d'écrire la différentielle de f en x comme

$$df(x) = \sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x^j}\, dx^j \,. \tag{3.50}$$

Les physiciens interprètent la relation (3.50) d'une manière peut-être plus intuitive que celle les mathématiciens mais moins précise. Rappelons que, dans le formalisme développé ici, dx^i est une forme linéaire telle que $dx^i(v)$ représente la variation de la ième coordonnée x^i lorsqu'on se déplace à partir du point x selon un vecteur v (dont la direction est arbitraire). Pour un physicien, dx^i représente en elle-même une variation infinitésimale de la coordonnée correspondante.

De ce point de vue (comme dans le cas pour la différentielle $df = f'dx$) d'une application d'une variable réelle), la relation (3.50) représente la variation infinitésimale df de l'application en réponse à une variation infinitésimale des coordonnées dx^j.

*
* *

Reprenons l'expression de la différentielle d'une application $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, voir la propriété 3. Nous avons

$$d\phi(x)(\eta) = \begin{pmatrix} d\phi^1(\eta) \\ \vdots \\ d\phi^p(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \eta^i \partial_i \phi^1(x) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \eta^i \partial_i \phi^p(x) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Cette expression peut naturellement s'interpréter comme l'action d'une matrice $p \times n$ sur le vecteur $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Définition 13 (matrice jacobienne). *Soit une application* $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *différentiable en* $x \in U$*. On munit respectivement* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^p$ *des bases* $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ *et* $\{f_k, k = 1, \ldots, p\}$*, et on pose*

$$\phi = \sum_{k=1}^{p} \phi^k f_k \ , \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta^i e_i \ , \quad x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \, . \tag{3.52}$$

La matrice jacobienne de ϕ *en* x *est définie comme la matrice*

$$J_\phi(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi^p}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi^p}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

et nous avons

$$d\phi(x)(\eta) = J_\phi(x)\, \eta \, . \tag{3.54}$$

où le membre de droite correspond au produit matriciel de la matrice jacobienne avec le vecteur colonne $\eta \in \mathbb{R}^n$*.*

Définition 14 (jacobien). *Soit une application* $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *différentiable en* $x \in U$*. Sa matrice jacobienne* $J_\phi(x)$ *est alors une matrice carrée. Son déterminant,*

$$\mathrm{jac}_\phi(x) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Det}\, J_\phi(x) \, , \tag{3.55}$$

est appelé jacobien de ϕ *en* x*.*

3.3.2 Dérivée selon une courbe

La dernière de ces notions concerne la dérivée selon une *courbe* et sera principalement exploitée dans le cours n° 4. Cette notion présente l'avantage d'être plus générale que celles de dérivée directionnelle et de dérivée partielle, car elle peut être étendue à des espaces plus généraux que les espaces euclidiens, et ne nécessite pas l'introduction d'un système de coordonnées. Même si nous nous restreignons dans ce cours à la géométrie euclidienne, il est avantageux, lorsque des coordonnées curvilignes sont utilisées, d'introduire des outils de géométrie différentielle.

Définition 15 (courbe lisse). *Soit* E *un espace topologique. Une courbe lisse (ouverte) sur* E *est une application*

$$\gamma : \begin{cases}]a, b[\subset \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{cases} \ , \tag{3.56}$$

qui est infiniment différentiable, ce que l'on notera $\gamma \in \mathcal{C}^\infty\big(]a, b[\, , E\big)$*.*

Une courbe est ainsi un chemin unidimensionnel sur E et paramétré par t, que l'on peut voir comme le « temps » si la courbe est considérée comme la trajectoire d'un objet matériel. On considérera par la suite que $a < 0 < b$ et que la courbe se s'intersecte pas elle-même.

Définition 16 (dérivée selon une courbe). *Soit* E *un espace topologique, une application* $f : E \to \mathbb{R}$ *et* $\gamma :]a, b[\to E$ *une courbe lisse* $\gamma \in \mathcal{C}^\infty\big(]a, b[, E\big)$ *telle que* $\gamma(0) = M$. *La dérivée de* f *au point* M *selon* γ, *si elle existe, est donnée par*

$$V[f] \overset{\text{déf.}}{=} \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0}. \tag{3.57}$$

Évidemment, la dérivée selon γ ne dépend pas de la forme « globale » de la courbe mais uniquement de son allure au voisinage du point M, et une infinité de courbes donneront le même vecteur ; elle seront dites *équivalentes*.

Lorsque l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^n$, une forme plus explicite de cette dérivée est obtenue en termes des dérivées partielles de f, par rapport à des coordonnées $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$. Nous avons

$$V[f] = \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i[\gamma(t)]}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{3.58}$$

où $x^i(\gamma(t))$ désigne la i-ème coordonnée du point $\gamma(t) = M$.

Nous pouvons ainsi définir un vecteur V comme un *opérateur* agissant sur une application $f : E \to \mathbb{R}$, soit en coordonnées :

$$V = \sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad V^i \overset{\text{déf.}}{=} \frac{dx^i[\gamma(t)]}{dt}\Big|_{t=0}. \tag{3.59}$$

Si nous choisissons un chemin rectiligne,

$$x^i\big(\gamma(t)\big) = x_0^i + v^i t, \tag{3.60}$$

nous retrouvons évidemment la notion de dérivée directionnelle selon v, car

$$V[f] = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} f. \tag{3.61}$$

Ce cas particulier fournira dans la plupart des cas une intuition suffisante de la notion de dérivée selon une courbe.

Nous utiliserons également la notation $\frac{d\gamma(t)}{dt}\big|_{t=0}$ pour désigner un vecteur, étant implicite que cet objet agit sur une application f :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt}\Big|_{t=0}[f] = \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i[\gamma(t)]}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{3.62}$$

3.4 Espace tangent ⋆

La notion de dérivée selon une courbe est, d'après sa définition, plus générale que celles rencontrées précédemment car la structure d'espace vectoriel n'est pas explicitement exigée

pour l'espace d'arrivée. Il est même possible d'aller plus loin. Supposons que l'espace E « ressemble » localement à $\mathbb{R}^n$. Mathématiquement, cela revient à dire que, pour tout point $M \in E$, il existe un ouvert $U \subset E$ et une application

$$\varphi_U : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^n \\ \\ M & \to & \varphi_U(M) \end{cases} \tag{3.63}$$

qui soit à la fois bijective et continue sur U.[4] On peut alors munir $\mathbb{R}^n$ d'une base et donc d'un jeu de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, repérant les points M situés dans l'ouvert $U \subset E$.

Si f est une application de E dans $\mathbb{R}$, on peut alors *définir* en un point $M \in E$ un vecteur comme un opérateur $V[f]$, voir la définition 16, défini pour un chemin tel que $\gamma(0) = M$. L'ensemble des vecteurs obtenus de la sorte, pour un point M donné, forment un espace

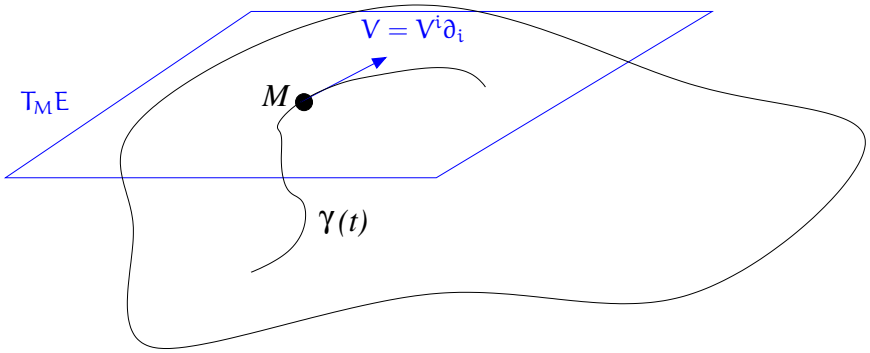


FIGURE 3.4 – Vecteurs de l'espace tangent.

vectoriel appelé *espace tangent* à E au point M, et noté $T_M E$, voir la figure 3.4.

La notion d'espace tangent que nous avons introduite permet de définir les vecteurs sur des espaces qui ne ressemblent que *localement* à des espaces euclidiens[5] ; il faut imaginer qu'il existe un espace vectoriel « attaché » à chaque point de cet espace. La figure 3.4 évoque la notion de plan tangent à une surface discutée dans l'exemple 3. À la différence de ce dernier, l'espace tangent tel que nous l'avons défini existe en tant que tel, de manière intrinsèque, sans que nous ayons besoin de considérer que l'espace E est « plongé » dans un espace de plus grande dimensionnalité.

3.4.1 Base de l'espace tangent

Dans le système de coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ choisi, tout vecteur $V \in T_M E$ – au sens où nous venons de le définir – peut s'écrire comme

$$V = \sum_i V^i \partial/\partial x^i \,, \tag{3.64}$$

4. Dans ce cas l'application est appelée *homomorphisme* d'espaces topologiques, car elle envoie les ouverts sur les ouverts et respecte donc la structure d'espace topologique de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

5. De tels espaces, moyennant des hypothèses que nous évoquerons plus loin, sont appelés *variétés différentielles* en géométrie différentielle ; leur étude fournit le fondement mathématique de la relativité générale.

c.f. éqn. (3.58) ; la notion de vecteur est donc liée à celle de dérivée directionnelle, voir la déf. 9.

Dans ce formalisme, une base de l'espace vectoriel $\mathsf{T}_M\mathsf{E}$ « attaché » au point $M \in \mathsf{E}$ est fournie par

$$\left\{\partial/\partial x^i,\, i = \ldots, n\right\} \tag{3.65}$$

que l'on notera de manière plus compacte $\{\partial_i, i = \ldots, n\}$.

Il faut comprendre cette notation de la manière suivante. Au lieu, comme nous en avons l'habitude, de choisir d'abord une base de $\mathbb{R}^n$ permettant d'exprimer les coordonnées d'un vecteur – ce qui est naturel pour des coordonnés cartésiennes – on remarque qu'un choix « naturel » de base sur $\mathsf{T}_M\mathsf{E} \cong \mathbb{R}^n$ est obtenu, pour un certain système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, en considérant l'action des dérivées partielles $\{\partial/\partial x^i, i = \ldots, n\}$ le long des directions associées aux variations de ces coordonnées au point M.

3.4.2 Champ de vecteurs

En physique, nous savons qu'un champ de vecteurs, comme le champ magnétique, revient à donner, pour chaque point de l'espace de coordonnées $\vec{x}$, un certain vecteur $\vec{B}(\vec{x})$. Les concepts introduits ici nous permettent de définir cette notion de manière rigoureuse.

Nous avons vu comment, de manière relativement abstraite, il est possible d'attacher un espace vectoriel $\mathsf{T}_M\mathsf{E}$ à tout point $M \in \mathsf{E}$. Définir un champ de vecteurs revient à choisir, pour chaque point $M \in \mathsf{E}$, un certain vecteur $V \in \mathsf{T}_M\mathsf{E}$. Explicitement, un champ de vecteurs $\mathcal{V}$ donnera un certain vecteur en $M \in \mathsf{E}$ de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ selon :

$$\mathcal{V}(M)[f] = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{V}^j(x^i)\frac{\partial f(x^i)}{\partial x^j}\,. \tag{3.66}$$

Cependant, pour que ce champs de vecteurs possède de bonnes propriétés, il faut lui imposer une certaine régularité (on ne veut pas que ce vecteur change brusquement d'orientation en passant d'un point à un point voisin par exemple).

Définition 17 (champ de vecteurs). *Un champ de vecteurs $\mathcal{V}$ sur E assigne à tout élément $M \in \mathsf{E}$ un vecteur $\mathcal{V}(M) \in \mathsf{T}_M\mathsf{E}$, tel que pour toute application $f : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$ infiniment différentiable, l'application qui à $M \in \mathsf{E}$ associe $\mathcal{V}(M)[f] \in \mathbb{R}$ est infiniment différentiable.*

L'ensemble des champs de vecteurs sur E sera noté par la suite $\mathsf{T}\,\mathsf{E}$, c.-à.-d. sans référence à un point M particulier.

D'une manière plus simple, cela signifie que dans une base donnée chaque composante du champ de vecteurs est une application infiniment différentiable de E vers $\mathbb{R}$.

3.4.3 Espace dual

L'espace vectoriel $\mathsf{T}_M\mathsf{E}$, comme tout espace vectoriel, admet un espace dual $\mathsf{T}^\star_M\mathsf{E}$ de formes linéaires sur $\mathsf{T}_M\mathsf{E}$, voir la déf. 14 du cours n° 2, appelé dans le présent contexte *espace cotangent*.

Définition 18 (1-forme différentielle). *On appelle 1-forme différentielle sur* E *la donnée, en tout point* $\mathsf{M} \in \mathsf{E}$*, d'un élement* $\omega(\mathsf{M})$ *de l'espace dual* $\mathsf{T}^\star_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$*, c.-à.-d. une application linéaire sur* $\mathsf{T}_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$*, espace tangent à* E *au point* M*. :*

$$\omega(\mathsf{M}) \ : \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{T}_{\mathsf{M}}\mathsf{E} & \to & \mathbb{R} \\ \mathsf{V} & \mapsto & \omega(\mathsf{V}) \end{array} \right. , \tag{3.67}$$

telle que si $\mathcal{V}$ *est un champ de vecteurs,* $\omega(\mathsf{M})[\mathcal{V}(\mathsf{M})]$ *est une application de* E *dans* $\mathbb{R}$ *infiniment différentiable.*

L'ensemble des formes différentielles sur E sera noté par la suite $\mathsf{T}^\star\mathsf{E}$.

Un exemple simple est fourni par la différentielle d'une application de E vers $\mathbb{R}$, comme nous avons par définition, pour tout $\mathsf{V} \in \mathsf{T}_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$,

$$\mathrm{d}f(x)(\mathsf{V}) = \mathsf{V}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{V}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \, . \tag{3.68}$$

La base duale de la base $\{\partial_i, i = \ldots, n\}$ de $\mathsf{T}_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$, voir le théorème 1 du cours n° 2, est donnée comme indiqué dans l'exemple 9 par

$$\left\{ \mathrm{d}x^i, \, i = 1, \ldots, n \right\} \quad \text{t.q.} \qquad \boxed{\mathrm{d}x^i(\partial_j) = \delta^i{}_j} \, . \tag{3.69}$$

et constitue la base « naturelle » de $\mathsf{T}^\star_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$ une fois un système de coordonnées sur E choisi.

Toute 1-forme différentielle ω peut se décomposer dans une telle base en termes de ses composantes $\{\omega_i, i = 1, \ldots, n\}$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}x^i \, , \tag{3.70}$$

Et nous avons pour tout vecteur $\mathsf{V} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{V}^j \partial_j$,

$$\omega(\mathsf{V}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}x^i \left(\sum_{j=1}^{n} \mathsf{V}^j \partial_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \mathsf{V}^j \underbrace{\mathrm{d}x^i(\partial_j)}_{\delta^i{}_j} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathsf{V}^i \, . \tag{3.71}$$

Reprenons l'exemple de la différentielle d'une application. Nous avons

$$\mathrm{d}f(\mathsf{V}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \left(\sum_{j=1}^{n} \mathsf{V}^j \partial_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{V}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \, , \tag{3.72}$$

en accord avec le théorème 1.

Une 1-forme différentielle ω donne en tout point M un élément de $\mathsf{T}^\star_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$ noté $\omega(\mathsf{M})$, c.-à.-d. appartenant à l'espace dual de l'espace vectoriel $\mathsf{T}_{\mathsf{M}}\mathsf{E}$ des vecteurs tangents en M ; c'est un type de forme linéaire sur un espace vectoriel. À ce titre, étant donné qu'il existe un

isomorphisme entre $T_M E$ et $T^\star_M E$ fourni par le produit scalaire g, on peut associer à $\omega(M)$ un vecteur de T^E_M. Explicitement nous avons

$$\exists v \in T_M E \ , \quad \forall w \in T_M E \ , \quad g(v,w) = \omega(w) \, . \tag{3.73}$$

En termes de la base $\{\partial_i, i = 1, \ldots, n\}$ de $T_M E$ et de la base duale $\{dx^i, i = 1, \ldots, n\}$ de $T^\star_M E$, nous avons

$$\boxed{\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i \ \leftrightarrow v = \sum_{j=1}^{n} v^j \partial_j \ , \quad \omega_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v^j} \tag{3.74}$$

On vérifie en effet que

$$\omega(w) = \omega\Big(\sum_{i=1}^{n} w^i \partial_i \Big) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k dx^k \Big(\sum_{i=1}^{n} w^i \partial_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i w^i = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^j w^i = g(v,w) \, . \tag{3.75}$$

3.5 Quelques résultats utiles

Théorème 3 (différentielle d'applications composées). *Soient les applications différentiables* $f : U \to V$ *et* $g : V \to \mathbb{R}^q$ *où* $U \subset \mathbb{R}^n$ *et* $V \subset \mathbb{R}^p$ *sont des ouverts. L'application composée* $g \circ f$

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & g\big[f(x)\big] \end{array} \right. \tag{3.76}$$

est différentiable sur U*, et sa différentielle est donnée par*

$$\forall x \in U \ , \quad d(g \circ f)(x) = dg\big(f(x)\big) \circ df(x) \, . \tag{3.77}$$

Plus explicitement, cela signifie que $d(g \circ f)(x)(v) \in \mathbb{R}^q$ est donné par l'application linéaire $dg\big(f(x)\big)$ appliquée au vecteur $df(x)(v) \in V \subset \mathbb{R}^p$.

Posons $y = f(x)$. Nous avons, de manière analogue à la démonstration précédente, avec $\eta \in \mathbb{R}^p$ et $\mathfrak{g} \in \mathbb{R}^q$,

$$f(x + \eta) = y + df(x)(\eta) + \|\eta\| \phi(\eta) \tag{3.78a}$$

$$g(y + \mathfrak{g}) = g(y) + dg(y)(\mathfrak{g}) + \|\mathfrak{g}\| \psi(\mathfrak{g}) \, , \tag{3.78b}$$

où les applications $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sont continues et s'annulent en zéro. Nous avons alors, pour $\|\eta\| \neq 0$,

$$\frac{g\big(f(x+\eta)\big) - g(y) - dg(y)\big(df(x)(\eta)\big)}{\|\eta\|} = dg(y)\big(\phi(\eta)\big) + \frac{\|h(\eta)\|}{\|\eta\|} \psi\big(h(\eta)\big) \, , \tag{3.79}$$

où nous avons posé

$$h(\eta) = f(x + \eta) - f(x) = df(x)(\eta) + \|\eta\| \phi(\eta) \, . \tag{3.80}$$

ϕ étant continue et s'annulant en zéro, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\eta\| < \delta \implies \|\phi(\eta)\| < 1$. En outre, l'application $df(x)(\eta)$ étant linéaire, il existe $k > 0$ tel que $\|df(x)(\eta)\| < k\|\eta\|$.[6] En posant $\lambda = k + 1$, nous avons donc

$$\|h(\eta)\| < \lambda\|\eta\| \implies \left\| \frac{\|h(\eta)\|}{\|\eta\|} \psi\big(h(\eta)\big) \right\| < \lambda \left\| \psi\big(h(\eta)\big) \right\| . \tag{3.81}$$

Étant donné que l'application $\psi \circ h$ est continue et s'annule en zéro, nous obtenons que

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \neq 0}} \frac{\|h(\eta)\|}{\|\eta\|} \psi\big(h(\eta)\big) = 0 , \tag{3.82}$$

puis le résultat final. □

Corollaire 1 (matrice jacobienne d'une application composée). *Soient les applications différentiables* $f : U \to V$ *et* $g : V \to \mathbb{R}^q$ *où* $U \subset \mathbb{R}^n$ *et* $V \subset \mathbb{R}^p$ *sont des ouverts. La matrice jacobienne de* $g \circ f$ *est donnée par :*

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(y) J_f(x) , \tag{3.83}$$

où $y = f(x)$.

Il suffit d'écrire

$$d(g \circ f)(x)(\eta) = dg(y)\Big(df(x)(\eta)\Big) = dg(y))\Big(J_f(x)\eta\Big) = J_g(y)J_f(x)\eta . \tag{3.84}$$

□

Propriété 4 *Soit* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une application différentiable. Nous avons les propriétés suivantes :*

- $d(1/f) = -df/f^2$
- $df^r = rf^{r-1}df$
- $d\exp f = \exp f df$
- $d\log f = df/f$

qui découlent directement du théorème 3

Propriété 5 (différentielle d'un produit). *Soient* $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *des applications différentiables. L'application*

$$fg : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{cases} \tag{3.85}$$

est différentiable sur U*, et*

$$\forall x \in U , \quad dfg(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x) . \tag{3.86}$$

6. $df(x)$ est linéaire donc continue en $\eta = 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|v\| < \alpha \implies \|df(x)(v)\| < \epsilon$. Pour $\eta \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, nous avons $\|\frac{\alpha\eta}{2\|\eta\|}\| = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ donc $\|df(x)(\frac{\alpha\eta}{2\|\eta\|})\| < \epsilon$, soit, par linéarité de $df(x)$, $\|df(x)(\eta)\| < \frac{2\epsilon}{\alpha}\|\eta\|$.

On considère premièrement l'application

$$\psi : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.87}$$

qui est différentiable sur U si f et g le sont, voir la propriété 3. On considère ensuite l'application

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{cases} \tag{3.88}$$

qui est évidemment différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et dont la différentielle est $d\mu(x, y)(\eta) = y\nu^1 + x\nu^2$. En utilisant le théorème 3, on en déduit que l'application $\mu \circ \psi = fg$ est différentiable en tout $x \in U$, et sa différentielle est donnée par

$$dfg(x)(\eta) = d\mu\big(\psi(x)\big)\big(df(x)(\eta), dg(x)(\eta)\big) = g(x)df(x)(\eta) + f(x)dg(x)(\eta) \tag{3.89}$$

qui est le résultat voulu. □

*
* *

Théorème 4 (théorème de Schwarz). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert, une application de classe $\mathcal{C}^2(U)$, c.-à.-d. de classe $\mathcal{C}^1(U)$ et telle que ses dérivées partielles sont également de classe $\mathcal{C}^1(U)$. Nous avons alors :*

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}\ , \quad \forall x \in U\ , \quad \boxed{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i}} \tag{3.90}$$

La demonstration de ce théorème ne sera pas donnée ici.

Cours n°4

Coordonnées curvilignes

Dans les coordonées cartésiennes, la description des objets de l'analyse vectorielle, comme les opérateurs gradient, laplacien, etc... est extrêmement simple et ne nécessite pas de concepts réellement plus avancés que ceux nécessaire à l'analyse des fonctions d'une variable réelle.

Cependant les coordonnées cartésiennes sont très mal adaptées à un certain nombre de problèmes physiques, pour lesquels les symétries du problème imposent l'utilisation d'autres systèmes de coordonnées, appelés de manière générique des *coordonnées curvilignes*.

Par exemple, il est clair que le champ électrique émis par une source ponctuelle dépendra uniquement de la distance entre la source et l'observateur, et un système de coordonnées centré sur la source dans lequel la distance à l'origine sera l'une des coordonnées sera à privilégier. De même, le calcul de la masse totale de la Terre sera obtenue par une intégrale de sa densité locale de masse sur son volume, qui est en première approximation une boule ; intégrer sur un domaine dont le bord est courbe n'est pas commode en coordonnées cartésiennes.

4.1 Coordonnées curvilignes usuelles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Avant de développer la théorie générale des coordonnées curvilignes nous présenterons de manière rapide les systèmes de coordonnées les plus étudiés dans le plan et l'espace.

4.1.1 Coordonnées polaires

L'espace euclidien à deux dimensions, une fois fixé un point O comme origine, est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On peut munir cet espace d'une base orthonormée $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, dans laquelle le vecteur $\overrightarrow{OM}$ donnant la position d'un point M se décompose comme :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \,, \tag{4.1}$$

définissant de cette manière les coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan euclidien.

Pour définir les coordonnées polaires d'un point M du plan distinct de l'origine, on peut tout d'abord tracer l'unique cercle de centre O passant par le point M, voir la figure 4.1. Le

rayon de ce cercle est noté ρ, et appelé *coordonnée radiale*, qui est un nombre réel strictement positif.

On définit ensuite l'angle ϕ, appelé *angle polaire*, comme étant l'angle orienté entre l'axe (Ox) et la droite (OM). Par convention, les angles sont orientés dans le sens trigonométrique et l'angle ϕ est choisi dans le domaine $\phi \in [0, 2\pi[$.

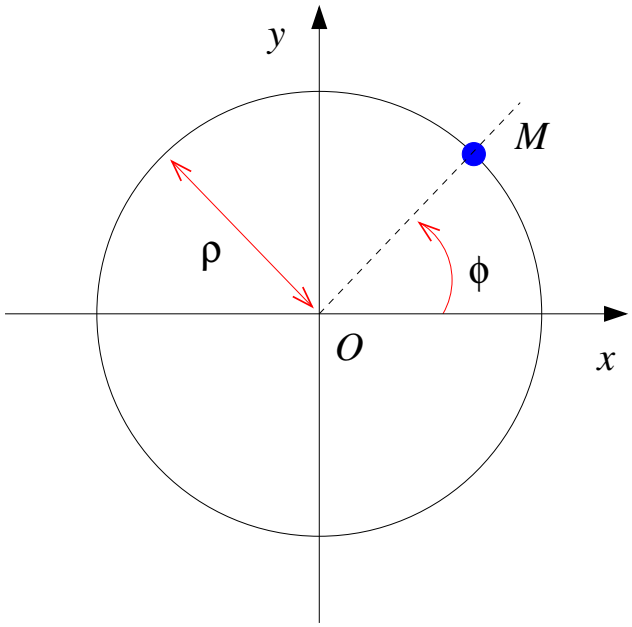


FIGURE 4.1 – Coordonnées polaires.

Mathématiquement, ces coordonnées sont reliées au concept mathématique de *feuilletage* : tout se passe comme si on « découpait » le plan en tranches de formes circulaire dont le rayon croissant est donné par ρ.

Leur propriété importante, du point de vue géométrique, est de rendre l'expression des rotations autour de l'origine particulièrement simple, car une rotation d'angle α va correspondre à une translation de la coordonée ϕ : $\phi \mapsto \phi + \alpha \mod 2\pi$. Dit autrement, les feuillets à ρ constant sont préservés par l'action des rotations.

Notons, crucialement, que les coordonnées polaires sont *dégénérées* à l'origine, dans le sens où il n'est pas possible de définir un angle polaire ϕ associé au point O. Nous en verrons plus bas une traduction analytique.

*
* *

Les relations donnant les coordonnées polaires en termes des coordonnées cartésiennes s'obtiennent par des considérations élémentaires en projetant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les deux axes. Nous avons

$$\boxed{\forall \rho > 0\,,\ \forall \phi \in [0, 2\pi[\ ,\quad \begin{cases} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi \end{cases}} \tag{4.2}$$

Nous avons donc obtenu des formules du type $x = x(\rho, \phi)$ et $y = y(\rho, \phi)$, c.-à.-d. x et y comme des applications des variables (ρ, ϕ).

Ces relations peuvent s'inverser pour donner les coordonnées polaires (ρ, ϕ) en termers des coordonnées cartésiennes (x, y). Nous avons premièrement :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \ , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \, , \tag{4.3}$$

qui n'est évidemment rien d'autre que le théorème de Pythagore.

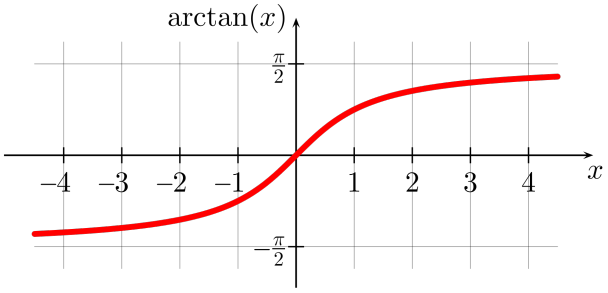


FIGURE 4.2 – Fonction arctangente.

La deuxième relation est légèrement plus subtile. Naïvement en prenant le quotient des relations (4.2) on aimerait écrire $\phi = \arctan y/x$. Le problème est que l'application arctan est définie comme la réciproque de l'application tangente sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, voir la fig. 4.2, c.-à.-d. qu'elle ne peut donner une relation $\phi = \phi(x, y)$ valable sur tout le plan. Un moyen de contourner le problème est d'utiliser l'application suivante :

$$\Phi \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \backslash 0 & \to & [0, 2\pi[\\ (x, y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} & y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} & y < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Une leçon importante que nous pouvons tirer de cet example est que, alors que les coordonnées cartésiennes sont définies sur tout le plan, les coordonnées polaires ne le sont pas car elles ne sont pas définies à l'origine ; ce sera souvent le cas pour des coordonnées curvilignes. Un moyen de bien définir les choses est de considérer que les coordonnées polaires ne sont définies que dans un certain ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ ne contenant pas O, par exemple $\mathbb{R}^2$ privé du disque unité centré à l'origine. Nous développerons ce point de vue dans la section suivante.

Cependant il est d'usage de considérer les coordonnées polaires sur tout $\mathbb{R}^2$, en associant à l'origine le point de coordonnée radiale $\rho = 0$, même si l'angle polaire ϕ n'y est pas défini ; dans ce cas on considère ρ dans le domaine $[0, +\infty[$.

4.1.2 Coordonnées cylindriques

L'espace euclidien à trois dimensions, une fois fixé un point O comme origine, est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On peut munir cet espace d'une base orthonormée directe

$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, dans laquelle le vecteur $\overrightarrow{OM}$ donnant la position d'un point M se décompose comme :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\,, \tag{4.5}$$

définissant de cette manière les coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Les coordonnées polaires sont associées à un feuilletage de l'espace euclidien à trois dimensions par des cylindres de hauteur infinie. Elles sont adaptées par exemple à l'étude du champ électrique généré par un conducteur linéaire infini.

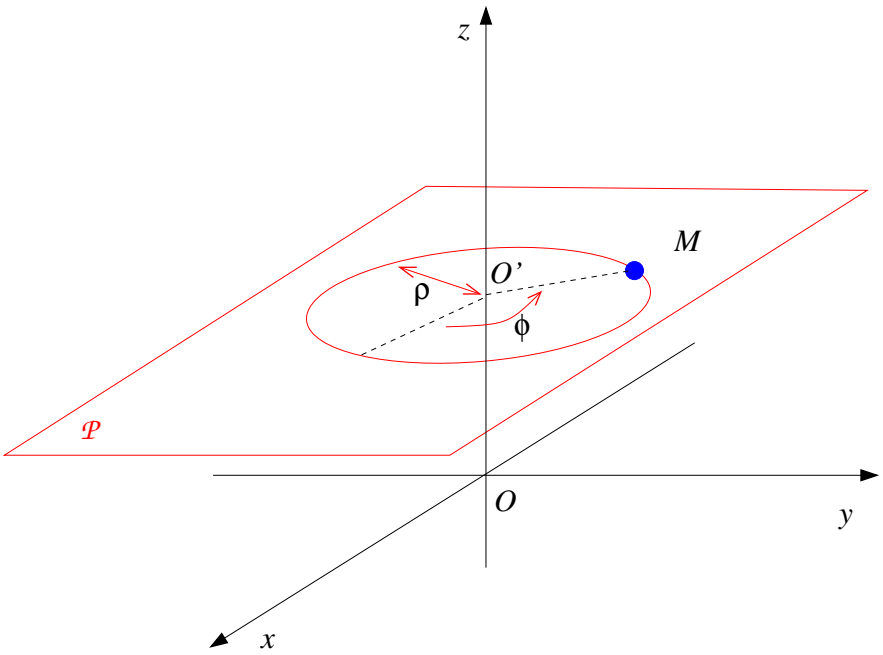


FIGURE 4.3 – Coordonnées cylindriques.

Pour définir les coordonnées cylindriques d'un point M du plan n'appartenant pas à l'axe (Oz), cf. fig 4.3, on considère tout d'abord l'unique plan $\mathcal{P}$ orthogonal à l'axe (Oz) contenant le point M, et on appelle O' l'intersection de ce plan avec l'axe (Oz). Nous définissons premièrement $\overrightarrow{OO'} = z\vec{e}_z$.

La définition des autres coordonnées correspond à celle des coordonnées polaires dans le plan $\mathcal{P}$. On trace l'unique cercle de centre O' passant par le point M, dont le rayon est noté $\rho > 0$. Comme auparavant on définit ensuite l'angle ϕ comme étant l'angle orienté entre l'axe $(O'x)$ et la droite $(O'M)$, choisi dans l'intervalle $\phi \in [0, 2\pi[$.

*
* *

Les relations entre coordonnées cartésiennes et cylindriques découlent trivialement de celles obtenues pour les coordonnées cylindriques. Nous obtenons ainsi, pour tout point M

de coordonnées (x, y, z) n'appartenant pas à l'axe (Oz) :

$$\boxed{\forall \rho > 0\,,\ \forall \phi \in [0, 2\pi[\ , \quad \begin{cases} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{cases}} \tag{4.6}$$

Nous avons donc obtenu des formules du type $x = x(\rho, \phi, z)$ et $y = y(\rho, \phi, z)$, et $z = z(\rho, \phi, z)$ où le rôle de z dans ces transformations est évidemment trivial. Pour les transformations inverses, ρ et ϕ sont obtenus à partir de x et y par les transformations (4.3,4.4).

À l'instar de l'exemple précédent, les coordonnées cylindriques, contrairement aux coordonnés cartésiennes, ne sont pas définies sur tout l'espace euclidien à trois dimensions, car l'angle polaire ϕ n'est pas défini pour tout point appartenant à l'axe (Oz). Comme expliqué précédemment il faut en toute rigueur utiliser ces coordonnées uniquement sur un ouvert ne contenant pas cet axe, par exemple l'espace euclidien privé d'un cylindre de rayon unité et de hauteur infinie centré sur l'axe (Oz).

4.1.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques forment un autre système de coordonnées très commun, pertinent pour décrire des problèmes à symétrie sphérique, comme la description du champ électrique émis par une source ponctuelle ou le champ de gravitation autour d'un astre de forme sphérique.

Pour définir les coordonnées sphériques d'un point M du plan n'appartenant pas à l'axe (Oz), cf. fig 4.4, on considère tout d'abord l'unique sphère de centre O passant par le point M ; son rayon $r > 0$ est la *coordonnée radiale* des coordonnées sphériques. L'angle entre (OM) et l'axe (Oz) est noté θ, et choisi dans l'intervalle $\theta \in]0, \pi[$. Par analogie géographique, cet angle est appelé *colatitude* (car la latitude géographique est mesurée à partir de l'équateur et non du pôle nord).

Finalement, on considère l'unique plan $\mathcal{P}$ orthogonal à l'axe (Oz) contenant le point M, et on appelle O' l'intersection de ce plan avec l'axe (Oz). L'angle ϕ l'angle orienté entre l'axe $(O'x)$ et la droite $(O'M)$, choisi par convention dans l'intervalle $\phi \in [0, 2\pi[$. Cet angle est appelé, toujours par analogie, *longitude*.

Notons que le rôle de la restriction de la colatitude θ à l'intervalle $]0, \pi[$ est d'éviter une redondance des coordonnées sphériques. En effet la rotation d'axe $\theta \mapsto \theta + \pi$ est équivalente à la transformation $(\theta, \phi) \mapsto (\pi - \theta, \phi + \pi)$.

Comme dans les exemples précédents, il est d'usage d'étendre l'utilisation des coordonnées sphériques à tout l'espace euclidien, c.-à.-d. de considérer les domaines $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi[$ et $\phi \in [0, 2\pi[$, même si ϕ n'est pas définie pour $\theta = 0 \mod \pi$, et si θ n'est pas non plus définie lorsque $r = 0$ (origine des coordonnées).

Les transformations donnant les coordonnées cartésiennes en termes des coordonnées sphé-

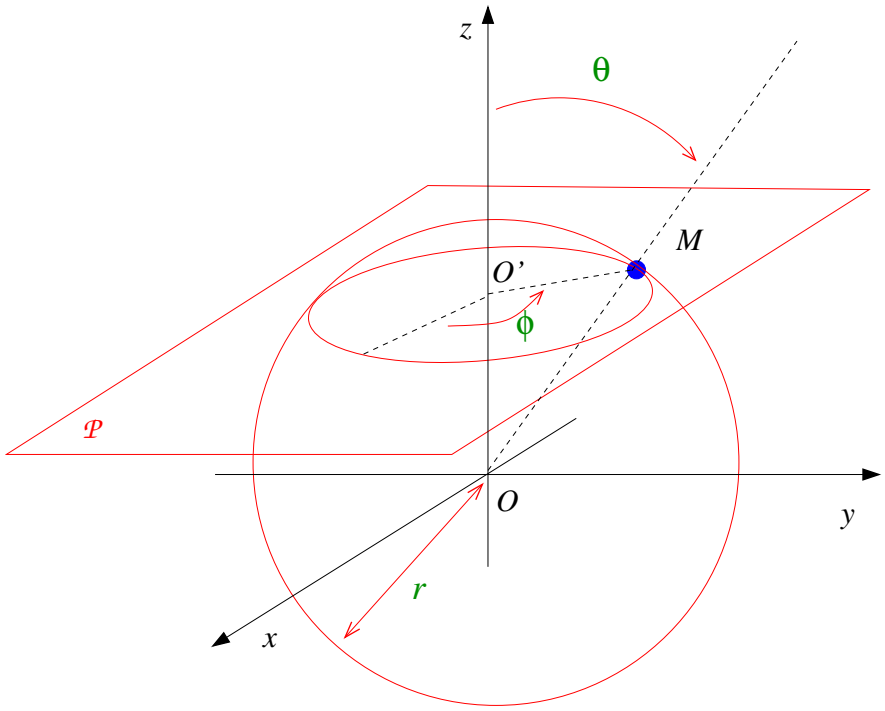


FIGURE 4.4 – Coordonnées sphériques.

riques se lisent directement sur la figure 4.4. Nous avons :

$$\boxed{\forall r > 0\,,\ \forall \theta \in]0,\pi[\,,\ \forall \phi \in [0,2\pi[\,,\quad \begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}} \tag{4.7}$$

Et pour les transformations inverses, nous trouvons pour la coordonnée radiale

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \tag{4.8}$$

puis pour la colatitude

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\,, \tag{4.9}$$

et finalement pour la longitude,

$$\phi = \Phi\ (x,y)\ , \tag{4.10}$$

en termes de la fonction Φ définie par l'éqn. (4.4).

4.2 Coordonnées curvilignes : approche générale

Dans les exemples précédents, nous avons défini de nouveaux systèmes de coordonnées sur les espaces euclidiens à 2 et 3 dimensions – ou plus rigoureusement sur des ouverts de ceux-ci – par des applications donnant les « nouvelles » coordonnées curvilignes en fonction des

« anciennes » coordonnées cartésiennes, ou par les relations inverses. L'objectif de cette section est de définir, de manière plus générale ce qu'on entend par changements de coordonnées, ainsi que les propriétés de ceux-ci.

4.2.1 Coordonnées et changement de coordonnées

La première étape est de se poser une question simple : qu'est-ce qu'un système de coordonnées en général ?

Définition 1 (système de coordonnées). *Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique et U un ouvert de $\mathcal{E}$. Un système de coordonnées sur U est une application*

$$\varphi \ : \ \begin{cases} U \subset \mathcal{E} & \to \quad U' \subset \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto \quad \varphi(M) = (x^1, \dots, x^n) \end{cases} \tag{4.11}$$

qui associe donc à tout point $M \in U$ un n-uplet de nombre réels $(x^1, \dots, x^n)$, continue et admettant une application inverse $\varphi^{-1} : U' \to U$ également continue.

Les conditions imposées sur un système de coordonnées sont relativement intuivives. Demander que φ soit une bijection, et donc inversible, permet d'avoir une correspondance univoque entre chaque point $M \subset U$ et chaque n-uplet de coordonnées $(x^1, \dots, x^n) \subset U'$. En outre, demander que φ et φ^{-1} soient continues permet de s'assurer que les notions de topologie soient identiques sur U et sur U' (voir la définition 3 du cours n° 3), par exemple que la notion de continuité y soit la même ; ainsi, par exemple, l'étude de la continuité d'une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}$ peut se faire dans un système de coordonnées arbitraire.

*
* *

Dans l'immédiat, laissons de côté la question de l'existence intrinsèque d'un système de coordonnées sur un espace abstrait $\mathcal{E}$. On considère l'espace euclidien à n dimensions, que l'on peut munir par définition d'un système de coordonnées cartésiennes $(x^1, \dots, x^n)$, qui est valable sur tout cet espace. Ces coordonnées cartésiennes peuvent donc être choisies comme coordonnées de référence.

Un autre système de coordonnées sur cet espace euclidien sera donné par un jeu de fonctions $\{\tilde{x}^i = \psi^i(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$ auquel on imposera certaines conditions de régularité pour fournir un système de coordonnées acceptable.

Théorème 1 (théorème d'inversion locale). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\psi = (\psi^1, \cdots, \psi^n) : U \mapsto \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1(U)$, c.-à.-d. dont les dérivées partielles existent et définissent des applications continues sur U. On considère le système d'équations :*

$$\begin{aligned} \psi^1(x^1, \dots, x^n) &= \tilde{x}^1 \\ \psi^2(x^1, \dots, x^n) &= \tilde{x}^2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ \psi^n(x^1, \dots, x^n) &= \tilde{x}^n \end{aligned} \tag{4.12}$$

Si le jacobien $\mathrm{jac}_\psi(x_0)$ *est non-nul (voir déf. 14 du cours n° 3), alors il existe un voisinage de* x_0 *et un voisinage de* $\tilde{x}_0 = \psi(x_0)$ *où* ψ^{-1}*, application inverse de* ψ*, est définie et est de classe* $\mathcal{C}^1$*. En conséquence, le système (4.12) y possède alors une solution unique pour les* $\{x_0^1, \ldots, x_0^n\}$ *en termes des* $\{\tilde{x}_0^1, \ldots \tilde{x}_0^n\}$*.*

En outre,la matrice jacobienne de l'application inverse existe, ou de manière équivalente $\mathrm{jac}_\psi(x_0) = \mathrm{Det}\, J_\psi(x_0)$ *est non-nul, et* $J_{\psi^{-1}}(\tilde{x}_0)$ *est donnée par l'inverse matriciel de la matrice jacobienne de l'application* ψ *en* x_0 *:*

$$J_{\psi^{-1}}(\tilde{x}_0) = J_\psi(x_0)^{-1}\,. \tag{4.13}$$

La démonstration de ce théorème, relativement technique, ne sera pas donnée ici. Contentons-nous de montrer la relation (4.13). Si l'application inverse ψ^{-1} existe et est différentiable alors nous pouvons écrire $\psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. En utilisant ensuite le théorème 3 de différentiation des applications composées du cours n° 3

$$\mathrm{d}\underbrace{(\psi^{-1} \circ \psi)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}}(x_0) = \mathrm{d}\psi^{-1}\big(\underbrace{\psi(x_0)}_{\tilde{x}_0}\big) \circ \mathrm{d}\psi(x_0) \tag{4.14}$$

La matrice jacobienne de l'application identité a pour composantes $\partial x^i/\partial x^j = \delta^i{}_j$, et est donc la matrice identité $\mathbb{I}_n$. Nous en déduisons alors la relation suivante entre les matrices jacobiennes de ψ et ψ^{-1} :

$$\mathbb{I}_n = J_{\psi^{-1}}(\tilde{x}_0) J_\psi(x_0) \quad \Longrightarrow \quad J_{\psi^{-1}}(\tilde{x}_0) = J_\psi(\tilde{x}_0)^{-1}\,. \tag{4.15}$$

□

Un changement de coordonnées pertinent doit accepter un changement de coordonnées inverse, et il est également naturel de s'assurer que le passage d'un système de coordonnées à l'autre se fait par une application suffisament régulière.

Définition 2 (coordonnées curvilignes). *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace euclidien à* n *dimensions muni de coordonnées cartésiennes* $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$*. Un système de coordonnées curvilignes* $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ *sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^n$ *est donné par une application* $\psi : U \to \mathbb{R}^n$*, de composantes* $(\psi^1, \ldots, \psi^n)$ *dans la base choisie, telle que* ψ *est de classe* $\mathcal{C}^1(U)$ *et son jacobien* $\mathrm{jac}_\psi(x)$ *ne s'annule jamais sur* U*. Les coordonnées curvilignes sur* $\mathcal{E}$ *sont alors données par* $\{\tilde{x}^i = \psi^i(x^1, \ldots, x^n),\ i = 1, \ldots, n\}$*.*

Lorsque le jacobien inverse s'annule en x_0, on dit que les coordonnées curvilignes y sont *dégénérées*.

La matrice jacobienne du changement de coordonnées et de son inverse s'expriment explicitement en termes des dérivées partielles de $\tilde{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ et des relations inverses $x^i(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$. Nous avons :

$$J_\psi(x)\big|_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i(x)}{\partial x^j}\,, \quad J_{\psi^{-1}}(\tilde{x})\big|_{ij} = \frac{\partial x^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j}\,, \tag{4.16}$$

suivant la définition générale 13 du chapitre 3.

Exemple 1 (coordonnées polaires). Reprenons l'exemple des coordonnées polaires (ρ, ϕ) dans le plan euclidien, données dans le sens direct par les relations (4.3) et (4.4) et dans le sens réciproque par (4.2). Nous avons premièrement :

$$J_{(\rho,\phi)}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \mathrm{jac}_{(\rho,\phi)}(x,y) = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \quad (4.17)$$

Nous vérifions donc que les coordonnées polaires sont définies pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, car le jacobien diverge à l'origine. De manière équivalente, nous voyons que le jacobien associé au changement de coordonnées inverse s'y annule :

$$\mathrm{jac}_{(x,y)}(\rho,\phi) = 1/\mathrm{jac}_{(\rho,\phi)}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \rho\,, \quad (4.18)$$

et retrouvons le fait que les coordonnées polaires sont dégénérées en $\rho = 0$ car l'angle polaire ϕ n'y est pas géométriquement défini.

*
* *

L'objectif de la suite de ce chapitre sera de déterminer comment définir les vecteurs et leurs produits scalaires en coordonnées curvilignes. Un point important sera que, contrairement à ce qui se passe avec les coordonnées cartésiennes, la décomposition des vecteurs dans les bases associées dépend du point auquel ces vecteurs sont « attachés », suivant la notion d'espace tangent défini dans la section 3.4 du cours n° 3.

4.2.2 Différentielle en coordonnées curvilignes

On considère une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable, où $\mathbb{R}^n$ est identifié ici avec les coordonnées cartésiennes sur un espace euclidien à n dimensions dont on a muni l'espace vectoriel associé d'un base orthonormée $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$. La différentielle de f en $x \in U$ est donnée par

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i\,, \quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i\,. \quad (4.19)$$

En termes des différentielles des applications coordonnées, voir l'exemple 9 du cours n° 3, nous obtenons naturellement la même expression :

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad \implies \quad df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \left(\sum_{j=1}^{n} v^j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} v^j \underbrace{dx^i(e_j)}_{\delta^i{}_j} \quad (4.20)$$

Considérons un système de coordonnées curvilignes sur U, défini par les transformations $\psi : x^i \mapsto \tilde{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$, ou de manière équivalente par les transformations inverses $\psi^{-1} : \tilde{x}^i \mapsto x^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)$.

Tout d'abord, nous pouvons calculer la différentielle $d\tilde{x}^i$ d'une application coordonnée $\tilde{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ en fonction des applications coordonnées dx^i. Nous avons :

$$\boxed{d\tilde{x}^i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j} \tag{4.21}$$

ainsi que la relation associée aux applications réciproques $x^j(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$:

$$dx^j(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i \,. \tag{4.22}$$

Reprenons maintenant l'expression de la différentielle d'une application f arbitraire. Dans le système de coordonnées cartésiennes d'origine, il s'agit d'une applicaton $f : x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$. Dans le nouveau système de coordonnées, nous introduisons une application :

$$F \; : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(U) \subset \mathbb{R}^n & \to & U \\ \tilde{x} & \mapsto & F(\tilde{x}) = f\big(\psi^{-1}(\tilde{x})\big) = f(x) \end{array} \right. , \tag{4.23}$$

car l'expression de la fonction en un certain point de l'espace euclidien ne doit pas dépendre des coordonnées choisies. Nous avons donc $F = f \circ \psi^{-1}$.

Nous pouvons ensuite exprimer la différentielle associée de deux manières. Nous avons d'une part directement dans les coordonnées cartésiennes :

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \,. \tag{4.24}$$

Ensuite dans les nouvelles coordonnées curvilignes nous avons d'après l'équation (4.21) :

$$dF(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j \,, \tag{4.25}$$

Rappelons que la différentielle en x d'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associe à un vecteur v le nombre $df(x)(v)$, qui exprime la variation de l'application f au voisinage du point M de coordonnées x le long du vecteur v.

Cette quantité ne doit pas dépendre du système de coordonnées choisies pour repérer le point M. En comparant les deux expressions précédentes, nous obtenons le résultat ci-dessous.

Théorème 2 dérivation en chaîne). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable, et $\psi : (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1(x^k), \ldots, \tilde{x}^n(x^k))$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de jacobien non-nul sur U (correspondant à un système de coordonnées curvilignes). Nous avons*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}^i} \,,} \tag{4.26}$$

où $F \overset{\text{déf.}}{=} f \circ \psi^{-1}$*, qui est différentiable sur* $\psi(U)$ *en conséquence du théorème 3 du cours n° 3. En termes de la matrice jacobienne, ce résultat s'écrit*

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}^i} \left(J_\psi\right)^i{}_j \,. \tag{4.27}$$

Nous pouvons naturellement obtenir la relation inverse, par un raisonnement analogue :

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \,. \tag{4.28}$$

4.2.3 Base des coordonnées

Pour bien interpréter les résultats que nous venons d'obtenir, reprenons les notions introduites dans la section 3.4 du cours n° 3. Nous y avons appris qu'il est possible d'« attacher » à chaque point M d'un espace euclidien E (ou même d'un espace plus général comme nous le verrons plus loin) un espace vectoriel, l'espace tangent $T_M E$.

La notion de vecteur y est liée à la notion de dérivée directionnelle d'une application arbitraire $f : E \to \mathbb{R}$ au point M, dans une direction spécfiée par une certaine courbe passant par M.

Dans ce contexte, nous avons indiqué qu'une base naturelle de cet espace vectoriel est fournie par les dérivées partielles selon les coordonnées :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i},\, i = 1, \ldots, n \right\} , \tag{4.29}$$

étant entendu que ces dérivées partielles agissent sur une application différentiable au point $M \in E$.

Cette notation a l'immense avantage de rentre très simple la relation entre les bases associées à différents systèmes de coordonnées.

Propriété 1 *Soit* $\{\partial/\partial x^i\}$ *une base de* $T_M E$*, l'espace vectoriel tangent au point* M *d'un espace euclidien* E*, associée à des coordonnées cartésiennes sur* E*. On considère des coordonnées curvilignes définies dans un ouvert contenant* M*, données par* $\{\tilde{x}^i(x^k),\, i = 1, \ldots, n\}$*. Une base de* $T_M E$ *associée aux coordonnées curvilignes est donnée par*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i},\, i = 1, \ldots, n \right\} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}} \tag{4.30}$$

Ces vecteurs forment alors une base de $T_M E$*, appelée base des coordonnées, associée aux coordonnées curvilignes* $\tilde{x}^j$*. En termes de la matrice jacobienne, nous avons de manière équivalente :*

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_{j=1}^{n} \left(J_\psi^{-1}\right)_i{}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{4.31}$$

Cette propriété découle directement de la définition de l'espace tangent $\mathsf{T}_M\mathsf{E}$ et du théorème 2 de dérivation en chaîne. □

L'équation (4.21), donnant de manière analogue les différentielles $d\tilde{x}^j$ en termes des différentielles des coordonnés dx^i, donne du point de vue adopté ici la base associée aux coordonnées curvilignes de l'espace dual $\mathsf{T}^\star_M\mathsf{E}$ des formes linéaires sur $\mathsf{T}_M\mathsf{E}$.

À noter, alors que la relation (4.31) pour les vecteurs de s'exprime en termes de la matrice jacobienne inverse J_ψ^{-1}, alors que la relation (4.27) pour les formes s'exprime en termes de la matrice jacobienne J_ψ directe.

Exemple 2 (base des coordonnées sphériques). Prenons l'exemple des coordonnées sphériques dans l'espace euclidien à trois dimensions, associées aux applications $r(x,y,z)$, $\theta(x,y,z)$ et $\phi(x,y,z)$ données respectivement par les équations (4.8,4.9,4.10), définies dans tout ouvert ne contenant pas l'axe (Oz).

Nous trouvons à l'aide de l'aide de la propriété 1 qu'une base des coordonnées associée aux coordonnées sphériques est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.32a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} = r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.32b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} = -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.32c}$$

Nous pouvons de la même manière obtenir la base duale de $\mathsf{T}^\star_M\mathsf{E}$, c.-à.-d. les formes linéaires dr, $d\theta$ et $d\phi$ en termes de dx, dy et dz ; ce calcul est laissé en exercice. Le changement de base inverse (c.-à.-d. exprimer dx en termes de dr, etc...) est en général plus utile. Nous avons :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi = \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \tag{4.33a}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi = \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \tag{4.33b}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \tag{4.33c}$$

D'une manière plus imagée, ces relations expriment les accroissements infinitésimaux des coordonnées sphériques en termes des accroissement infinitésimaux des coordonnées cartésiennes, au voisinage du point de coordonnées (r,θ,ϕ).

*
* *

Les coordonnées cartésiennes sont obtenues via un choix de *base orthonormée* sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ associé à un espace euclidien en dimension n. Dans un système de coordonnées curvilignes arbitraires, il n'y a pas de raison que la base des coordonnées associée soit orthogonale, ni *a fortiori* orthonormée.

Avant de faire finalement le contact avec les bases employées communément en physique, il nous reste à introduire un dernier concept, permettant de définir une notion de produit scalaire sur l'espace tangent $T_M E$ dans des coordonnées curvilignes arbitraires.

4.3 Bases locales

Nous avons introduit dans le cours n° 2 la notion générale de produit scalaire sur un espace vectoriel. En coordonnées cartésiennes, le produit scalaire est donné, en utilisant les notations développées ici pour les vecteurs de base, par

$$g(v,w) = g\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i, \sum_{j=1}^{n} w^j \partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v^i w^i \underbrace{g(\partial_i, \partial_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1,j}^{n} \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i \,. \tag{4.34}$$

Nous avons vu comment le produit scalaire est défini comme étant une forme bilinéaire (ainsi que définie et positive) ; examinons cette propriété plus en détail et sous un angle un peu différent. Si on « fixe » le vecteur v, du point de vue du vecteur w, le produit scalaire est une forme linéaire qui associe à w un nombre réel, soit une forme linéaire, c.-à.-d. un élément de l'espace dual à l'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, dont une base est donnée par les différentielles des coordonnées $\{dx^i,\, i = 1\ldots, n\}$. Si on prend le point de vue inverse, le produit scalaire est également une forme linéaire du point de vue du vecteur v et peut se développer sur la même base.

4.3.1 Tenseur métrique ⋆

Pour prendre les deux points de vue simultanément, il faut considérer un espace vectoriel plus grand, constitué de deux copies de l'espace vectoriel V considéré ; un tel espace produit, appelé *produit tensoriel*, se note $V \otimes V$. Par rapport au produit cartésien $V \times V$, nous ajoutons les propriétés :

$$v_1 \otimes (\lambda v_2) = \lambda v_1 \otimes v_2 \,, \quad (\lambda v_1) \otimes v_2 = \lambda v_1 \otimes v_2 \,, \tag{4.35a}$$

$$v_1 \otimes (v_2 + w_2) = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes w_2 \,, \quad (v_1 + w_1) \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + w_1 \otimes v_2 \,. \tag{4.35b}$$

Nous sommes donc amenés à proposer l'écriture suivante pour le produit scalaire en coordonnées cartésiennes :

$$g = \sum_{i,j=1^n} \delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \,, \tag{4.36}$$

étant entendu que la première application dx^i agit sur le premier facteur et la deuxième application dx^j sur le second facteur de l'espace $V \otimes V$:

$$\big(dx^i \otimes dx^j\big) : v \otimes w \;\mapsto\; \big(dx^i \otimes dx^j\big)(v \otimes w) = dx^i(v) dx^j(w) \,. \tag{4.37}$$

La quantité (4.36) correspond donc à une application associant à un couple de vecteurs v et w de V (c.-à.-d. à un élément $v \otimes w$ de $V \otimes V$) un nombre réel $\mathfrak{g}(v, w)$. Nous avons en effet premièrement :

$$\mathfrak{g}(v,w) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \right)(v \otimes w) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\, dx^i(v)\, dx^j(w) = \sum_{i=1}^{n} dx^i(v)\, dx^i(w) \quad (4.38)$$

et ensuite, en utilisant les décompositions de v et w dans la base orthonormée choisie et l'équation (3.48) :

$$\mathfrak{g}(v,w) = \sum_{i=1}^{n} dx^i \left(\sum_r v^r \partial_r \right) dx^i \left(\sum_s w^s \partial_s \right) = \sum_{i,r,s} v^r w^s \underbrace{dx^i(\partial_r)}_{\delta^i{}_r} \underbrace{dx^i(\partial_s)}_{\delta^i{}_s} = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i \quad (4.39)$$

En particulier, la norme carrée d'un vecteur v est alors évidemment donnée dans la base orthonormée par le théorème de Pythagore :

$$\|v\|^2 = \mathfrak{g}(v,v) = \sum_{i=1}^{n} dx^i \left(\sum_r v^r \partial_r \right) dx^i \left(\sum_s v^s \partial_s \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 . \quad (4.40)$$

Dans le contexte développé ici $\mathfrak{g}$ est appelé *tenseur métrique*, et ses composantes $\mathfrak{g}_{ij} = \delta_{ij}$ forment une matrice $n \times n$. Cette notion joue un rôle central dans la formulation mathématique de la théorie de la relativité générale.

4.3.2 Mesure locale de longueurs

Donnons une interprétation plus intuitive – un mathématicien dirait plus pédestre ! – de cette écriture. Les formes différentielles dx^i sont vues communénement en physique comme des variations infinitésimales des coordonnées correspondantes, voir la discussion dans l'exemple 9 du cours n° 3. « Oubliant » le signe $\otimes$ associé au produit tensoriel, nous réécrivons $\mathfrak{g}$ comme

$$d\ell^2 \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n} \left(dx^i \right)^2 . \quad (4.41)$$

La signification de cette expression est claire : $d\ell^2$ représente le carré de la distance infinitésimale parcourue lorsque les coordonnées x^i varient des quantités infinitésimales dx^i, toujours d'après le théorème de Pythagore ; cette quantité est librement appelée *métrique* par les physiciens.

Lors du passage des coordonnées cartésiennes à des coordonnées curvilignes arbitraires, la transformation des formes linéaires dx^i, voir l'éqn. (4.21), nous renseigne sur l'expression de la métrique dans les nouvelles coordonnées. Nous obtenons :

$$d\ell^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} d\tilde{x}^r \right) \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^s} d\tilde{x}^s \right) = \sum_{r,s=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^s} \right)}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{rs}} d\tilde{x}^r d\tilde{x}^s \quad (4.42)$$

indiquant que, dans les nouvelles coordonnées, le carré du déplacement infinitésimal s'écrit :

$$\mathrm{d}\ell^2 = \tilde{\mathfrak{g}}_{rs}\mathrm{d}\tilde{x}^r\mathrm{d}\tilde{x}^s \ , \quad \boxed{\tilde{\mathfrak{g}}_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^s}} . \tag{4.43}$$

Nous avons donc un outil nous permettant de mesurer les longueurs infinitésimales dans un système de coordonnées arbitraire.

Exemple 3 (métrique en coordonnés cylindriques). On considère les coordonnés cylindriques dans l'espace euclidien à trois dimensions. Pour tout point n'appartenant pas à l'axe (Oz), les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations inverses (4.6). Ces expressions ainsi que la relation (4.43) permettent d'obtenir immédiatement la la métrique dans les coordonnées cylindriques. Nous avons par exemple :

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\rho\rho} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \, , \tag{4.44}$$

puis

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\rho\phi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right) = -\rho\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\cos\phi = 0 \, , \tag{4.45}$$

et ainsi de suite. Nous obtenons au final :

$$\boxed{\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2} \tag{4.46}$$

Le facteur ρ^2 dans le second terme n'est pas étonnant. en effet la quantité $\rho^2\mathrm{d}\phi^2$ représente le carré de la longueur de l'arc de cercle de rayon ρ défini par l'angle $\mathrm{d}\phi$.

En pratique, il est en général plus simple d'arriver à ce résultat par une substitution directe des différentielles $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ par leurs expressions en coordonnées curvilignes. Explicitement nous avons (ou, encore une fois, le produit de différentielles est entendu comme le produit tensoriel) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}(\rho\cos\phi)\mathrm{d}(\rho\cos\phi) + \mathrm{d}(\rho\sin\phi)(\rho\sin\phi) + \mathrm{d}z^2 \\
&= (\cos\phi\mathrm{d}\rho - \rho\sin\phi\mathrm{d}\phi)^2 + (\sin\phi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\phi\mathrm{d}\phi)^2 + \mathrm{d}z^2 \\
&= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\mathrm{d}\rho^2 + (-\rho\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\cos\phi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&\qquad + (-\rho\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\cos\phi)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho + \rho^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2 \\
&= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2 \, ,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

reproduisant l'expression (4.46).

*
* *

Exemple 4 (métrique en coordonnés sphériques). Nous laissons en exercice la démonstration que la métrique à trois dimensions dans les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) est donnée par :

$$\boxed{d\ell^2 = dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)} \tag{4.48}$$

Là encore cette expression est conforme à notre intuition géométrique, voir la figure 4.4. On vérifie en particulier que :

— la quantité $r^2 d\theta^2$ est le carré de la longueur de l'arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$ situé dans le plan (Oz, OM) ;

— la quantité $r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$ est le carré de la longueur de l'arc de cercle de rayon $r\sin\theta$ et d'angle $d\theta$ situé dans le plan $\mathcal{P}$ sur la figure.

4.3.3 Base locale

Nous avons montré dans la sous-section 4.2.3 comment définir, en tout point M d'un espace euclidien E, une base de l'espace vectoriel $T_M E$ attaché à ce point dans un système de coordonnées arbitraire, via les relations (4.30) que nous reproduisons ici :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} , \tag{4.49}$$

et avons illustré par exemple par un calcul explicite en coordonnées sphériques, voir les éqn. (4.32).

Il est très commode pour les calculs dans un espace vectoriel de disposer d'une base orthonormée. Les relations ci-dessus ne garantissent en rien que la base obtenue est orthonormée ; tout dépend du système de coordonnées curvilignes choisi ; nous appelerons *base locale* une telle base de $T_M E$.

Prenons l'exemple des coordonnées sphériques. Nous pouvons vérifier, directement à l'aide de la métrique (4.48), que :

$$g(\partial_r, \partial_r) = g_{rr} = 1 , \tag{4.50a}$$
$$g(\partial_\theta, \partial_\theta) = g_{\theta\theta} = r^2 , \tag{4.50b}$$
$$g(\partial_\phi, \partial_\phi) = g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta , \tag{4.50c}$$
$$g(\partial_r, \partial_\theta) = g(\partial_r, \partial_\phi) = g(\partial_\theta, \partial_\phi) = 0 . \tag{4.50d}$$

Ainsi, cette base est bien orthogonale, mais elle n'est pas normée.

Il est possible également de faire ce calcul dans les coordonnées cartésiennes, en utilisant les relations (4.32) donnant les vecteurs de la base sphérique en termes des vecteurs de base des coordonnées cartésiennes, même si cette méthode est plus laborieuse. Nous avons par

exemple d'après (4.32b) :

$$\begin{aligned}
&g(\partial_\theta,\partial_\theta) = \\
&\quad g(r\cos\theta\cos\phi\partial_x + r\cos\theta\sin\phi\partial_y - r\sin\theta\partial_z, r\cos\theta\cos\phi\partial_x + r\cos\theta\sin\phi\partial_y - r\sin\theta\partial_z) \\
&= (r\cos\theta\cos\phi)^2 + (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2 \underbrace{\Big(\sin^2\theta \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} + \cos^2\theta\Big)}_{=1} = r^2\,,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

où nous avons utilisé le fait que la base cartésienne est une base orthonormée, c.-à.-d. que $g(\partial_x,\partial_x) = g(\partial_y,\partial_y) = g(\partial_z,\partial_z) = 1$ et $g(\partial_x,\partial_y) = g(\partial_x,\partial_z) = g(\partial_y,\partial_z) = 0$.

*
* *

Notre objectif est de construire une base constituée de vecteurs orthonormés, que nous noterons par la suite, dans un système de coordonnées curvilignes $\tilde{x}^i$, sous la forme $\{e_a(\tilde{x}),\ a = 1,\dots,n\}$. Ces vecteurs de base constituent des combinaisons linéaires des vecteurs de la base des coordonnées :

$$\boxed{e_a(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} E_a{}^i(\tilde{x})\,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}} \tag{4.52}$$

Pour former une base orthonormée, ces vecteurs doivent vérifier

$$g\big(e_a(\tilde{x}), e_b(\tilde{x})\big) = \delta_{ab}\,, \tag{4.53}$$

soit :

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} E_a{}^i(\tilde{x})\,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}, \sum_{j=1}^{n} E_b{}^j(\tilde{x})\,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} E_a{}^i(\tilde{x})E_b{}^j(\tilde{x})\,g\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}, \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right) = \delta_{ab}\,. \tag{4.54}$$

Par la suite, les indices et exposants $a, b, \dots$ seront réservés aux bases locales.

En d'autres termes, les quantités $E_a{}^i(\tilde{x})$, appelées triades dans un espace à trois dimensions (et tétrades dans l'espace temps de la relativité), satisfont à l'équation :

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}E_a{}^i(\tilde{x})E_b{}^j(\tilde{x}) = \delta_{ab}} \tag{4.55}$$

En dimension quelconque, nous pourrions utiliser le terme de *polyade* (les anglo-saxons utilisent le terme allemand de *vielbein*).

La base locale étant orthonormée, le produit scalaire s'y exprime de manière particulièrement simple, de manière identique au produit scalaire euclidien. Nous avons en effet :

$$v = \sum_{a=1}^{n} v^a e_a\,,\ w = \sum_{b=1}^{n} w^b e_b \quad\Longrightarrow\quad g(v,w) = \sum_{a,b=1}^{n} v^a w^b \underbrace{g(e_a,e_b)}_{\delta_{ab}} = \sum_{a=1}^{n} v^a w^a\,. \tag{4.56}$$

Remarque (changement de base orthonormée). ⋆ Il faut garder à l'esprit que le choix d'une base locale n'est pas unique.

Nous savons en effet qu'une base orthonormée de l'espace euclidien à trois dimensions est transformée en une autre base orthonormée par une rotation de l'espace autour de l'origine. [1] Il en est de même ici.

Si une base orthonormée en coordonnées curvilignes est spécifiée par un certain jeu de $E_a{}^i(\tilde{x})$, alors une autre base locale spécifiée par

$$\hat{E}_a{}^i(\tilde{x}) = \sum_b O_a{}^b E_a{}^i(\tilde{x})\,, \tag{4.57}$$

où O est une matrice de rotation, est également une base orthonormale. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\hat{E}_a{}^i(\tilde{x})\hat{E}_b{}^j(\tilde{x}) &= \sum_{c,d=1}^n O_a{}^c O_b{}^d \sum_{i,j=1}^n g_{ij}E_c{}^i(\tilde{x})E_d{}^j(\tilde{x}) = \sum_{c,d=1}^n O_a{}^c O_b{}^d \delta_{cd} = \sum_{c=1}^n O_a{}^c O_b{}^c \\ &= \delta_{ab}\,,\end{aligned} \tag{4.58}$$

car une matrice de rotation est une matrice orthogonale, c.-à.-d. une matrice O de taille $n\times n$ satisfaisant $OO^T = \mathbb{I}_n$.

Considérons la décomposition d'un vecteur dans une base locale :

$$v = \sum_{a=1}^n v^a e_a\,. \tag{4.59}$$

Une rotation du système de coordonnées ne doit pas changer le vecteur lui-même, mais ses composantes dans la nouvelle base après rotation sont obtenues en fonction des composantes dans l'ancienne base comme :

$$v = \sum_{a=1}^n v^a e_a = v = \sum_{a=1}^n \tilde{v}^b \underbrace{\tilde{e}_b}_{\sum_c O_b{}^c e_c} \tag{4.60}$$

4.3.4 Base locale de l'espace dual ⋆

L'espace dual de l'espace tangent $T_M E$, qui est l'espace vectoriel des formes linéaires sur $T_M E$ et est noté $T_M^\star E$, est muni, dans un système de coordonnées curvilignes arbitraire, de la base $\{d\tilde{x}^i,\ i = 1,\dots,n\}$ comme nous l'avions remarqué, voir l'éqn. 3.69, qui est duale de la base $\{\partial/\partial\tilde{x}^i,\ i = 1,\dots,n\}$, car

$$d\tilde{x}^i\big(\partial/\partial\tilde{x}^j\big) = \delta^i{}_j\,. \tag{4.61}$$

Ayant choisi une base locale de $T_M E$, qui est une base orthonormée pour les vecteurs, il est naturel de construire une base duale lui étant associée par une relation similaire à

1. Une inversion par rapport à l'origine va aussi envoyer une base orthonormée sur une autre base orthonormée, mais elle en changera l'orientation ; nous reviendrons plus loin sur ce point.

l'éqn. (4.61). Explicitement, on cherche des formes différentielles de la forme (attention à la position en exposant de « a » !) :

$$e^a = \sum_{i=1}^{n} E^a{}_i(\tilde{x}) \mathrm{d}\tilde{x}^i \,, \tag{4.62}$$

telles que

$$e^a(e_b) = \delta^a{}_b \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} E^a{}_i(\tilde{x}) \mathrm{d}\tilde{x}^i \left(\sum_{j=1}^{n} E_b{}^j(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right) = \delta^a{}_b \,, \tag{4.63}$$

soit, les applications $\mathrm{d}\tilde{x}^i$ étant linéaires et satisfaisant (4.61) :

$$\sum_{i=1}^{n} E^a{}_i(\tilde{x}) E_b{}^i(\tilde{x}) = \delta^a{}_b \,, \tag{4.64}$$

qui montre que $E^a{}_i$ peut être vu comme l'inverse au sens matriciel de $E_b{}^i(\tilde{x})$. Ayant réalisé cela il est possible d'inverser cette relation en :

$$\sum_{a=1}^{n} E_a{}^i(\tilde{x}) E^a{}_j(\tilde{x}) = \delta^i{}_j \,. \tag{4.65}$$

Une manière plus commode de trouver cette base est de remarquer que le tenseur métrique peut s'écrire dans les deux bases :

$$\mathfrak{g} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathfrak{g}_{ij} \mathrm{d}\tilde{x}^i \otimes \mathrm{d}\tilde{x}^j = \sum_{a,b=1}^{n} \delta_{ab} e^a \otimes e^b \,. \tag{4.66}$$

En effet nous avons bien en utilisant la définition 4.63

$$\mathfrak{g}(e_a, e_b) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \delta_{\alpha\beta} e^a(e_\alpha) \otimes e^b(e_\beta) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \delta_{\alpha\beta} \delta^a{}_\alpha \delta^b{}_\beta = \delta_{ab} \,, \tag{4.67}$$

en accord avec l'éqn. (4.53) définissant la base orthonormée de $T_M E$.

Finalement, en termes des bases orthonormées de $T_M E$ et de $T^\star_M E$, c.-à.-d. de l'espace tangent (vecteurs) et de son dual (formes linéaires), la correspondance entre un vecteur et la forme linéaire associée est particulièrement simple, car le produit scalaire y prend la forme du produit scalaire euclidien, voir l"éqn. (4.56). Nous avons

$$\boxed{v = \sum_{a=1}^{n} v^a e_a \;\leftrightarrow \omega = \sum_{a=1}^{n} \omega_a e^a \text{ avec } \quad \omega_a = v^a} \tag{4.68}$$

comme en coordonnées cartésiennes (correspondance vecteurs colonnes $\leftrightarrow$ vecteurs lignes). En effet,

$$\omega(w) = \sum_{a=1}^{n} \omega_a e^a \left(\sum_{b=1}^{n} w^b e_b \right) = \sum_{a=1}^{n} \omega_a w^a = \sum_{a=1}^{n} v^a w^a = v \cdot w \,. \tag{4.69}$$

4.3.5 Bases des coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

Finissons ce chapitre par une construction explicite de bases orthonormées associées aux coordonnées curvilignes usuelles à 2 et 3 dimensions. Cette partie de résumé pourra être considérée comme une mise en pratique des connaissances accumulées jusqu'ici mais également comme un formulaire à l'usage de la physique.

Les vecteurs d'une base locale en coordonnées cartésiennes formant par définition une base orthonormée, il sera utile, en particulier pour comparaison avec les ouvrages et cours de physique, de les noter $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires (ρ, ϕ) dans le plan privé de l'origine sont définies par les transformations réciproques :

$$\forall \rho > 0\,,\ \forall \phi \in [0, 2\pi[\ , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \rho \cos\phi \\ y & = & \rho \sin\phi \end{array} \right. \tag{4.70}$$

La métrique associée à ces coordonnées est donnée, en notation de physiciens, par

$$\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\phi^2\,. \tag{4.71}$$

Les vecteurs d'une base locale associée aux coordonnées polaires satisfont donc en conséquence

$$g(\partial_\rho, \partial_\rho) = 1\ , \quad g(\partial_\phi, \partial_\phi) = \rho^2 \quad \text{et} \qquad g(\partial_\rho, \partial_\phi) = 0\,. \tag{4.72}$$

Cette base est donc orthogonale mais pas normée ; une base orthonormée est fournie simplement, lorsque $\rho \neq 0$, par

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \partial_\rho\ , \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\partial_\phi} \tag{4.73}$$

Il est souvent utile d'exprimer ces vecteurs de base en fonction des vecteurs de base des coordonnées cartésiennes. Pour cela nous utiliserons

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.74a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial y} = -\rho\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{4.74b}$$

D'où nous tirons en combinant les équations (4.73) et (4.74) :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{e}_\rho & = & \cos\phi\ \vec{e}_x + \sin\phi\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi & = & -\sin\phi\ \vec{e}_x + \cos\phi\ \vec{e}_y \end{array} \right.} \tag{4.75}$$

(Exercice : vérifier que cette base est orthonormée avec le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$.)

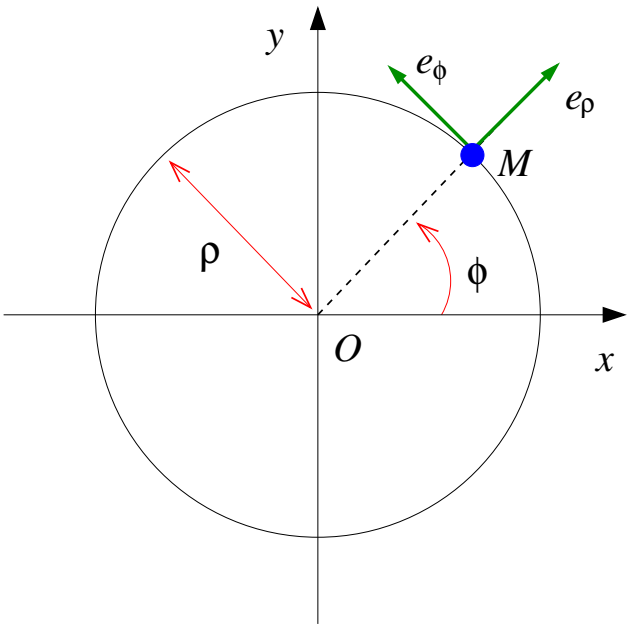


FIGURE 4.5 – Base locale orthonormée des coordonnées polaires.

Les vecteurs de cette base locale sont représentés sur la figure 4.5. Nous voyons que le vecteur unitaire $\vec{e}_\rho$ est un vecteur radial, pointant vers l'extérieur (c.-à.-d. dans la direction des ρ croissants), alors que le vecteur unitaire $\vec{e}_\phi$ est un vecteur tangent au cercle de centre O passant par M, dans la direction des angles ϕ croissants (c.-à.-d. dans le sens trigonométrique).

Notons également que les relations (4.75) entre les bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$ peuvent s'obtenir directement à partir de la figure 4.5 par des considérations de trigonométrie élémentaires, en projetant les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\phi$ sur les axes (Ox) et (Oy).

Une base orthonormée de l'espace dual peut s'obtenir simplement en écrivant d'après (4.71) la métrique sous forme factorisée :

$$\mathfrak{g} = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi = d\rho \otimes d\rho + (\rho d\phi) \otimes (\rho d\phi) \tag{4.76}$$

d'où le choix naturel

$$\boxed{e^\rho = d\rho \ , \quad e^\phi = \rho \, d\phi} \tag{4.77}$$

qui satisfait bien à la propriété (4.67). On vérifie également que

$$e^\rho(\vec{e}_\rho) = e^\phi(\vec{e}_\phi) = 1 \ , \quad e^\rho(\vec{e}_\phi) = e^\phi(\vec{e}_\rho) = 0 \, , \tag{4.78}$$

en accord avec la définition (4.63) de la base duale.

Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) dans l'espace euclidien à trois dimensions sont construites en utilisant les coordonnées polaires dans le plan (Ox, Oy) et en y ajoutant une

coordonnée z selon l'axe (Oz) ; les formules de l'exemple précédent sont donc essentiellement utilisables telles quelles.

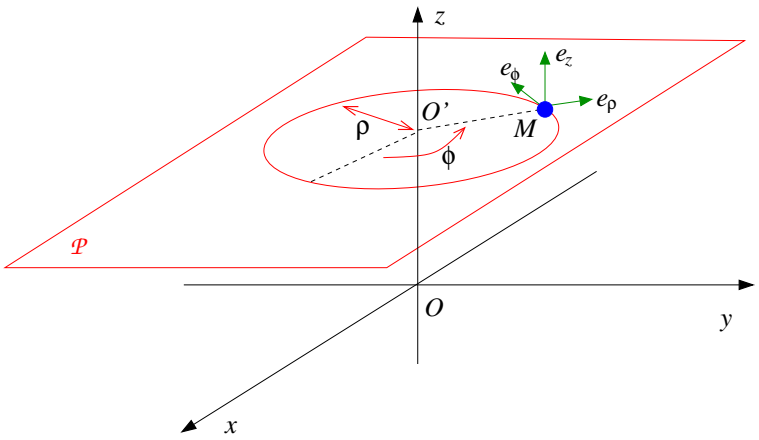


FIGURE 4.6 – Base locale orthonormée des coordonnées cylindriques.

La métrique associée aux coordonnées cylindriques est donnée, en notation de physiciens, par :

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 . \tag{4.79}$$

Une base orthonormée est fournie simplement, lorsque $\rho \neq 0$, par

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \partial_\rho \ , \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\partial_\phi \ , \quad \vec{e}_z = \partial_z .} \tag{4.80}$$

En termes des coordonnées cartésiennes nous avons (difficile d'échapper à une tautologie pour la dernière !) :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{e}_\rho &= \cos\phi\, \vec{e}_x + \sin\phi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi &= -\sin\phi\, \vec{e}_x + \cos\phi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{cases}} \tag{4.81}$$

Les vecteurs de cette base locale sont représentés sur la figure 4.6. Les vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\phi$ sont tous les deux dans le plan $\mathcal{P}$ de la figure, avec $\vec{e}_\rho$ est un vecteur radial pointant vers l'extérieur, et $\vec{e}_\phi$ tangent au cercle de centre O' passant par M, dans la direction des angles ϕ croissants ; le vecteur $\vec{e}_z$ pour sa part est selon l'axe (Oz).

Finalement la base duale de la base locale est donnée par les expressions suivantes, généralisation triviale du résultat pour les coordonnées polaires :

$$\boxed{e^\rho = d\rho \ , \quad e^\phi = \rho\, d\phi \ , \quad e^z = dz} \tag{4.82}$$

Coordonnées sphériques

Les coordonnées polaires (r, θ, ϕ) dans l'espace euclidien à trois dimensions privé de l'axe (Oz) sont définies par les transformations réciproques :

$$\forall r > 0\,,\ \forall \theta \in]0, \pi[\,,\ \forall \phi \in [0, 2\pi[\,, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta\cos\phi \\ y & = & r\cos\theta\sin\phi \\ z & = & r\cos\theta \end{array} \right. \tag{4.83}$$

La métrique associée à ces coordonnées est donnée, en notation de physiciens, par l'expression :

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\,. \tag{4.84}$$

Les vecteurs de la base locale satisfont donc en conséquence

$$\begin{aligned} &g(\partial_r, \partial_r) = 1\,, \quad g(\partial_\theta, \partial_\theta) = r^2\,, \quad g(\partial_\phi, \partial_\phi) = r^2\sin^2\theta \\ &g(\partial_r, \partial_\theta) = g(\partial_r, \partial_\phi) = g(\partial_\theta, \partial_\phi) = 0\,. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Cette base est donc orthogonale mais pas normée ; une base orthonormée est fournie simplement, lorsque $r\sin\theta \neq 0$, par

$$\boxed{\vec{e}_r = \partial_r\,, \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta\,, \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi} \tag{4.86}$$

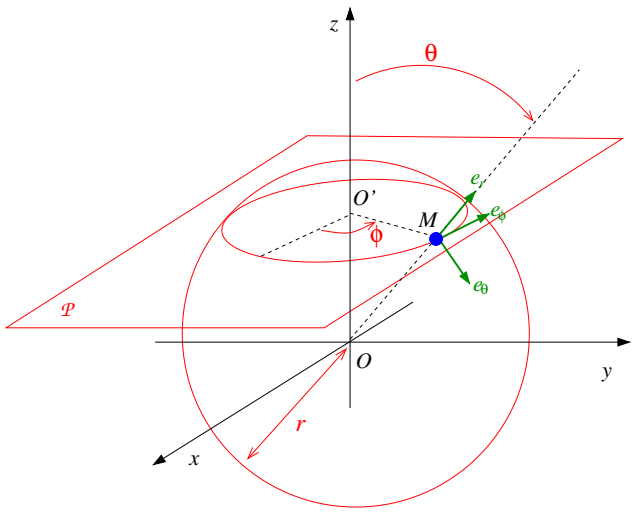


FIGURE 4.7 – Base locale des coordonnées sphériques.

L'expression de ces vecteurs de base en fonction des vecteurs de base des coordonnées cartésiennes peut s'obtenir grâce aux calculs déjà faits dans l'exemple 2, voir les équations (4.32). Nous obtenons :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{e}_r & = & \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta & = & \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi & = & -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y\,. \end{array} \right.} \tag{4.87}$$

Les vecteurs de cette base locale sont représentés sur la figure 4.7. Nous voyons en particulier que :

— le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ est un vecteur radial, pointant dans la direction des r croissants ;

— le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$ est un vecteur tangent en M au cercle méridien de centre O et d'axe des poles (Oz) contenant M, dans la direction des angles θ croissants ;

— le vecteur unitaire $\vec{e}_\phi$ est un vecteur tangent au cercle de centre O' passant par M dans le plan $\mathcal{P}$, dans la direction des angles ϕ croissants.

Comme précédemment les relations (4.87) entre les bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ peuvent s'obtenir directement à partir de la figure 4.7 par des considérations de trigonométrie élémentaires, en projetant les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\phi$ sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Finalement, nous pouvons trouver la base duale de la base locale choisie, partant de la métrique (4.84) :

$$\mathfrak{g} = dr\otimes dr + r^2\left(d\theta\otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\phi\otimes d\phi\right) = dr\otimes dr + (r d\theta)\otimes(r d\theta) + (r\sin\theta\, d\phi)\otimes(r\sin\theta d\phi) \tag{4.88}$$

suggérant la base :

$$\boxed{e^r = dr\ ,\quad e^\theta = r\, d\theta\ ,\quad e^\phi = r\sin\theta\, d\phi} \tag{4.89}$$

et on vérifie qu'il s'agit bien de la base duale de la base (4.87) ; nous avons par exemple $e^\theta(\vec{e}_\theta) = r d\theta(\partial_\theta/r) = d\theta(\partial_\theta) = 1$.

Si nécessaire cette base duale peut s'exprimer en termes de (dx, dy, dz), base duale des coordonnées cartésiennes.

Cours n°5

Gradient et intégrales curvilignes

Dans ce chapitre nous mettrons en application le formalisme développé jusqu'ici pour, d'une part, étudier plus en détail les propriétés du gradient, et d'autre par définir l'intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe.

5.1 Courbes

La notion de courbe a été introduite auparavant, voir la définition 16 du cours n° 3. Rappelons qu'une courbe lisse $\mathcal{C}$ sur un espace topologique E une application γ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers E, infiniment différentiable, qui associe à tout réel $t \in I$ un point $\gamma(t) = p \in E$.

Exemple 1 On considère la courbe $\mathcal{C}$ du plan décrite dans les coordonnées cartésiennes (x, y) par l'application :

$$\begin{cases} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix} \end{cases} \tag{5.1}$$

Cette courbe est lisse car elle est associée à une application infiniment différentiable. Géo-

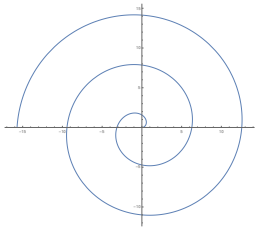


FIGURE 5.1 – Spirale d'Archimède.

métriquement, une telle courbe du plan correspond à une spirale, voir la figure 5.1, plus précisément à la spirale d'archimède.

*
* *

De manière plus générale, une application $t \mapsto \gamma(t) = p$ décrit une *courbe paramétrée*; nous nous intéressons ici à des propriétés plus globales de ces courbes que précédemment. Premièrement, une courbe γ correspondant à un certain lieu sur un espace E, elle doit être évidemment indépendante de la manière dont on a choisi le paramètre t qui la décrit.

Définition 1 (paramétrage d'une courbe). *Soit $\mathcal{C}$ une courbe sur E, associée à une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$. Si l'application $\varphi : J \to I$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, est une application bijective, continue et strictement monotone, alors l'application*

$$\gamma \circ \varphi : \begin{cases} J & \to & I \\ s & \mapsto & \gamma\big(\varphi(s)\big) \end{cases} \tag{5.2}$$

correspond à un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$.

Une courbe $\mathcal{C}$ est naturellement munie d'une orientation. Si la courbe $\mathcal{C}_{ab}$ du point a au point b est décrite par une application $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, un paramétrage φ strictement croissant va préserver l'orientation de la courbe, c.-à.-d. que $s_0 = \varphi^{-1}(0) < s_1 = \varphi^{-1}(1)$ et la courbe sera toujours parcourue dans le même sens, du point a au point b, lorsque la valeur du paramètre s croît.

En revanche, lorsqu'un paramétrage φ est une application strictement décroissante, l'orientation de la courbe s'inverse. Si on prend par exemple $\varphi : s \mapsto 1 - s$, la courbe est décrite par l'application $s \mapsto \gamma(1 - s)$, avec $s \in [0,1]$ et, lorsque la valeur du paramètre s croît, la courbe est parcourue du point b au point a.

5.1.1 Longueur d'une courbe

Nous cherchons maintenant à définir la notion de longueur d'une courbe; tout d'abord pour s'assurer que cette longueur est bien définie, il faut introduire la notion de point stationnaire.

Définition 2 (points stationnaires et ordinaires). *Soit une courbe $\mathcal{C}$ décrite par une application $\gamma \to E$. Un point $p = \gamma(0)$ est dit stationnaire si le vecteur de T_pE associé, qui s'écrit dans une base*

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i[\gamma(t)]}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pE\,, \tag{5.3}$$

est égal au vecteur nul de T_pE. Dans le cas contraire le point est appelé ordinaire.

Si p est un point ordinaire, le vecteur V défini par l'éqn. (5.3) est évidemment tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en p.

Pour comprendre comment obtenir la formule donnant la longueur d'une courbe, raisonnons à un niveau infinitésimal. Si $\gamma(0) = p$, on sait que le vecteur tangent à la courbe en un point p ordinaire se décompose dans la base locale des coordonnés comme

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i\big(\gamma(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{5.4}$$

Le carré de la norme de ce vecteur s'obtient alors simplement en termes de la métrique, ou dit autrement du produit scalaire sur T_pE. Nous avons :

$$\|V\|^2 = g(V,V) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{dx^i(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} \frac{dx^j(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} . \tag{5.5}$$

Localement, une approximation de la courbe au voisinage du point $p = \gamma(0)$ est fournie, dans l'espace tangent T_pE, par

$$\gamma(0+\delta t) = \gamma(0) + \underbrace{\frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=0}}_{V} \delta t + o(\delta t) . \tag{5.6}$$

où dans le second terme on reconnaît le vecteur V.

Considérons une courbe de longueur finie, parcourue une seule fois. Cette courbe peut être soit :

— *ouverte*, c.-à.-d. commençant et se terminant en deux points distincts, respectivement $\gamma(t_0) = a$ et $\gamma(t_1) = b$;

— *fermée*, c.-à.-d. commençant et se terminant au même point, avec $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = a$.

Une courbe de l'une ou l'autre sorte peut être décomposée en segments infinitésimaux $[t, t+\delta t]$, avec $\delta t = (t_1 - t_0)/N$, $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $[t, t+\delta t]$, si N est suffisament grand, une bonne approximation de la courbe est le segment reliant le point $\gamma(t)$ et le point $\gamma(t+\delta t)$. La longueur de ce segment est donnée par

$$\delta L(t) = \|V\|\delta t = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{dx^i(\gamma(t))}{dt} \frac{dx^j(\gamma(t))}{dt}}\, \delta t . \tag{5.7}$$

voir la figure 5.2.

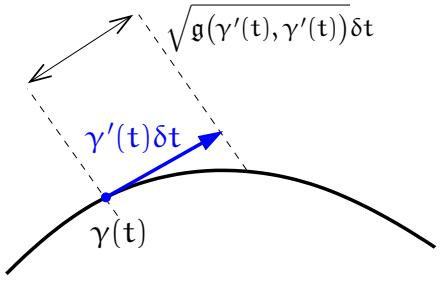


FIGURE 5.2 – Calcul de la longueur d'une courbe.

Comme pour l'intégrale de Riemann d'une fonction d'une variable réelle (cf. cours d'analyse) on obtient dans la limite $N \to \infty$ l'intégrale donnant la longueur de la courbe entre les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$:

$$L_{ab} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{dx^i(\gamma(t))}{dt} \frac{dx^j(\gamma(t))}{dt}} \tag{5.8}$$

où on a supposé que la courbe ne passait que par des points réguliers.

Rappelons que, dans cette formule, $x^i(\gamma(t))$, correspond à la i-ème coordonnée du point $p = \gamma(t)$, qui est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on notera cette application de manière plus économique par la suite :

$$x^i(t) \overset{\text{déf.}}{=} x^i(\gamma(t)) \tag{5.9}$$

donnant finalement la longueur de la courbe sous une forme plus compacte :

$$\boxed{L_{ab} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}}} \tag{5.10}$$

Exemple 2 Appliquons ce formalisme à un problème simple, le calcul de la longueur de la spirale de l'exemple 1, pour $t \in [0, \pi]$, à l'aide des coordonnées polaires. La courbe est décrite par les applications

$$\rho(t) = t\,, \quad \phi(t) = t\,. \tag{5.11}$$

De manière équivalente, on peut décrire cette courbe par la relation $\rho = \phi$.

La longueur s'obtient donc, d'après l'expression (4.76) de la métrique en coordonnées polaires :

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\Big(\frac{d\rho}{dt}\Big)^2 + \rho^2(t)\Big(\frac{d\phi}{dt}\Big)^2} = \int_0^\pi \sqrt{1 + t^2} \tag{5.12}$$

Le calcul de cette intégrale donne $L = \frac{1}{2}\Big(\pi\sqrt{1+\pi^2} + \mathrm{Argsh}(\pi)\Big)$.

Vérifions que le calcul peut se reproduire en coorodnnées cartésiennes. À partir de l'éqn. (5.1) nous trouvons :

$$\begin{aligned} L = \int_0^\pi \sqrt{\Big(\frac{dx(t)}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy(t)}{dt}\Big)^2} &= \int_0^\pi \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} \\ &= \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \int_0^\pi \sqrt{1+t^2}\,, \end{aligned} \tag{5.13}$$

donnant bien le même résultat.

*
* *

Propriété 1 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe sur E, paramétrée par une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$. La longueur L de la courbe ne dépend pas du paramétrage choisi, c.-à.-d. que, pour toute application $\varphi : J \to I$ bijective, continue et strictement monotone, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, la courbe décrite par l'application $\gamma \circ \varphi$ a la même longueur.*

Soit donc une application φ bijective, continue et strictement monotone. On supposera que φ est par exemple strictement croissante, donc que $\varphi'(s) > 0$ sur J. Nous définissons les applications composées :

$$\bar{x}^i(s) \overset{\text{déf.}}{=} (x^i \circ \varphi)(s) = x^i[\varphi(s)]\,, \tag{5.14}$$

et nous avons, en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\bar{x}^{i\,\prime}(s) = x^{i\,\prime}[\varphi(s)]\varphi'(s)\,. \tag{5.15}$$

Nous écrivons ensuite, en effectuant à la dernière étape le changement de variables dans l'intégrale $t = \varphi(s)$:

$$\begin{aligned}\int_J ds \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\bar{x}^{i\,\prime}(s)\bar{x}^{j\,\prime}(s)} &= \int_J ds \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^{i\,\prime}[\varphi(s)]x^{j\,\prime}[\varphi(s)](s)\,(\varphi'(s))^2} \\ &= \int_J \underbrace{\varphi'(s)ds}_{dt} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^{i\,\prime}[\varphi(s)]x^{j\,\prime}[\varphi(s)](s)} = \int_I dt \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^{i\,\prime}(t)x^{j\,\prime}(t)}\end{aligned} \tag{5.16}$$

prouvant que la formule (5.10) s'applique pour tout paramétrage. □

Définition 3 (abscisse curviligne). *Soit $\mathcal{C}$ une courbe sur E, entre le point a et le point b, paramétrée par une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$. On définit l'abscisse curviligne de la courbe comme le paramétrage $\varphi : s \mapsto t = \varphi(s)$ tel que*

$$\forall s \in J \quad , \quad \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\bar{x}^{i\,\prime}(s)\bar{x}^{j\,\prime}(s)} = 1\,. \tag{5.17}$$

La longueur de la courbe s'exprime alors comme

$$L_{ab} = \int_J ds\,. \tag{5.18}$$

Ce type de paramétrage est en particulier utilisé en relativité restreinte dans sa formulation lagrangienne, auquel cas s s'appelle le *temps propre* de la particule. Évidemment, la complexité du calcul de la longueur de la courbe est « transférée » dans le calcul des bornes de l'intervalle d'intégration J.

Exemple 3 Reprenons le cas de la spirale de l'exemple 1. On cherche simplement à résoudre l'équation

$$ds = \sqrt{1+t^2}\,dt \tag{5.19}$$

c.-à.-d. que s est donnée par une primitive de $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$:

$$s = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{Argsh} t\right)\,. \tag{5.20}$$

5.2 Gradient

La différentielle[1] $df(x)$ d'une application $f : E \to \mathbb{R}$ au point $p \in E$ de coordonnées x est un cas particulier de 1-forme différentielle, c.-à.-d. qu'elle appartient à l'espace dual $T_p^\star E$.

Comme nous l'avions expliqué à la section 3.4.3 du cours n° 3, l'existence d'un produit scalaire g sur l'espace vectoriel $T_p E$ permet d'associer d'une manière univoque à la différentielle df au point p un vecteur, appelé dans ce contexte *gradient* de f en p :

$$df(x) \in T_p^\star E \implies \exists\, \mathrm{grad}\, f(x) \in T_p E \quad \text{t.q.} \quad \forall v \in T_p E\,, \quad \boxed{df(x)(v) = g(\mathrm{grad}\, f(x)\,,\, v)} \tag{5.21}$$

Nous avions déjà donné son expression dans les coordonnées cartésiennes, voir l'éqn. (3.34).

Dans des coordonnées curvilignes $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ quelconques, nous souhaitons trouver l'expression du gradient dans la base locale $\{e_a, a = 1, \ldots, n\}$ qui est une base orthonormée, voir la section 4.3.3 du cours n° 4.

En choisissant une telle base, et la base duale associée $\{e^a, a = 1, \ldots, n\}$ pour les 1-formes, la correspondance entre la différentielle d'une application f et son gradient est particulièrement simple, voir l'éqn. (4.69) :

$$df(x) = \sum_{a=1}^{n} \delta_{ab} \big(\mathrm{grad}\, f(x)\big)^a e^b\,. \tag{5.22}$$

Pour trouver explicitement l'expression des composantes du gradient dans les coordonnées curvilignes choisies, nous écrivons d'une part, pour un vecteur arbitraire V :

$$df(x)(V) = \sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{5.23}$$

avec $V = \sum_i V^i \partial/\partial x^i$, et d'autre part

$$df(x)(V) = \sum_{a,b=1}^{n} \delta_{ab} \big(\mathrm{grad}\, f(x)\big)^a V^b \tag{5.24}$$

avec

$$V = \sum_{b=1}^{n} V^b e_b = \sum_{b=1}^{n} V^b \sum_{i=1}^{n} E_b{}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{b=1}^{n} V^b E_b{}^i \Big)}_{V^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.25}$$

En reportant cette expression de V^i dans l'éqn. (5.26) nous trouvons :

$$df(x)(V) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} V^b E_b{}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{b=1} \Big(\sum_{i=1}^{n} E_b{}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big) V^b\,. \tag{5.26}$$

1. Comme à de nombreuses reprises dans ce cours, pour éviter les lourdeurs inutiles, nous écrirons $f(x)$ et $df(x)$ alors que f est une application dont l'argument est un point $p \in E$; il faudrait en réalité écrire $\big(f \circ \varphi^{-1}\big)(x)$, où $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ est le système de coordonnées choisi.

Par identification les composantes du gradient sont alors données par :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} E_b{}^i(x) = \sum_{a=1}^{n} \delta_{ab} \big(\operatorname{grad} f(x)\big)^a = \big(\operatorname{grad} f(x)\big)^b . \tag{5.27}$$

En résumé nous avons obtenu le résultat suivant :

Expression du gradient dans la base locale

Dans les coordonnées curvilignes $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, le gradient d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ au point x est donné dans la base locale orthonormée $\{e_a(x),\ a = 1, \ldots, n\}$ par

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{a=1}^{n} \big(\operatorname{grad} f(x)\big)^a e_a(x) , \quad \big(\operatorname{grad} f(x)\big)^a = \sum_{i=1}^{n} E_a{}^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} , \tag{5.28}$$

ou les éléments de matrice $\{E_a{}^i(x);\ i = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n\}$ sont déterminés par :

$$e_a(x) = \sum_{i=1}^{n} E_a{}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} . \tag{5.29}$$

Gradient en coordonnées polaires

Rappelons que les vecteurs de la base locale des coordonnées polaires (ρ, ϕ) sont donnés par

$$\vec{e}_\rho = \underbrace{1}_{E_1{}^1} \times \partial_\rho , \quad \vec{e}_\phi = \underbrace{\rho^{-1}}_{E_2{}^2} \times \partial_\phi , \tag{5.30}$$

et les autres composantes de $E_a{}^i$ sont nulles car la base des coordonnées $\{\partial_\rho,\ \partial_\phi\}$ est déjà orthogonale.

On en déduit donc directement d'après l'éqn. (5.28) l'expression du gradient dans la base locale des coordonnées polaires (valable pour $\rho > 0$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(\rho, \phi) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi} \tag{5.31}$$

Gradient en coordonnées cylindriques

Rappelons que les vecteurs de la base locale des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) sont donnés par

$$\vec{e}_\rho = \underbrace{1}_{E_1{}^1} \times \partial_\rho , \quad \vec{e}_\phi = \underbrace{\rho^{-1}}_{E_2{}^2} \times \partial_\phi , \quad \vec{e}_z = \underbrace{1}_{E_3{}^3} \times \partial_z , \tag{5.32}$$

et les autres composantes de $E_a{}^i$ sont nulles car la base des coordonnées $\{\partial_\rho,\ \partial_\phi, \partial_z\}$ est déjà orthogonale.

On en déduit donc directement d'après l'éqn. (5.28) l'expression du gradient dans la base locale des coordonnées cylindriques (valable pour $\rho > 0$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\rho, \phi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\, \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial f}{\partial \phi}\, \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\, \vec{e}_z} \tag{5.33}$$

Gradient en coordonnées sphériques

Rappelons que les vecteurs de la base locale des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) sont donnés par

$$\vec{e}_r = \underbrace{1}_{E_1{}^1} \times \partial_r\,, \quad \vec{e}_\theta = \underbrace{r^{-1}}_{E_2{}^2} \times \partial_\theta\,, \quad \vec{e}_\phi = \underbrace{(r \sin\theta)^{-1}}_{E_3{}^3} \times \partial_\phi\,, \tag{5.34}$$

et les autres composantes de $E_a{}^i$ sont nulles car la base des coordonnées $\{\partial_\rho, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ est déjà orthogonale.

On en déduit donc directement d'après l'éqn. (5.28) l'expression du gradient dans la base locale des coordonnées cylindriques (valable pour $r > 0$ et $\theta \neq 0 \mod \pi$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\, \vec{e}_r + \frac{1}{r}\, \frac{\partial f}{\partial \theta}\, \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta}\, \frac{\partial f}{\partial \phi}\, \vec{e}_\phi} \tag{5.35}$$

5.2.1 Courbes et surfaces de niveau

Considérons une application qui associe à un point du plan de coordonnées (x, y) un nombre réel.

Un exemple géographique d'une telle application est l'altitude h d'un lieu en fonction de sa position sur la carte. [2] Une représentation graphique d'une telle application, familière dans ce contexte est d'utiliser la notion de *ligne de niveau*, voir la figure 5.3.

Définition 4 (ligne de niveau). *Soit une application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Une ligne de niveau de* f *est une courbe* $\mathcal{C}$ *correspondant au lieu des solutions de l'équation* $f(x, y) = c$, *c.-à.-d. :*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } f(x, y) = c\} \tag{5.36}$$

où c *appartient à l'image de* f.

Une ligne ou courbe de niveau est donc une manière alternative de définir une courbe dans le plan, comparée à la définition d'une courbe paramétrique donnée plus haut : la courbe est ici définie de manière *implicite* par l'équation $f(x, y) = c$.

Exemple 4 Considérons à nouveau l'application $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Les lignes de niveau correspondent aux points (x, y) tels que

$$x^2 + y^2 = R^2\,, \tag{5.37}$$

2. À l'échelle d'une carte au 1/25000e, la rotondité de la Terre ne joue pas de rôle !

FIGURE 5.3 – Courbes de niveau sur une carte topographique.

avec $R > 0$. On peut soit résoudre cette équation directement, donnant, lorsque $|x| \leqslant R$, $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, soit trouver le paramétrage évident de cette solution

$$\begin{cases} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{cases}, \tag{5.38}$$

correspondant à des cercles de rayon R centrés en $(x, y) = (0, 0)$.

*
* *

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 1 (fonctions implicites de deux variables). *Soit* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1(U)$*, et soit* (x_0, y_0) *une solution de l'équation*

$$f(x, y) = 0\,. \tag{5.39}$$

Si

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} \neq 0 \tag{5.40}$$

alors il existe un voisinage N_0 *de* (x_0, y_0) *dans* $\mathbb{R}^2$*, un intervalle ouvert* I *contenant* x_0*, ainsi qu'une application* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1(I)$ *telle que l'ensemble des solutions de l'équation (5.39) soit exactement de la forme :*[3]

$$\big\{(x, y) \in N_0 \text{ t.q. } f(x, y) = 0\big\} \;=\; \big\{(x,\, \varphi(x))\;,\quad x \in I\big\}\,. \tag{5.41}$$

3. Naturellement, si $\partial f/\partial x(x_0, y_0) = 0$ nous avons un résultat équivalent en échangeant les rôles des 2 variables.

En outre, la dérivée de φ en x_0 est donnée par

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}\,. \tag{5.42}$$

Pour appliquer ce théorème à l'étude des courbes de niveau, il suffit simplement de remplacer $f(x,y)$ par $\tilde{f}(x,y) = f(x,y) - c$ dont on cherche lez zéros.

Notons que la représentation de la courbe de niveau par (5.41), qui correspond au *graphe* de l'application φ, est un exemple particulier de courbe paramétrée, où la variable x elle-même joue le rôle de paramètre. La longueur d'un arc de la courbe pour $x \in [x_1, x_2]$ s'écrit dans ce cas

$$L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\varphi'(x)\right)^2}\,. \tag{5.43}$$

Cette notion de courbe de niveau se généralise naturellement en dimension supérieure. Par exemple, une équation dans $\mathbb{R}^3$ du type

$$f(x,y,z) = c \tag{5.44}$$

définit une surface, appelée surface de niveau. De manière générale,

$$\{x \in \mathbb{R}^n\ ,\quad f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n \tag{5.45}$$

définit une *hypersurface*, c.-à.-d. un sous-espace de dimension $n-1$ contenu dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5 Considérons l'application $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Les surfaces de niveau correspondent aux points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,, \tag{5.46}$$

avec $R > 0$. Un paramétrage évident de cette solution est donné par :

$$\left\{ (t_1,t_2) \in [0,\pi] \times [0,2\pi[\,,\ \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& R\sin t_1 \cos t_2 \\ y &=& R\sin t_1 \sin t_2 \\ z &=& R\cos t_1 \end{array} \right\}\right., \tag{5.47}$$

correspondant à des sphères de rayon R centrés en $(x,y,z) = (0,0,0)$.

*
* *

Pour comprendre le lien entre gradient et hypersurfaces de niveau, rappelons premièrement que la différentielle d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en x a pour propriété principale :

$$f(x+\eta) = f(x) + df(x)(\eta) + o(\eta)\,. \tag{5.48}$$

Cela signifie que, au premier ordre en $\|\eta\|$, $df(x)(\eta)$ représente la variation de la valeur f lorsqu'on s'éloigne du point x selon la distance et la direction spécifiées par le choix du vecteur $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Deuxièmement, considérons, pour une application différentiable sur $U \in \mathbb{R}^n$, une certaine hypersurface de niveau

$$\mathcal{S} = \{x \in U,\, f(x) = c\} \tag{5.49}$$

passant par le point de coordonnées $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$df(x_0)(\eta) = 0\,. \tag{5.50}$$

Posons

$$\eta = \epsilon\nu\,, \quad \epsilon > 0\,, \quad \nu \in \mathbb{R}^n\,, \quad \|\nu\| = 1\,. \tag{5.51}$$

Nous avons donc

$$f(x_0 + \epsilon\nu) = c + o(\epsilon)\,. \tag{5.52}$$

Ainsi, lorsque $\epsilon \ll 1$, $x_0 + \epsilon\nu$ est infiniment proche de l'hypersurface de niveau $\mathcal{S}$, à un terme négligeable devant ϵ près ; nous en déduisons que le vecteur ν est tangent à l'hypersurface de niveau en x_0, et qu'il appartient ainsi à l'hyperplan tangent à $\mathcal{S}$ en x_0.

Propriété 2 (Vecteur normal à une hypersurface de niveau). *Soit* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *différentiable en* x_0*, et* $\mathcal{S} = \{x \in U,\, f(x) = c\}$ *une hypersurface de niveau de* f *passant par le point de coordonnées* x_0*. Si* $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$*, alors, pour tout vecteur* $\nu \in \mathbb{R}^n$ *appartenant à l'hyperplan tangent à* $\mathcal{S}$ *en* x_0*,*

$$g(\operatorname{grad} f(x_0),\, \nu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} f(x_0) \perp \nu\,. \tag{5.53}$$

Pour cette raison, vecteur $\operatorname{grad} f(x_0)$ *est appelé vecteur normal en* x_0 *à l'hypersurface de niveau.*

Remarquons que le vecteur $\operatorname{grad} f(x_0)$, orthogonal à l'hypersurface de niveau, est orienté vers les valeurs croissantes de l'application f. Cela provient de l'expression :

$$f(x + \eta) - f(x) = g(\operatorname{grad} f(x), \eta) + o(\eta)\,, \tag{5.54}$$

qui indique que si le vecteur η est tel que $f(x + \eta) - f(x) > 0$, c.-à.-d. correspond à un déplacement dans une direction selon laquelle la valeur de f croît, alors, pour $\|\eta\|$ suffisamment petit, $g(\operatorname{grad} f(x), \eta) > 0$.

Espace tangent à une hypersurface de niveau $\star$

Il est instructif de reformuler le problème du point de vue des espaces tangents introduits dans la section 3.4 du cours n° 3.

Soit f est une application différentiable de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Si elle existe, l'hypersurface de niveau $\mathcal{S}$ définie par

$$\mathcal{S} = \{x \in U,\, f(x) = c\} \tag{5.55}$$

est en elle-même un espace de dimension $n - 1$ pour lequel nous pouvons définir, pour tout point $p \in \mathcal{S}$, la notion de vecteur de l'espace tangent $T_p\mathcal{S}$ en ce point. On considère

$$\gamma\ :\ \begin{cases} [-1, 1] & \to & \mathcal{S} \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{cases} \tag{5.56}$$

une application différentiable sur $\mathcal{S}$, telle que $\gamma(0) = p$, le point p ayant comme coordonnées $\{x_0^i, i = 1, \ldots, n\}$ dans la base choisie de $\mathbb{R}^n$.

Étant donné que l'espace $\mathcal{S}$ correspond à l'hypersurface de niveau (5.55) associée à f, nous avons

$$\forall t \in [-1, 1]\,,\ f\big(\gamma(t)\big) = c \quad \Longrightarrow \quad \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} = 0\,. \tag{5.57}$$

Dans un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{R}^n$, nous avons en particulier

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i\big(\gamma(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} f(x)\Big|_{x=x_0} = 0\,, \tag{5.58}$$

En reconnaisssant dans $v^i \overset{\text{déf.}}{=} dx^i\big(\gamma(t)\big)/dt|_{t=0}$ les coordonnées d'un vecteur v de l'espace tangent $T_{x_0}\mathcal{S}$, l'équation (5.58) indique que celui-ci satisfait :

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i f(x_0) = 0\,, \tag{5.59}$$

et est orthogonal au gradient de f en x_0. [4]

Exemple 6 Considérons les surfaces de niveau de l'application $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Comme nous l'avons vu, pour $R > 0$, les surfaces de niveau $f(x, y, z) = R^2$ sont des sphères de rayon R centrées en $(0, 0, 0)$. Dans les coordonnées cartésiennes, le gradient de f en $\vec{x}$ est donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{x}) = \partial_x f(\vec{x})\, \vec{e}_x + \partial_y f(\vec{x})\, \vec{e}_y + \partial_z f(\vec{x})\, f\vec{e}_z = 2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z\,. \tag{5.60}$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan tangent au point p, de coordonnées (x, y, z), à la sphère de rayon $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Un point p' de coordonnées (x_1, y_1, z_1) appartient à $\mathcal{P}$ si le vecteur $\overrightarrow{pp'}$ est orthogonal au gradient de f en p, soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{x}) \cdot \big(\vec{x}_1 - \vec{x}\big) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x(x_1 - x) + +2y(y_1 - y) + 2z(z_1 - z) = 0\,. \tag{5.61}$$

Reprenons le même calcul en coordonnées sphériques, dans lesquelles $f(r, \theta, \phi) = r^2$ et une sphère de niveau correspond donc à $r^2 = R^2$. Le gradient de f en p de coordonnées (R, θ, ϕ) est donné dans la base locale de $T_p\mathcal{S}$ associée à ces coordonnées sphériques par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(R, \theta, \phi) = \vec{e}_r\, \partial_r f + \frac{1}{R}\vec{e}_\theta\, \partial_\theta f + \frac{1}{R \sin\theta}\vec{e}_\phi\, \partial_\theta f = 2R\vec{e}_r\,. \tag{5.62}$$

comme attendu, le vecteur radial $\vec{e}_r$ est orthogonal au plan tangent à la sphère en p.

4. Remarquons par souci d'exactitude que nous utilisons un système de coordonnées redondant, car $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ sont des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ et nous étudions ici l'espace $\mathcal{S}$ de dimension $n - 1$.

Un point p', de coordonnées (a, b, c) dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ de $T_M\mathcal{S}$, appartient à $\mathcal{P}$ si le vecteur $\overrightarrow{pp'}$ est orthogonal au gradient de f en p, soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(r,\theta,\phi)\cdot\left((a-R)\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta + c\vec{e}_\phi\right) = 0 \implies 2R(a-R) = 0\,. \tag{5.63}$$

Le plan tangent au point p de coordonnées (r, θ, ϕ) est donc décrit dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ comme :

$$p' \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \exists b, c \in \mathbb{R}\,,\ \overrightarrow{pp'} = b\vec{e}_\theta + c\vec{e}_\phi\,. \tag{5.64}$$

5.2.2 Quelques propriétés du gradient

Propriété 3 (linéarité du gradient). *Le gradient est un opérateur différentiel linéaire, c.-à.-d. que, si* $f_1, f_2 : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sont différentiables sur* U*, pour tout* $x \in U$*, et pour tout* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*,*

$$\text{grad}\,(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \text{grad}\, f_1(x) + \lambda_2 \text{grad}\, f_2(x)\,. \tag{5.65}$$

Cette propriété découle trivialement de la linéarité de la différentielle. □.

Propriété 4 (gradient d'un produit). *Soient* $f_1\, f_2 : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *deux applications différentiables sur* U*. Pour tout* $x \in U$*, nous avons :*

$$\text{grad}\left(f_1 f_2\right)(x) = f_1(x)\text{grad}\, f_2(x) + f_2(x)\text{grad}\, f_1(x)\,. \tag{5.66}$$

Cette propriété découle directement de la propriété 5 des différentielles vue dans le cours n° 3. Nous avons :

$$\begin{aligned}\forall v \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall x \in U\,, \quad d\left(f_1 f_2\right)(x)(v) &= f_1(x)df_2(x)(v) + f_2(x)df_1(x)(v)\\ &= f_1(x)g(\text{grad}\, f_2(x), v) + f_2(x)g(\text{grad}\, f_1(x), v)\,.\end{aligned} \tag{5.67}$$

□

5.3 Intégrale curviligne

Le premier type d'intégrale en dimension supérieure que nous étudierons dans ce cours est l'intégrale d'une 1-forme différentielle ω le long d'une courbe $\mathcal{C}$, c.-à.-d. la quantité réelle :

$$I = \int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \omega_i(x^k)\, dx^i\,, \tag{5.68}$$

où $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ est un système de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$.

Une telle intégrale est appelée *intégrale curviligne* ou intégrale de contour. Vous en étudierez en grand détail une certaine classe en dimension 2 l'année prochaine, dans le cadre du cours d'analyse complexe.

On considérera comme auparavant qu'une courbe $\mathcal{C}$ dans un espace E est décrite par une application différentiable :

$$\gamma \; : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} I \subset \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \gamma(t) = p \end{array} \right. \tag{5.69}$$

associée à un certain choix de paramétrage.

On supposera dans la suite de cette section que cette courbe possède les propriétés suivantes :

— la courbe n'est parcourue qu'une seule fois, à un nombre fini de points près, c.-à.-d. que l'équation $\gamma(t) = \gamma(t')$ n'a qu'un nombre fini de solutions ;

— on considérera uniquement les paramétrages (voir la définition 1) associés à des applications strictement croissantes, afin que la courbe soit toujours parcourue dans le même sens ;

— la courbe est différentiable, ou au moins différentiable par morceaux ;

— On prendra par commodité comme intervalle de départ $I = [0, 1]$ (ce qui est toujours possible, pour une courbe de longueur finie, par un choix de paramétrage adapté).

Munissons E, dans un ouvert contenant $\gamma(I)$, image de l'application γ, d'un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$. Une 1-forme différentielle ω se décompose alors comme :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx^i \,, \tag{5.70}$$

en terme des différentielles dx^i des applications coordonnées, telles que $dx^i(\partial_j) = \delta^i{}_j$.

Rappelons que $\gamma'(t)$ correspond à un vecteur de $T_M E$, c.-à.-d. de l'espace tangent à E au point $p = \gamma(t)$ dans le sens où, pour toute une application $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable en p, nous avons :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt}\big[f\big] \overset{\text{déf.}}{=} \frac{df[\gamma(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i[\gamma(t)]}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} f(x^j) \,,$$

et correspond donc à une dérivée directionnelle dans une direction spécifiée par le comportement de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point p. Plus simplement, si γ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et que γ est une application affine, nous avons $\gamma(t) = a + vt$ et $\gamma'(t) = v$.

Considérons la quantité

$$\begin{aligned} \omega\big(p\big)[\gamma'(t)] &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i\Big(x^k\big(\gamma(t)\big)\Big) dx^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{dx^j[\gamma(t)]}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i\Big(x^k\big(\gamma(t)\big)\Big) \frac{dx^i[\gamma(t)]}{dt} \end{aligned} \tag{5.71}$$

Ce nombre réel correspond à la 1-forme ω évaluée sur un vecteur $\gamma'(t)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$, au point $p = \gamma(t)$ de coordonnées $x^i[\gamma(t)]$. Nous utiliserons à partir de mainenant les notations allégées $x^i(t) \overset{\text{déf.}}{=} x^i[\gamma(t)]$.

Étant donné que le nombre t paramètre la position sur la courbe $\mathcal{C}$, il est naturel de définir l'intégrale d'une 1-forme différentielle sur une courbe de la manière suivante :

Définition 5 (intégrale curviligne d'une 1-forme). *Soit une courbe $\mathcal{C}$ sur E paramétrée par $\gamma : [0,1] \to E$ et ω une 1-forme différentielle définie sur un ouvert contenant $\gamma([0,1])$.*

L'intégrale curviligne de la 1-forme ω le long de la courbe $\mathcal{C}$, si elle existe, est définie par :

$$\int_{\mathcal{C}} \omega \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 dt\, \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)] \tag{5.72}$$

soit, dans un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^1 dt \sum_{i=1}^{n} \omega_i\big(x^k(t)\big) \frac{dx^i(t)}{dt} \tag{5.73}$$

où $x^i(t) \overset{\text{déf.}}{=} x^i[\gamma(t)]$.

Lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est fermée, il est d'usage de noter l'intégrale sur cette courbe $\oint_{\mathcal{C}}$.

L'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle est sensible à l'orientation de la courbe choisie. En particulier, si on considère $\mathcal{C}_{ab}$ une courbe partant du point a et arrivant au point b, c.-à.-d. telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, et $\mathcal{C}_{ba}$ la courbe passant par les mêmes points mais partant du point b et arrivant au point a, nous avons

$$\int_{\mathcal{C}_{ba}} \omega = -\int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega\,. \tag{5.74}$$

En effet, si $\int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega = \int_0^1 dt\, \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)]$, on peut écrire $\int_{\mathcal{C}_{ba}} \omega = \int_1^0 dt\, \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)]$.

Propriété 5 *Soit une courbe $\mathcal{C}_{ac}$ sur E paramétrée par $\gamma : [0,1] \to E$, partant du point a et arrivant au point c, et ω une 1-forme différentielle définie sur un ouvert contenant $\gamma([0,1])$. Soit $b \in \mathcal{C}_{ac}$ un point de la courbe distinct de a et de c, tel que $\gamma(t_0) = b$ avec $0 < t_0 < 1$.*

On note $\mathcal{C}_{ab}$ la partie de la courve $\mathcal{C}_{ac}$ partant de a et finissant en b, et $\mathcal{C}_{bc}$ la partie de la courve $\mathcal{C}_{ac}$ partant de b et finissant en c. Nous avons donc :

$$\mathcal{C}_{ac} = \mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}_{bc}\,. \tag{5.75}$$

L'intégrale curviligne de la 1-forme ω le long de la courbe $\mathcal{C}_{ac}$, si elle existe, possède la propriété suivante :

$$\int_{\mathcal{C}_{ac}} \omega = \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega + \int_{\mathcal{C}_{bc}} \omega\,. \tag{5.76}$$

Pour démontrer cette propriété, il suffit d'écrire :

$$\int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega + \int_{\mathcal{C}_{bc}} \omega = \int_0^{t_0} dt\, \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)] + \int_{t_0}^1 dt\, \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)]\,, \tag{5.77}$$

et d'utiliser la relation de Chasles pour les intégrales ordinaires des fonctions d'une variable réelle, $\int_0^{t_0} dt\, f(t) + \int_{t_0}^1 dt\, f(t) = \int_0^1 dt\, f(t)$. □

Exemple 7 Soit la 1-forme différentielle

$$\omega = y dx + 2xy dy\,, \tag{5.78}$$

que l'on souhaite intégrer le long de la courbe $\mathcal{C}$, donnée par l'équation $y = x^2$ pour $x \in [0, 1]$. Nous voyons que nous pouvons utiliser x comme paramétrage de la courbe, [5] et nous avons

$$I = \int_0^1 \left(y(x) + 2xy(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + 4x^4 \right) dx = 17/15 \tag{5.79}$$

5.3.1 Circulation d'un vecteur

Le formalisme présenté dans cette section, s'il est le plus naturel du point de vue mathématique, ne correspond pas à celui utilisé par la majorité des physiciens, que nous allons présenter ici.

Nous avons vu dans la section 4.3 du cours n° 4 que l'existence du produit scalaire permet d'associer à toute 1-forme différentielle $\omega(p)$ définie sur U, un champ de vecteurs $V(p)$, via la correspondance en tout point $p \in U$:

$$\forall w \in T_p E\ , \omega(p)(w) = g\big(V(p), w\big)\,, \tag{5.80}$$

soit en composantes

$$\omega_i(p) = \sum_{j=1}^n g_{ij} V(p)^j\ , \quad g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)\,. \tag{5.81}$$

Nous pouvons ainsi définir la *circulation* du champ de vecteurs $V(p)$ sur la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par γ comme :

$$I = \int_0^1 dt\, g\big(V[\gamma(t)], \gamma'(t)\big) \tag{5.82}$$

qui, par définition, est égale à $\int_{\mathcal{C}} \omega$, où $\omega(p)$ et $V(p)$ sont reliés par l'éqn. (5.80).

*
* *

Plaçons nous dans les notations usuelles associées à l'espace euclidien à trois dimensions muni du produit scalaire euclidien $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

5. De manière équivalente, on décrit la courbe par $x(t) = t$ et $y(t) = t^2$.

Définition 6 (circulation d'un champ de vecteurs). *Dans l'espace euclidien à trois dimensions, la circulation d'un champ de vecteurs* $\vec{V}(\vec{x})$ *sur la courbe* $\mathcal{C}$ *paramétrée par l'application* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$*, notée*

$$\boxed{I = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{V}(\vec{x}) \cdot d\vec{\ell}\,,} \tag{5.83}$$

où $d\vec{\ell}$ *est compris comme l'élément d'intégration curviligne le long de la courbe* $\mathcal{C}$*, correspond à l'intégrale curviligne (5.73) de la 1-forme différentielle* $\omega(\vec{x})$ *duale au champ de vecteurs.*

Au final, le calcul pratique de la circulation s'effectue donc comme indiqué par l'éqn. (5.73), c.-à.-d. en intégrant sur la courbe la 1-forme différentielle $\omega(\vec{x})$ associée au champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{x})$ par la relation (5.80).

5.3.2 Intégrale d'une différentielle

La définition 5 de l'intégrale curviligne s'applique à toute 1-forme différentielle, en particulier à la différentielle $df(x)$ d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable sur U avec $\gamma(I) \subset U$.

Cependant, l'intégrale obtenue dans le cas d'une différentielle possède une propriété particulière. Si nous examinons l'équation (5.72), nous devons considérer la quantité

$$df\big(\gamma(t)\big)\,[\gamma'(t)]\,, \tag{5.84}$$

c.-à.-d. la différentielle de f au point $\gamma(t)$, appliquée au vecteur $\gamma'(t)$ tangent à la courbe.

Nous pouvons écrire $f[\gamma(t)] = (f \circ \gamma)(t)$ ce qui nous permet, d'après le théorème 3 du cours 3, d'obtenir :

$$d(f \circ \gamma)(t) = df\big(\gamma(t)\big)[d\gamma(t)] = df\big(\gamma(t)\big)[\gamma'(t)]dt\,, \tag{5.85}$$

d'où

$$df\big(\gamma(t)\big)[\gamma'(t)] = \frac{df\big(x(t)\big)}{dt}\,. \tag{5.86}$$

En exprimant cette quantité dans un jeu de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, on peut vérifier ce résultat d'une manière peut-être plus explicite :

$$df\big(\gamma(t)\big)[\gamma'(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\big(x(t)\big)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(t)}{\partial t} = \frac{df\big(x(t)\big)}{dt}\,. \tag{5.87}$$

L'intégrale (5.72) se résume donc à l'intégrale d'une dérivée totale par rapport à t. Nous avons ainsi montré l'important résultat suivant :

Propriété 6 (Intégrale curviligne d'une différentielle). *Soit une courbe* $\mathcal{C}$ *sur* E *paramétrée par* $\gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} \to E$ *et* $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* U*, telle que* $\gamma([0,1]) \subset U$*.*

— *si la courbe $\mathcal{C}$ est ouverte, avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors*

$$\int_{\mathcal{C}} df = f(b) - f(a)\,. \tag{5.88}$$

Ce résultat est indépendant du chemin $\mathcal{C}$ suivi de a à b (tant que $\gamma([0,1]) \subset U$);

— *si la courbe $\mathcal{C}$ est fermée, alors*

$$\oint_{\mathcal{C}} df = 0\,. \tag{5.89}$$

Ce résultat est valable pour tout chemin $\mathcal{C}$ fermé suivi (tant que $\gamma([0,1]) \subset U$).

En utilisant le concept de circulation de vecteurs utilisé par les physiciens, nous pouvons reformuler cette propriété sous la forme suivante (dans des notations adaptées à l'espace euclidien à trois dimensions) :

Propriété 7 (Intégrale d'un champ de gradient). *Soit une courbe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur U, telle que $\gamma([0,1]) \subset U$.*

— *si la courbe $\mathcal{C}$ est ouverte, avec $\gamma(0) = \vec{x}_0$ et $\gamma(1) = \vec{x}_1$, alors*

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{x}) \cdot d\vec{\ell} = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0)\,. \tag{5.90}$$

Ce résultat est indépendant du chemin $\mathcal{C}$ suivi de $\vec{x}_0$ à $\vec{x}_1$ (tant que $\gamma([0,1]) \subset U$);

— *si la courbe $\mathcal{C}$ est fermée, alors*

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{x}) \cdot d\vec{\ell} = 0\,. \tag{5.91}$$

Ce résultat est valable pour tout chemin $\mathcal{C}$ fermé suivi (tant que $\gamma([0,1]) \subset U$).

5.3.3 Forme différentielle exacte, champ de gradient

Nous avons montré précédemment que l'intégrale curviligne d'une différentielle – ou de manière équivalente la circulation d'un champ de gradient – ne dépendait que de la différence entre la valeur de l'application au point d'arrivée et au point de départ, indépendamment de la courbe choisie entre les deux points.

Une telle propriété a des conséquences importantes en physique. Par exemple, si une force dérive d'un potentiel, c.-à.-d. pour un champ de forces de la forme $\vec{F}(\vec{x}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{x})$, alors le travail de cette force, $W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, ne dépend pas du chemin suivi du point a au point b ; une telle force est dite *conservative*.

En termes des 1-formes différentielles, nous pouvons formuler le problème suivant. À quelles conditions une 1-forme différentielle $\omega(x)$ donnée, définie sur un ouvert U, correspond

à la différentielle d'une application c.-à.-d. existe-t-il une application $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable telle que

$$\forall x \in U\ , \quad \omega(x) \stackrel{?}{=} df(x)\,. \tag{5.92}$$

Une 1-forme différentielle ω satisfaisant cette propriété est appelée **1-forme différentielle exacte**.

Clairement une telle application, si elle existe, n'est pas unique. En effet, la différentielle d'une application constante $x \mapsto k$ est nulle,[6] donc si f est solution du problème, $f + k$ l'est aussi, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

En prenant le point de vue vectoriel, plus usité en physique, nous nous demandons à quelle condition un champ de vecteurs $\vec{v}(\vec{x})$ est donné par le gradient d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, c.-à.-d. s'il existe f telle que $\forall x \in U$, $\vec{v}(\vec{x}) = \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{x})$. On dit dans ce cas que $\vec{v}(\vec{x})$ forme un **champ de gradient**.

Nous verrons dans les chapitres suivants un critère *local* qui nous permet de répondre à ces questions directement. Nous pouvons dès à présent donner cependant le critère global suivant.

Propriété 8 *Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un ouvert $U \subset E$ connexe par arcs, c.-à.-d. tels que deux points quelconques peuvent être reliés par une courbe continue.*

Si la valeur de l'intégrale $\int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega$ est indépendante de la courbe $\mathcal{C}_{ab} \subset U$ suivie du point a au point b, alors la 1-forme ω est exacte, c.-à.-d. qu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ infiniment différentiable telle que, $\forall p \in U$, $\omega(p) = df(p)$.[7]

Soit ω une 1-forme différentielle sur U. Fixons un point $a \in U$. Pour tout $b \in U$, il existe une courbe $\mathcal{C}_{ab}$ continue partant de a et finissant en b, par hypothèse de connexité par arcs, et on définit alors l'application

$$f\ :\quad \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & f(b) = \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega \end{array} \right. \tag{5.93}$$

Pour fixer les choses, nous décrivons la courbe $\mathcal{C}$ par une application $\gamma : [0, 1] \to E$.

Montrons que cette application est différentiable et satisfait $df = \omega$. Dans un système de coordonnées sur U, on note $x \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées du point b et, par abus de langage, nous verrons f comme une fonction de x. Pour tout vecteur η tel que $x + \eta \in U$, alors, toujours par connexité, on peut prolonger la courbe $\mathcal{C}_{ab}$ en une courbe continue $\mathcal{C}_{ac} = \mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}_{bc}$, où c est le point de coordonnées $x + \eta$, avec $\gamma(1) = b$ et $\gamma(2) = c$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} f(x+\eta) - f(x) - \omega(x)(\eta) &= \int_{\mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}_{bc}} \omega - \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega - \omega(x)(\eta) \\ &= \int_{\mathcal{C}_{bc}} \omega - \omega(x)(\eta) = \int_1^2 dt\, \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) - \omega(x)(\eta)\,. \end{aligned} \tag{5.94}$$

6. Il suffit de revenir à la définition d'une différentielle. Si $\forall x \in E$, $f(x) = k$ alors $f(x + \eta) = f(x)$ donc $df(x) = 0$ pour tout x.

7. Notons que si, dans le cadre de la géométrie différentielle, une 1-forme différentielle ω est définie de telle sorte que ses composantes ω_i soient des applications infiniment différentiables, pour que cette propriété soit vraie il suffit qu'elles soient de classe $\mathcal{C}^1(U)$.

Par hypothèse, la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi, donc nous pouvons prendre un chemin rectiligne : $\forall t \in]1,2[$, $\gamma(t) = x + \eta(t-1)$. Nous arrivons donc à

$$\frac{f(x+\eta) - f(x) - \omega(x)(\eta)}{\|\eta\|} = \int_1^2 dt\, \frac{1}{\|\eta\|} \big\{ \omega\big(x + \eta(t-1)\big) - \omega(x) \big\}(\eta)\,. \tag{5.95}$$

Par définition, la forme différentielle ω se décompose dans la base duale $\{dx^i, i = 1, \ldots, n\}$ comme $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx^i$ où les applications $\omega_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont différentiables sur U, et en particulier continues. Nous en déduisons donc que

$$\forall t \in]1,2[\,, \quad \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \neq 0}} \frac{1}{\|\eta\|} \big\{ \omega_i\big(x + \eta(t-1)\big) - \omega_i(x) \big\} = 0\,, \tag{5.96}$$

d'où nous obtenons que

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \neq 0}} \frac{f(x+\eta) - f(x) - \omega(x)(\eta)}{\|\eta\|} = 0\,, \tag{5.97}$$

prouvant ainsi, par définition de la différentielle (voir eqn. (3.8) du cours n° 3) que, pour tout $p \in U$ de coordonnées $x \in \mathbb{R}^n$ $\omega(x) = df(x)$. □

*
* *

Nous présentons ci-dessous une variante de la propriété précédente, où on considère des intégrales sur des courbes fermées plutôt que sur des courbes ouvertes.

Propriété 9 *Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un ouvert $U \subset E$ connexe par arcs. Si, pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$ contenue dans U, $\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0$, alors la 1-forme ω est exacte, c.-à.-d. qu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ infiniment différentiable telle que, $\forall p \in U$, $\omega(p) = df(p)$.*

Pour démontrer cette propriété, il suffit, pour toute courbe $\mathcal{C}$ fermée, de prendre deux points $a, b \in \mathcal{C}$ distincts et de scinder $\mathcal{C}$ comme une union de deux courbes ouvertes ayant a et b comme extrêmités, soit

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}'_{ba}\,. \tag{5.98}$$

Nous avons alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \oint_{\mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}'_{ba}} \omega = \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega + \int_{\mathcal{C}'_{ba}} \omega = \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega - \int_{\mathcal{C}'_{ab}} \omega = 0 \implies \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega = \int_{\mathcal{C}'_{ab}} \omega\,. \tag{5.99}$$

Étant donné que $\mathcal{C}_{ab}$ et $\mathcal{C}'_{ab}$ sont deux chemins arbitraires du point a au point b, nous nous ramenons au cas de la propriété 8, démontrant la propriété annoncée. □

Exemple 8 Considérons la 1-forme différentielle

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}\,, \tag{5.100}$$

définie sur $\mathbb{R}^2\backslash_{(0,0)}$. Dans tout ouvert contenu dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H}^+$, cette 1-forme est exacte car $\omega = d(\arctan y/x)$. Nous en déduisons donc que pour tout contour fermé $\mathcal{C} \in \mathbb{H}^+$, $\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0$.

Considérons l'intégrale de ω sur une courbe fermée entourant l'origine. Nous pouvons prendre comme ouvert U le plan privé d'un disque de rayon unité autour de l'origine. En passant aux coordonnés polaires $(x, y) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, nous trouvons premièrement

$$\omega = \frac{1}{\rho^2}\left(-\rho\sin\phi(\cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi) + \rho\cos\phi(\sin\phi d\rho + \rho\cos\phi d\phi)\right) = d\phi\,. \tag{5.101}$$

L'intégrale de ω sur un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $R > 1$ est alors donnée simplement, en prenant ϕ comme paramètre de la courbe, par

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\,. \tag{5.102}$$

Ce résultat ne contredit pas le précédent car la 1-forme ω n'est pas une 1-forme différentielle exacte sur U.

Cours n°6

Formes différentielles et dérivées extérieures

Dans le cours précédent, nous avons vu le rôle primordial joué par les 1-formes différentielles pour définir des intégrales curvilignes. Nous

avons en particulier montré qu'une intégrale sur une courbe $\mathcal{C}_{ab}$ se simplifiait considérablement lorsque la 1-forme ω était *exacte*.

Nous appelerons désormais une application $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ infiniment différentiable une *0-forme différentielle*, et généraliserons la relation précédente entre 1-formes et 0-formes à une classe plus étendue d'objets appelés p*-formes différentielles*.

6.1 Produit vectoriel et déterminant

Pour motiver le concept de 2-forme différentielle, et plus tard de p-forme différentielle, revenons sur la notion de produit vectoriel. Le produit vectoriel est une application :

$$\wedge \; : \; \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{v}, \vec{w}) & \mapsto & \vec{v} \wedge \vec{w} \end{array} \right. \tag{6.1}$$

bilinéaire et antisymétrique par rapport à ses deux arguments :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v} \tag{6.2a}$$

$$\vec{v} \wedge (\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2) = \lambda_1 \vec{v} \wedge \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{v} \wedge \vec{w}_2 \tag{6.2b}$$

$$(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) \wedge \vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 \wedge \vec{w} + \lambda_2 \vec{v}_2 \wedge \vec{w} \tag{6.2c}$$

Géométriquement, le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est le vecteur dans le plan orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$, de norme $\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \times |\sin(\vec{v}, \vec{w})|$ et tel que $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w})$ forment un trièdre direct. [1]

Pour écrire de manière compacte les composantes du produit vectoriel quelques résultats élémentaires sur les permutations sont utiles.

1. Par rapport au groupes des isométries de l'espace euclidien à trois dimensions, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est appelé *pseudo-vecteur* plutôt que vecteur. Sous une inversion, $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$, un vecteur $\vec{v}$ se transforme comme $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$ alors qu'un pseudo-vecteur se transforme comme $\vec{p} \mapsto \vec{p}$, c.-à.-d. reste invariant.

Définition 1 (permutations). *Soit un ensemble de n éléments. Le groupe des permutations de n éléments S_n est l'ensemble des arrangements possible de ces éléments.*

le nombre d'éléments de S_n est donné par $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$.

Si on assigne un numéro $1, 2, \ldots, n$ à chacun des éléments sur lesquels elle agit, une permutation σ est spécifiée par son action sur les entiers $(1, 2, \ldots, n)$ et se note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Par exemple, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ est la permutation circulaire de trois éléments qui remplace le premier par le troisième, le deuxième par le premier et le troisième par le deuxième.

Définition 2 (transposition). *Une permutation $\tau_{ij} \in S_n$ est une transposition si elle échange la position des éléments i et j sans affecter les autres, soit*

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & \textcircled{i} & i+1 & \cdots & j-1 & \textcircled{j} & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & \textcircled{j} & i+1 & \cdots & j-1 & \textcircled{i} & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Les transpositions sont en quelque sorte les « briques élémentaires » permettant de décomposer une permutation arbitraire σ en une composition de transpositions successives.

Propriété 1 (parité d'une permutation). *Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. La décomposition de σ en composition de transpositions successives n'est pas unique, mais le nombre de transpositions impliquées est toujours soit pair, soit impair. Dans le premier cas la permutation est dite paire, dans le second cas impaire.*

On peut alors caractériser une permutation σ par sa *signature* $\varepsilon(\sigma)$, définie par

$$\varepsilon(\sigma) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \end{cases} \tag{6.5}$$

En particulier, pour toute paire d'indices i, j, nous avons évidemment $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$, c.-à.-d. que toute transposition a pour signature -1.

*
* *

Exemple 1 (permutation circulaire). Un cas particulier de permutation est donné par une permutations circulaire, qui agit comme un décalage circulaire d'une unité de tous les éléments, c.-à.-d.

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

en d'autres termes, chaque élément r est remplacé par l'élément $r+1$ si $0 \leqslant r+1 \leqslant n$, et l'élément n est remplacé par le premier.

On montre qu'une permutation circulaire c d'un ensemble de n éléments est paire si n est impair, et impaire si n est pair ; en effet on se convainc facilement de la décomposition suivante :

$$c = \tau_{1\,n} \circ \tau_{1\,(n-1)} \circ \cdots \tau_{13} \circ \tau_{12} \tag{6.7}$$

où $\circ$ désigne la composition de permutations successives.

Ainsi, exemple important, une permutation circulaire de 3 éléments est paire, donc de signature $\epsilon(\sigma) = 1$.

Définition 3 (symbole de Levi–Civita à trois indices). *Le symbole de Levi–Civita à trois indices, noté* ϵ_{ijk} *est déterminé par :*

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{ijk} = +1 \quad \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (123)\\
&\epsilon_{ijk} = -1 \quad \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (123)\\
&\epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{si un de ses indices apparaît au moins deux fois.}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Ainsi, plus explicitement

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{ijk} = +1 \quad \text{si} \quad (ijk) \in \big\{(1,2,3),\,(2,3,1),\,(3,1,2)\big\}\\
&\epsilon_{ijk} = -1 \quad \text{si} \quad (ijk) \in \big\{(3,2,1),\,(1,3,2),\,(2,1,3)\big\}\\
&\epsilon_{ijk} = 0 \qquad \text{sinon.}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

ou, de manière plus compacte, si $\sigma(123) = (ijk)$, alors $\epsilon_{ijk} = \varepsilon(\sigma)$.

En termes de ce symbole, il est aisé de vérifier que les composantes du produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée directe sont données par :

$$\boxed{\big(\vec{v} \wedge \vec{w}\big)^i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^i{}_{jk} v^j w^k} \tag{6.10}$$

Cette relation appelle quelques remarques :

- la position de i, j et k est choisie pour être en harmonie avec les notations du reste du cours (mais n'a pas d'incidence dans une base orthonormée) ;
- l'antisymétrie du produit vectoriel est bien vérifiée, car $\epsilon^i{}_{jk} = -\epsilon^i{}_{kj}$, ainsi que sa bilinéarité de manière évidente ;
- Le terme de droite de l'éqn. (6.10) ne comporte que deux termes éventuellement non nuls, car i, j et k sont nécessairement distincts. Par exemple, $\big(\vec{v} \wedge \vec{w}\big)^x = v^y w^z - v^z w^y$.

Notons pour finir que l'existence du produit vectoriel est une spécificité de l'espace euclidien à trois dimensions ; en effet, l'analogue à deux dimensions du produit vectoriel associe à deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$ le (pseudo-) scalaire $v^x w^y - w^y v^x$.

Définition 4 (déterminant dans $\mathbb{R}^3$). *Soient* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*, muni d'une base orthonormée* $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$*. Le déterminant de* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *est donné par*

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \tag{6.11}$$

Il s'agit donc d'une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En termes des composantes des vecteurs, le déterminant s'écrit, d'après (6.10), comme :

$$\boxed{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k .} \tag{6.12}$$

Comme nous le verrons en détail au chapitre 7, le déterminant calcule le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Les propriétés du déterminant peuvent être déduites de celles du symbole de Levi–Civita. En particulier :

— si deux des vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sont colinéaires le déterminant est nul. En effet, l'antisymétrie de ϵ_{ijk} implique par exemple que $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} a^i a^j = 0$;

— le déterminant est complètement antisymétrique par échange de ses trois arguments. [2] Nous avons en effet, pour toute permutation $\sigma \in S_3$,

$$\det(\vec{v}_{\sigma(1)}, \vec{v}_{\sigma(2)}, \vec{v}_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma) \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) , \tag{6.13}$$

propriété découlant directement de la définition (6.8) ;

— le déterminant est linéaire par rapport à chacun de ces trois arguments, c.-à.-d. triliéaire. Par exemple,

$$\det(\lambda \vec{a} + \mu \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}) = \lambda \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu \det(\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}) . \tag{6.14}$$

D'une manière plus abstraite, et plus en phase avec l'approche adoptée dans ce cours, le déterminant est une *forme trilinéaire* – c.-à.-d. une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacun de ses arguments – et totalement antisymétrique. Il est dès lors évident de généraliser le déterminant à un espace euclidien de dimension arbitraire.

Définition 5 (déterminant dans $\mathbb{R}^n$). *Soit $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Le déterminant par rapport à cette base est l'unique application n-linéaire et totalement antisymétrique,*

$$\det \; : \quad \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \det(v_1, \ldots, v_n) \end{cases} \tag{6.15}$$

telle que $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Rappelons la définition de l'antisymétrie totale ; si $\sigma \in S_n$ une permutation, nous avons

$$\det(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \det(v_1, \ldots, v_n) . \tag{6.16}$$

Les propriétés de multilinéarité et d'antisymétrie fixent la forme du déterminant à une constante multiplicative près.

2. De manière complètement équivalente, on peut présenter le déterminant comme une forme alternée, c.-à.-d. s'annulant si deux quelconque de ses arguments sont des vecteurs colinéaires.

Définition 6 (symbole de Levi–Civita à n indices). *Le symbole de Levi–Civita à n indices, noté $\epsilon_{i_1\cdots i_n}$, est déterminé par :*

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{i_1\cdots i_n} = +1 \quad \text{si } (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ est une permutation paire de } (12\cdots n)\\
&\epsilon_{i_1\cdots i_n} = -1 \quad \text{si } (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ est une permutation impaire de } (12\cdots n)\\
&\epsilon_{i_1\cdots i_n} = 0 \quad \text{si un de ses indices apparaît au moins deux fois.}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Si les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se décomposent dans la base choisie comme $v_k = \sum_i v_k^i e_i$, une forme n-linéaire F totalement antisymétrique est nécessairement donnée par : [3]

$$F(v_1, \ldots, v_n) = \alpha \sum_{i_1,\ldots,i_n} \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_n^{i_n} . \tag{6.18}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque ; en d'autre termes, les formes n-linéaires totalement antisymétriques forment un espace vectoriel de dimension 1.

En prenant comme vecteurs v_k les vecteurs de la base choisie, nous en déduisons l'expression du déterminant associé :

$$\boxed{\det(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_n^{i_n}} \tag{6.19}$$

6.2 p-formes différentielles

Résumons ce qui rapproche les deux notions que nous avons rappelées dans la section précédente, le produit vectoriel et le déterminant. Dans les deux cas, les propriétés cruciales sont premièrement la linéarité et deuxièmement l'antisymétrie par rapport à ses arguments ; techniquement, cette dernière propriété se reflète dans l'utilisation du symbole de Levi–Civita, voir les éqns. (6.10,6.12).

Le concept de p-forme différentielle permet d'unifier ces deux concepts de manière élégante. Rappelons premièrement qu'une 1-forme différentielle est définie en tout point $M \in E$ comme une forme linéaire sur l'espace tangent $T_M E$, c.-à.-d. comme un élément de $T_M^\star E$. L'existence du produit scalaire permet de faire correspondre à tout vecteur $v \in T_M E$, une forme linéaire, ce qui s'exprime dans un système de coordonnées par :

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i \quad \longleftrightarrow \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i , \quad \omega_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v^j , \tag{6.20}$$

où $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, voir la définition 18 du cours n° 3.

Définition 7 (p-forme différentielle). *On appelle p-forme différentielle sur E la donnée, en tout point $M \in E$, d'une application $\alpha(M)$:*

$$\alpha(M) \ : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} T_M E \times \cdots \times T_M E & \to & \mathbb{R} \\ (V_1, V_2, \ldots, V_p) & \mapsto & \alpha(V_1, V_2, \ldots, V_p) \end{array} \right. \tag{6.21}$$

3. Une démonstration, par récurrence, sera donnée au second semestre où les propriétés du déterminant seront étudiées plus en détail.

multilinéaire, et telle que :

— *si* $\mathcal{V}_1, \dots \mathcal{V}_p$ *sont* p *champs de vecteurs,* $\alpha(M)\big(\mathcal{V}_1(M), \dots \mathcal{V}_p(M)\big)$ *est une application de* E *dans* $\mathbb{R}$ *infiniment différentiable.*

— $\alpha(M)$ *est totalement antisymétrique par échange de ses arguments. En particulier, pour tout* $0 \leqslant i, j \leqslant p$*,*

$$\alpha(V_1, \dots, V_{\textcircled{i}}, \dots, V_{\textcircled{j}}, \dots, V_p) = -\alpha(V_1, \dots, V_{\textcircled{j}}, \dots, V_{\textcircled{i}}, \dots, V_p)\,. \tag{6.22}$$

Au lieu de présenter α comme une forme multilinéaire sur $T_M E \times \cdots \times T_M E$ on peut de manière équivalente, la définir comme une forme linéaire sur le produit tensoriel $T_M E \otimes \cdots \otimes T_M E$. Par la suite, l'espace des p-formes différentielles sur E sera noté $\wedge^p T^\star E$. Notons que cet espace a la structure d'un espace vectoriel car une combinaison linéaire de p-formes différentielles est une p-forme différentielle.

Nous voyons en particulier que **le déterminant de n champs de vecteurs dans un espace à n dimensions est une n-forme différentielle** ; nous étudierons dans le cours n° 7 le rôle particulier joué par cet objet dans la définition des intégrales.

*
* *

Le produit vectoriel, comme son nom l'indique, est un moyen de multiplier deux vecteurs entre eux et de réexprimer le résultat, qui est antisymétrique par échange des deux arguments, comme un (pseudo-)vecteur, particularité de l'espace à trois dimensions. En composantes, la construction du produit vectoriel part du produit des composantes des deux vecteurs, définissant une matrice 3×3 :

$$M^{ij} \overset{\text{déf.}}{=} v^i w^j \tag{6.23}$$

Cette matrice possède 9 composantes indépendantes. À partir de cette matrice, comme à partir de n'importe quelle matrice carrée, on peut construire une matrice antisymétrique, c.-à.-d. telle que $M^{ij} = -M^{ji}$, selon :

$$A^{ij} \overset{\text{déf.}}{=} M^{ij} - M^{ji} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & v^1 w^2 - v^2 w^1 & v^1 w^3 - v^3 w^1 \\ v^2 w^1 - v^1 w^2 & 0 & v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 & v^3 w^2 - v^2 w^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

Remarquons qu'une matrice 3×3 antisymétrique possède exactement 3 composantes indépendantes, exactement comme un vecteur. Le symbole de Levi–Civita permet de « convertir » cette matrice en un (pseudo-)vecteur, comme :

$$(\vec{v} \wedge \vec{w})^i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^i{}_{jk}\, \tfrac{1}{2}\, A^{jk}\,. \tag{6.25}$$

Le facteur $1/2$ permet d'éviter un double comptage ; en effet, comme $\epsilon^i{}_{jk}$ et A^{jk} sont antisymétriques par échange de j et k, les termes $\epsilon^i{}_{jk}A^{jk}$ et $\epsilon^i{}_{kj}A^{kj}$ (j et k étant fixés) donnent une contribution identique à la somme.

Retranscrivons ce raisonnement en termes de formes différentielles, duales à deux champs de vecteurs v et w ; L'idée est de construire une notion de produit de deux formes différentielles retranscrivant les propriétés attendues du produit vectoriel. [4]

Définition 8 (produit extérieur de 1-formes différentielles). *Soient ω et ρ des 1-formes différentielles sur E. Le produit extérieur de ω et ρ, noté $\omega \wedge \rho$, est défini en tout point $M \in E$ par une application de $T_M E \otimes T_M E$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple de vecteurs $v, w \in T_M E$,*

$$\boxed{\big(\omega \wedge \rho\big)(v \otimes w) \overset{\text{déf.}}{=} \omega(v)\rho(w) - \omega(w)\rho(v)} \tag{6.26}$$

Par construction, $\omega \wedge \rho$ étant antisymétrique, elle définit une 2-forme différentielle.

Considérons, dans un système de coordonnées sur E, le développement de ω et ρ en composantes,

$$\omega = \sum_i \omega_i \, dx^i \quad , \qquad \rho = \sum_i \rho_i \, dx^i \tag{6.27}$$

Pour développer $\omega \wedge \rho$ en termes des composantes de ω et de ρ sur cette base, nous pouvons définir de manière naturelle une base de $\wedge^2 T^\star E$, c.-à.-d. de l'espace vectoriel des 2-formes différentielles sur E.

Propriété 2 (base des 2-formes différentielles). *Soit $\{dx^i, i = 1, \dots, n\}$ une base de $T_M E^\star$, associée à un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ sur un ouvert $U \subset E$. Une base de $\wedge^2 T^\star E$ dans U, c.-à.-d. des 2-formes différentielles sur U, est donnée par*

$$\boxed{dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i} \quad , \qquad i, j = 1, \dots, n \, . \tag{6.28}$$

Si nous écrivons

$$\boxed{\omega \wedge \rho = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \rho_j \, dx^i \wedge dx^j} \tag{6.29}$$

4. L'usage anglo-saxon est de réserver le symbole $\wedge$ au produit extérieur, et d'utiliser $\times$ pour le produit vectoriel ; en France nous utilisons le même symbole pour les deux notions qui sont pourtant différentes, s'appliquant en particulier à des objets qui ne sont pas de même nature.

nous avons

$$\begin{aligned}
\big(\omega\wedge\rho\big)(v\otimes w) &= \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\rho_j\big(dx^i\wedge dx^j\big)(v\otimes w)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\rho_j\big(dx^i(v)dx^j(w)-dx^j(v)dx^i(w)\big)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\rho_j\big(v^iw^j-v^jw^i\big)\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n}\omega_iv^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_jw^j\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}\omega_iw^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_jv^j\Big)\\
&= \omega(v)\rho(w)-\omega(w)\rho(v)\,,
\end{aligned}\tag{6.30}$$

en accord avec la définition 8.

*
* *

Remarque 1 *Deux conséquences immédiates de cette définition sont :*

a) Pour tout i,

$$\boxed{dx^i\wedge dx^i=0}\tag{6.31}$$

b) Si $i\neq j$,

$$\boxed{dx^i\wedge dx^j=-dx^j\wedge dx^i}\tag{6.32}$$

Remarque 2 *Le produit des composantes des formes différentielles* $\omega_i\rho_j$ *peut être vu comme les composantes d'une matrice* $n\times n$. *Cette matrice, comme toute matrice carrée, peut être décomposée en une matrice symétrique* S *(telle que* $S_{ij}=S_{ji}$*) et une matrice antisymétrique* A *(telle que* $A_{ij}=-A_{ij}$*) selon :*

$$\omega_i\rho_j \;=\; \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\omega_i\rho_j+\omega_j\rho_i}_{S_{ij}}\Big)\;+\;\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\omega_i\rho_j-\omega_j\rho_i}_{A_{ij}}\Big)\tag{6.33}$$

Étant donné que $dx^i\wedge dx^j$ *est, par définition antisymétrique en* i *et* j, *nous avons*

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}S_{ij}\,dx^i\wedge dx^j=0 \quad\Longrightarrow\quad \omega\wedge\rho &= \sum_{i,j=1}^{n}\tfrac{1}{2}\,A_{ij}\,dx^i\wedge dx^j\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\omega_i\rho_j-\omega_j\rho_i}{2}\,dx^i\wedge dx^j\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\rho_j\,dx^i\wedge dx^j
\end{aligned}\tag{6.34}$$

En effet, si M est une matrice symétrique et N une matrice antisymétrique, nous avons en utilisant d'une part la symétrie de M_{ij} et d'autre part l'antisymétrie de N_{ij} par échange de leurs indices :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}N_{ij} &= \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} M_{ji}N_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} M_{k\ell}N_{\ell k} \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}N_{ij} &= -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}N_{ji} = -\sum_{k,\ell=1}^{n} M_{k\ell}N_{\ell k} \end{array}\right. \implies \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}N_{ij} = -\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}N_{ij} = 0\,. \tag{6.35}$$

□

*
* *

De manière analogue, une 2-forme différentielle arbitraire α (c.-à.-d. non nécessairement obtenue par produit extérieur de 1-formes) se développe sur la base $\{dx^i \wedge dx^j,\ i,j = 1,\dots,n\}$ comme

$$\boxed{\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{1}{2}\,\alpha_{ij}\,dx^i \wedge dx^j} \tag{6.36}$$

où α_{ij} sont les composantes d'une matrice antisymétrique et la présence du facteur $1/2$, purement conventionnel, peut être compris à la lumière de la remarque précédente ; il permet en effet d'éviter que chaque terme de la double somme sur i et j apparaisse avec un facteur 2, car $\alpha_{ij}dx^i \wedge dx^j = \alpha_{ji}dx^j \wedge dx^i$.

Par induction, on peut en déduire de manière itérative comment construire une base des p-formes différentielles pour p arbitraire.

Propriété 3 (base des p-formes différentielles). *Une base de l'espace vectoriel* $\wedge^p T^\star E$ *des* p*-formes différentielles est donnée par*

$$\left\{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\,,\ i_1,i_2,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\},\ k \neq \ell \implies i_k \neq i_\ell\right\} \tag{6.37}$$

où

$$\boxed{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma\in S_p} \epsilon(\sigma) dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes dx^{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{\sigma(p)}}} \tag{6.38}$$

Dans cette expression, la somme porte sur toutes les permutations σ des indices $i_1,\dots,i_n$ et chaque terme vient avec un signe correspondant à la signature $\epsilon(\sigma)$ de la permutation, voir la définition (6.5). [5]

5. Le nombre de tels vecteurs de base (donc la dimension de l'espace vectoriel $\wedge^p T^\star E$ considéré) est donné, dans un espace de dimension n, par le nombre de manières de choisir p entiers distincts parmi n, soit $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Dans une telle base de $\wedge^p T^\star E$, une p-forme différentielle α arbitraire se décompose comme :

$$\boxed{\alpha = \sum_{i_1,i_2,\ldots i_p} \frac{1}{p!}\, \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}} \tag{6.39}$$

où le facteur $1/p!$ compense les permutation des indices donnant une contribution identique à la somme sur $i_1, \ldots, i_p$; en effet pour toute permutation σ, l'antisymétrie des deux facteurs implique que :

$$\alpha_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}} dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{\sigma(p)}} = \left(\epsilon(\sigma)\alpha_{i_1\cdots i_p}\right)\left(\epsilon(\sigma) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = \alpha_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{6.40}$$

Exemple 2 (base des 3-formes différentielles) Une base des 3-formes différentielles est fournie par les vecteurs

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k =& dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k + dx^k \otimes dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^k \otimes dx^i \\ & - dx^j \otimes dx^i \otimes dx^k - dx^i \otimes dx^k \otimes dx^j - dx^k \otimes dx^j \otimes dx^i \,. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Comme attendu, cette quantité change de signe sous l'échange de deux indices, c.-à.-d. par une transposition.

*
* *

6.2.1 p-formes différentielles en dimension deux et trois

La classification des p-formes différentielles est particulièrement simple dans l'**espace euclidien à deux dimensions**. Les formes différentielles possibles sont uniquement :

- les zéro-formes, applications $f : (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ (infiniment) différentiables ;
- les 1-formes, qui se décomposent comme $\omega = \omega_x(x, y)dx + \omega_y(x, y)dy$;
- les 2-formes, qui s'écrivent toutes comme $\alpha = g(x, y)dx \wedge dy$.

Il n'existe pas de 3-formes à deux dimensions, et plus généralement de p-formes pour $p > 2$. On voit en effet que l'expression (6.41) d'un vecteur de base de $\wedge^3 T^\star E$ est nécessairement nulle s'il existe uniquement deux coordonnées possibles car elle est totalement antisymétrique par rapport à $(i, j.k)$. Nous remarquons également qu'une 2-forme ne possède qu'une composante, et est donc dans une certaine mesure équivalente à une zéro forme ; nous y reviendrons plus loin.

La classification des p-formes différentielles dans l'**espace euclidien à trois dimensions** est à peine plus complexe. Les formes différentielles possibles sont uniquement de quatre types distincts :

— les zéro-formes, applications $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ (infiniment) différentiables ;

— les 1-formes, qui se décomposent comme

$$\omega = \omega_x(x, y, z)dx + \omega_y(x, y, z)dy + \omega_z(x, y, z)dz \tag{6.42}$$

— les 2-formes, qui s'écrivent comme [6]

$$\alpha = \alpha_{xy}\, dx \wedge dy + \alpha_{yz}\, dy \wedge dz + \alpha_{zx}\, dz \wedge dx \tag{6.43}$$

— les trois-formes, qui s'écrivent toutes comme

$$\beta = g(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz\,. \tag{6.44}$$

Ainsi, les deux-formes sont des objets avec 3 composantes indépendantes, à l'instar des 1-formes. Il existe cependant une différence importante : sous l'inversion des coordonnées, $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ une 1-forme change de signe, alors qu'une 2-forme est invariante.

De même, les 3-formes possèdent une unique composante comme les zéro-formes mais se distinguent par leur comportement par rapport à l'inversion. Alors qu'une zéro-forme est évidemment invariante, une 3-forme change de signe.

Finalement, les p-formes différentielles pour $p > 3$ n'existent pas dans un espace à trois dimensions, pour une raison similaire à l'absence de 3-formes en dimension 2.

6.2.2 Opérateur de Hodge

La discussion précédente nous ont suggéré, dans un espace à n dimensions, une certaine similarité entre une zéro-forme et une n-forme et, dans le cas particulier d'un espace à trois dimensions, une similarité entre une 1-forme et une 2-forme. Ces ressemblances ne sont pas fortuites, mais manifestations d'une correspondance plus générales entre p-formes et $(n-p)$-formes dans un espace à n dimensions. Cette correspondance nous conduira *in fine* à formuler le produit vectoriel en termes de formes différentielles.

Dans cette section nous considérerons exclusivement l'espace euclidien à n dimensions, muni de coordonnées cartésiennes $\{x^i,\, i = 1, \ldots, n\}$. Les coordonnées curvilignes seront considérées dans la sous-section 6.2.3.

Définition 9 (opérateur de Hodge en coordonnées cartésiennes). *Soit un système de coordonnées cartésiennes $\{x^i,\, i = 1, \ldots, n\}$ sur un espace euclidien E de dimension n. Une base de $\wedge^p T^\star E$, c.-à.-d. de l'espace vectoriel des p-formes différentielles, est alors donnée par $\{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},\, i_k = 1, \ldots, n\}$.*

6. Précisément, la formule (6.36) donne par exemple pour le premier terme de (6.43), $\frac{1}{2}\alpha_{xy}dx \wedge dy + \frac{1}{2}\alpha_{yx}dy \wedge dx = \alpha_{xy}dx \wedge dy$, en utilisant l'antisymétrie de α_{xy} et de $dx \wedge dy$.

L'opérateur de Hodge, noté $*$, est un opérateur linéaire associant à toute p-forme différentielle une $(n-p)$-forme différentielle. Son action sur toute p-forme est déduite de son action sur la base de $\wedge^p T^\star E$:

$$\boxed{*\big(dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\cdots\wedge dx^{i_p}\big)=\frac{1}{(n-p)!}\sum_{j_{p+1},\ldots,j_n}\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_p}{}_{j_{p+1}j_{p+2}\cdots j_n}dx^{j_{p+1}}\wedge dx^{j_{p+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{j_n}} \tag{6.45}$$

Dans cette définition le facteur $1/(n-p)!$ permet d'éviter que des composantes reliées par permutation, donnant donc la même contribution à la somme, soient comptés plusieurs fois, voir la discussion similaire autour de l'éqn. (6.40)

L'action de l'opérateur de Hodge sur une p-forme quelconque ω se lit donc, en composantes, comme :

$$\begin{aligned}
*\,\omega &= *\left(\sum_{i_1,\ldots,i_p}\frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\right)=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}*\left(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\right)\\
&=\frac{1}{p!(n-p)!}\sum_{i_1,\ldots,i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}\left(\sum_{j_{p+1},\ldots,j_n}\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_p}{}_{j_{p+1}j_{p+2}\cdots j_n}dx^{j_{p+1}}\wedge dx^{j_{p+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{j_n}\right)\\
&=\sum_{j_{p+1},\ldots,j_n}\frac{1}{(n-p)!}\underbrace{\left(\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}\epsilon^{i_1 i_2\cdots i_p}{}_{j_{p+1}j_{p+2}\cdots j_n}\right)}_{(*\omega)_{j_{p+1}j_{p+2}\cdots j_n}}dx^{j_{p+1}}\wedge dx^{j_{p+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{j_n}
\end{aligned} \tag{6.46}$$

faisant apparaître les composantes $(*\omega)_{j_{p+1}j_{p+2}\cdots j_n}$ de la $(n-p)$-forme $*\omega$ dans la base cartésienne utilisée.

Propriété 4 *(**carré de l'opérateur de Hodge**). Si ω est une p-forme sur un espace de dimension n, alors*

$$*^2\omega=*(*\omega)=(-1)^{p(n-p)}\omega\,. \tag{6.47}$$

En particulier, dans un espace à trois dimensions, $*^2=1$ quelle que soit la p-forme à laquelle cet opérateur s'applique.

Exemple 3 (opérateur de Hodge en dimension 2). Examinons l'action de l'opérateur de Hodge sur les bases associées aux zéro-formes, 1-formes et 2-formes de l'espace euclidien à 2 dimensions. Nous avons

$$*\,1=dx\wedge dy \tag{6.48a}$$

$$*\,dx=dy\;,\quad *\,dy=-dx \tag{6.48b}$$

$$*\,\big(dx\wedge dy\big)=1 \tag{6.48c}$$

En effet, nous avons par exemple $*\,dx = \epsilon^x{}_y\, dy = dy$; la vérification des autres relations est laissée en exercice.

L'équation (6.48a) nous indique que l'action de $*$ sur une constante donne l'unique vecteur de base des 2-formes dans $\mathbb{R}^2$, en d'autres termes permet d'obtenir une 2-forme différentielle à partir d'une zéro forme, les deux étant effectivement déterminées par une unique application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; la relation (6.48c) se comprend de manière analogue, mais dans l'autre sens.

Exemple 4 (opérateur de Hodge en dimension 3). Examinons l'action de l'opérateur de Hodge sur les bases associées aux zéro-formes, 1-formes 2-formes et 3-formes de l'espace euclidien à 3 dimensions. Nous avons

$$*\,1 = dx\wedge dy\wedge dz \tag{6.49a}$$
$$*\,dx = dy\wedge dz \quad , \quad *\,dy = dz\wedge dx \quad , \quad *\,dz = dx\wedge dy \tag{6.49b}$$
$$*\,\big(dx\wedge dy\big) = dz\ , \quad *\big(dy\wedge dz\big) = dx\ , \quad *\big(dz\wedge dx\big) = dy \tag{6.49c}$$
$$*\,\big(dx\wedge dy\wedge dz\big) = 1 \tag{6.49d}$$

Nous avons par exemple $*\,dx = \epsilon^x{}_{yz}\, dy\wedge dz = dy\wedge dz$; la vérification des autres relations est laissée en exercice.

Notons que les différentes relations (6.49b) d'une part, et les différentes relations (6.49c) d'autre part, se déduisent les unes des autres par permutation circulaire de (x, y, z).

*
* *

Focalisons notre attention sur la relation (6.49c), qui permet d'obtenir une 1-forme à partir d'une 2-forme. En partant de l'expression (6.43) nous avons :

$$\begin{aligned} *\,\alpha &= \alpha_{xy}\ *\,\big(dx\wedge dy\big) + \alpha_{yz}\ *\,\big(dy\wedge dz\big) + \alpha_{zx}\ *\,\big(dz\wedge dx\big) \\ &= \alpha_{xy}\, dz + \alpha_{yz}\, dx + \alpha_{zx}\, dy\,. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Nous savons qu'il est possible de faire correspondre à toute 1-forme différentielle un vecteur, via le produit scalaire, voir en particulier l'équation (3.74) du cours n° 3. Dans les coordonnées cartésiennes, comme c'est le cas ici, cette relation est particulièrement simple, et nous obtenons un vecteur $\vec{v} = v^x\vec{e}_x + v^y\vec{e}_y + v^z\vec{e}_z$ de composantes :

$$\vec{v} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} \end{pmatrix}\,. \tag{6.51}$$

Cette correspondance permet de comprendre la nature du produit vectoriel $\vec{v}\wedge\vec{w}$ dans le langage des formes différentielles. Les étapes du raisonnement sont les suivantes :

a) aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ nous pouvons faire correspondre deux 1-formes différentielles,

$$\vec{v} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \\ v^z \end{pmatrix} \leftrightarrow \omega = v^x dx + v^y dy + v^z dz \tag{6.52a}$$

$$\vec{w} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} w^x \\ w^y \\ w^z \end{pmatrix} \leftrightarrow \rho = w^x dx + w^y dy + w^z dz \tag{6.52b}$$

b) On construit la 2-forme $\omega \wedge \rho$ par produit extérieur, de composantes

$$\omega \wedge \rho = \big(v^x w^y - v^y w^x\big) dx \wedge dy + \big(v^y w^z - v^z w^y\big) dy \wedge dz + \big(v^z w^x - v^x w^z\big) dz \wedge dx \tag{6.53}$$

c) On applique ensuite l'opérateur de Hodge $*$ pour obtenir une 1-forme :

$$\begin{aligned} *\left(\omega \wedge \rho\right) = \left(v^x w^y - v^y w^x\right) * \left(dx \wedge dy\right) + \left(v^y w^z - v^z w^y\right) * \left(dy \wedge dz\right) \\ + \left(v^z w^x - v^x w^z\right) * \left(dz \wedge dx\right) \end{aligned} \tag{6.54}$$

soit, en utilisant les relations (6.49c) :

$$*\big(\omega \wedge \rho\big) = \big(v^x w^y - v^y w^x\big) dz + \big(v^y w^z - v^z w^y\big) dx + \big(v^z w^x - v^x w^z\big) dy \tag{6.55}$$

d) finalement, on fait correspondre à la 1-forme $*(\omega \wedge \rho)$ un vecteur, noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$, de composantes :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} v^y w^z - v^z w^y \\ v^z w^x - v^x w^z \\ v^x w^y - v^y w^x \end{pmatrix} . \tag{6.56}$$

Cette méthode de construction du produit vectoriel est certes un peu compliquée mais permet de comprendre pourquoi l'existence du produit vectoriel est un « accident » de l'espace à trois dimensions, car en dimension n l'opérateur de Hodge appliqué à la 2-forme $\omega \wedge \rho$ donne une $n-2$ forme. Par exemple, comme nous l'avions évoqué, l'analogue du produit vectoriel à deux dimensions est un scalaire (car associé à une zéro-forme).

Définition 10 (produit vectoriel.) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux champs de vecteurs dans un espace euclidien à 3 dimensions, dont les 1-formes différentielles duales sont respectivement ω et ρ. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ avec $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le champ de vecteurs tel que, pour tout champ de vecteurs $\vec{w}$,*

$$g\big(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\big) = *\big(\omega \wedge \rho\big)(\vec{w}) . \tag{6.57}$$

6.2.3 p-formes différentielles en coordonnées curvilignes

Le formalisme que nous avons développé jusqu'ici se transpose pour la plus grande part sans difficulté à tout système de coordonnées curvilignes, en généralisant les résultats obtenus pour les 1-formes différentielles dan la section 4.2 du cours n° 4.

Il est aisé par exemple de trouver les règles de transformation des composantes d'une 2-forme différentielle lors du passage des coordonnées cartésiennes $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ aux coordonnées curvilignes $\{\tilde{x}^i, i = 1, \ldots, n\}$, en partant de l'équation (4.21) donnant la transformation des différentielles des application coordonnées.

Partons de l'égalité des développements d'une 2-forme ω dans les deux systèmes de coordonnées :

$$\omega = \sum_{i,j} \tfrac{1}{2}\, \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \sum_{k,\ell} \tfrac{1}{2}\, \tilde{\omega}_{k\ell}\, d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^\ell \tag{6.58}$$

Nous utilisons ensuite l'équation (4.22) que nous reproduisons ici :

$$dx^i(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k\,, \tag{6.59}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{i,j} \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \sum_{i,j,k,\ell} \omega_{ij}\, \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\, d\tilde{x}^k \wedge \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\ell} d\tilde{x}^\ell = \sum_{k,\ell} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\ell} \omega_{ij} \right) d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^\ell \tag{6.60}$$

Cela nous permet par identification avec l'éqn. (6.58) de trouver la loi de transformation des composantes d'une 2-forme différentielle :

$$\boxed{\tilde{\omega}_{k\ell} = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\ell} \omega_{ij}} \tag{6.61}$$

Ce résultat se généralise de manière immédiate aux lois de transformations de p-formes arbitraires.

Exemple 5 Considérons la 2-forme différentielle en coordonnées cartésiennes

$$\omega = xy\, dy \wedge dz - z^2\, dx \wedge dy\,, \tag{6.62}$$

et calculons ses composantes dans les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z). Nous avons dans le détail

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{\rho\phi} &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial \rho}\tfrac{\partial y}{\partial \phi} - \tfrac{\partial y}{\partial \rho}\tfrac{\partial x}{\partial \phi}\right) \omega_{xy} + \left(\tfrac{\partial y}{\partial \rho}\tfrac{\partial z}{\partial \phi} - \tfrac{\partial z}{\partial \rho}\tfrac{\partial y}{\partial \phi}\right) \omega_{yz} + \left(\tfrac{\partial z}{\partial \rho}\tfrac{\partial x}{\partial \phi} - \tfrac{\partial x}{\partial \rho}\tfrac{\partial z}{\partial \phi}\right) \omega_{zx} = z^2\rho \\
\tilde{\omega}_{\rho z} &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial \rho}\tfrac{\partial y}{\partial z} - \tfrac{\partial y}{\partial \rho}\tfrac{\partial x}{\partial z}\right) \omega_{xy} + \left(\tfrac{\partial y}{\partial \rho}\tfrac{\partial z}{\partial z} - \tfrac{\partial z}{\partial \rho}\tfrac{\partial y}{\partial z}\right) \omega_{yz} + \left(\tfrac{\partial z}{\partial \rho}\tfrac{\partial x}{\partial z} - \tfrac{\partial x}{\partial \rho}\tfrac{\partial z}{\partial z}\right) \omega_{zx} = \rho^2 \sin^2\phi \cos\phi \\
\tilde{\omega}_{\phi z} &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial \phi}\tfrac{\partial y}{\partial z} - \tfrac{\partial y}{\partial \phi}\tfrac{\partial x}{\partial z}\right) \omega_{xy} + \left(\tfrac{\partial y}{\partial \phi}\tfrac{\partial z}{\partial z} - \tfrac{\partial z}{\partial \phi}\tfrac{\partial y}{\partial z}\right) \omega_{yz} + \left(\tfrac{\partial z}{\partial \phi}\tfrac{\partial x}{\partial z} - \tfrac{\partial x}{\partial \phi}\tfrac{\partial z}{\partial z}\right) \omega_{zx} = \rho^3 \cos^2\phi \sin\phi
\end{aligned} \tag{6.63}$$

d'où

$$\omega = z^2\rho\, d\rho \wedge d\phi + \rho^2 \sin^2\phi \cos\phi\, d\rho \wedge dz + \rho^3 \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi \wedge dz \tag{6.64}$$

Il est egalement possible – et plus simple – d'obtenir ce résultat par une substitution directe dans ω, soit

$$\begin{aligned} xy\,dy\wedge dz - z^2\,dx\wedge dy &= \rho^2\cos\phi\sin\phi\,d\big(\rho\sin\phi\big)\wedge dz - z^2\,d(\rho\cos\phi)\wedge d(\rho\sin\phi) \\ &= \rho^2\cos\phi\sin\phi\,\big(\sin\phi d\rho + \rho\cos\phi d\phi\big)\wedge dz \\ &\quad - z^2\big(\sin\phi d\rho + \rho\cos\phi d\phi\big)\wedge\big(\cos\phi d\rho - \rho\sin\theta d\phi\big) \end{aligned} \tag{6.65}$$

donnant au final après le développement le même résultat que l'équation (6.64), en utilisant des identités telles que $d\rho\wedge d\rho = 0$, $d\rho\wedge d\phi = -d\phi\wedge d\rho$ etc., voir la remarque 1 plus haut.

*
* *

La seule véritable complication technique en coordonnées curvilignes vient avec l'introduction de l'opérateur de Hodge $*$. Pour contourner cette difficulté, et en vue également des applications physiques, il est utile de considérer une base locale associée aux coordonnées curvilignes, ainsi que sa base duale.

Rappelons que les vecteurs e_a d'une base locale sont constitués de combinaisons linéaires des vecteurs de base associés aux coordonnées, et formant une base orthonormée :

$$e_a = \sum_{i=1}^{n} E_a{}^i \partial_i \quad \text{t.q.} \qquad g(e_a, e_b) = \delta_{ab}\,, \tag{6.66}$$

et que les 1-formes de sa base duale sont définies par :

$$e^a = \sum_{i=1}^{n} E^a{}_i dx^i \quad \text{t.q.} \qquad e^a(e_b) = \delta^a{}_b\,, \tag{6.67}$$

voir la sous-section 4.3.3 du chapitre n° 4.

Il est premièrement possible de développer toute p-forme dans une base de $\wedge^p T^\star E$ associée, c.-à.-d.

$$\Big\{ e^{a_1}\wedge e^{a_2}\wedge\cdots\wedge e^{a_p}\,,\ a_1, a_2, \ldots, a_p \in \{1,\ldots,n\}\Big\} \tag{6.68}$$

donnant, par exemple pour une 2-forme différentielle,

$$\omega = \sum_{i,j} \tfrac{1}{2}\omega_{ij} dx^i\wedge dx^j = \sum_{a,b} \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_{ab} e^a\wedge e^b\,. \tag{6.69}$$

Exemple 6 Reprenons la 2-forme ω étudiée dans l'exemple 5. Dans les coordonnées cylindriques, nous avions trouvé le développement :

$$\omega = z^2\rho\,d\rho\wedge d\phi + \rho^2\sin^2\phi\cos\phi\,d\rho\wedge dz + \rho^3\cos^2\phi\sin\phi\,d\phi\wedge dz \tag{6.70}$$

Rappelons également l'expression de la base locale duale, voir l'éqn. (4.82) du chapitre n° 4 :

$$e^\rho = d\rho\,,\quad e^\phi = \rho\,d\phi\,,\quad e^z = dz \tag{6.71}$$

En subsitutant les différentielles $d\rho, d\phi, dz$ en termes des 1-formes e^ρ, e^ϕ, e^z nous trouvons alors :

$$\omega = z^2\, e^\rho \wedge e^\phi + \rho^2 \sin^2\phi \cos\phi\, e^\rho \wedge e^z + \rho^2 \cos^2\phi \sin\phi\, e^\phi \wedge e^z\,. \tag{6.72}$$

*
* *

Définition 11 (opérateur de Hodge dans la base locale). *Soit* $\{\tilde{x}^i, i = 1, \ldots, n\}$ *un système de coordonnées curvilignes et* $\{e^a, a = 1, \ldots, n\}$ *une base locale duale associée. L'action de l'opérateur de Hodge* $*$ *sur les* p*-formes est défini dans cette base par son action sur les produits extérieurs de 1-formes* e^a *:*

$$*\big(e^{a_1} \wedge e^{a_2} \cdots \wedge e^{a_p}\big) = \frac{1}{(n-p)!} \sum_{b_{p+1},\ldots,b_n} \epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_{p+1} b_{p+2} \cdots b_n}\, e^{b_{p+1}} \wedge e^{b_{p+2}} \wedge \cdots \wedge e^{b_n} \tag{6.73}$$

Prenons l'exemple de l'opérateur de Hodge en dimension 3, qui se traite de manière très similaire à celui des coordonnées cartésiennes, voir l'éqn. (6.49) plus haut. Le rôle de dx, dy, et dz est tenu dans la nouvelle base par les 1-formes e^1, e^2 et e^3 et nous avons ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned}
&*1 = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 && (6.74a)\\
&*e^1 = e^2 \wedge e^3 \quad , \quad *e^2 = e^3 \wedge e^1 \quad , \quad *e^3 = e^1 \wedge e^2 && (6.74b)\\
&*\big(e^1 \wedge e^2\big) = e^3 \ , \quad *\big(e^2 \wedge e^3\big) = e^1 \ , \quad *\big(e^3 \wedge e^1\big) = e^2 && (6.74c)\\
&*\big(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3\big) = 1 && (6.74d)
\end{aligned}}$$

Exemple 7 (opérateur de Hodge en coordonnées sphériques). Rappelons l'expression des vecteurs de la base locale duale en coordonnées sphériques (voir léqn. (4.89) du chapitre n° 4) :

$$e^r = dr \ , \quad e^\theta = r\, d\theta \ , \quad e^\phi = r \sin\theta\, d\phi \tag{6.75}$$

En termes de ces 1-formes de base l'action de l'opérateur de Hodge $*$ est simplement :

$$\begin{aligned}
&*1 = e^r \wedge e^\theta \wedge e^\phi\\
&*e^r = e^\theta \wedge e^\phi \ , \quad *e^\theta = e^\phi \wedge e^r \ , \quad *e^\phi = e^r \wedge e^\theta\\
&*\big(e^r \wedge e^\theta\big) = e^\phi \ , \quad *\big(e^\theta \wedge e^\phi\big) = e^r \ , \quad *\big(e^\phi \wedge e^r\big) = e^\theta\\
&*\big(e^r \wedge e^\theta \wedge e^\phi\big) = 1
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Considérons alors une 1-forme donnée en coordonnées sphériques par :

$$\omega = r \cos\theta\, dr \wedge d\phi\,. \tag{6.77}$$

Nous exprimons tout d'abord cette 1-forme dans la base locale duale $\{e^r, e^\theta, e^\phi\}$, soit :

$$\omega = r \cos\theta\, dr \wedge \frac{1}{r \sin\theta}\big(r \sin\theta d\phi\big) = \operatorname{cotan}\theta\, e^r \wedge e^\phi \tag{6.78}$$

Permettant de déterminer la 2-forme associée par l'action de l'opérateur de Hodge :

$$*\,\omega = \operatorname{cotan}\theta \; * \left(e^r \wedge e^\phi\right) = -\operatorname{cotan}\theta\, e^\theta\,, \tag{6.79}$$

soit, en repassant à la base $\{dr, d\theta, d\phi\}$,

$$*\,\omega = -r\operatorname{cotan}\theta\, d\theta\,. \tag{6.80}$$

6.3 Dérivée extérieure

Du point de vue des p-formes différentielles, la différentielle d'une application df introduite au chapitre n° 3 peut être vue comme un opérateur différentiel d associant à une zéro-forme (c.-à.-d. une application $E \to \mathbb{R}$) une 1-forme différentielle :

$$d\,:\; f \;\mapsto\; df \in T^\star_M E\,. \tag{6.81}$$

Étant donné que le concept de 1-forme différentielle se généralise au concept de p-forme différentielle, il paraît naturel de considérer une généralisation de cet opérateur différentiel, associant à une p-forme différentielle une $(p+1)$-forme différentielle.

Définition 12 (dérivée extérieure). *La dérivée extérieure* d *est un opérateur différentiel*

$$d\;:\quad \left\{\begin{array}{lcl} \wedge^p T^\star E & \to & \wedge^{p+1} T^\star E \\ \omega & \mapsto & d\omega \end{array}\right. , \tag{6.82}$$

dont l'action, dans un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ *est déterminée par :*

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum_{i_1,\ldots i_p} \frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) \\ &= \sum_{j,i_1,\ldots i_p} \frac{1}{p!}\,\frac{\partial \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned} \tag{6.83}$$

Vérifions que $d\omega$ est bien une $(p+1)$-forme différentielle. Premièrement, étant donné que ω est une p-forme différentielle, les applications $\alpha_{i_1\cdots i_p}(x)$ sont infiniment dérivables donc les dérivées partielles $\partial\alpha_{i_1\cdots i_p}(x)/\partial x^j$ le sont aussi. Deuxièmement, l'utilisation du produit extérieur $\wedge$ dans le terme de droite de l'éqn. (6.83) garantit que $d\omega$ est bien complètement antisymétrique par permutation des dx^i.

Remarque 3 (dérivée extérieure et différentielles des composantes) *Soit une* p*-forme différentielle* $\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p} \alpha_{i_1\cdots i_p}\; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ *, où les composantes* $\alpha_{i_1\cdots i_p}(x)$ *sont des applications (infiniment) différentiables des coordonnées. On peut exprimer la dérivée extérieure* $d\alpha$ *en termes des différentielles de ces applications :*

$$d\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \frac{1}{p!} d\left(\alpha_{i_1\cdots i_p}\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\,, \tag{6.84}$$

cette formule résultant simplement de la définition d'une différentielle et de l'expression (6.83).

Propriété 5 *La dérivée extérieure vérifie les propriétés suivantes (en dimension n) :*

(a) $d^2 = 0$

(b) si ω *est une* n*-forme alors* $d\omega = 0$

(c) si ω *et* ρ *sont respectivement une* p*-forme et une* q*-forme, alors*

$$d\big(\omega \wedge \rho\big) = \big(d\omega\big) \wedge \rho + (-1)^p \omega \wedge \big(d\rho\big)\,. \tag{6.85}$$

Pour démontrer la propriété 5.*(a)*, il suffit de faire agir la dérivée extérieure d sur $d\omega$, où ω est une p-forme quelconque, en utilisant l'expression (6.83) :

$$\begin{aligned} d^2\omega = d\big(d\omega\big) &= d\left(\sum_{j,i_1,\ldots i_p} \frac{1}{p!}\,\frac{\partial \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) \\ &= \sum_{k,j,i_1,\ldots i_p} \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^k \partial x^j}\, dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned} \tag{6.86}$$

Nous pouvons mainenant utiliser le théorème de Schwarz, voir le théorème 4 du cours n° 3. Étant donné que les composantes $\alpha_{i_1\cdots i_p}(x)$ sont, par hypothèse, de classe $\mathcal{C}^2(E)$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j \partial x^k}\,. \tag{6.87}$$

Ainsi, cette expression est symétrique dans les indices j et k. En conséquence,

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^k \partial x^j}\, dx^j \wedge dx^k = 0\,, \tag{6.88}$$

car le produit extérieur $dx^j \wedge dx^k$ est antisymétrique en j et k.

Ensuite, la démonstration de la propriété 5.*(b)* est immédiate, car il suffit de rappeler qu'il n'existe pas de $(n+1)$-formes différentielles dans un espace à n dimension. La démonstration générale de la propriété 5.*(c)*, simple mais laborieuse, est laissée en exercice. Contentons-nous de la démontrer pour un produit de 1-formes différentielles :

$$\begin{aligned} d\big(\omega \wedge \rho\big) &= d\left[\left(\sum_i \omega_i dx^i\right) \wedge \left(\sum_j \rho_j dx^j\right)\right] = d\left(\sum_{i,j} \omega_i \rho_j dx^i \wedge dx^j\right) \\ &= \sum_{k,i,j} \frac{\partial\big(\omega_i \rho_j\big)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = \sum_{k,i,j} \left(\rho_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} + \omega_i \frac{\partial \rho_j}{\partial x^k}\right) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{k,i,j} \rho_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j + \sum_{k,i,j} \omega_i \frac{\partial \rho_j}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \left(\sum_{k,i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i\right) \wedge \left(\sum_j \rho_j dx^j\right) - \left(\sum_i \omega_i dx^i\right) \wedge \left(\sum_{k,j} \omega_i \frac{\partial \rho_j}{\partial x^k} dx^k \wedge \wedge\, dx^j\right) \\ &= \big(d\omega\big) \wedge \rho \;-\; \omega \wedge \big(d\rho\big)\,, \end{aligned} \tag{6.89}$$

où nous avons utilisé à l'avant-dernière ligne $dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = -\,dx^i \wedge dx^k \wedge dx^j$. □

Exemple 8 Considérons la 1-forme différentielle suivante dans $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = x\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}z\,. \tag{6.90}$$

Nous avons

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \tag{6.91}$$

Reprenons ce calcul en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z). Nous avons premièrement :

$$\begin{aligned}\omega &= \rho\cos\phi\,\mathrm{d}\big(\rho\cos\phi\big) + \rho^2\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}z\\ &= \rho\cos^2\phi\mathrm{d}\rho - \rho^2\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi + \rho^2\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{6.92}$$

d'où nous déduisons (en utlisant $\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\rho = 0$ etc.) :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = &-2\rho\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\rho - 2\rho\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\\ &+ 2\rho\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}z + \rho^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}z\\ &= 2\rho\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}z + \rho^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{6.93}$$

Il est simple de vérifier que cette 2-forme correspond bien à (6.91) après changement de coordonnées. En effet,

$$\begin{aligned}y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y &= \rho\sin\phi\big(\cos\phi\mathrm{d}\rho - \rho\sin\phi\mathrm{d}\phi) + \rho\cos\phi\big(\sin\phi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\phi\mathrm{d}\phi)\\ &= 2\rho\sin\phi\cos\phi\mathrm{d}\rho + (\cos^2\phi - \sin^2\phi)\mathrm{d}\phi\,.\end{aligned} \tag{6.94}$$

*
* *

Lemme 1 (Lemme de Poincaré). *Soit ω une forme différentielle sur un espace euclidien E, telle que $\mathrm{d}\omega = 0$.*

Dans tout domaine $D \subset E$ étoilé, c.-à.-d. qu'il existe un point $M \in D$ tel que, pour tout point $N \in D$, le segment $[MN]$ fait partie de D, il existe une $(p-1)$-forme ρ telle que

$$\omega = \mathrm{d}\rho\,. \tag{6.95}$$

À l'évidence une telle $(p-1)$ forme n'est pas unique car, pour toute $(p-2)$-forme α,

$$\mathrm{d}\big(\rho + \mathrm{d}\alpha\big) = \mathrm{d}\rho + \mathrm{d}^2\alpha = \mathrm{d}\rho\,. \tag{6.96}$$

Du point de vue de la terminologie :

— une p-forme ω telle que $\mathrm{d}\omega = 0$ est dite *fermée* ;

— s'il existe une $(p-1)$-forme ρ telle que $\omega = \mathrm{d}\rho$ alors ω est dite *exacte*.

Le lemme de Poincaré indique que, dans tout domaine étoilé d'un espace euclidien, une forme fermée est également exacte.

Propriété 6 *Soit ω une 1-forme différentielle définie dans un domaine étoilé D d'un espace à 2 dimensions, qui se développe dans un système de coordonnées sur D $\{x, y\}$ comme*

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{6.97}$$

Si les applications P et Q satisfont

$$\forall (x, y) \in D \ , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6.98}$$

alors il existe une application $f : D \to \mathbb{R}$ telle que ω est la différentielle de f :

$$\omega = df \, . \tag{6.99}$$

En effet, nous avons

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy \tag{6.100}$$

donc $d\omega = 0$ et le lemme de Poincaré s'applique. □.

Le lemme de Poincaré, d'importance capitale, n'est pas sans rapport avec la propriété 8 démontrée dans le chapitre n° 5.

Propriété 7 (intégrale d'une 1-forme fermée). *Soit une 1-forme fermée ω, c.-à.-d. telle que $d\omega = 0$, définie sur un espace euclidien E. D'après le lemme de Poincaré, dans tout domaine étoilé $D \subset E$, il existe une application $f : D \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\omega = df$. Nous avons alors, pour toute courbe $\mathcal{C}_{ab} \subset D$,*

$$\int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega = \int_{\mathcal{C}_{ab}} df = f(b) - f(a) \, , \tag{6.101}$$

indépendamment du chemin suivi du point a au point b, tant que le chemin appartient à D.

6.4 Rotationnel

Plaçons nous dans l'espace euclidien de dimension 3, dans les coordonnées cartésiennes $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, et considérons un champ de vecteurs, donné (dans les notations usuelles, $\partial_x \leftrightarrow \vec{e}_x$ etc.) par :

$$\vec{v}(\vec{x}) = v^x(\vec{x}) \, \vec{e}_x + v^y(\vec{y}) \, \vec{e}_y + v^z(\vec{x}) \, \vec{e}_y \, . \tag{6.102}$$

Ce champ de vecteur peut être associé à une 1-forme différentielle ω, telle que $\omega(w) = \vec{v} \cdot \vec{w}$, et dont le développement dans la base duale de $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ est :

$$\omega = v^x(\vec{x}) \, dx + v^y(\vec{x}) \, dy + v^z(\vec{x}) dz \, . \tag{6.103}$$

L'action de la dérivée extérieure sur ω donne une 2-forme $d\omega$ qui se développe comme :

$$d\omega = \big(dv^x(\vec{x})\big) \wedge dx + \big(dv^y(\vec{x})\big) \wedge dy + \big(dv^z(\vec{x})\big) \wedge dz \, . \tag{6.104}$$

En prenant en compte l'antisymétrie du produit extérieur $\wedge$ (qui assure que $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$) nous obtenons

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_y v^x\, dy\wedge dx + \partial_z v^x\, dz\wedge dx + \partial_x v^y\, dx\wedge dy + \partial_z v^y\, dz\wedge dy + \partial_x v^z\, dx\wedge dz + \partial_y v^z dy\wedge dz \\ &= \big(\partial_x v^y - \partial_y v^x\big)dx\wedge dy + \big(\partial_z v^x - \partial_x v^z\big)dz\wedge dx + \big(\partial_y v^z - \partial_z v^y\big)dy\wedge dz \end{aligned} \tag{6.105}$$

L'action de l'opérateur de Hodge sur cette 2-forme donne une 1-forme. À l'aide de l'éqn. (6.49c) on trouve :

$$\begin{aligned} *\,d\omega &= \big(\partial_x v^y - \partial_y v^x\big) * \big(dx\wedge dy\big) + \big(\partial_z v^x - \partial_x v^z\big) * \big(dz\wedge dx\big) + \big(\partial_y v^z - \partial_z v^y\big) * \big(dy\wedge dz\big) \\ &= \big(\partial_x v^y - \partial_y v^x\big)dz + \big(\partial_z v^x - \partial_x v^z\big)dy + \big(\partial_y v^z - \partial_z v^y\big)dx \end{aligned} \tag{6.106}$$

Finalement, on peut associer à cette 1-forme un champ de vecteurs, appelé *rotationnel* qui se décompose comme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \big(\partial_y v^z - \partial_z v^y\big)\vec{e}_x + \big(\partial_z v^x - \partial_x v^z\big)\vec{e}_y + \big(\partial_x v^y - \partial_y v^x\big)\vec{e}_z \tag{6.107}$$

Soit, en termes de ses composantes

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \partial_y v^z - \partial_z v^y \\ \partial_z v^x - \partial_x v^z \\ \partial_x v^y - \partial_y v^x \end{pmatrix}} \tag{6.108}$$

En termes des formes différentielles, on peut formuler la construction du rotationnel de la manière suivante (indépendemment des coordonnées choisies).

Définition 13 (rotationnel). *Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs sur l'espace euclidien E à trois dimensions, et ω la 1-forme différentielle duale à $\vec{v}$, c.-à.-d. telle que, pour tout champs de vecteurs $\vec{w}$,*

$$\omega(\vec{w}) = g(\vec{v},\vec{w})\,. \tag{6.109}$$

Le rotationnel du champs de vecteurs $\vec{v}$ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ tel que, pour tout champs de vecteurs $\vec{w}$,

$$\boxed{\big(*\,d\omega\big)(\vec{w}) = g\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v},\vec{w}\Big)} \tag{6.110}$$

Cette formulation permet d'obtenir aisément plusieurs propriétés importantes du rotationnel

Propriété 8 *Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs et f une application à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\big(f\vec{v}\big) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\wedge\vec{v}} \tag{6.111}$$

Soit ω la 1-forme duale à $\vec{v}$. Nous avons

$$*d\big(f\omega\big) = *\big(df\wedge\omega + f d\omega\big) = *\big(df\wedge\omega\big) + f * d\omega\,. \tag{6.112}$$

Le premier terme du membre de droite correspond au produit vectoriel de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ avec $\vec{v}$, voir la définition 10, et le second terme au rotationnel de $\vec{v}$, voir l'éqn. (6.110), tous deux écrits en termes de formes différentielles Pour tout champ de vecteurs $\vec{w}$, cela implique

$$g\Big(\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\vec{v}),\vec{w}\Big) = *d\big(f\omega\big)\big(\vec{v}\big) = g\Big(\overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \vec{v},\vec{w}\Big) + g\Big(f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{v}),\vec{w}\Big) \tag{6.113}$$

□

Propriété 9 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *différentiable. Nous avons*

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\big(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\big) = \vec{0}} \tag{6.114}$$

Il suffit d'écrire que, pour tout champ de vecteurs $\vec{w}$,

$$g\Big(\overrightarrow{\text{rot}}\,\big(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\big),\vec{w}\Big) = *d\big(df\big)(\vec{w}) = *d^2 f(\vec{w}) = 0\,, \tag{6.115}$$

grâce à la propriété 5b) de la dérivée extérieure. □

6.4.1 Rotationnel dans la base locale

La définition 13 du rotationnel s'applique indifféremment du système de coordonnées choisi, et peut donc être utilisée en coordonnées curvilignes. Cependant, nous avons indiqué que pour implémenter l'opérateur de Hodge $*$ il est préférable de travailler dans la base locale des 1-formes $\{e^a, a = 1,2,3\}$, duale à la base locale orthornormée $\{\vec{e}_b, b = 1,2,3\}$ des vecteurs de l'espace tangent $T_M E$.

Rappelons que les vecteurs $\{e_a, a = 1,2,3\}$ s'expriment en fonction des vecteurs de base $\{\partial/\partial\tilde{x}^i, i = 1,2,3\}$ associés aux coordonnées curvilignes selon :

$$e_a(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{3} E_a{}^i(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\,, \tag{6.116}$$

et que les 1-formes $\{e^b, b = 1,2,3\}$ s'expriment en termes des $\{d\tilde{x}^j, j = 1,2,3\}$

$$e^b(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{3} E^b{}_j(\tilde{x})d\tilde{x}^j\,, \tag{6.117}$$

où les quantités $E_a{}^i$ et $E^b{}_j$ sont inverses l'un de l'autre au sens matriciel, c.-à.-d. que

$$\sum_{a,b} E_a{}^i E^b{}_j = \delta^i{}_j\,, \quad \sum_{i,j} E^b{}_j E_a{}^i = \delta^b{}_a\,. \tag{6.118}$$

Partons donc d'un champ de vecteurs, qui se développe dans la base locale choisie associée aux coordonnées curvilignes $\{\tilde{x}^i, i = 1,2,3\}$ comme :

$$\vec{v} = \sum_{a=1}^{3} v^a(\tilde{x})\vec{e}_a\,. \tag{6.119}$$

Nous lui associons une 1-forme différentielle,

$$\omega = \sum_{a=1}^{3} v^a(\tilde{x}) e^a \,. \tag{6.120}$$

Pour calculer la dérivée extérieure de ω nous passons à la base duale des coordonnées :

$$\omega = \sum_{a,j} v^a(\tilde{x}) E^a{}_j(\tilde{x}) dx^j \,, \tag{6.121}$$

puis nous avons

$$d\omega = \sum_{a,i,j} \frac{\partial\left(v^a E^a{}_i\right)}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^j \,, \tag{6.122}$$

et nous réexprimons enfin les différentielles $d\tilde{x}^i$ en termes de la base orthonormée, donnant

$$d\omega = \sum_{a,b,c,i,j} \frac{\partial\left(v^a E^a{}_i\right)}{\partial \tilde{x}^i} E^i{}_b E^j{}_c e^b \wedge e^c \,. \tag{6.123}$$

Enfin nous pouvons appliquer l'opérateur de Hodge, donnant

$$*\, d\omega = \sum_{a,b,c,i,j} \frac{\partial\left(v^a E^a{}_i\right)}{\partial \tilde{x}^i} E^i{}_b E^j{}_c * \left(e^b \wedge e^c\right) = \sum_{a,b,c,d,i,j} \frac{\partial\left(v^a E^a{}_i\right)}{\partial \tilde{x}^i} E^i{}_b E^j{}_c \epsilon^{bc}{}_d e^d \,. \tag{6.124}$$

Nous avons donc au final :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = \sum_{d=1}^{3} \left(\sum_{a,b,c,i,j} \frac{\partial\left(v^a E^a{}_i\right)}{\partial \tilde{x}^i} E^i{}_b E^j{}_c \epsilon^{bc}{}_d \right) \vec{e}_d} \tag{6.125}$$

Cette formule peut sembler complexe, mais cette complexité vient principalement du fait que le système de coordonnées curvilignes y est complètement générique, ayant pour conséquence l'utilisation des matrices $E^a{}_i$ et $E^i{}_a$.

Coordonnées orthogonales

Spécialisons la discussion à une classe particulière de coordonnées, appelées *coordonnées orthogonales*, dans lesquelles bon nombre de formules, comme l'éqn. (6.125) donnant le rotationnel dans la base locale, deviennent beaucoup plus simples.

Définition 14 (coordonnées orthogonales). *Soit* $\{\tilde{x}^i, i = 1, \ldots, n\}$ *un système de coordonnées curvilignes définies sur un ouvert* U *de l'espace euclidien à* n *dimensions. Ces coordonnées sont dites orthogonales si, pour en tout point de* U *de coordonnées* $\tilde{x}^i$*, les vecteurs de la base des coordonnées sont orthogonaux, soit*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right) = 0 \quad \text{si} \qquad i \neq j \,. \tag{6.126}$$

Dans un tel système de coordonnées la relation entre la base des coordonnées et la base locale orthonormée (voir eqn. (4.52) et en-dessous) est particulièrment simple car, les vecteurs de base étant déjà orthogonaux, il suffit de les normer. Nous avons donc :

$$\vec{e}_a(\tilde{x}) = E_a(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}\,, \tag{6.127}$$

avec

$$g(\vec{e}_a, \vec{e}_a) = 1 \implies E_a^2 = 1/g\left(\tfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}, \tfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}\right) \tag{6.128}$$

Pour la base duale, nous avons

$$e^a(\tilde{x}) = E^a(\tilde{x})d\tilde{x}^a\,, \tag{6.129}$$

avec

$$e^a(\vec{e}_a) = 1 \implies E^a = 1/E_a\,. \tag{6.130}$$

ou plus simplement

$$(E^a)^2 = g\left(\tfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}, \tfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}\right) \tag{6.131}$$

À partir de la formule générale (6.125), nous trouvons alors l'expression du rotationnel dans des coordonnées curvilignes orthogonales en retirant les sommes et indices superflus, ou bien en reprenant le raisonnement depuis le début. Nous avons

$$\omega = \sum_b v^b e^b = \sum_b v^b E^b d\tilde{x}^b \implies d\omega = \sum_{a,b} \frac{\partial\left(v^b E^b\right)}{\partial \tilde{x}^a} d\tilde{x}^a \wedge d\tilde{x}^b\,. \tag{6.132}$$

On repasse ensuite dans la base orthonormée avant d'appliquer l'opérateur de Hodge,

$$d\omega = \sum_{a,b} \frac{\partial\left(v^b E^b\right)}{\partial \tilde{x}^a}\frac{1}{E^a E^b} e^a \wedge e^b \implies *\,d\omega = \sum_{a,b} \frac{\partial\left(v^b E^b\right)}{\partial \tilde{x}^a}\frac{1}{E^a E^b} * \left(e^a \wedge e^b\right) \tag{6.133}$$

Donnant au final la formule :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \sum_{c=1}^{3}\left(\sum_{a,b} \frac{\partial\left(v^b E^b\right)}{\partial \tilde{x}^a}\frac{1}{E^a E^b}\,\epsilon^{ab}{}_c\right)\vec{e}_c} \tag{6.134}$$

En pratique, cette expression sera suffisante car la plupart des systèmes de coordonnées utilisés – en particulier les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique – sont orthogonaux.

6.4.2 Rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques

Appliquons premièrement ce formalisme à l'étude du rotationnel en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z). Partant d'un champ de vecteurs

$$\vec{v} = v^\rho \vec{e}_\rho + v^\phi \vec{e}_\phi + v^z \vec{e}_z\,, \tag{6.135}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = &\frac{1}{E^{\phi}E^{z}}\vec{e}_{\rho}\left(\frac{\partial\left(v^{z}E^{z}\right)}{\partial\phi}-\frac{\partial\left(v^{\phi}E^{\phi}\right)}{\partial z}\right)\\ &+\frac{1}{E^{z}E^{\rho}}\vec{e}_{\phi}\left(\frac{\partial\left(v^{\rho}E^{\rho}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(v^{z}E^{z}\right)}{\partial\rho}\right)\\ &+\frac{1}{E^{\rho}E^{\phi}}\vec{e}_{z}\left(\frac{\partial\left(v^{\phi}E^{\phi}\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial\left(v^{\rho}E^{\rho}\right)}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{6.136}$$

Rappelons l'expression de la base duale locale :

$$e^{\rho}=\mathrm{d}\rho\ ,\quad e^{\phi}=\rho\,\mathrm{d}\phi\ ,\quad e^{z}=\mathrm{d}z \tag{6.137}$$

donnant :

$$E^{\rho}=1\ ,\quad E^{\phi}=\rho\ ,\quad E^{z}=1\ ,. \tag{6.138}$$

Nous avons donc au final pour le **rotationnel en coordonnées cylindriques** :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v^{z}}{\partial\phi}-\frac{\partial v^{\phi}}{\partial z}\right)\vec{e}_{\rho}+\left(\frac{\partial v^{\rho}}{\partial z}-\frac{\partial v^{z}}{\partial\rho}\right)\vec{e}_{\phi}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho v^{\phi}\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial v^{\rho}}{\partial\phi}\right)\vec{e}_{z}} \tag{6.139}$$

Exemple 9 (tourbillon). On considère un champ de vitesses stationnaire $\vec{v}$ pour un fluide donné en coordonnées cylindriques par

$$\vec{v}=\rho\Omega\vec{e}_{\phi}\,, \tag{6.140}$$

soit avec une vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe (Oz). Le rotationnel de ce champ de vecteurs se calcule soit avec la formule précédente, soit directement :

$$\begin{aligned}*\mathrm{d}\big(\rho\Omega e^{\phi}\big) &= *\mathrm{d}\big(\rho^{2}\Omega\mathrm{d}\phi\big)=*2\rho\Omega\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\\ &= 2\Omega*\left(e^{\rho}\wedge e^{\phi}\right)=2\Omega e^{z}\,,\end{aligned} \tag{6.141}$$

soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=2\Omega\vec{e}_{z}$. Le rotationnel de ce champ de vitesse est constant, et selon l'axe (Oz) de rotation du fluide.

*
* *

Appliquons deuxièmement ce formalisme à l'étude du rotationnel en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ). Partant d'un champ de vecteurs

$$\vec{v}=v^{r}\vec{e}_{r}+v^{\theta}\vec{e}_{\theta}+v^{\phi}\vec{e}_{\phi}\,, \tag{6.142}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = &\frac{1}{E^\theta E^\phi}\vec{e}_r\left(\frac{\partial\left(v^\phi E^\phi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial\left(v^\theta E^\theta\right)}{\partial\phi}\right)\\ &+\frac{1}{E^\phi E^r}\vec{e}_\theta\left(\frac{\partial\left(v^r E^r\right)}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(v^\phi E^\phi\right)}{\partial r}\right)\\ &+\frac{1}{E^r E^\theta}\vec{e}_\phi\left(\frac{\partial\left(v^\theta E^\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(v^r E^r\right)}{\partial\theta}\right)\end{aligned} \tag{6.143}$$

Rappelons l'expression de la base duale locale :

$$e^r = dr\ ,\quad e^\theta = r\,d\theta\ ,\quad e^\phi = r\sin\theta\,d\phi \tag{6.144}$$

donnant :

$$E^r = 1\ ,\quad E^\theta = r\ ,\quad E^\phi = r\sin\theta\ ,. \tag{6.145}$$

Nous avons donc au final pour le **rotationnel en coordonnées sphériques** :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}&\left(\frac{\partial\left(\sin\theta\, v^\phi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial v^\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(r\,v^\phi\right)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta\\ &+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\,v^\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial v^r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi\end{aligned}} \tag{6.146}$$

6.4.3 Champs conservatifs

Soit un champ de vecteurs $\vec{v}$ dans l'espace euclidien à 3 dimensions, tel que, en tout point d'un domaine D étoilé, de coordonnées $\vec{x}$, nous ayons :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0} \tag{6.147}$$

un tel champ vectoriel est appelé *champ conservatif*.

Pour comprendre la signification d'une telle condition appliquée à un champ de vecteurs, considérons la 1-forme différentielle ω duale au champ de vecteurs $\vec{x}$, c.-à.-d. telle que pour tout champ de vecteurs $\vec{w}$, $\omega(\vec{w}) = g(\vec{v},\vec{w})$.

En reprenant la définition 13 du rotationnel d'un vecteur en termes de dérivée extérieure d'une forme différentielle, cela signifie que

$$*d\omega = 0 \quad\Longrightarrow\quad d\omega = 0\,. \tag{6.148}$$

Le lemme 1 (lemme de Poincaré) indique alors que, dans le domaine D étoilé considéré, il existe une zéro-forme, c.-à.-d. une application $f : D \to \mathbb{R}$, telle que

$$\omega = df\,, \tag{6.149}$$

voir également la propriété 7.

En termes du champ de vecteurs $\vec{v}$ (voir la section 3.4.3 du cours n° 3) nous avons donc montré la propriété :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \exists f\ , \quad \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f} \tag{6.150}$$

Considérons alors la circulation du champ de vecteurs $\vec{v}$ sur une courbe $\mathcal{C}_{ab}$ ouverte contenue dans le domaine D. Nous avons

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_{ab}} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}_{ab}} \omega = \int_{\mathcal{C}_{ab}} \mathrm{d}f = f(b) - f(a)} \tag{6.151}$$

indépendamment du chemin suivi de a vers b.

Application à l'électrostatique

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{x})$ dans le vide, en régime stationnaire, satisfait l'équation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}, \tag{6.152}$$

et il existe donc une fonction appelée *potentiel électrostatique* $V(\vec{x})$, avec :

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(\vec{x})\,. \tag{6.153}$$

Pour une particule de charge q, le travail de la force de Coulomb suivant une courbe $\mathcal{C}_{ab}$ est donné par :

$$W = q\int_{\mathcal{C}_{ab}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = q\big(V(a) - V(b)\big)\,, \tag{6.154}$$

et ne dépend donc que de la différence de potentiel entre les deux points.

6.5 Divergence et laplacien

Le formalisme des formes différentielles permet également de construire d'autres types d'opérateurs différentiels, qui apparaîtront dans le chapitre n° 7 consacré à l'intégration. Ils s'obtiennent en combinant judicieusement la dérivée extérieure d, dont l'action sur une p-forme donne une $(p+1)$ forme dérivée, et l'opérateur de Hodge $*$, qui convertit une p-forme en $(n-p)$-forme de « contenu » équivalent.

6.5.1 Divergence

Soit un champ de vecteurs V et ω la 1-forme différentielle duale. Le raisonnement suivi pour construire la divergence de $\vec{v}$ est le suivant :

a) l'action de l'opérateur de Hodge sur ω donne une $(n-1)$-forme différentielle $*\omega$

b) la dérivée extérieure appliquée à $*\omega$ donne une n-forme différentielle $\mathrm{d}*\omega$.

c) l'opérateur de Hodge appliqué à une n-forme différentielle donne une zéro forme, c.-à.-d. une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, que nous appelerons divergence de $\vec{v}$.

Définition 15 (divergence d'un champ de vecteurs) *Soit V un champ de vecteurs sur un espace euclidien E et ω la 1-forme différentielle duale. La divergence de V est définie par*

$$\boxed{\operatorname{div} V \overset{\text{déf.}}{=} *\,d * \omega} \tag{6.155}$$

D'un point de vue plus abstrait et plus général, nous avons défini un opérateur différentiel envoyant une p-forme sur une $(p-1)$-forme dérivée (soit le contraire de d).

Définition 16 (dérivée extérieure adjointe). *Soit E un espace euclidien de dimension n. La dérivée extérieure adjointe, notée $d^\dagger$, est une application de $\wedge^p T^\star E$ dans $\wedge^{p-1} T^\star E$ agissant sur une p-forme différentielle comme*

$$d^\dagger \omega = (-1)^{pn+n+1} * \, d * \omega \,, \tag{6.156}$$

et donnant donc une $(p-1)$-forme. En termes de cet opérateur, nous avons donc $\operatorname{div} V = -d^\dagger \omega$.

Propriété 10 *Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs et f une application infiniment différentiable. $f\vec{v}$ est également un champ de vecteurs et nous avons :*

$$\boxed{\operatorname{div}\big(f\vec{v}\big) = f \operatorname{div}\vec{v} + df(\vec{v})} \tag{6.157}$$

Considérons ω la 1-forme différentielle duale de $\vec{v}$. Nous avons

$$*\,d * \big(f\omega\big) = *\,d\big(f * \omega\big) = *\big(df \wedge * \omega + f d * \omega\big) = *\big(df \wedge * \omega\big) + f * \, d * \omega \tag{6.158}$$

Le second terme est immédiatement identifié avec $f \operatorname{div}\vec{v}$ d'après l'éqn. (6.155). Pour identifier le premier terme, nous écrivons

$$df \wedge * \omega = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \epsilon^k{}_{lm} v^k \partial_i f \, dx^i \wedge dx^l \wedge dx^m \tag{6.159}$$

Puis

$$*\,df \wedge * \omega = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \epsilon^k{}_{lm} \epsilon^{ilm} v^k \partial_i f = \sum_{i,k} \delta_{ki} v^k \partial_i f = df(\vec{v}) \tag{6.160}$$

À la dernière étape nous avons utilisé l'identité suivante :

$$\sum_{l,m} \epsilon^k{}_{lm} \epsilon^{ilm} = 2\delta_{ki} \,. \tag{6.161}$$

Pour nous en convaincre, prenons par exemple $i = \ell = 1$. La double somme ne contient alors que 2 termes, $\epsilon^1{}_{23}\epsilon^{123} + \epsilon^1{}_{32}\epsilon^{132} = 2$. Considérons maintenant $i = 1$ et $\ell = 2$. Nous avons alors $\epsilon^1{}_{23}\epsilon^{223} + \epsilon^1{}_{32}\epsilon^{232} = 0$. □

Propriété 11 *Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs dans l'espace euclidien à trois dimensions.*

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) = 0\,. \tag{6.162}$$

Soit ω la 1-forme différentielle associée à $\vec{v}$. Cette identité est immédiate dans le langage des formes différentielles. En effet nous avons d'après les équations (6.110) et (6.155) :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) = *\,\mathrm{d}\,*\left(*\,\mathrm{d}\omega\right) = *\,\mathrm{d}\,*^2\,\mathrm{d}\omega \tag{6.163}$$

Comme on peut le constater à partir des éqns. (6.74), pour toute 2-forme α, $*^2\alpha = \alpha$. Nous trouvons donc

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) = *\,\mathrm{d}^2\omega = 0\,, \tag{6.164}$$

grâce à la propriété 5b) de la dérivée extérieure. □

Divergence en coordonnées cartésiennes

Le calcul de la divergence dans des coordonnées cartésiennes sur un espace Euclidien à n dimensions est aisé ; cependant pour limiter le nombre d'indices – et donc la lisibilité du calcul – nous nous restreindrons à la dimension 3. Nous avons premièrement :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} v^i \mathrm{d}x^i \quad\Longrightarrow\quad *\,\omega = \sum_i v^i *\,\mathrm{d}x^i = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} v^i \epsilon^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\,. \tag{6.165}$$

Nous avons ensuite

$$\mathrm{d} * \omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell}\,\epsilon^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^\ell \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\,. \tag{6.166}$$

Appliquant une nouvelle fois l'opérateur de Hodge, nous trouvons :

$$\begin{aligned} *\,\mathrm{d} * \omega &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell}\,\epsilon^i{}_{jk} * \left(\mathrm{d}x^\ell \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell}\,\epsilon^i{}_{jk}\epsilon^{\ell jk} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,\ell} \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell}\left(\sum_{j,k} \epsilon^i{}_{jk}\epsilon^{\ell jk}\right) \end{aligned} \tag{6.167}$$

Au final, nous pouvons utiliser l'identité (6.161), donnant une expression extrêmement simple de la divergence dans des coordonnées cartésiennes à 3 dimensions :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v^i}{\partial x^i}} \tag{6.168}$$

Divergence en coordonnées curvilignes

Nous considérerons pour simplifier les équations que les coordonnées curvilignes $\{\tilde{x}^i, i = 1,2,3\}$ sont orthogonales, voir la définition 14. Nous avons alors

$$\omega = \sum_{a=1}^{3} v^a e^a \quad \Longrightarrow \quad *\,\omega = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c} v^a \epsilon^a{}_{bc} e^b \wedge e^c = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c} \epsilon^a{}_{bc} v^a E^b E^c \, d\tilde{x}^b \wedge d\tilde{x}^c \tag{6.169}$$

Nous calculons ensuite

$$d * \omega = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c} \epsilon^a{}_{bc} d\big(v^a E^b E^c\big) d\tilde{x}^b \wedge \tilde{x}^c = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c,f} \epsilon^a{}_{bc} \frac{\partial\big(v^a E^b E^c\big)}{\partial \tilde{x}^f} dx^f \wedge d\tilde{x}^b \wedge \tilde{x}^c \tag{6.170}$$

Et finalement

$$*\,d * \omega = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c,f} \epsilon^a{}_{bc} \frac{\partial\big(v^a E^b E^c\big)}{\partial \tilde{x}^f} \frac{*\left(e^f \wedge e^b \wedge e^c\right)}{E^f E^b E^c} \tag{6.171}$$

D'où

$$*\,d * \omega = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c,f} \epsilon^a{}_{bc} \epsilon^{fbc} \frac{1}{E^f E^b E^c} \frac{\partial\big(v^a E^b E^c\big)}{\partial \tilde{x}^f} \tag{6.172}$$

Cette expression semble extrêmement complexe mais ne contient en réalité que trois termes ! Prenons par exemple les termes avec $f = 1$. Du point de vue des symboles de Levi-Civita, nous n'avons que 2 termes non nuls dans les sommes, celui avec $f = a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$ (coefficient $\epsilon^{123}\epsilon^1{}_{23} = 1$) et celui avec $f = a = 1$, $b = 3$ et $c = 2$ (coefficient $\epsilon^{132}\epsilon^1{}_{32} = 1$).

Au final, en regroupant les paires de termes égaux nous trouvons l'expression suivante de la divergence dans un système de coordonnées curvilignes orthogonal quelconque :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{E^1E^2E^3}\left(\frac{\partial\big(v^1E^2E^3\big)}{\partial\tilde{x}^1} + \frac{\partial\big(v^2E^1E^3\big)}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial\big(v^3E^1E^2\big)}{\partial\tilde{x}^3}\right)} \tag{6.173}$$

Nous pouvons appliquer immédiatement ce résultat pour obtenir l'expression de la **divergence en coordonnées cylindriques** dans la base locale. Nous avons, en utilisant les résultats précédents :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\big(\rho v^\rho\big)}{\partial\rho} + \frac{\partial v^\phi}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial v^z}{\partial z}} \tag{6.174}$$

Notons que les deux premiers termes correspondent naturellement à la divergence d'un vecteur à deux dimensions en coordonnées plaires.

Dérivons à présent l'expression de la **divergence en coordonnées sphériques** (r, θ, ϕ) dans la base locale. Nous trouvons immédiatement :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\big(r^2 v^r\big)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\big(\sin\theta\, v^\theta\big)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v^\phi}{\partial\phi}} \tag{6.175}$$

6.5.2 Laplacien

Le dernier opérateur différentiel que nous définirons dans ce cours est le laplacien, qui joue un rôle fondamental en géométrie différentielle. Contrairement aux opérateurs vus jusqu'ici, celui-ci contient des dérivées secondes par rapport aux coordonnées.

Définition 17 (laplacien). *Le laplacien, noté* Δ*, est un opérateur différentiel* $\wedge^p \mathsf{T}^\star\mathsf{E} \to \wedge^p \mathsf{T}^\star\mathsf{E}$*, c.-à.-d. associant à une* p*-forme différentielle arbitraire* ω *une* p*-forme différentielle* $\Delta\omega$*, telle que :*[7]

$$\boxed{\Delta\omega \overset{\text{déf.}}{=} -\big(\mathrm{d}\mathrm{d}^\dagger + \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d}\big)\,\omega} \tag{6.176}$$

Une p-forme différentielle ω vérifiant $\Delta\omega = 0$ est appelée *forme harmonique*.

*
* *

Considérons l'action du laplacien sur une application $f : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$, c.-à.-d. sur une zéro-forme. La définition (6.176) du laplacien se simplifie alors, car $\mathrm{d}^\dagger f = 0$ (sinon on obiendrait une (-1)-forme !) :

$$\Delta f = -\mathrm{d}^\dagger \mathrm{d} f = *\mathrm{d} * \mathrm{d} f = * \,\mathrm{d} * \big(\mathrm{d}\, f\big)\,. \tag{6.177}$$

On remarque alors que le laplacien peut se comprendre dans ce cas comme la divergence de la différentielle de f ; en termes vectoriels, on peut alors écrire

$$\boxed{\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right)} \tag{6.178}$$

Propriété 12 *Soit* $\vec{v}$ *un champ de vecteurs sur un espace euclidien à trois dimensions. Nous avons la décomposition suivante du laplacien de* $\vec{v}$ *:*

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\big(\mathrm{div}\,\vec{v}\big) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\big)} \tag{6.179}$$

Soit ω la 1-forme duale au champ de vecteurs $\vec{v}$. Nous avons

$$\Delta\omega = \mathrm{d} * \mathrm{d} * \omega - *\mathrm{d} * \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\big(*\,\mathrm{d} * \omega\big) - *\mathrm{d}\big(*\,\mathrm{d}\omega\big) \tag{6.180}$$

Dans le premier terme, on reconnaît la différentielle de la divergence de $\vec{v}$, voir l'éqn. (6.155) et dans le second terme, le rotationnel du rotationnel de $\vec{v}$, voir l'éqn. (6.110). □

7. Vérifions la cohérence de cette définition, par exemple sur le premier terme. Si ω est une p-forme alors $\mathrm{d}\omega$ est une $(p+1)$-forme. L'action de l'opérateur de Hodge donne une $(n-p-1)$-forme $\star\mathrm{d}\omega$. Agissant avec la dérivée extérieure sur le résultat donne une $(n-p)$ forme $\mathrm{d} * \mathrm{d}\,\omega$. Enfin, $*\,\mathrm{d} * \mathrm{d}\,\omega$ est bien une $(n-(n-p)=p)$-forme.

Laplacien en coordonnées cartésiennes

Pour établir l'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes, nous nous plaçerons pour simplifier dans un espace euclidien E à trois dimensions. Nous pouvons immédiatement utiliser l'expression (6.168) appliquée au vecteur gradient, ce qui donne

$$\boxed{\Delta f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\left(\partial x^i\right)^2}\,.} \tag{6.181}$$

Laplacien en coordonnées curvilignes

Considérons un système de coordonnées curvilignes orthogonales $\{\tilde{x}^i, i = 1,2,3\}$ sur un espace euclidien à trois dimensions. En combinant l'éqn. (5.28) donnant le gradient et l'éqn. (6.173) pour la divergence, nous obtenons le laplacien d'une application f :

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{E^1E^2E^3}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^1}\left(\frac{E^2E^3}{E^1}\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^1}\right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^2}\left(\frac{E^1E^3}{E^2}\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^3}\left(\frac{E^1E^2}{E^3}\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^3}\right)\right)} \tag{6.182}$$

Appliquons premièrement cette formule pour obtenir le **laplacien en coordonnées cylindriques** (ρ, ϕ, z). Nous obtenons immédiatement :

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \tag{6.183}$$

Nous pouvons de la même manière obtenir le dernier résultat de cette longue liste, l'expression du **laplacien en coordonnées sphériques** (r, θ, ϕ). Nous avons :

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}} \tag{6.184}$$

Opérateur $\vec{\nabla}$. On rencontre souvent l'opérateur « nabla » $\vec{\nabla}$, qui est un moyen commode de représenter les opérateurs vectoriels. En coordonnées cartésiennes, il s'agit du vecteur (attention, ici les dérivées partielles ne représentent pas les vecteurs de base, nous sommes revenus à la notion « traditionnelle » de vecteurs !) :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.185}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f &= \vec{\nabla} f \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} &= \vec{\nabla}\wedge\vec{v} \\ \operatorname{div}\vec{v} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \\ \Delta f &= \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f\,. \end{aligned} \tag{6.186}$$

L'usage de cette notation ne sera pas développé dans le cours ; en particulier elle n'est pas bien adaptée aux coordonnées curvilignes.

6.5.3 Décomposition de Hodge

Nous finirons ce chapitre par un énoncé de la décomposition de Hodge, qui est un résultat très général e fondamental de géométrie différentielle, dont une incarnation en analyse vectorielle à trois dimensions, avec quelques modifications, porte le nom de décomposition de Helmoltz et est d'utilisation courante pour l'étude de l'électromagnétisme.

Théorème 1 (décomposition de Hodge). *Toute p-forme différentielle ω_p avec $p > 0$, définie sur un espace E compact*[8] *à n dimensions, peut se décomposer comme*

$$\omega_p = d\alpha_{p-1} + d^\dagger \beta_{p+1} + \gamma_r \ , \tag{6.187}$$

en termes d'une $(p-1)$-forme α_{p-1}, d'une $(p+1)$-forme β_{p+1} et d'une p-forme γ_p harmonique, c.-à.-d. telle que $\Delta\gamma_p = 0$. Dans le cas $p = 0$, nous avons

$$f = d^\dagger \beta_1 + g \ , \quad \Delta g = 0 \tag{6.188}$$

La demonstration de ce théorème, bien que relativement brève, ne sera pas donnée ici car faisant appel à des concepts non développés dans ce cours.

L'existence de formes harmoniques non-triviales sur un espace est sévèrement contrainte et entièrement déterminée par la topologie de l'espace en question. Par exemple, les seules zéro-formes harmoniques sur un espace compact (c.-à.-d. les applications à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de $\Delta f = 0$) sont des constantes. On montre également qu'il n'existe pas de 1-formes harmoniques non triviales sur une sphère S^n, quelle que soit sa dimension $n > 1$.

*
* *

Considérons la décomposition de Hodge dans un espace compact à trois dimensions pour une 1-forme. Comme nous l'avons indiqué, il n'existe pas en général de formes harmoniques non-triviales. Nous avons donc (sauf exception dépendant de la topologie de l'espace) :

$$\omega_1 = df - *d(*\omega_2) \tag{6.189}$$

En termes du champ vectoriel $\vec{v}$ dual à ω_1, nous arrivons à une décomposition suivante :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \tag{6.190}$$

où $\vec{A}$ est dual à la 1-forme $\star\omega_2$ est $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application infiniment différentiable.

La décomposition de Hodge a été établie pour des espaces compacts, mais peut néanmoins être appliquée à l'espace euclidien à trois dimensions si les champs concernés décroissent suffisamment vite à l'infini.

Théorème 2 (décomposition de Helmholtz). *Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs dans l'espace euclidien à trois dimensions, dont la décroissance à l'infini est dominée par $1/r^2$. Il existe alors un potentiel $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et un champ vectoriel $\vec{A}$ tels que*

$$\boxed{\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}} \tag{6.191}$$

Cette décomposition jouera un rôle important dans l'étude de l'électromagnétisme.

8. Pour faire simple, nous appelerons espace compact un espace de volume fini.

Conclusion

La présentation des opérateurs différentiels et de leurs propriétés nous avons suivie dans ce chapitre, et dans ce cours plus généralement, diffère d'approches plus traditionnelles à l'analyse vectorielle, et utilise des concepts mathématiques relativement récents, développés en particulier au XXe siècle par le mathématicien écossais Sir William Vallance Douglas Hodge (1903 – 1975).

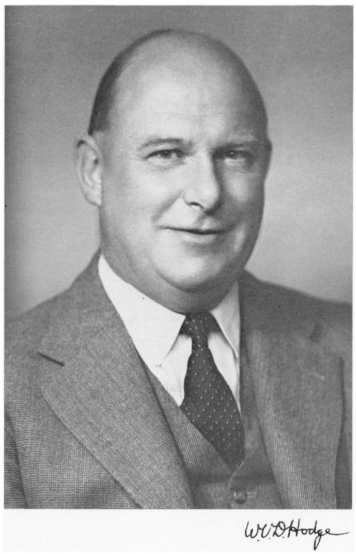


FIGURE 6.1 – Portrait de W. V. D. Hodge.

Bien que ces concepts soient d'apparence plus abstraits et difficiles à appréhender, leur utilisation est relativement simple, et permet d'obtenir directement de nombreux résultats classiques. En outre la plupart de ces outils sont utilisables d'une part pour des espaces euclidiens de dimension quelconque, et d'autre part pour des espaces non-euclidiens.

*
* *

En pratique, pour résoudre des problèmes d'analyse vectorielle, dans un système de coordonnées arbitraire, il suffira essentiellement de savoir manipuler correctement les **trois objets** suivants :

— le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$, permettant de multiplier des formes différentielles entre elles et d'obtenir une forme différentielle ;

— la dérivée extérieure $d\omega$, généralisant de manière simple le concept de différentielle d'une application ;

— l'opérateur de Hodge $*\omega$, permettant de convertir une p-forme en une $(n-p)$-forme. Rappelons que l'action de cet opérateur est très simple dans une base locale, et se résume à trois dimensions aux relations (6.74).

Un résumé de la correspondance entre objets usuels de l'analyse vectorielle et éléments de la théorie des formes différentielles est donné dans la table 6.2. Dans cette table ω (resp. ρ) est la 1-forme duale à $\vec{v}$ (resp duale à $\vec{w}$).

analyse vectorielle	**formes différentielles**
$\vec{v} \wedge \vec{w}$	$\omega \wedge \rho$
$\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	df
$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}$	$* d\omega$
$\text{div}\, \vec{v}$	$* d * \omega$
Δf	$* d * df$
$\Delta \vec{v}$	$d * d * \omega - * d * d\omega$

(6.192)

FIGURE 6.2 – Correspondance entre analyse vectorielle et théorie de Hodge.

Exemple 10 Donnons pour finir un exemple de calcul que vous devriez savoir faire facilement avec ces outils. Prenons le champ de vecteurs suivant donné dans la base locale des coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \cos\phi\, \vec{e}_r\,, \tag{6.193}$$

et calculons sa divergence. Nous n'avons besoin d'aucun formulaire, juste de se rappeler que la base locale duale sphérique est donnée par $\{dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi\}$ (ou de savoir le retrouver).

Le calcul de la divergence de $\vec{v}$ en termes de formes différentielles (décomposé dans les moindre détails !) donne :

$$\begin{aligned}
\text{div}\, \vec{v} &= * d * \big(\cos\phi\, dr\big) \\
&= * d * \big(\cos\phi\, e^r\big) \\
&= * d\big(\cos\phi * e^r\big) \\
&= * d\big(\cos\phi\, e^\theta \wedge e^\phi\big) \\
&= * d\big(r^2 \sin\theta \cos\phi\, d\theta \wedge d\phi\big) \\
&= *\Big(\frac{\partial\big(r^2 \sin\theta \cos\phi\big)}{\partial r} dr \wedge d\theta \wedge d\phi\Big) \\
&= *\Big(2r \sin\theta \cos\phi\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi\Big) \\
&= *\Big(2r \sin\theta \cos\phi \frac{1}{r^2 \sin\theta} e^r \wedge e^\theta \wedge e^\phi\Big) \\
&= \frac{2}{r} \cos\phi * \big(e^r \wedge e^\theta \wedge e^\phi\big) \\
&= \frac{2}{r} \cos\phi
\end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'application de la formule (6.175) donne le même résultat.

Cours n°7

Intégration et théorème de Stokes

Dans ce dernier chapitre, nous développerons les outils d'intégration sur des surfaces, des volumes, et plus généralement des parties de dimension $d \leqslant n$ d'un espace euclidien à n dimensions. Les questions auxquelles nous voulons répondre sont les suivantes :

— comment décrire analytiquement de tels objets ?

— comment calculer leur surface, volume, etc. ?

— quels objets peut-on naturellement y intégrer ?

— existe-t-il un analogue du théorème fondamental de l'intégration, c.-à.-d. de la relation $\int_a^b dt\, f'(t) = f(b) - f(a)$, en dimension plus élevée ?

Nous verrons le rôle important joué par les formes différentielles, ainsi que par les opérateurs différentiels (rotationnel, divergence, laplacien) introduits au dernier chapitre.

7.1 Intégrales multiples

La première étape de la construction d'intégrales sur des parties arbitraires d'un l'espace euclidien consiste à étudier la théorie de l'intégration de fonctions de plusieurs variables $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, variables qui seront plus loin assimilées à des coordonnées sur un espace euclidien à n dimensions.

Dans le cadre de la théorie de l'intégration de Riemann et Darboux que vous avez étudiée en première année, une intégrale d'une fonction d'une variable réelle, bornée et continue par morceaux, est définie sur un un intervalle fermé $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, ou une union finie d'intervalles $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k \subset \mathbb{R}$; ce formalisme peut être étendu aux « intégrales généralisées » dans le cas où la fonction f à intégrer n'est pas définie à une des bornes de l'intervalle, par exemple $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ qui est obtenue comme :

$$\int_0^1 dx/\sqrt{x} \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 dx/\sqrt{x}\,, \tag{7.1}$$

pour l'application $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ définie sur l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$.

Cette théorie ne permet cependant pas de donner un sens à des intégrales sur des domaines qui ne peuvent être décrits comme union d'intervalles fermés sur lesquels la fonction est bornée et continue (ou bien, dans le cadre des intégrales généralisées, incluant des intervalles ouverts ou semi-ouverts). L'exemple classique est fourni par l'intégrale de l'indicatrice des rationnels :

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases} \tag{7.2}$$

Il n'est pas possible de définir une intégrale $\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}}$ de cette fonction sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Une théorie de l'intégration plus complète, la *théorie de Lebesgue* est nécessaire pour montrer, dans ce cas, que $\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}} = 0$.

7.1.1 Mesure de Jordan ⋆

Dans le cadre des intégrales multiples, la question du domaine d'intégration se pose de manière plus aigüe, car les topologies en jeu sont plus diverses qu'à une dimension.

Avant de définir l'intégrale d'une fonction sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$, il est nécessaire de comprendre la notion plus élémentaire de calcul du volume de D, s'il existe, soit de définir une notion de *mesure* d'un domaine D. La théorie moderne de l'intégration utilise la *mesure de Borel–Lebesgue*, un peu difficile à exposer et qui ne sera donc pas développée ici. Nous nous contenterons de d'efinir la *mesure de Jordan*, d'après le mathématicien Camille Jordan (1838–1922), plus intuitive, mais ne s'appliquant qu'à une classe plus restrictive de domaines.

Un rôle important dans la théorie de l'intégration que nous présenterons est donné à la notion de bord d'un domaine.

Définition 1 (intérieur d'une partie de E). *Soit $D \subset E$ une partie d'un ensemble topologique E. L'intérieur de D, noté $\operatorname{Int} D$, est le plus grand ouvert de E (au sens de l'inclusion) contenant D.*

Évidemment, l'intérieur d'un ouvert est donné par l'ouvert lui-même.

Définition 2 (adhérence d'une partie de E). *Soit $D \subset E$ une partie d'un ensemble topologique E. L'adhérence de D, notée $\overline{D}$, est l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence pour D, c.-à.-d. tous les éléments $x \in E$ tels que tout voisinage de x contient au moins un élément de D distinct de x.*

On peut aussi définir $\overline{D}$ comme le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant D.

Définition 3 (bord d'une partie de E). *Soit $D \subset E$ une partie d'un ensemble topologique E. Le bord de D, noté ∂D, est l'ensemble des valeurs d'adhérence de D qui n'appartiennent pas à $\operatorname{Int} D$, soit*

$$\partial D \overset{\text{déf.}}{=} \overline{D} \backslash \operatorname{Int} D \tag{7.3}$$

Exemple 1 Dans $\mathbb{R}^3$, le bord de la boule ouverte

$$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x^2 + y^2 + z^2 < R^2\} \tag{7.4}$$

est simplement la sphère de rayon R,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}, \tag{7.5}$$

ce qu'on note $\partial B^3 = S^2$.

*
* *

Les briques élémentaires que nous utiliserons pour évaluer des volumes dans $\mathbb{R}^n$ sont donnés en dimension 2 par des rectangles, en dimension 3 par des pavés droits ou parallélépipèdes rectangle, et en dimension n quelconque ce que nous appelerons des n-pavés ou simplement pavés pour alléger l'écriture.

Définition 4 (n-pavé ouvert) *Un n-pavé ouvert $R \subset \mathbb{R}^n$ est donné par le produit cartésien de n intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$:*

$$R =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots]a_n, b_n[\,. \tag{7.6}$$

avec

$$\forall j = 1, \ldots, n \,, \quad -\infty < a_j < b_j < +\infty \,. \tag{7.7}$$

Le volume euclidien de R est défini comme

$$|R| \stackrel{\text{déf.}}{=} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \,. \tag{7.8}$$

Dans la théorie de l'intégration sur un intervalle réel, du moment que la fonction intégrée est bornée et continue par morceaux la nature de l'intervalle (ouvert, fermé, semi-ouverte) importe peu, dans la mesure où elle n'influe pas sur le résultat de l'intégrale. Il en est de même ici, et il sera utile de considérer :

Définition 5 (n-pavé général) *Un pavé général $R \subset \mathbb{R}^n$ est donné par le produit cartésien de n intervalles bornés de $\mathbb{R}$:*

$$R = I_1 \times I_2 \times \cdots I_n \,, \tag{7.9}$$

oú les intervalles I_j sont de type arbitraire, c.-à.-d. soit $]a_j, b_j[$, $[a_i, b_j[$, $]a_i, b_j]$ ou $[a_j, b_j]$.

Dans tous les cas de figure, nous avons $|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.

À l'aide de ces briques de construction, il est possible de construire des domaines plus généraux, cependant il faut être attentif à leur possibles recouvrements afin de calculer le volume de tels domaines correctement.

Définition 6 (union presque disjointe). *Une union finie de k pavés généraux, $D = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$ est dite presque disjointe si les intérieurs de tous les pavés sont deux à deux d'intersection nulle.*

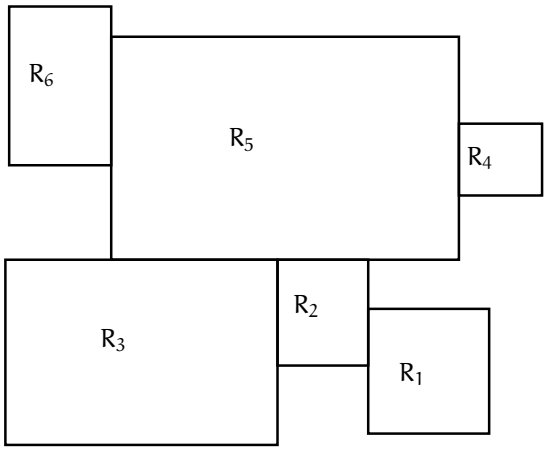


FIGURE 7.1 – Union presque disjointe de pavés.

Autrement dit, les pavés ne se recouvrent dans le pire des cas que suivant leurs bords, voir la figure 7.1.

Propriété 1 *Soit* $D = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$ *une union presque disjointe de pavés. Le volume de* D *est donné par*

$$|D| = \sum_{j=1}^{k} |R_j| \,. \tag{7.10}$$

Cette propriété découle simplement du fait que le volume d'un pavé ne dépend pas de son bord.

Une application importante de cette notion concerne la décomposition d'un pavé en une union presque disjointe de pavés plus petits contenus dans celui-ci, voir la figure 7.2.

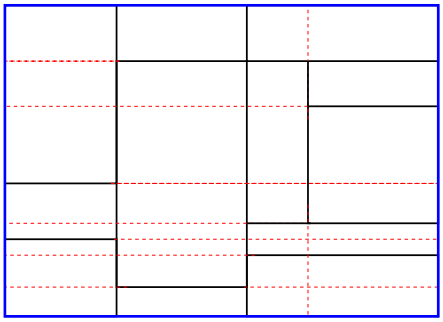


FIGURE 7.2 – Décomposition d'un pavé.

Propriété 2 *Soit une décomposition* $R = R_1 \cup \cdots \cup R_k$ *d'un pavé* R *où l'union des pavés* R_j *est presque disjointe. Le volume de* R *est donné par*

$$|R| = \sum_{j=1}^{j} |R_k| \tag{7.11}$$

et est indépendant de la décomposition choisie.

Pour démontrer cette propriété, il faut d'abord munir R d'un maillage suffisamment fin pour contenir toutes les faces des pavés R_j, voir les lignes pointillées rouges sur la figure 7.2. On peut alors décomposer le ℓ-ième côté du pavé R comme

$$a_\ell < x_{\ell,1} < x_{\ell,2} \cdots < x_{r,\ell} < b_\ell \tag{7.12}$$

pour un jeu $\{x_{\ell,1}, \ldots, x_{\ell,r}\}$ de réels appartenant à ce maillage de $\mathbb{R}^n$. On écrit ensuite pour chaque $\ell = 1, \ldots, n$

$$b_\ell - a_\ell = b_\ell - x_{r,\ell} + x_{r,\ell} - x_{r-1,\ell} + \cdots + x_{\ell,1} - a_\ell \,, \tag{7.13}$$

et on injecte ces décompositions dans la définition (7.8) du volume $|R|$ d'un pavé, donnant l'égalité (7.11) après développement du produit. □

Cette notion de décomposition d'un pavé en sous-pavés disjoints peut naturellement être étendue à des parties de $\mathbb{R}^n$ plus générales.

Définition 7 (partie élémentaire). $D \subset \mathbb{R}^n$ *est une partie élémentaire de* $\mathbb{R}$ *si* D *est une union finie de pavés.*

Propriété 3 *Toute partie élémentaire peut être réalisée comme union finie de pavés disjoints.*

Si une décomposition de D est par exemple donnée par deux pavés non disjoints R_1 et R_2, leur intersection $R_1 \cap R_2$ est elle-même un pavé, contenu en particulier dans R_1, et un redécoupage de R_1 en $2n$ pavés dont $R_1 \cap R_2$ permet d'« extraire » $R_1 \cap R_2$ de la décomposition et d'éviter ainsi un double comptage, voir la figure 7.3 Cette procédure peut s'appliquer itérativement à un nombre de pavés plus grand. □

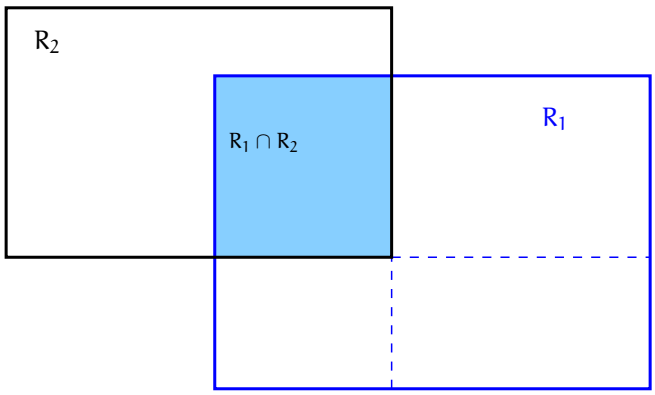


FIGURE 7.3 – Décomposition en pavés disjoints.

Définition 8 (mesure d'une partie élémentaire). *Soit* D *une partie élémentaire de* $\mathbb{R}^n$*. La mesure de* D*, notée* $\mu(\mathsf{D})$*. est le volume d'une décomposition* $\mathsf{R}_1 \cup \mathsf{R}_2 \cup \cdots \cup \mathsf{R}_k$ *en pavés disjoints, soit*

$$\mu(\mathsf{D}) = |\mathsf{R}_1| + |\mathsf{R}_2| + \cdots + |\mathsf{R}_k| \,. \tag{7.14}$$

On montre que cette mesure est indépendante de la décomposition de D *choisie.*

*
* *

On considérera maintenant une partie $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ quelconque et, à partir de cette notion de mesure d'une partie élémentaire, on cherchera à définir une mesure de D.

Définition 9 (mesures de Jordan intérieure et extérieure). *Soit* $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^n$ *une partie bornée. La mesure inférieure de Jordan de* D *est donnée par :*

$$\mu_-(\mathsf{D}) \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathsf{E} \subset \mathsf{D} \\ \mathsf{E} \text{ élémentaire}}} \mu(\mathsf{E}) \,, \tag{7.15}$$

et la mesure supérieure de Jordan de D *par :*

$$\mu_+(\mathsf{D}) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{\substack{\mathsf{E} \supset \mathsf{D} \\ \mathsf{E} \text{ élémentaire}}} \mu(\mathsf{E}) \,, \tag{7.16}$$

Ainsi, comme le montre la figure 7.4, la mesure inférieure donne la meilleure approximation de D par une union de pavés contenus dans D, alors que la mesure supérieure donne la meilleure approximation de D par une union de pavés dans laquelle D est contenue.

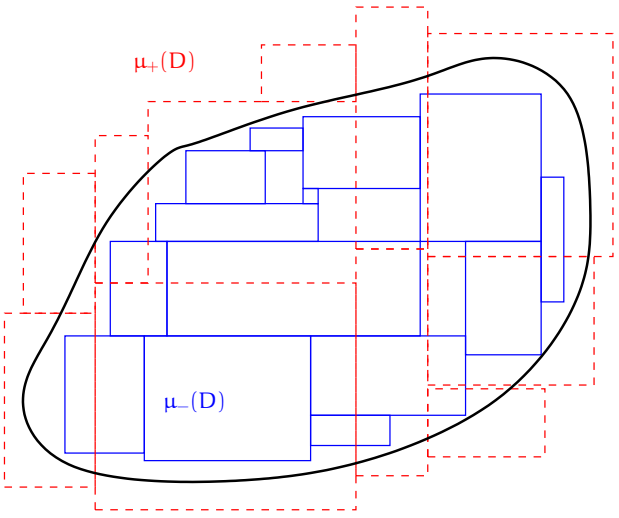


FIGURE 7.4 – Illustration des mesures de Jordan intérieure (bleu) et extérieure (rouge).

Définition 10 (mesure de Jordan). *Soit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *une partie bornée de* $\mathbb{R}^n$*. Cette partie est mesurable au sens de Jordan, si*

$$\mu_+(D) = \mu_-(D)\,, \tag{7.17}$$

et la mesure de Jordan de D *est alors donnée par :*

$$\mu(D) \overset{\text{déf.}}{=} \mu_+(D) = \mu_-(D)\,. \tag{7.18}$$

Propriété 4 (propriétés de la mesure de Jordan). *La mesure de Jordan obéit à un certain nombre de propriétés relativement intuitives, parmi lesquelles :*

— *si* A *et* B *sont deux parties de* $\mathbb{R}^n$ *disjointes (c.-à.-d. telles que* $A \cap B = \emptyset$*), et mesurables au sens de Jordan, alors* $A \cup B$ *est mesurable et :*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\,; \tag{7.19}$$

— *si* $A \subset B$ *sont deux parties de* $\mathbb{R}^n$ *mesurables au sens de Jordan,*

$$\mu(A) \leqslant \mu(B)\,; \tag{7.20}$$

— *si* A *est une partie de* $\mathbb{R}^n$ *mesurable au sens de Jordan,*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \mu(A + x) = \mu(A)\,. \tag{7.21}$$

La notion de mesure de Jordan est assez « faible » car elle ne s'applique qu'à des types restreints de partie de $\mathbb{R}^n$; en toute rigueur elle ne devrait même pas s'appeler mesure ! Une limitation importante de son applicabilité est qu'une union ou intersection dénombrable de parties de $\mathbb{R}^n$ Jordan-mesurables n'est pas nécessairement mesurable au sens de Jordan.

Définition 11 (partie négligeable). *Soit* $A \subset \mathbb{R}^n$ *une partie bornée de* $\mathbb{R}^n$*.* A *est dite négligeable sens de Jordan, si, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe une partie élémentaire* $D \subset \mathbb{R}^n$ *telle que* $\mu(D) \leqslant \epsilon$*.*

Par exemple, le segment $]0, 1[$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ car, pour tout $\epsilon > 0$, on peut l'inclure dans le rectangle $R = [-1/2, 3/2] \times [-\epsilon/4, \epsilon/4]$ d'aire $|R| = \epsilon$. Notons que, par définition d'une partie élémentaire, une partie est négligeable si on peut l'inclure dans une union *finie* de pavés d'aire totale inférieure à ϵ.

La notion de mesure de Jordan, permettant d'attribuer un volume à une partie $D \subset \mathbb{R}^n$, peut être vu sous un angle légèrement différent. Considérons l'application *indicatrice* de D :

$$\chi_D \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in D \\ 0 & \text{si} \quad x \notin D \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{7.22}$$

Si D est mesurable au sens de Jordan, l'intégrale de son indicatrice sur $\mathbb{R}^n$ est définie comme la mesure de Jordan associée :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_D \overset{\text{déf.}}{=} \mu(D)\,. \tag{7.23}$$

Notons que si D est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^n$, l'application χ_D est continue dans $\mathbb{R}^n$ sauf sur ∂D, le bord de D, qui est une partie de $\mathbb{R}^n$ de mesure nulle.

7.1.2 Intégrales sur un pavé

Une fois comprise la notion de mesure d'une partie de $\mathbb{R}^n$, et donc d'intégrale de l'indicatrice de cette partie sur $\mathbb{R}^n$, la définition de l'intégrale d'une application bornée et continue arbitraire ne pose pas de difficultés majeures.

Intégrale d'une fonction en escalier

La démarche suivie pour définir une intégrale en dimension n est la même qu'à une dimension : on commence par définir les intégrales de fonctions appartenant à une classe particulière, les fonctions en escalier, avant d'approcher une fonction continue et bornée arbitraire par des fonctions de ce type.

Définition 12 (fonctions en escalier). *Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé. Une fonction en escalier sur R est une fonction $e : R \to \mathbb{R}$ bornée pour laquelle il existe une décomposition (ou partition) de R en pavés presque disjoints (voir la figure (7.2), $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$, telle que*

$$\forall j = 1, \ldots, k \ , \quad \forall x \in \operatorname{Int} R_j \ , \quad e(x) = e_j \, , \tag{7.24}$$

où e_j est une constante.

Notons que les valeurs de f sur les bords des pavés peuvent être arbitraires, comme elles ne participeront pas à l'intégrale, le bord étant négligeable au sens de la mesure de Jordan (voir la définition 11). Par la suite, l'ensemble des fonctions en escalier sur R sera noté $\mathcal{E}(R)$.

Une fonction en escalier définie sur une certaine partition $R = R_1 \cup \cdots \cup R_k$ peut être facilement définie sur une subdvision plus fine. On peut en effet prendre chaque pavé R_j et le subdiviser lui-même en s_j pavés plus petits, c.-à.-d. comme $R_k = r_{k,1} \cup \cdots \cup r_{k,s_j}$, et imposer que

$$\forall \nu \in 1, \ldots, s_j \ , \quad \forall x \in r_{k,\nu} \ , \quad e(x) = e_j \, . \tag{7.25}$$

De cette manière, on peut écrire toute combinaison linéaire de fonctions en escalier sur R comme une fonction en escalier, même si leurs définitions sont liées à des partitions différentes de R, en choisissant une partition plus »fine » telle que chacune des fonctions soit en escalier sur cette subdivision de R. On peut ainsi munir $\mathcal{E}(R)$, l'ensemble des fonctions en escalier sur R, d'une structure d'espace vectoriel.

Définition 13 (intégrale d'une fonction en escalier sur un pavé). *Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé, e une fonction de R dans $\mathbb{R}$, et $R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$ une partition de R en pavés disjoints telle que e soit en escalier. L'intégrale de e sur R est alors définie par*

$$\int_R e \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^{k} |R_j| e_j \ , \tag{7.26}$$

où e_j est la valeur prise par e dans l'intérieur du pavé R_j.

Une telle intégrale peut également se noter $\int_R dx^1 \cdots dx^n \, e(x^1, \ldots, x^n)$.

Propriété 5 *La valeur de l'intégrale* $\int_R e$ *est indépendante de la partition* $R = R_1 \cup \cdots \cup R_k$ *choisie, tant que* f *est une fonction en escalier sur cette partition.*

Il est facile de montrer qu'une subdivision plus fine de R va donner le même résultat. Si on décompose chaque pavé comme $R_j = r_{j,1} \cup \cdots \cup r_{j,s_j}$, la propriété 1 nous permet d'écrire :

$$\int_R e = \sum_{j=1}^{k} |R_j| e_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\nu=1}^{s_j} |r_{j,\nu}| \right) e_j = \sum_{j,\nu} |r_{j,\nu}| e_j \,. \tag{7.27}$$

□

Propriété 6 *L'intégrale de fonctions en escalier sur un pavé satisfait aux propriétés :*

(a) Pour toutes fonctions e_1 *et* e_2 *en escalier sur* R, $\int_R (\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda \int_R e_1 + \mu \int_R e_2$;

(b) Pour toute fonction e *positive sur* R, *alors* $\int_R e \geqslant 0$;

(c) Si $e_1 \leqslant e_2$ *sur* R, *alors* $\int_R e_1 \leqslant \int_R e_2$.

Intégrale d'une fonction bornée sur un pavé

Comme pour les intégrales sur l'axe réel, l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée sur un pavé P est obtenue en l'approchant, par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, par des fonctions en escalier dont l'intégrale a été définie plus haut.

Définition 14 *Soit* f *une fonction bornée sur un pavé* R. *On appelle* $\mathcal{E}_-(f)$ *(resp.* $\mathcal{E}_+(f)$*) l'ensemble des fonctions en escalier minorant (resp. majorant)* f *sur* R :

$$\mathcal{E}_-(f) = \left\{ e \in \mathcal{E}(R) \text{ t.q. } \quad \forall x \in R \,, \quad e(x) \leqslant f(x) \right\} \tag{7.28a}$$

$$\mathcal{E}_+(f) = \left\{ e \in \mathcal{E}(R) \text{ t.q. } \quad \forall x \in R \,, \quad e(x) \geqslant f(x) \right\} \tag{7.28b}$$

Ces ensembles sont non vides comme f est bornée. En effet, il existe deux réels m et M tels que, pour tout $x \in R$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, et une fonction constante sur R est évidemment en escalier.

Étant donné que, par définition, pour toutes fonctions en escalier $e_- \in \mathcal{E}_-(f)$ et $e_+ \in \mathcal{E}_+(f)$, nous avons $e_- \leqslant f \leqslant e_+$ sur le pavé R, la propriété 6.*(c)* indique que

$$\forall e_- \in \mathcal{E}_-(f) \,, \quad \forall e_+ \in \mathcal{E}_+(f) \,, \quad \int_R e_- \leqslant \int_R e_+ \tag{7.29}$$

On définit les ensembles formés par les intégrales des éléments de $\mathcal{E}_-(f)$ et $\mathcal{E}_+(f)$,

$$S_\pm(f) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ \int_R e_\pm \,, \quad e_\pm \in \mathcal{E}_\pm(f) \right\} , \tag{7.30}$$

et l'inégalité (7.29) indique alors que $S_-(f)$ (resp. $S_+(f)$) est majoré (resp. minoré) et admet donc une borne supérieure (resp. une borne inférieure).

Définition 15 (intégrales inférieure et supérieure). *Soit* f *une fonction majorée sur un pavé* R. *Les intégrales inférieure* $I_-(f)$ *et supérieure* $I_+(f)$ *de* f *sur* R *sont définies respectivement par*

$$I_-(f) = \sup S_-(f)\ , \quad I_+(f) = \inf S_+(f)\,. \tag{7.31}$$

D'après ce qui précède, les quantités $I_\pm(f)$ existent, satisfont $I_-(f) \leqslant I_+(f)$, mais n'ont pas de raison *a priori* d'être égales.

Définition 16 (intégrale de Riemann sur un pavé). *Soit* $f : R \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée sur un pavé* $R \subset \mathbb{R}^n$. *La fonction* f *est dite intégrable sur* f *au sens de Riemann si une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(a) Pour tout $\epsilon > 0$, *il existe des fonctions en escalier* $e_- \in \mathcal{E}_-(f)$ *et* $e_+ \in \mathcal{E}_+(f)$ *(avec donc* $e_- \leqslant f \leqslant e_+$ *sur* R*) telles que :*

$$\int_R e_+ - \int_R e_- \leqslant \epsilon \tag{7.32}$$

(b) les intégrales inférieure et supérieure de f, *voir l'éqn. (7.31), sont égales à une même quantité* $I(f)$, *appelée intégrale de* f *sur* R *:*

$$I(f) \overset{\text{déf.}}{=} I_-(f) = I_+(f) \tag{7.33}$$

Les égalités $\sup S_-(f) = I(f)$ et $\inf S_+(f) = I(f)$ sont en effet équivalentes à la proposition suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $e_- \in S_-(f)$ telle que $I(f) - \epsilon/2 < \int_R e_- \leqslant I(f)$ et $e_+ \in S_+(f)$ telle que $I(f) \leqslant \int_R e_- < I(f) + \epsilon/2$. □

Théorème 1 (intégrabilité d'une fonction bornée). *Soit* f *une fonction bornée sur un pavé* $R \subset \mathbb{R}^n$. *Si* f *est continue sur* R *sauf sur une partie négligeable (au sens de Jordan), alors l'intégrale de Riemann de* f *existe.*

Ce théorème généralise le critère d'intégrabilité d'une fonction d'une variable réelle continue par morceaux ; sa démonstration ne sera pas donnée dans ce cours.

7.1.3 Intégrale sur un domaine

La notion d'intégrale d'une fonction en escalier sur un pavé s'étend aisément à la notion d'intégrale sur une partie élémentaire de $\mathbb{R}^n$, car cette dernière peut se décomposer comme une union finie de pavés.

Définition 17 (intégrale d'une fonction en escalier sur une partie élémentaire). *Soit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *une partie élémentaire, qui peut se réaliser comme une union finie* $R_1 \cup \cdots \cup R_p$ *de pavé disjoints, et* e *une fonction en escalier sur* D, *c.-à.-d. en escalier sur chacun des pavés* $R_1, \ldots, R_p$. *L'intégrale de* e *sur* D *est alors définie par :*

$$\int_D e \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{\ell=1}^{p} \int_{R_\ell} e\,. \tag{7.34}$$

Il est alors aisé de définir l'intégrale d'une fonction bornée sur une partie élémentaire, en décomposant l'intégrale de la même manière.

Définition 18 (intégrale d'une fonction bornée sur une partie élémentaire). *Soit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *une partie élémentaire, qui peut se réaliser comme une union finie* $R_1 \cup \cdots \cup R_p$ *de pavé disjoints, et* f *une fonction bornée sur* D*, intégrable sur chacun des pavés* $R_1, \ldots, R_p$*. L'intégrale de* e *sur* D *est alors définie par :*

$$\int_D f \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{\ell=1}^{p} \int_{R_\ell} f \,. \tag{7.35}$$

Une généralisation élémentaire du théorème 1 indique alors qu'une fonction continue sur une partie élémentaire, sauf sur une une partie négligeable au sens de Jordan, est intégrable au sens de Riemann.

Exemple 2 Soit l'ensemble des rationnels contenus dans l'intervalle $]0,1[$,

$$\mathbb{Q}_{]0,1[} \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{Q} \cap]0,1[\,. \tag{7.36}$$

Ce sous-ensemble de $]0,1[$ n'est pas négligeable au sens de Jordan même si intuitivement on le voit comme un ensemble discret de points. Considérons en effet l'indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}_{]0,1[}}$ associée. Soit $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$ une subdivision finie, arbitraire, de $]0,1[$. On considère des fonctions en escalier $e_\pm$ associées à cette subdivision telles que $e_- \leqslant f \leqslant e_+$ sur $]0,1[$. Tout intervalle $[a_k, a_{k+1}] \subset]0,1[$ contenant des rationnels et des irrationnels, les rationnels étant denses dans $\mathbb{R}$, nous avons nécessairement $e_- = 0$ et $e_+ = 1$. On en déduit que les intégrales inférieures et supérieures de $\chi_{\mathbb{Q}_{]0,1[}}$ ont pours valeurs $I_-(\mathbb{Q}_{]0,1[}) = 0$ et $I_+(\mathbb{Q}_{]0,1[}) = 1$; l'indicatrice de $\mathbb{Q}_{]0,1[}$ n'est donc pas intégrable. L'ensemble $\mathbb{Q}_{]0,1[}$ n'est ainsi pas mesurable au sens de Jordan. Dans la théorie de Lebesgue, on montre que cet ensemble est bien de mesure nulle.

*
* *

Pour traiter de domaines de $\mathbb{R}^n$ de forme plus compliquées que les parties élémentaires, nous pouvons nous rapporter à la présentation de la mesure de Jordan donnée à la sous-section 7.1.1. Nous y avons en particulier défini l'indicatrice d'un domaine, voir l'éqn. (7.22), et indiqué que si D était mesurable au sens de Jordan, alors son indicatrice χ_D était telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_D = \mu(D) \,, \tag{7.37}$$

où $\mu(D)$ est la mesure de Jordan du domaine D, c.-à.-d. son volume. En rapprochant ce résultat du théorème 1, nous voyons qu'un domaine D tel que l'indicatrice associée χ_D est continue sauf sur un sous-ensemble négligeable est mesurable au sens de Jordan ; nous nous placerons dorénavant dans ce cas de figure.

Définition 19 (intégrale sur un domaine). *Soit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine défini par une indicatrice* χ_D *continue, sauf sur un sous-ensemble négligeable. Si* $f : D \to \mathbb{R}$ *est bornée et continue, sauf sur un sous-ensemble de négligeable,* f *est intégrable sur* D *au sens de Riemann et*

$$\int_D f \overset{\text{déf.}}{=} \int_R \chi_D f\,, \tag{7.38}$$

où $R \supset D$ *est un pavé contenenant* D*.*

En effet, les fonctions χ_D et f étant continues sauf sur un sous-ensemble négligeable, $\chi_D f$ l'est aussi donc intégrable au sens de Riemann. [1]

Propriété 7 (union disjointe de domaines). *Soit* $D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine composé de deux parties disjointes, c.-à.-d. telles que* $D_1 \cap D_2 = \emptyset$*. La fonction* f *est intégrable sur* D *au sens de Riemann si et seulement si elle est intégrable sur* D_1 *et sur* D_2*, et*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f\,. \tag{7.39}$$

Schématiquement, il suffit pour démontrer cette propriété de considérer deux parties élémentaires disjointes de $\mathbb{R}^n$, contenant respectivement D_1 et D_2, et d'y appliquer le théorème 7.35.

La définition 19 permet de donner un sens à l'intégrale d'une fonction sur un domaine mesurable, mais n'est pas nécessairement d'une grande utilité pour le calcul pratique d'une telle intégrale.

7.1.4 Théorème de Fubini

Pour formuler le problème de manière générale, on considère un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ mesurable au sens de Jordan et des pavés $P_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $P_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ tel que

$$D \subset P_1 \times P_2\,. \tag{7.40}$$

On considère également une fonction :

$$f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{cases} \tag{7.41}$$

bornée et continue sur D (sauf éventuellement sur une partie de D négligeable) et donc intégrable sur D.

On commence par découper le domaine en « tranches » à x ou y fixé, voir la figure 7.5 pour une représentation bidimensionnelle. Nous définissions :

$$D_x \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ y \in \mathbb{R}^{d_2} \text{ t.q. } (x,y) \in D \right\}, \tag{7.42a}$$

$$D_y \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{d_1} \text{ t.q. } (x,y) \in D \right\}. \tag{7.42b}$$

1. En toute rigueur, comme f n'a été définie que sur D, il faudrait la prolonger en une fonction bornée sur tout R, par exemple en posant $f(x) = c$, avec c une constante arbitraire, pour tout $x \in R \backslash D$.

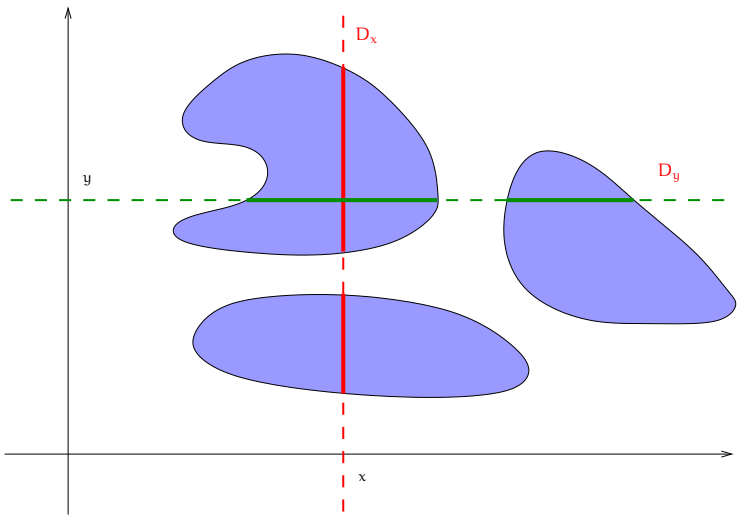


FIGURE 7.5 – Tranchage d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

Notons que, suivant les valeurs de x et de y, ces sous-ensembles peuvent être vides, ou composés d'une ou plusieurs parties disjointes. On définit alors les *fonctions-tranche* associées à f sur ces tranches comme :

$$f_x \; : \; \left\{ \begin{array}{lcl} D_x \subset \mathbb{R}^{d_2} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f_x(y) = f(x,y) \end{array} \right. \tag{7.43a}$$

$$f_y \; : \; \left\{ \begin{array}{lcl} D_y \subset \mathbb{R}^{d_1} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_y(x) = f(x,y) \end{array} \right. \tag{7.43b}$$

L'idée sous-jacente au théorème de Fubini est de réduire l'intégration sur $D \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ à des intégrales sur des domaines de $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$, pour, *in fine*, se ramener à des intégrales ordinaires sur l'axe réel. La formulation exacte de ce théorème nécessite la théorie de l'intégration de Lebesgue, qui n'est pas au programme, et nous en donnerons donc une version approximative.

Théorème 2 (théorème de Fubini). *Soit un domaine $D \subset (P_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}) \times (P_2 \subset \mathbb{R}^{d_2})$, où P_1 et P_2 sont des pavés, mesurable au sens de Jordan. Soit f une fonction bornée et continue sur D, et donc intégrable sur ce domaine. Si, pour tout $x \in P_1$, la tranche $D_x \subset \mathbb{R}^{d_2}$ est mesurable, alors la fonction tranche f_x est intégrable sur D_x et*

$$\int_D f = \int_{P_1} dx \left(\int_{D_x} dy \, f_x(y) \right) = \int_{P_1} dx \left(\int_{D_x} dy \, f(x,y) \right) \tag{7.44}$$

De même si, pour tout $y \in P_2$, la tranche $D_y \subset \mathbb{R}^{d_1}$ est mesurable, alors la fonction tranche f_y est intégrable sur D_y et

$$\int_D f = \int_{P_2} dy \left(\int_{D_y} dx \, f_y(x) \right) = \int_{P_2} dy \left(\int_{D_y} dx \, f(x,y) \right) \tag{7.45}$$

Un cas particulier de ce théorème concerne l'intégrale sur le pavé $(P_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}) \times (P_2 \subset \mathbb{R}^{d_2})$, qui est évidemment mesurable, et nous avons :

$$\int_{P_1 \times P_2} f = \int_{P_2} dy \left(\int_{P_1} dx\, f(x,y) \right) = \int_{P_1} dx \left(\int_{P_2} dy\, f(x,y) \right) \tag{7.46}$$

On voit donc que, sous réserve que les hypothèses du théorème soient vérifiées, on peut calculer itérativement une intégrale en dimension $d_1 + d_2$, d'abord comme une intégrale en dimension d_1 puis comme une intégrale en dimension d_2, ou l'inverse.

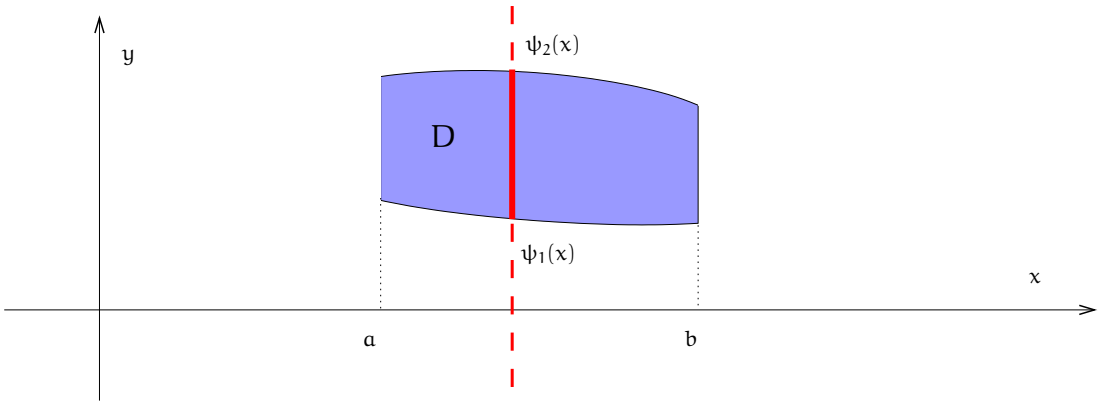


FIGURE 7.6 – Tranchage d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

De manière plus explicite, nous considérerons le cas particulier suivant du théorème de Fubini à deux dimensions, pour lequel les tranches du domaine d'intégration selon x sont délimitées par deux applications continues (voir la figure 7.6) :

Théorème 3 *Soit un domaine* D *du plan donné par*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [a,b] \text{ et } \psi_1(x) \leqslant y \leqslant \psi_2(x) \right\}, \tag{7.47}$$

où les applications ψ_1 *et* ψ_2 *sont continues sur* $[a,b]$. *Le domaine* D *est mesurable au sens de Jordan, et pour toute fonction intégrable sur* D *nous avons*

$$\boxed{\int_D f = \int_a^b dx \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\, f(x,y) \right)} \tag{7.48}$$

Naturellement, pour un domaine $D' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in [c,d] \text{ et } \phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y) \right\}$ nous avons un résultat analogue :

$$\int_{D'} f = \int_c^d dy \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dx\, f(x,y) \right). \tag{7.49}$$

Lorsque les hypothèses des deux propriétés sont satisfaites, l'une ou l'autre de ces formules peut être préférée pour des raisons de commodité du calcul.

Exemple 3 (aire d'un disque). Soit le disque D défini par $x^2+y^2 \leqslant R^2$. On peut le représenter comme (avec $R > 0$) :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [-R,R] \text{ et } -\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}\right\}. \tag{7.50}$$

L'aire A de ce disque est alors donnée, d'après la formule (7.48) par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D) = \int_D dxdy &= \int_{-R}^{R} dx \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\right) = 2\int_{-R}^{R} dx\,\sqrt{R^2-x^2} = 2R\int_{-R}^{R} dx\,\sqrt{1-(x/R)^2} \\ &= 2R^2\int_{-1}^{1} du\,\sqrt{1-u^2} = R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos\theta}{2}d\theta = \pi R^2\end{aligned} \tag{7.51}$$

où nous avons effectué les changements de variables $u = x/R$ puis $\sin\theta = u$.

*
* *

Il existe des résultats analogues pour des intégrales en dimension plus grande. À trois dimensions, nous trouvons :

Théorème 4 *Soit une application $x \in [a,b] \mapsto D_x \in \mathbb{R}^2$, où D_x est un domaine mesurable au sens de Jordan. On suppose que le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x \in [a,b] \text{ et} (y,z) \in D_x\right\} \tag{7.52}$$

est également mesurable, voir la fig. 7.7. Si $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est intégrable sur D, alors

$$\boxed{\int_D f = \int_a^b dx \left(\int_{D_x} dydz\, f(x,y,z)\right)} \tag{7.53}$$

Ainsi ce théorème nous permet de passer d'une intégrale triple à une intégrale double, cette dernière pouvant s'obtenir à l'aide du théorème 3

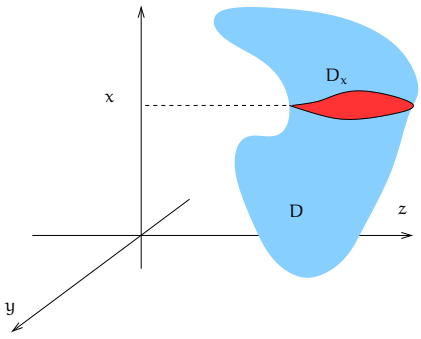


FIGURE 7.7 – Tranchage d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$.

Exemple 4 (volume d'une boule). Soit la boule B_3 définie par $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. On peut le représenter comme (avec $R>0$) :

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [-R,R] \text{ et } \underbrace{y^2+z^2 \leqslant R^2-x^2}_{D_x}\right\}, \tag{7.54}$$

où D_x correspond ici au disque de rayon $\sqrt{R^2-x^2}$. Le volume V de la boule se calcule alors à l'aide du théorème 4. Nous avons, en utilisant le résultat (7.51) obtenu pour le disque,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(B) &= \int_{B_3} dxdydz = \int_{-R}^{R} dx \left(\int_{y^2+z^2\leqslant R^2-x^2} dydz\right) \\ &= \int_{-R}^{R} dx\pi\left(R^2-x^2\right) = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3\,. \end{aligned} \tag{7.55}$$

*
* *

Nous voyons dans ces exemples que l'application du thèorème de Fubini peut devenir compliquée lorsque la description analytique de la frontière du domaine fait intervenir des fonctions compliquées. Il est alors avantageux, comme nous en avons l'intuition concernant l'intégrale sur un disque ou une boule, de choisir un autre système de coordonnées qui permet le « redressement » du domaine d'intégration, courbe en coordonnées cartésiennes, en un domaine parallélépipédique dans les nouvelles coordonnées.

Fidèles à l'orientation prise par ce cours, nous aborderons la question du changement de variables dans les intégrales multiples en prenant un point de vue de géométrie différentielle, et plus précisément via l'intégrales de formes différentielles.

7.1.5 Intégrales généralisées

Jusqu'ici nous avons uniquement présenté la théorie de l'intégration de fonctions sur un domaine compact contenu dans leur domaine de définition. Cependant, il est très souvent nécessaire dans un problème physique de considérer des intégrales généralisées.

Rappelons que, pour des intégrales de fonctions d'une variable réelle, on rencontre deux cas de figure (notion de *convergence simple*) :

1. Une des bornes de l'intégrale n'appartient pas au domaine de définition de f. Si on considère un intervalle de la forme $[a,b]$ et une fonction f non définie en a, l'intégrale généralisée de f sur $[a,b]$ est donnée par la limite suivante, si elle existe :
$$\int_a^b f \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f\,. \tag{7.56}$$
2. L'intégrale d'une fonction f sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ (ou $]-\infty,a]$). L'intégrale généralisée d'une fonction f définie sur $[a,+\infty[$ est est donnée par la limite suivante, si elle existe :
$$\int_a^{\infty} f \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a}^{1/\epsilon} f\,. \tag{7.57}$$

Définition 20 (convergence absolue). *L'intégrale généralisée d'une fonction* f *(cas 1. ou cas 2.) est absolument convergente si l'intégrale généralisée de* $|f|$ *existe.*

La convergence absolue est plus forte que la convergence simple. Nous avons en effet :

Théorème 5 *Si l'intégrale généralisée de* f *sur* $I \subset \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup +\{\infty\}$ *converge absolument, alors l'intégrale de* f *sur* I *converge simplement, et*

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f| < \infty \,. \tag{7.58}$$

Nous renvoyons au cours d'analyse réelle pour plus de détails sur les intégrales généralisées et leur propriétés. Dans le cadre de ce cours nous nous contenterons de donner une version du théorème de Fubini adaptée aux intégrales généralisées :

Théorème 6 (théorème de Fubini pour les intégrales généralisées). *Soit* D_1 *un domaine de* $\mathbb{R}^{d_1}$ *de coordonnées* x*, non nécessairement compact, et* D_2 *un domaine de* $\mathbb{R}^{d_2}$*, de coordonnées* y*, non nécessairement compact également. Si l'intégrale généralisée* $\int_{D_1 \times D_2} |f|$ *existe, alors* $\int_{D_1 \times D_2} f$ *existe et*

$$\int_{D_1 \times D_2} f = \int_{D_1} dx \left(\int_{D_2} dy \, f(x,y) \right) = \int_{D_2} dy \left(\int_{D_1} dx \, f(x,y) \right) . \tag{7.59}$$

Exemple 5 Considérons dans le domaine de $]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ l'intégrale généralisée suivante, si elle existe :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \, \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \,. \tag{7.60}$$

Examinons tout d'abord si l'intégrale converge absolument. Notons

$$J = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \left(\lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{\epsilon'}^1 dy \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2+y^2)^2} \right) \tag{7.61}$$

Remarquons que l'intégrande est invariant par l'échange $x \leftrightarrow y$, c.-à.-d. symétrique par rapport à la diagonale $y = x$. Nous pouvons donc remplacer l'intégrale sur le domaine rectangulaire par deux fois l'intégrale sur le domaine triangulaire situé sous la diagonale, soit

$$\begin{aligned} J &= 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \left(\lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{\epsilon'}^x dy \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2+y^2)^2} \right) = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \lim_{\epsilon' \to 0^+} \left[\frac{y}{y^2+x^2} \right]_{y=\epsilon'}^x \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln \epsilon = +\infty \,. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Ainsi l'intégrale ne convergeant pas absolument la validité de l'identité (7.59) n'est pas garantie. Un calcul explicite des deux ordres d'intégration possibles donne d'une part :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 dx\left(\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{\epsilon'}^1 dy\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 dx\left(\lim_{\epsilon'\to 0^+}\left[-\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=\epsilon'}^1\right) \qquad (7.63)\\ &= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{\epsilon\to 0^+}\big[\arctan x\big]_\epsilon^1 = -\frac{\pi}{4} \qquad (7.64)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 dy\left(\lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{\epsilon'}^1 dx\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 dy\left(\lim_{\epsilon'\to 0^+}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=\epsilon'}^1\right) \qquad (7.65)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\big[\arctan y\big]_\epsilon^1 = \frac{\pi}{4} \qquad (7.66)\end{aligned}$$

et ces deux intégrales ne sont pas égales.

7.2 Intégrales de volume

La section 7.1 était consacrée à l'étude de l'intégration d'une fonction de plusieurs variables, sans mettre l'accent sur la vision géométrique de celles-ci comme coordonnées sur un espace. Dans cette section nous montrerons comment les p-formes différentielles avec $p > 1$ interviennent naturellement dans la définition des intégrale sur des surfaces, volumes et plus généralement en dimension supérieure à 1.

7.2.1 Intégrale d'une n-forme en dimension n

Nous débuterons cette étude par quelques considérations élémentaires de la géométrie du plan et de l'espace euclidien.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan euclidien. Ces deux vecteurs engendrent un parallélogramme

$$P_2 = \{a\vec{u} + b\vec{v},\ a, b \in]0,1[\}\,, \qquad (7.67)$$

dont l'aire est donnée par le produit de la base avec la hauteur correspondante :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(P_2) &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u},\vec{v})| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sqrt{1-\cos^2(\vec{u},\vec{v})} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sqrt{1-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}}\\ &= \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}\,. \qquad (7.68)\end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes, avec $\vec{u} = u^x \vec{e}_x + u^y \vec{e}_y$ et $\vec{v} = v^x \vec{e}_x + v^y \vec{e}_y$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P_2) &= \sqrt{\left((u^x)^2 + (u^y)^2\right)\left((v^x)^2 + (v^y)^2\right) - (u^x v^x + u^y v^y)^2} \\ &= |u^x v^y - u^y v^x| \,, \end{aligned} \tag{7.69}$$

soit la valeur absolue du déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Le déterminant en lui-même définit l'*aire orientée* du parallélogramme P_2 qui change de signe si l'un ou l'autre des deux vecteurs change de sens.

À trois dimensions, on considère de même trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, définissant le parallélépipède

$$P_3 = \{a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w},\ a, b, c \in]0, 1[\} \,. \tag{7.70}$$

Le volume $\mathcal{V}$ de ce parallélépipède peut être obtenu, par exemple, par le produit de l'aire du parallélélogramme P_2 sous-tendu par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la hauteur h correspondante, voir la figure 7.8.

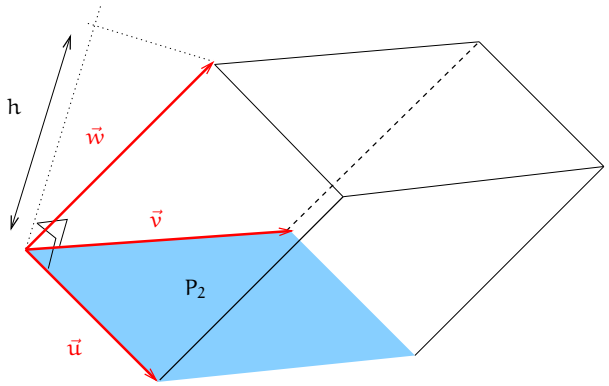


FIGURE 7.8 – Volume d'un parallélépipède.

D'après l'équation (7.69), nous avons alors

$$\mathcal{V}(P_3) = \mathcal{A}(P_2) \times h = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})| = \left| \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \right| , \tag{7.71}$$

le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{w}$ étant orthogonal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de norme $\mathcal{A}(P_2)$. Nous en déduisons donc également que le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ détermine le *volume orienté* du parallélépipède, changeant de signe si l'un des trois vecteurs change de sens. Notons que par inversion de l'espace, c.-à.-d. par l'action de la symétrie

$$\mathcal{I} : \vec{v} \mapsto -\vec{v} \tag{7.72}$$

le volume orienté change également de signe (contrairement à ce qui se passe à deux dimensions où le déterminant est invariant).

Propriété 8 (volume d'un parallélotope). *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le parallélotope engendré par ces vecteurs est défini par*

$$P_n = \{a_1 v_1 + \cdots a_n v_n, a_i \in]0, 1[\} \,. \tag{7.73}$$

Son volume est donné par

$$\mathcal{V}(P_n) = \left|\det(\nu_1, \ldots, \nu_n)\right| \tag{7.74}$$

et le déterminant lui-même correspond au volume orienté du parallélotope.

*
* *

Considérons, dans un espace euclidien E à n dimensions, une n-forme différentielle $\omega(M)$ et une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, tous de longueur infinitésimale, appartenant à l'espace tangent $T_M E$ au point M. On munit E d'un système de coordonnées cartésiennes et on note $x = (x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées du point M. Dans la base associée aux coordonnées cartésiennes, la n-forme différentielle ω s'exprime comme

$$\omega = h(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \cdots dx^n\,, \tag{7.75}$$

en termes d'une unique application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infiniment différentiable ; en effet, comme nous l'avions déjà remarqué, les n-formes en dimension n forment un espace vectoriel de dimension 1.

Nous pouvons appliquer cette n-forme différentielle, en M de coordonnées x, au vecteur produit tensoriel $\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n$. Si on développe chacun de ces vecteurs dans la base orthonormée associée aux coordonnées cartésiennes, c.-à.-d.

$$\nu_k = \sum_{i_k=1}^{n} \nu_k^{i_k} e_{i_k}\,, \tag{7.76}$$

nous avons

$$\omega\,(\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_n) = h(x)\, \left(dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n\right)(\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_n) \tag{7.77}$$

En utilisant

$$dx^\ell(\nu_k) = \nu_k^\ell \tag{7.78}$$

et en utilisant l'équation (6.38), que nous appliquons ici au cas $p = n$:

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) dx^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma(n)} \tag{7.79}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left(dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n\right)(\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_n) &= \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma)\, dx^{\sigma(1)}(\nu_1)\, dx^{\sigma(2)}(\nu_2) \cdots dx^{\sigma(n)}(\nu_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma)\, \nu_1^{\sigma(1)} \nu_2^{\sigma(2)} \cdots \nu_n^{\sigma(n)}\end{aligned} \tag{7.80}$$

Cette expression n'est rien d'autre que le déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, voir l'éqn. (6.19). Nous avons donc montré que

$$\left(dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n\right)(\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_n) = \det(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)\,. \tag{7.81}$$

Ainsi, l'application de la n-forme $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ à la famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ donne le volume orienté du parallélélotope engendré par ces vecteurs, voir la propriété 8. Si on imagine que nous avions scindé l'espace euclidien en de tels par parallélélotopes infinitésimaux pour définir l'intégrale de Riemann en dimension n (généralisant légèrement la construction donnée à la section 7.1 de l'intégrale en dimension n fondée sur les n-pavés), il est naturel d'interpréter l'intégrale de la n-forme différentielle ω comme l'intégrale multiple de l'application h associée.

Définition 21 (intégrale d'une n-forme en dimension n). *Soit ω une n-forme différentielle de l'espace euclidien à n dimensions. Dans un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, cette n-forme s'exprime au point M de coordonnées x comme*

$$\omega(M) = h(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \,, \tag{7.82}$$

où $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est infiniment différentiable. L'intégrale de ω sur un domaine D (non négligeable au sens de Jordan) est alors donnée par

$$\boxed{\int_D \omega \overset{\text{déf.}}{=} \int_D dx^1 dx^2 \cdots dx^n\, h(x)} \tag{7.83}$$

où le membre de droite désigne l'intégrale multiple de Riemann de h sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^n$.

Notons que, crucialement, cette définition est applicable à tout système de coordonnées, rectilignes ou curvilignes.

7.2.2 Forme de volume et orientation ⋆

Nous avons appris qu'une n-forme différentielle sur un espace de dimension n permet d'y définir naturellement une notion d'intégration. Une question naturelle est de déterminer, parmi les n-formes possibles, lesquelles permettent de donner une notion de volume d'un domaine D via leur intégration sur le domaine en question.

Dans l'*espace euclidien muni de coordonnées cartésiennes* $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$, la réponse est évidente. En utilisant les résultats précédents, le volume $\mathcal{V}(D)$ d'un domaine est donné par :

$$\mathcal{V}(D) = \int_D dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_D dx^1 \cdots dx^n \tag{7.84}$$

où le membre de droite correspond à l'intégrale de Riemann multiple ordinaire sur le domaine D, donnant le volume de ce domaine comme expliqué dans la sous-section 7.1.1. La n-forme différentielle associée est donc constante, et de coefficient unité :

$$\boxed{\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n} \tag{7.85}$$

Il est utile cependant d'être plus général et de se demander comment munir un espace E (euclidien ou non) d'une notion de volume, même indépendamment de l'existence de coordonnées cartésiennes.

Définition 22 (forme de volume). *Une forme de volume sur un espace* E *de dimension* n *est une* n*-forme* ω *qui ne s'annule jamais sur* E*.*

Si on considère un système de coordonées $\{x^1, \ldots, x^n\}$ sur E, alors[2] nous avons, en tout point de coordonnées $x = (x^1, \ldots, x^n)$,

$$\omega = h(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n , \tag{7.86}$$

en termes d'une application h qui est :

— soit strictement positive, c.-à.-d. telle que, pour tout x, $h(x) > 0$;

— soit strictement négative, c.-à.-d. telle que, pour tout x, $h(x) < 0$.

Le choix de l'un ou l'autre cas correspond aux deux choix possibles d'orientation de E ; notons que multiplier l'application h par une application strictement positive donne une forme de volume équivalente, et ne change pas l'orientation.

7.2.3 Forme de volume invariante

Dans l'espace euclidien muni de coordonnées cartésiennes (associées, rappelons-le, à une base orthonormée), il existe un choix naturel de forme de volume permettant de retrouver les résultats usuels de géométrie euclidienne, voir l'éqn. (7.84).

Dans un système de coordonnées quelconque (ou plus généralement dans un espace non-euclidien n'admettant pas de coordonnées cartésiennes couvrant tout l'espace), nous cherchons une forme de volume associée au produit scalaire exprimé dans les coordonnées choisies, ce dernier munissant l'espace tangent en chaque point d'une mesure de longueurs. Il s'agit donc d'une n-forme Ω satisfaisant la condition suivante : *le calcul du volume d'une partie mesurable* $\mathsf{D} \subset \mathsf{E}$ *doit être indépendant du système de coordonnées choisi.*

En particulier, pour l'espace euclidien, nous pouvons obtenir l'expression de cette forme de volume en partant de celle en coordonnées cartésiennes, voir l'éqn. (7.84), par un simple changement de coordonnées.

Définition 23 (forme de volume invariante). *Soit un système de coordonnées* $\{\tilde{x}^i, i = 1, \ldots, n\}$ *sur un espace* E *de dimension* n*, muni d'un produit scalaire* g*, de composantes* $g_{ij} = g(\partial/\partial\tilde{x}^i, \partial/\partial\tilde{x}^j)$ *dans la base de l'espace tangent associée aux coordonnées choisies. La forme de volume invariante sur* E *dans ce système de coordonnées, associée à une orientation positive, est donnée par :*

$$\boxed{\Omega \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{\det g}\, d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n} \tag{7.87}$$

où $\det g$ *et le déterminant de la matrice* g_{ij}*.*

2. En toute rigueur, un système de coordonnées curvilignes ne couvre pas nécessairement tout l'espace E. Lorsque c'est le cas, si par exemple l'espace est couvert par deux systèmes de coordonnées, il faut *(i)* s'assurer que la condition est respectée pour chacun des systèmes de coordonées dans son domaine de définition et que *(ii)* dans la région où les deux systèmes sont valables, le jacobien du changement de coordonnées est strictement positif. Lorsque cela n'est pas possible, l'espace E est dit *non-orientable*. Un exemple célèbre est donné par le ruban de Möbius.

Dans l'espace euclidien, il est possible, même si un peu rébarbatif, de démontrer que la définition (7.87) répond bien au problème posé.

Commençons par exprimer le produit scalaire, ou métrique, dans les coordonnées curvilignes. Nous avons

$$\mathfrak{g}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right)=\sum_{k,\ell}\mathfrak{g}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial x^\ell}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial}{\partial x^\ell}\right)=\sum_{k,\ell}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial\tilde{x}^j}\delta_{k\ell}\implies\mathfrak{g}_{ij}=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^j}\quad(7.88)$$

Si on considère la matrice M de composantes $M_{ki}=\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}$ cette égalité s'interprète comme

$$\mathfrak{g}_{ij}=\sum_k M_{ki}M_{kj}=\sum_k(M^T)_{ik}M_{kj}\,,\qquad(7.89)$$

où M^T désigne la *transposée* de la matrice M, où les indices de ligne et colonne ont été inversés.

Lemme 1 (déterminant de la métrique). *Soit $\mathfrak{g}_{ij}$ la métrique associée à un système de coordonnées curvilignes $\{\tilde{x}^1,\dots\tilde{x}^n\}$ sur l'espace euclidien.*

$$\det\mathfrak{g}_{ij}=\left(\det\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\right)^2=\big(\mathrm{jac}_x(\tilde{x})\big)^2\,,\quad\text{avec}\quad\mathrm{jac}_x(\tilde{x})\overset{\text{déf.}}{=}\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^j}\right)\qquad(7.90)$$

où $\{x^i,\ i=1,\dots,n\}$ désignent les coordonnées cartésiennes sur cet espace.

Ce lemme découle des propriétés $\det AB=\det A\det B$ et $\det A^T=\det A$ (qui seront vues au second semestre). Le déterminant de la métrique en coordonnées curvilignes est donc donné par le carré du jacobien du changement de coordonnées associé. □.

*
* *

Pour obtenir la formule (7.87), partons de l'expression en coordonnées cartésienne de la forme de volume, voir l'éqn. (7.85), et effectuons le changement de coordonnées $x^i=x^i(\tilde{x}^k)$. Nous avons d'après l'éqn. (4.22) :

$$dx^i=\sum_k\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^k}d\tilde{x}^k\qquad(7.91)$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Omega=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n&=\sum_{i_1,\dots,i_n}\epsilon_{i_1\cdots i_n}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_n}\\&=\sum_{i_1,\dots,i_n}\epsilon_{i_1\cdots i_n}\sum_{k_1,\dots,k_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{k_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial\tilde{x}^{k_n}}d\tilde{x}^{k_1}\otimes\cdots\otimes d\tilde{x}^{k_n}\qquad(7.92)\\&=\sum_{k_1,\dots,k_n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n}\epsilon_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{k_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial\tilde{x}^{k_n}}\right)d\tilde{x}^{k_1}\otimes\cdots\otimes d\tilde{x}^{k_n}\qquad(7.93)\end{aligned}$$

Si on isole le terme de la première somme avec $(k_1, k_2, \dots k_n) = (1, 2, \dots, n)$, on reconnaît dans l'expression entre parenthèses,

$$\sum_{i_1,\dots,i_n} \epsilon_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{k_n}} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) . \tag{7.94}$$

Chacun des autres termes non nuls est tel que $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est une certaine permutation de $(1, 2, \dots, n)$. Si on note σ cette permutation, nous avons, voir l'équation (6.16) :

$$\sum_{i_1,\dots,i_n} \epsilon_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \tilde{x}^{k_n}} = \epsilon(\sigma) \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \tag{7.95}$$

Nous en déduisons, en faisant la somme sur tous les $(k_1, \dots, k_n)$ de ce type, ou de manière équivalente la somme sur les permutations de $(1, 2, \dots, n)$, que :

$$\Omega = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) d\tilde{x}^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes d\tilde{x}^{\sigma(n)} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n . \tag{7.96}$$

Nous reconnaissons dans le préfacteur le jacobien du changement de coordonnées inverse, et nous pouvons réecrire le résultat sous la forme suivante :

$$\boxed{\Omega = \mathrm{jac}_x(\tilde{x}) d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n \ , \quad \text{avec} \quad \mathrm{jac}_x(\tilde{x}) \overset{\text{déf.}}{=} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)} \tag{7.97}$$

Il est crucial de remarquer que cette formule est valable uniquement lorsque les coordonnées $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ sont des coordonnés cartésiennes (au contraire de la formule (7.87) valide dans tous système de coordonnées). □

Notons que, si $\mathrm{jac}_x(\tilde{x}) > 0$, le changement de coordonnées conserve l'orientation de l'espace, alors que si $\mathrm{jac}_x(\tilde{x}) < 0$, le changement de coordonnées inverse l'orientation de l'espace. Nous avons d'après l'éqn. (7.90),

$$\mathrm{jac}_x(\tilde{x}) = \pm\sqrt{\det g} , \tag{7.98}$$

le signe dans le membre de droite se référant à ces deux cas de figure possibles. Si le changement de coordonnées inverse l'orientation, il faut alors remplacer Ω par $-\Omega$ pour obtenir une forme de volume donnant des valeurs positives aux volumes.

Ce résultat important peut s'interpréter du point de vue de l'analyse, plutôt que du point de vue de la géométrie différentielle que nous avons suivi, comme l'expression du changement de variables dans une intégrale multiple, généralisant le résultat connu concernant les intégrales sur l'axe réel.

Théorème 7 (changement de variables dans une intégrale multiple). *Soit l'intégrale à* n *dimensions d'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$I = \int_D dx^1 \cdots dx^n f(x) , \tag{7.99}$$

où D *est un domaine compact de* $\mathbb{R}^n$ *sur lequel* f *est intégrable. On considère un changement de variables défini par une application*

$$\psi : \begin{cases} D' \subset \mathbb{R}^n & \to & D \subset \mathbb{R}^n \\ \tilde{x}^i & \mapsto & x^i(\tilde{x}^k) \end{cases} \tag{7.100}$$

de classe $\mathcal{C}^1(D')$ *et telle que le jacobien associé,*

$$\mathrm{jac}_\psi(\tilde{x}) \overset{\text{déf.}}{=} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right), \tag{7.101}$$

ne s'annule jamais sur $\tilde{D}$*. En introduisant l'application* $F = f \circ \psi$*, c.-à.-d. telle que* $F(\tilde{x}) = f(x)$*, nous avons alors*

$$\boxed{I = \int_D dx^1 \cdots dx^n \, f(x) = \int_{D'} d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)\right| F(\tilde{x})} \tag{7.102}$$

Notons que, comme mentionné plus haut, la valeur absolue du jacobien permet de s'assurer que l'orientation est préservée par le changement de variables.

7.2.4 Intégrale d'une fonction sur un volume

Soit $\mathcal{V}$ un volume compact de l'espace euclidien à n dimensions muni d'un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ (sur un ouvert contenant $\mathcal{V}$) et f une fonction définie et bornée sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Étant donné que la notion naturelle d'intégrale sur un volume, comme nous l'avons vu ci-dessus, est donnée par l'intégrale d'une n-forme, l'intégrale d'une fonction est naturellement obtenue en multipliant celle-ci dans l'intégrande par la forme de volume invariante :

$$I(f) = \int_{\mathcal{V}} f \, dV \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathcal{V}} f\,\Omega = \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det g}\, f \, d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n = \int_{\mathcal{V}} d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \sqrt{\det g}\, f, \tag{7.103}$$

où, comme à notre habitude, le membre de droite désigne une intégrale ordinaire de Riemann d'une fonction à plusieurs variables.

En utilisant le fait que (en tout cas sous réserve d'être infiniment différentiable) f peut être vue comme une zéro-forme, cette intégrale peut aussi être écrite en utilisant l'opérateur de Hodge comme l'intégrale d'une n-forme :

$$\boxed{I(f) = \int_{\mathcal{V}} *f} \tag{7.104}$$

On peut également, dans le même ordre d'idées, dénoter la forme de volume invariante par $\Omega = *1$.

7.2.5 Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

Illustrons ce formalisme par le calcul d'intégrales dans les coordonnés curvilignes usuelles de l'espace euclidien à 2 et 3 dimensions. Les formules que nous établirons ici sont évidemment d'une grande utilité en physique.

Intégration en coordonnées polaires. La métrique associée aux coordonnées polaires est donnée par :

$$\mathfrak{g} = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi \,, \tag{7.105}$$

soit

$$\mathfrak{g}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} . \tag{7.106}$$

Nous en déduisions immédiatement à l'aide de l'éqn. (7.87) l'expression de la forme de volume associée à ces coordonnées (strictement parlant, dans tout ouvert ne contenant pas l'origine des coordonnées) :

$$\boxed{\Omega = \rho \, d\rho \wedge d\phi} \tag{7.107}$$

Donnons deux dérivations alternatives de ce résultat. Nous pouvons tout d'abord calculer le jacobien du changement de coordonnées, c.-à.-d.

$$J_{(x,y)}(\rho,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{pmatrix} \implies \mathrm{jac}_{(x,y)}(\rho,\phi) = \rho \tag{7.108}$$

aboutissant, à l'aide de la formule (7.97), à la même expression pour la forme de volume Ω en coordonnées polaires.

Une troisième méthode consiste à remplacer directement (x, y) en termes de (ρ, ϕ) dans l'expression de Ω en coordonnées cartésiennes, voir l'éqn. (7.85). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \Omega &= dx \wedge dy = d(\rho\cos\phi) \wedge d(\rho\sin\phi) = \big(\cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi\big) \wedge \big(\sin\phi d\rho + \rho\cos\phi d\phi\big) \\ &= \rho(\cos^2\phi \, d\rho \wedge d\phi - \sin^2\phi \, d\phi \wedge d\rho) = \rho \, d\rho \wedge d\phi \,. \end{aligned} \tag{7.109}$$

Ce résultat permet d'obtenir immédiatement la formule d'intégration d'une fonction du plan en coordonnées polaires. Soit

$$f : \quad \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{cases} \tag{7.110}$$

intégrable sur le domaine D et définissons la fonction F par $f(x, y) = F(\rho, \phi)$. Nous avons

$$\boxed{\int_D dx dy \, f(x, y) = \int_{D'} \rho d\rho d\phi \, F(\rho, \phi)} \tag{7.111}$$

où D' est le domaine couvert par les coordonnées polaires (ρ, ϕ) lorsque les coordonnés cartésiennes (x, y) couvrent le domaine D.

À l'aide de cette formule et du théorème de Fubini nous pouvons retrouver, beaucoup plus simplement, l'aire d'un disque de rayon R calculée dans l'exemple 3. Nous avons

$$\mathcal{A}(D) = \int_{x^2+y^2\leqslant R^2} dxdy = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2 . \tag{7.112}$$

Notons que, strictement parlant, les coordonnées polaires ne sont pas définies à l'origine. Cependant l'origine est négligeable au sens de la mesure de Jordan, et nous pouvons donc l'ignorer sans affecter le résultat final.

Intégration en coordonnées cylindriques. La métrique associée aux coordonnées cylindriques est donnée par :

$$g = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz , \tag{7.113}$$

soit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{7.114}$$

Nous en déduisions immédiatement l'expression de la forme de volume associée à ces coordonnées (strictement parlant, dans tout ouvert ne contenant pas l'axe Oz) :

$$\boxed{\Omega = \rho \, d\rho \wedge d\phi \wedge dz} \tag{7.115}$$

Les dérivations alternatives de ce résultat sont laissées en exercice.

Ce résultat permet d'obtenir immédiatement la formule d'intégration d'une fonction en coordonnées cylindriques. Soit

$$f : \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) \end{cases} \tag{7.116}$$

intégrable sur le domaine D et définissons la fonction F par $f(x, y, z) = F(\rho, \phi, z)$. Nous avons

$$\boxed{\int_D dxdydz \, f(x, y, z) = \int_{D'} \rho d\rho d\phi dz \, F(\rho, \phi, z)} \tag{7.117}$$

où D' est le domaine couvert par les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) lorsque les coordonnés cartésiennes (x, y, z) couvrent le domaine D.

Intégration en coordonnées sphériques. La métrique associée aux coordonnées sphériques est donnée par :

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2\theta \, d\phi \otimes d\phi , \tag{7.118}$$

soit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{7.119}$$

Nous en déduisions immédiatement l'expression de la forme de volume associée à ces coordonnées (strictement parlant, dans tout ouvert ne contenant pas l'axe Oz) :

$$\boxed{\Omega = r^2 \sin\theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\phi} \tag{7.120}$$

Les dérivations alternatives de ce résultat sont laissées en exercice.

Ce résultat permet d'obtenir immédiatement la formule d'intégration d'une fonction en coordonnées sphériques. Soit

$$f : \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{cases} \tag{7.121}$$

intégrable sur le domaine D et définissons la fonction F par $f(x,y,z) = F(r,\theta,\phi)$. Nous avons

$$\boxed{\int_D dxdydz \, f(x,y,z) = \int_{D'} r^2 \sin\theta \, drd\theta d\phi \, F(r,\theta,\phi)} \tag{7.122}$$

où D' est le domaine couvert par les coordonnées cylindriques (ρ,ϕ,z) lorsque les coordonnés cartésiennes (x,y,z) couvrent le domaine D.

À l'aide de cette formule et du théorème de Fubini nous pouvons retrouver le volume de la boule de rayon R calculé dans l'exemple 4. Nous avons

$$\mathcal{V}(B) = \int_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} dxdydz = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^R \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \, . \tag{7.123}$$

Strictement parlant, les coordonnées spheŕiques ne sont pas définies sur l'axe (Oz) ; cependant l'origine est négligeable au sens de la mesure de Jordan, et nous pouvons donc l'ignorer sans affecter le résultat final.

7.2.6 Forme de volume dans la base locale

Nous avons expliqué, voir la sous-section 4.3.3 du cours n° 4, comment associer à un système de coordonnés curvilignes $\{\tilde{x}^i, i = 1, i = 1, \ldots, n\}$, une base locale orthonormée $\{e_a, a = 1, \ldots, n\}$. Rappelons que

$$e_a = \sum_{i=1}^n E_a{}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \, , \quad \text{t.q} \quad g(e_a, e_b) = \delta_{ab} \, , \tag{7.124}$$

et que l'on définit une base duale de 1-formes différentielles associée, $\{e^b, b = 1, \ldots, n\}$ via

$$e^b = \sum_{i=1}^n E^b{}_i dx^i \, , \quad \text{t.q} \quad e^b(e_a) = \delta^b{}_a \, . \tag{7.125}$$

La base $\{e_a, a = 1, \ldots, n\}$ étant par construction orthonormée, *localement* les notions de longueur et de volume sont les mêmes qu'en coordonnées cartésiennes. Nous avons ainsi :

Propriété 9 (forme de volume dans la base locale). *Soit un système de coordonnés curvilignes* $\{\tilde{x}^i, i = 1, i = 1, \ldots, n\}$ *et* $\{e_a, a = 1, \ldots, n\}$ *une base locale orthonormée associée (de même orientation que la base des coordonnées* $\{\partial/\partial\tilde{x}^i, i = 1, i = 1, \ldots, n\}$*). La forme de volume s'exprime dans la base duale des 1-formes différentielles* $\{e^b, b = 1, \ldots, n\}$ *comme*

$$\boxed{\Omega = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n} \tag{7.126}$$

Partons de l'expression (7.126). Nous avons

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \sum_{i_1,\ldots,i_n} E^1{}_{i_1} \cdots E^n{}_{i_n} d\tilde{x}^{i_1} \wedge \cdot \wedge d\tilde{x}^{i_n} . \tag{7.127}$$

Dans cette somme, en raison de l'antisymétrie du produit extérieur $\wedge$, seuls les termes où $(i_1, \ldots, i_n)$ est une certaine permutation σ de $(1, 2, \ldots, n)$ contribuent. Nous avons donc

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) E^1{}_{\sigma(1)} \cdots E^n{}_{\sigma(n)} \right)}_{\det E^a{}_i} dx^1 \wedge \cdot \wedge d\tilde{x}^n . \tag{7.128}$$

Nous pouvons ensuite utiliser la relation (4.66) que nous reproduisons ici :

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j = \sum_a e^a \otimes e^a = \sum_{a,i,j} E^a{}_i E^a{}_j d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j . \tag{7.129}$$

En termes matriciels, nous avons donc

$$g_{ij} = \sum_a E^a{}_i E^a{}_j , \tag{7.130}$$

soit le produit matriciel de la transposée de la matrice $E^a{}_i$ avec la matrice elle-même. En passant au déterminant, nous en déduisons donc que

$$\det g_{ij} = (\det E^a{}_i)^2 , \tag{7.131}$$

voir la discussion similaire autour de l'éqn. (7.89). Si le changement de base préserve l'orientation, $\det E^a{}_i > 0$ et nous obtenons bien

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \sqrt{\det g}\, d\tilde{x}^1 \wedge \cdots d\tilde{x}^n = \Omega , \tag{7.132}$$

démontrant la propriété énoncée plus haut. □

Exemple 6 (coordonnées sphériques). L'utilisation de la base locale permet d'obtenir une quatrième (!) dérivation des formules énoncées à la sous-section 7.2.5. Prenons l'exemple des coordonnées sphériques, pour lesquelles une base locale des 1-formes différentielles préservant l'orientation est donnée par :

$$e^r = dr , \quad e^\theta = r\, d\theta , \quad e^\phi = r \sin\theta\, d\phi . \tag{7.133}$$

Nous avons donc pour la forme de volume :

$$\Omega = e^r \wedge e^\theta \wedge e^\phi = r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi \,. \tag{7.134}$$

*
* *

Il est ainsi plus simple de considérer uniquement l'expression (7.126) pour la forme de volume, à partir du moment où une base locale orthonormée associée au système de coordonnées utilisé est connue. L'avantage de cette base est aussi de rendre plus simple l'utilisation de l'opérateur de Hodge $*$ étudié au chapitre n° 6.

7.3 Intégration sur des surfaces

Dans un espace de dimension n muni d'un produit scalaire g, nous avons appris comment intégrer sur un domaine D de dimension n, en utilisant la forme de volume invariante définie par l'éqn. (7.87). Crucialement, cette formulation est indépendante du système du coordonnées choisi, et même du caractère euclidien ou non de la géométrie sous-jacent, du moment que celle-ci soit suffisamment « lisse ».

L'interêt de cette remarque est évident lorsqu'on souhaite calculer, non pas des intégrales de volume dans un espace euclidien, mais des intégrales sur des sous-espaces de dimension inférieure, par exemple des surfaces de l'espace à trois dimensions. Considérons pour illustration une sphère S de rayon R, c.-à.-d. la surface définie en coordonnées cartésiennes par

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \,. \tag{7.135}$$

Si nous considérons intrinsèquement la sphère, c.-à.-d. comme un espace à deux dimensions, il est évident que cet espace ne peut être euclidien, car on ne peut définir de système de coordonnées valable partout. Un système de coordonnées défini sur presque toute la sphère peut être obtenu par la *projection stéréographique*, voir la figure 7.9. On choisit arbitrairement un pôle nord N sur la sphère (et donc un pôle sud) et on considère le plan $\mathcal{P}$ tangent à la sphère contenant le pôle sud, muni de coordonnées cartésiennes (x, y). Les coordonnées stéréographiques d'un point $M \in S$ sont alors définies comme les coordonnées cartésiennes du point M', intersection entre la droite (NM) et le plan $\mathcal{P}$ voir la figure. Ce système de coordonnées permet de faire correspondre de manière bijective les points de la sphère avec ceux du plan.

Crucialement, les coordonnées stéréographiques du pôle nord ne sont pas définies (car dans cette construction le point N' correspondant serait envoyé à l'infini), signalant une différence fondamentale entre la géométrie de la sphère et du plan. Naturellement, il est possible de définir un autre système de coordonnées stéréographiques, en utilisant le plan tangent à la sphère passant par le pôle nord, et dans lequel les coordonnées de N sont bien définies. Il n'existe cependant *aucun* système de coordonnées recouvrant toute la sphère ; un autre exemple, fondé sur les coordonnées sphériques, sera présenté plus bas.

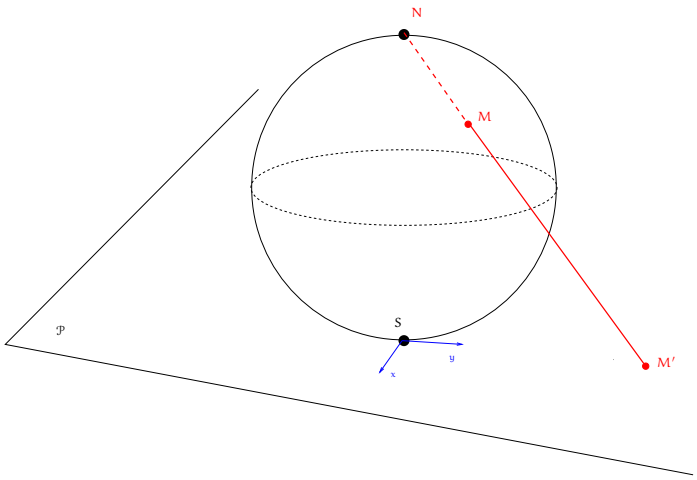


FIGURE 7.9 – Coordonnées stéréographiques sur la sphère.

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous étudierons majoritairement les surfaces à deux dimensions plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions, même si la plupart des concepts se généralisent facilement en dimension plus élevée.

7.3.1 Surfaces paramétrées et métrique induite

La description paramétrique des courbes, voir le chapitre n° 5, nous a permis de ramener le problème de l'intégration sur une courbe lisse $\mathcal{C}$ arbitraire dans un espace de dimension n à une intégrale ordinaire sur un segment de l'axe réel. Nous pouvons décrire de manière analogue les surfaces plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions, ainsi que les intégrales associées.

Définition 24 (surface paramétrée). *Une surface paramétrée lisse d'un espace euclidien* D *à trois dimensions est un sous-espace de dimension 2, donné par l'image d'une application :*

$$\beta \; : \; \left\{ \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \to & E \\ (u^1, u^2) & \mapsto & M = \beta(u^1, u^2) \end{array} \right. , \tag{7.136}$$

où nous supposerons β *infiniment différentiable.*

Notons que la question de la topologie de U, c.-à.-d. de savoir s'il s'agit par exemple d'un ouvert, d'un fermé ou d'une partie de $\mathbb{R}^2$ de topologie plus complexe, est importante et sera discutée dans la section 7.4. [3]

En choisissant un système de coordonnées à trois dimensions par exemple les coordonnées cartésiennes (x, y, z), une surface paramétrée S est décrite par

$$S = \left\{ \Big(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) \Big), (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2 \right\}, \tag{7.137}$$

3. Par ailleurs il se peut qu'un paramétrage ne couvre qu'une partie de la surface, et que d'autres paramétrage soient nécessaires pour couvrir l'ensemble de la surface (cf. l'exemple d'une sphère) ; une discussion exhaustive de ces aspects nécessiterait d'introduire le concept de *variété différentiable* et ne sera pas présentée dans ces notes.

où les trois applications à valeurs dans $\mathbb{R}$, $x(u^1,u^2)$, $y(u^1,u^2)$, et $z(u^1,u^2)$ sont les coordonnées du point $M = \beta(u^1,u^2)$ sur la surface $\mathcal{S}$.

L'espace euclidien « ambiant » est muni d'un produit scalaire permettant de mesurer des longueurs, via la notion de métrique

$$\mathfrak{g}(x) = \sum_{i,j} \mathfrak{g}_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \,, \tag{7.138}$$

où les composantes $\mathfrak{g}_{ij}(x)$ dépendent, en coordonnées curvilignes, des coordonnées du point où le produit scalaire sur l'espace tangent est considéré.

Nous considérons maintenant que les coordonnés $\{x^i, i = 1,2,3\}$ sont associées à des points appartenant à la surface paramétrée $\mathcal{S} \subset \mathsf{E}$, c.-à.-d. que ces coordonnées sont données par des applications (infiniment différentiables) $x^i(u^1,u^2)$, où u^1 et u^2 sont des paramètres de cette surface.

La différentielle dx^i doit alors être considérée, pour des points de la surface, comme la différentielle d'une application $x^i : (u^1,u^2) \mapsto x^i(u^1,u^2)$. Nous avons alors, comme cette application est supposée (infiniment) différentiable :

$$dx^i(u^1,u^2) = \frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^2 \,. \tag{7.139}$$

En injectant cette différentielle dans l'expression de la métrique sur E, voir l'éqn. (7.138), nous voyons que nous obtenons une notion naturelle de métrique sur la surface $\mathcal{S}$ à partir de celle dans l'espace E ambiant.

Définition 25 (métrique induite sur une surface paramétrée). *Soit un espace euclidien* E *à trois dimensions, muni sur un ouvert* O *d'un système de coordonnées* $\{x^i, i = 1,2,3\}$*, et d'une métrique associée*

$$\mathfrak{g} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathfrak{g}_{ij} dx^i \otimes dx^j \,. \tag{7.140}$$

Soit $\mathcal{S}$ *une surface lisse contenue dans* O*, paramétrée dans le système de coordonnées choisi par les applications infiniment différentiables*

$$x^i : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u^1,u^2) & \mapsto & x^i(u^1,u^2) \end{cases} \tag{7.141}$$

La métrique induite $\mathfrak{h}$ *sur la surface* $\mathcal{S}$ *est donnée par*

$$\boxed{\mathfrak{h} = \sum_{k,\ell=1}^{2} \mathfrak{h}_{k\ell} du^k \otimes du^\ell \,, \quad \mathfrak{h}_{k\ell} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i,j=1}^{3} \mathfrak{g}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^j}{\partial u^\ell}} \tag{7.142}$$

Cette définition est indépendante des coordonnées choisies à trois dimensions ; il peut être souvent avantageux de choisir des coordonnées curvilignes.

Exemple 7 (métrique induite sur la sphère). On considère la sphère $\mathcal{S}$ de rayon R, décrite en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \,. \tag{7.143}$$

Comme nous le savons, cette surface est particulièrment simple à décrire en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), car nous avons simplement la contrainte

$$r = R \,, \tag{7.144}$$

alors que les variables (θ, ϕ) sont libres, pouvant ainsi être choisies comme paramétrage de la sphère. Partant de l'expression de la métrique sur l'espace euclidien en coordonnées sphériques,

$$g = dr \otimes dr + r^2\, d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2\theta\, d\phi \otimes d\phi \,, \tag{7.145}$$

on en déduit simplement la métrique induite sur la sphère,

$$\boxed{h = R^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\phi \otimes d\phi \right)} \tag{7.146}$$

En accord avec les considérations générales développées plus haut, ces coordonnées sur la sphère (tout comme les coordonnées stéréographiques ou tout autre système de coordonnées sur la sphère) ne sont pas définies partout ; il faut exclure à la fois le pôle nord ($\theta = 0$) et le pôle sud ($\theta = \pi$).

Exemple 8 Soit une surface paramétrée $\mathcal{S}$ donnée en coordonnées cartésiennes par

$$x(u, v) = u^2 \,, \quad y(u, v) = uv \,, \quad z(u, v) = v^2 \,. \tag{7.147}$$

La métrique induite sur la surface $\mathcal{S}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} h &= d(u^2) \otimes d(u^2) + d(uv) \otimes d(uv) + d(v)^2 \otimes d(v)^2 \\ &= 4u^2 du \otimes du + (u dv + v du) \otimes (u dv + v du) + 4v^2 dv \otimes dv \\ &= (4u^2 + v^2) du \otimes du + 2uv\, du \otimes dv + (4v^2 + u^2) dv \otimes dv \,. \end{aligned} \tag{7.148}$$

7.3.2 Intégrales de surface et calcul d'aires

Étant donné que nous avons construit une métrique sur une surface $\mathcal{S}$, induite de celle dans l'espace ambient via son paramétrage, nous pouvons en déduire directement comment calculer l'aire de cette surface en obtenant sa forme de volume, que nous appelerons plutôt dans ce contexte *forme de surface*.

Définition 26 (forme de surface induite). *Soit un espace euclidien E à trois dimensions, muni sur un ouvert $O \subset E$ d'un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, 2, 3\}$, et d'une métrique associée*

$$g = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \,. \tag{7.149}$$

Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ *une surface lisse paramétrée dans le système de coordonnées choisi par les applications infiniment différentiables*

$$x^i : \begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u^1, u^2) & \mapsto & x^i(u^1, u^2) \end{cases} \tag{7.150}$$

La forme de surface induite Ω_s *sur la surface* $\mathcal{S}$ *est donnée par*

$$\boxed{\Omega_s = \sqrt{\det \mathfrak{h}}\, du^1 \wedge du^2} \tag{7.151}$$

où $\mathfrak{h}$ *est la métrique induite donnée par l'éqn. (7.142).*

Cette expression de la forme de surface provient simplement du fait que l'écriture générale de la forme de volume invariante donnée par l'éqn. (7.87) s'applique tant aux espaces euclidiens qu'aux espaces non-euclidiens (suffisament lisses).

Exemple 9 (Aire d'une sphère). De la métrique induite sur une sphère de rayon R,

$$\mathfrak{h} = R^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta\, d\phi \otimes d\phi \right) \tag{7.152}$$

voir l'exemple 7, nous tirons premièrement la forme de surface induite,

$$\boxed{\Omega_s = R^2 \sin\theta d\theta \wedge d\phi} \tag{7.153}$$

puis l'aire de la sphère,

$$\mathcal{A} = \int \Omega_s = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2 \,. \tag{7.154}$$

Notons encore une fois que les coordonnées choisies ne sont pas définies au pôle nord ($\theta = 0$) et au pôle sud ($\theta = \pi$), mais exclure ces points ne change pas la valeur de l'intégrale considérée.

7.3.3 Intégrale d'une 2-forme

De la même manière qu'une 1-forme différentielle s'intègre naturellement sur une courbe, voir le chapitre 5, une 2-forme différentielle s'intègre naturellement sur une surface.

Ce concept peut se formaliser indépendamment du système de coordonnées choisies, à l'instar du raisonnement présenté pour les intégrales curvilignes, en montrant comment induire d'une 2-forme différentielle ω sur E une 1-forme différentielle sur une surface $\mathcal{S} \subset E$. Néamoins, par souci de simplicité et de concision nous travaillerons dans un système de coordonnées donné sur E.

Définition 27 (2-forme induite sur une surface). *Soit un espace euclidien* E *à trois dimensions, muni sur un ouvert* $\mathcal{O} \subset E$ *d'un système de coordonnées* $\{x^i, i = 1, 2, 3\}$*, et* ω *une 2-forme différentielle* α *sur* E *qui s'exprime dans les coordonnées choisies sur* $\mathcal{U}$ *comme*

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j \,. \tag{7.155}$$

Soit $S \subset O$ une surface lisse paramétrée dans le système de coordonnées choisi par les applications infiniment différentiables

$$x^i : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & x^i(u,v) \end{cases} \tag{7.156}$$

La 2-forme différentielle induite α_S associée à α est donnée par

$$\alpha_S = \left(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) du \wedge dv \,, \tag{7.157}$$

où le terme entre parenthèses doit être compris comme une application (infiniment différentiable) de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \alpha_S &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} du + \frac{\partial x^i}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial x^j}{\partial u} du + \frac{\partial x^j}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}(x) \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} du \wedge dv + \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} dv \wedge du \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}(x) \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) du \wedge dv \end{aligned} \tag{7.158}$$

Par antisymétrie d'une 2-forme différentielle, nous avons $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, et le résultat peut se simplifier en

$$\alpha_S = \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} du \wedge dv \tag{7.159}$$

donnant l'expression ci-dessus. □

Étant donné que la notion de 2-forme induite permet d'obtenir une 2-forme sur la surface S à partir d'une 2-forme dans l'espace ambiant, nous pouvons, en utilisant la notion générale d'intégrale d'une n-forme différentielle en dimension n (voir la définition 21), nous pouvons alors comprendre comment intégrer une 2-forme différentielle sur une surface paramétrée.

Définition 28 (Intégrale d'une 2-forme sur une surface). *Soit un espace euclidien E à trois dimensions, muni sur un ouvert $U \subset E$ d'un système de coordonnées $\{x^i, i = 1,2,3\}$, et ω une 2-forme différentielle α sur E qui s'exprime dans les coordonnées choisies sur U comme*

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j \,. \tag{7.160}$$

Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ *une surface lisse paramétrée dans le système de coordonnées choisi par les applications infiniment différentiables*

$$x^i : \begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & x^i(u,v) \end{cases} \tag{7.161}$$

L'intégrale de α *sur* $\mathcal{S}$ *est définie par l'intégrale de la 2-forme induite* $\alpha_{\mathcal{S}}$ *correspondante :*

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \alpha \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathcal{S}} \alpha_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) du dv} \tag{7.162}$$

Le membre de droite de cette relation correspond à une intégrale double ordinaire sur un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Notons qu'il exste un choix d'orientation de la surface sous-jacent à cette définition, étant donné, au vu de l'éqn. (7.157), nous avons considéré que la forme de surface était $du \wedge dv$, plutôt que $dv \wedge du$.

7.3.4 Intégrale de surface d'un champs de vecteurs

Nous avons expliqué dans les paragraphes précédents que la quantité naturelle qui s'intègre sur une surface à 2 dimensions est une 2-forme différentielle. Dans un espace à 3 dimensions, nous avons expliqué au chapitre n° 6 comment, via l'action de l'opérateur de Hodge $*$, une 2-forme est équivalente à une 1-forme, à laquelle on peut faire correspondre un champ de vecteurs. Nous pouvons donc extraire de la définition 28, mais *uniquement dans un espace à trois dimensions*, la notion d'intégrale d'un vecteur sur une surface.

Pour simplifier la discussion, nous exposerons le raisonnement en coordonnées cartésiennes, et donnerons ensuite le résultat sous une forme plus générale. Considérons donc un champ de vecteurs, qui s'exprime dans des coordonnées cartésiennes $\{x^i, i = 1,2,3\}$ comme

$$\vec{V}(x) = \sum_{i=1}^{3} V^i \vec{e}_i \,, \tag{7.163}$$

ou ici $e_i = \partial/\partial x^i$, comme nous utilisons la base, orthonormée par définition, correspondant aux coordonnées cartésiennes choisies. Ce champ de vecteurs peut être associé à une 1-forme différentielle, qui s'exprime comme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} V^i dx^i \,. \tag{7.164}$$

À cette 1-forme correspond, via l'action de l'opérateur de Hodge, une 2-forme donnée par :

$$*\alpha = \sum_{i=1}^{3} V^i * dx^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} V^i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k \tag{7.165}$$

Soit maintenant une surface $\mathcal{S}$ paramétrée, c.-à.-d. donnée par l'ensemble des points dont les coordonnées $x^i(u,v)$ pour $i = 1,2,3$ sont des applications infiniment différentiables des variables $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Comme nous le savons l'intégrale de la 2-forme $*\alpha$ sur cette surface est donnée par l'intégrale, au sens usuel, de la 2-forme induite, soit (voir la définition 28) :

$$I = \int_{\mathcal{S}} *\alpha_{\mathcal{S}} = \int_U du dv \sum_{i=1}^{3} V^i \left(\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} \right) . \tag{7.166}$$

En termes vectoriels, nous pouvons écrire ce résultat de la manière suivante :

Définition 29 (intégrale de surface d'un champ de vecteurs). *Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{x})$ de l'espace euclidien à 3 dimensions, muni de coordonnés cartésiennes $\vec{x} = (x,y,z)^T$. Soit $\mathcal{S}$ une surface paramétrée donnée dans ces coordonnées par une application $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \vec{x}(u,v)$. L'intégrale du champ de vecteur sur la surface est donné par l'expression :*

$$\boxed{I = \int_U \vec{V} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} du dv \right)}_{d\vec{\mathcal{S}}}} \tag{7.167}$$

où nous avons introduit l'élément d'intégration vectoriel

$$\boxed{d\vec{\mathcal{S}} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} du dv} \tag{7.168}$$

Étant donné que $\partial\vec{x}/\partial u$ (resp. $\partial\vec{x}/\partial v$) correspond à un vecteur tangent à la surface $\mathcal{S}$ dans la direction associée à la coordonnée u (resp. v) sur la surface,[4] le produit vectoriel $\partial\vec{x}/\partial u \wedge \partial\vec{x}/\partial v$ définit un vecteur orthogonal au plan tangent en $\vec{x}(u,v)$ à $\mathcal{S}$. Nous avons donc montré que *l'élément d'intégration $d\vec{\mathcal{S}}$ d'un vecteur sur une surface $\mathcal{S}$ est orthogonal à celle-ci*, voir la figure 7.10.

Cette quantité s'appelle également, spécialement en physique, le *flux du champ de vecteurs* à travers la surface. Par exemple, si $\vec{V}(\vec{x})$ représente le champ de vitesses dans un fluide, l'intégrale $\int_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$ représente le débit volumique du fluide, c.-à.-d. le volume de fluide traversant la surface $\mathcal{S}$ par unité de temps. Intuitivement, il est naturel que seule la composante normale à la surface du champ de vitesses apparaisse dans le calcul (dans le produit scalaire $\vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$), car la composante de la vitesse parallèle à la surface n'influe pas le débit.

Intégrale de surface d'un champ de vecteurs en coordonnées curvilignes

Comme annoncé, nous donnons également la dérivation de l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs en coordonnées curvilignes, même si le calcul est plus laborieux. Aux

4. Plus précisément, nous avons $\partial/\partial_u = \sum_i (\partial x^i/\partial u)\partial/\partial x^i$ et les $\partial x^i/\partial u$ sont les composantes du vecteur ∂/∂_u dans la base $\partial/\partial x^i$ associée aux coordonnées cartésiennes dans l'espace ambiant.

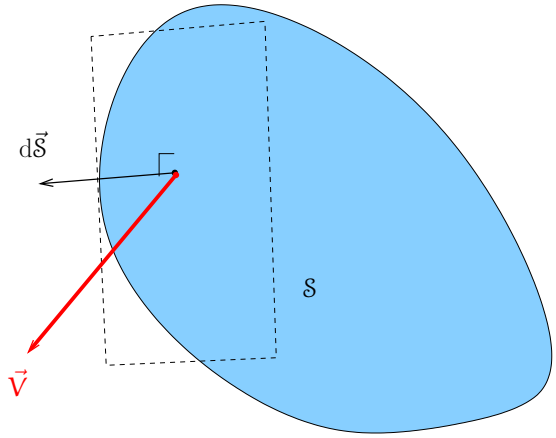


FIGURE 7.10 – Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface.

coordonnées curvilignes $\{\tilde{x}^i, i = 1, 2, 3\}$ nous associons comme toujours une base locale orthonormée

$$e_a = \sum_{i=1}^{3} E_a{}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \,, \quad g(e_a, e_b) = \delta_{ab} \,, \tag{7.169}$$

ainsi que la base duale de 1-formes,

$$e^a = \sum_{i=1}^{3} E^a{}_i d\tilde{x}^i \,. \tag{7.170}$$

Soit un champ de vecteur se développant dans cette base comme

$$V = \sum_{a=1}^{3} V^a e_a \,, \tag{7.171}$$

qu'on associera à la 1-forme

$$\alpha = \sum_{a=1}^{3} V^a e^a \,. \tag{7.172}$$

L'action de l'opérateur de Hodge $*$ donne alors la 2-forme

$$*\alpha = \frac{1}{2} \sum_{a=b,c,1}^{3} \epsilon_{abc} V^a e^b \wedge e^c \tag{7.173}$$

On considère la surface $\mathcal{S}$ décrite, dans les coordonnées curvilignes utilisées, par les applications $\tilde{x}^i(u, v)$ infiniment différentiables. La 2-forme induite sur la surface est donnée par

$$*\alpha\big|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \sum_{a=b,c,1}^{3} \epsilon_{abc} V^a \left(\sum_{i=1}^{3} E^b{}_i d\tilde{x}^i(u, v) \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} E^c{}_i d\tilde{x}^j(u, v) \right)$$

d'où nous tirons pour l'intégrale sur $\mathcal{S}$, par un calcul similaire à l'éqn. (7.158) :

$$I = \int \sum_a V^a \underbrace{\left(\sum_{b,c=1}^{3} \epsilon_{abc} \left(\sum_i E^b{}_i \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial u} \right) \left(\sum_j E^c{}_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial v} \right) du dv \right)}_{d\mathcal{S}^a} \tag{7.174}$$

Ce résultat est finalement similaire à l'éqn. (7.167) obtenue en coordonnées cartésiennes, après avoir écrit dans la base locale :

$$\frac{\partial}{\partial u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial u} \left(\sum_{a=1}^{3} E^a{}_i e_a \right) = \sum_{a=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} E^a{}_i \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial u} \right) e_a \,. \tag{7.175}$$

Remarque 1 Dans la pratique, au lieu d'utiliser cette formule générale plus commode, il sera plus simple de faire correspondre au champ de vecteurs dans la base locale $V = \sum_a V^a e^a$ la 1-forme $\alpha = \sum_a V^a e^a$, et de définir directement $\int_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$ comme étant donné par $\int_{\mathcal{S}} *\alpha$.

Intégrale d'une p-forme différentielle

Mentionnons pour clore cette section comment les concepts développés plus haut se généralisent aisément pour intégrer une p-forme différentielle dans sur un sous-espace de dimension p immergé dans un espace E de dimension n. Par souci de brièveté nous supposerons ici les conditions réunies, du point de vue de l'analyse, pour que ces intégrales soient définies.

Premièrement, une description paramétrée d'un sous-espace $F \subset E$ compact de dimension p est donnée de manière analogue à l'eqn. (7.136), c.-à.-d. par une application :

$$\beta \; : \quad \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^p & \to & E \\ (u^1, u^2, \ldots, u^p) & \mapsto & M = \beta(u^1, u^2, \ldots, u^p) \end{cases} , \tag{7.176}$$

Dans un système de coordonnées $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$ sur un ouvert de E, ce paramétrage sera associé à un jeu de n applications :

$$x^k \; : \quad (u^1, u^2, \ldots, u^p) \mapsto x^k(u^1, u^2, \ldots, u^p) \quad , \qquad k = 1, \ldots, n \,, \tag{7.177}$$

où $(x^1, \ldots, x^n)$ désignent les coordonnées du point M de l'éqn. (7.176).

Soit α une p-forme différentielle sur E. Dans les coordonnées choisies, α se décompose comme

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_p} \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_n} \,, \tag{7.178}$$

où les $\alpha_{i_1 \cdots i_p}$ sont des applications (infiniment différentiables) d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Comme nous l'avions fait pour les 2-formes, voir la définition 27, nous définissions la p-forme induite sur F comme

$$\begin{aligned}\alpha_F &\overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_p} \tfrac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\cdots i_p}\left(\sum_{k_1=1}^{p}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{k_1}}du^{k_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{k_p=1}^{p}\frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{k_p}}du^{k_p}\right)\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p}\alpha_{i_1,\dots,i_p}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial u_p}du^1\wedge\cdots\wedge du^p\,. \end{aligned} \tag{7.179}$$

où les composantes $\alpha_{i_1\cdots i_p}$ sont des fonctions de $x^k(u^1,\dots,u^p)$, donc *in fine* des fonctions des coordonnées $(u^1,\dots,u^p)$ sur le sous-espace F. [5]

Définition 30 (intégrale d'une p-forme). *Soit α une p-forme sur un espace E de dimension n muni, dans un ouvert O, d'un système de coordonnées $\{x^i, i=1,\dots,n\}$. Soit $F\subset O$ un sous-espace de dimension p, décrit sous forme paramétrique dans les coordonnés choisies par les applications $x^i(u^1,\dots,u^p)$, que l'on supposera différentiables. L'intégrale de α sur F est alors définie par*

$$\int_F\alpha \overset{\text{déf.}}{=} \int_F\alpha_F = \int_{U\subset\mathbb{R}^p}du^1\cdots du^p\sum_{i_1,\dots,i_p}\alpha_{i_1,\dots,i_p}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial u_p} \tag{7.180}$$

où le membre de droite est une intégrale ordinaire d'une application à p variables.

Sur un sous-espace de dimension p, il est aussi possible d'intégrer une $(n-p)$-forme, en tirant parti des propriétés de l'opérateur de Hodge :

Remarque 2 (intégrale d'une $(n-p)$-forme). *Si β est une $(n-p)$ forme sur un espace E à n dimensions, alors l'action de l'opérateur de Hodge donne une p forme $*\beta$, qui peut s'intégrer sur un sous-espace $F\subset E$ à p dimensions suivant la définition 30 :*

$$I=\int_F *\beta = \int_{U\subset\mathbb{R}^p}du^1\cdots du^p\big(*\beta\big)_{i_1,\dots,i_p}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial u_p} \tag{7.181}$$

où, si les coordonnées choisies sont cartésiennes :

$$\big(*\beta\big)_{i_1,\dots,i_p} = \sum_{j_1\cdots j_{n-p}}\alpha_{j_1\cdots j_{n-p}}\epsilon^{j_1\cdots j_{n-p}}{}_{i_1\cdots i_p}\,. \tag{7.182}$$

5. À la dernière ligne de l'éqn. (7.179) nous avons pu simplifier le résultat en utilisant l'antisymétrie des composantes $\alpha_{i_1\cdots i_n}$. La demonstration un peu technique est donnée en appendice.

7.4 Théorème de Stokes

La dernière section de ce chapitre, et donc de ce cours, est consacrée à la généralisaton du théorème fondamental de l'intégration,

$$\int_a^b dx\, f'(x) = f(b) - f(a) \tag{7.183}$$

Nous avions déjà vu au chapitre n° 5, pour une intégrale curviligne, que :

$$\int_{\mathcal{C}_{ab}} df = f(b) - f(a)\,, \tag{7.184}$$

indépendemment du chemin lisse $\mathcal{C}_{ab}$ suivi de a vers b, tant que f est différentiable sur un ouvert contenant $\mathcal{C}_{ab}$.

Du point de vue des formes différentielles, df peut être vue comme une 1-forme exacte (c.-à.-d. , rappelons-le, une 1-forme α pour laquelle on peut trouver une zéro-forme f telle que $\alpha = df$). Dès lors il est naturel d'envisager une extension de ce résultat pour l'intégrale d'une p-forme α (c.-à.-d. pour laquelle il existe une $(p-1)$-forme β telle que $\alpha = d\beta$) sur un sous-espace de dimension p.

7.4.1 Théorème de Stokes : cas général

Dans l'éqn. (7.184), la différentielle df est intégrée le long d'un chemin ouvert continu $\mathcal{C}_{ab}$, reliant le point a au point b. Un tel chemin est topologiquement équivalent au segment $[0, 1] \in \mathbb{R}$ (nous pouvons choisir ce segment comme fermé sans que cela affecte la valeur de l'intégrale). De ce point de vue, les points a et b correspondent aux extrêmités de ce segment ou, pour prendre une notion transposable en plus haute dimension, aux *bords* de ce segment.

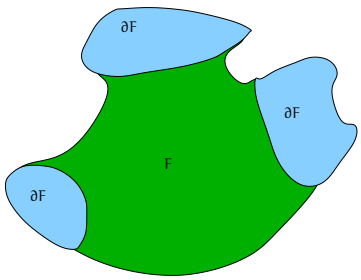


FIGURE 7.11 – Sous-espace avec bord.

On considère E un espace euclidien de dimension n et un sous-espace $F \subset E$, de dimension $p \leqslant n$, dont le bord ∂F est non vide (voir la définition 3), correspondant à un sous-espace de dimension $(p-1)$. On supposera que tant F que ∂F sont mesurables au sens de Jordan, c.-à.-d. que l'intégration de fonctions bornées et continues par morceaux y est possible.

Par exemple, si F est un disque de rayon R dans le plan euclidien, ∂F est le cercle de rayon R bordant ce disque. De manière générale le bord d'un sous-espace F peut contenir plusieurs composantes disjointes, voir la figure 7.11.

Théorème 8 (théorème de Stokes). *Soit* ω *une* $(p-1)$*-forme différentielle un espace* E *e dimension* n F *un sous-espace compact de dimension* $p \leqslant n$ *avec un bord* ∂F *non vide ; on supposera que le sous-espace* ∂F*, qui est de dimension* $(p-1)$*, ne possède pas lui-même de bord. L'intégrale de* $d\omega$ *sur* F *est alors donnée par :*

$$\boxed{\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega} \tag{7.185}$$

Ce théorème, absolument fondamental, contient comme cas particuliers un grand nombre de théorèmes d'analyse vectorielles très utilisés en physique, comme le théorème de Green, le théorème de Gauß, le théorème d'Ostrogradski, etc. que nous donnerons plus bas. Il fut formulé sous sa forme moderne, que nous présentons ici, par le mathématicien Élie Cartan en 1945. L'avantage d'utiliser le langage des formes différentielles est de pouvoir tous les unifier en un théorème unique.

Corollaire 1 (théorème de Stokes pour un sous-espace sans bord). *Soit un espace* E *de dimension* n*,* ω *une* $(p-1)$*-forme différentielle et* F *un sous-espace compact de dimension* $p < n$ *avec un bord* ∂F *négligeable au sens de la mesure de Jordan. Nous avons alors*

$$\int_F d\omega = 0\,. \tag{7.186}$$

En d'autres termes, l'intégrale d'une p*-forme exacte sur un sous-espace sans bord de dimension* p *est nulle.*

La preuve générale du théorème de Stokes est assez compliquée, aussi nous n'en donnerons qu'une version allégée ; nous nous restreindrons également à l'espace euclidien à deux dimensions pour simplifier les notations et le raisonnement.

Nous reprenons les idées développées dans la section 7.1 et considérons un domaine élémentaire $D \subset \mathbb{R}^2$, constitué d'une union de pavés ne partageant tout au plus que leurs bords, voir la figure 7.12. Considérons l'intégrale d'une 2-forme exacte $\omega = d\alpha$ sur le domaine

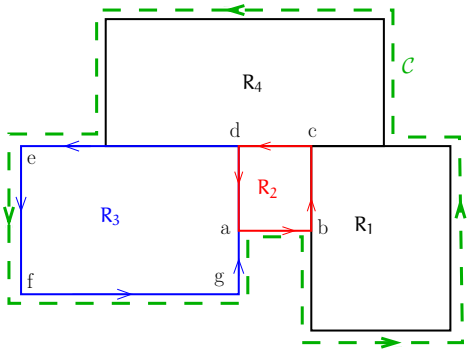


FIGURE 7.12 – Intégrale sur un domaine élémentaire.

D. Cette intégrale se scinde en intégrales sur les différents rectangles pleins composant D. Examinons en particulier sur l'intégrale sur R_2, de sommets a, b, c et d. Choisissons des coordonnées cartésiennes dans lesquelles les coordonnées de ces points sont respectivement $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,L)$ et $(0,L)$. Nous avons

$$\int_{R_2}\omega=\int_{R_2}d\left(\alpha_x dx+\alpha_y dy\right)=\int_{R_2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial\alpha_y}{\partial x}dx\wedge dy\right)=\int_{R_2}dxdy\left(\frac{\partial\alpha_y}{\partial x}-\frac{\partial\alpha_x}{\partial y}\right) \tag{7.187}$$

En utilisant le théorème de Fubini, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\int_{R_2}\omega&=\int_0^L dy\left(\int_0^1 dx\frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right)-\int_0^1 dx\left(\int_0^L dy\frac{\partial\alpha_x}{\partial y}\right)\\&=\int_0^L dy\,\alpha_y(1,y)-\int_0^L dy\,\alpha_y(0,y)-\int_0^1 dx\,\alpha_x(x,L)+\int_0^1 dx\,\alpha_x(x,0)\end{aligned} \tag{7.188}$$

Il ne s'agit rien d'autre que de l'intégrale de α sur un contour fermé $\mathcal{C}$ le suivant les arêtes du rectangle $abcd$, parcouru dans cet ordre :

$$\int_{R_2}\omega=\oint_{\mathcal{C}}\alpha=\left(\int_{[a,b]}+\int_{[b,c]}+\int_{[c,d]}+\int_{[d,a]}\right)\alpha\,. \tag{7.189}$$

Nous pouvons naturellement effectuer le même raisonnement pour les autres rectangles, et nous trouvons en particulier

$$\int_{R_3}\omega=\left(\int_{[d,e]}+\int_{[e,f]}+\int_{[f,g]}+\int_{[g,d]}\right)\alpha\,. \tag{7.190}$$

Crucialement, le segment $[a,d]$ est commun aux deux intégrales, et leurs contributions se compensent car il sont parcourus dans des sens opposés :

$$\int_{R_2}\omega+\int_{R_3}\omega\supset\int_{[d,a]}\alpha+\int_{[g,d]}\alpha=-\int_{[a,d]}\alpha+\left(\int_{[g,a]}+\int_{[a,d]}\right)\alpha=\int_{[g,a]}\alpha\,. \tag{7.191}$$

En étendant ce raisonnement aux différents rectangles composant le domaine D de la figure, nous voyons que seuls les côtés des rectangles partagés avec aucun autre rectangle, et donc le bord $\mathcal{C}$ du domaine élémentaire D, en tirets verts sur la figure, contribuent effectivement à l'intégrale de ω sur le domaine D.

Cela prouve, dans ce contexte restrictif, le théorème de Stokes. Pour traiter d'un domaine de forme plus général, il faut appliquer le même raisonnement que pour la définition de la mesure de Jordan, en prenant un maillage de plus en plus fin du domaine. Enfin, la généralisation en dimension quelconque suit exactement la même logique. [6]

Nous pouvons remarquer que le sens de l'intégrale obtenue le long du contour $\mathcal{C}$, dans le sens trigonométrique, a été obtenu sans ambiguité, une fois identifée l'intégrale de la 2-forme $dx\wedge dy$ avec l'intégrale à deux variables $\int dxdy$. En d'autres termes, l'orientation choisie du plan euclidien a induit une orientation bien définie sur le bord du domaine D.

6. Plutôt que des pavés, les mathématiciens préfèrent cependant utiliser des *simplexes*, généralisation des triangles et tétraèdres en dimension arbitraire.

Propriété 10 (orientation induite d'un bord). *Soit* E *un espace euclidien à* n *dimensions muni d'une* n*-forme de volume* ω*, c.-à.-d. une* n*-forme ne s'annulant jamais telle que, pour toute famille de vecteurs linéairement indépendants* $(v_1, \ldots, v_n)$ *appartenant à l'espace tangent au point* M*, le volume du parallélotope engendré par ces vecteurs est donné par* $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) > 0$*, pour un certain choix d'orientation.*

Soit D *un domaine de* E *de dimension* n*, dont le bord,* $\partial\mathsf{D}$ *définit un espace de dimension* $(n-1)$*. En tout point* p *du bord* $\partial\mathsf{D}$*, si* v_s *est un vecteur de* $\mathsf{T}_p\mathsf{E}$ *sortant, c.-à.-d. un vecteur non tangent à* $\partial\mathsf{D}$ *et dirigé vers l'extérieur de* D*, on définit une forme de volume* ω_∂ *induite telle que, si* $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ *est une famille de vecteurs linéairement indédependants de l'espace tangent en* p *à* $\partial\mathsf{D}$*, alors*

$$\omega_\partial(w_1, \ldots, w_{n-1}) \overset{\text{déf.}}{=} \omega(v_s, w_1, \ldots, w_n)\,. \tag{7.192}$$

Le signe de cette forme de volume donne une orientation au bord $\partial\mathsf{D}$ *du domaine* D*, et ceci indépendamment du vecteur sortant* v_s *choisi.*

La démonstration de cette propriété vient naturellelement lors de la démonstration du théorème de Stokes, comme notre démonstration partielle ci-dessus le suggère.

Exemple 10 (demi-plan supérieur). Prenons un exemple simple. Si on prend le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par le demi-plan supérieur $x \in \mathbb{R}^+$, dont le bord est l'axe (Ox), alors un vecteur sortant est donné par $v_s = -\partial/\partial y$, c.-à.-d. en notations standard le vecteur $\vec{v}_s = -\vec{e}_y$, orienté vers les $x < 0$. Alors de la forme de volume $\omega = dx \wedge dy$ sur le plan euclidien, on déduit une forme de volume sur le bord qui est telle que, pour tout vecteur du bord $\vec{v} = v_x\vec{e}_x$,

$$\omega_\partial(\vec{v}) = dx \wedge dy(\vec{v}_s \otimes \vec{v}) = \cancel{dx(\vec{v}_s)dy(\vec{v})} - \underbrace{dy(\vec{v}_s)}_{-1}\underbrace{dx(\vec{v})}_{v_x} = v_x\,. \tag{7.193}$$

Cela signifie que le bord du demi-plan supérieur est l'axe (Ox) orienté dans la direction des x croissants.[7] Si on applique le même raisonnement au demi-plan inférieur puis aux demi-plans gauche et droit, on trouve au final que le bord d'un rectangle plein correspond au rectangle parcouru *dans le sens trigonométrique*, comme l'équation (7.189) le suggère.

Ce résultat se généralise à tout domaine du plan topologiquement équivalent à un rectangle, par exemple à un disque.

*
* *

Le théorème de Stokes est d'une portée extrêmement générale, en dehors du cadre relativiste, ce sont principalement ses incarnations pour différents sous-espaces en dimension 2 et 3 qui concernent le physicien.

7. On aurait pu choisir tout aussi bien un autre vecteur sortant du demi-plan supérieur, par exemple $\vec{v}_s = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ et la conclusion aurait été la même. En effet, on aurait alors trouvé

$$\omega_\partial(\vec{v}) = dx \wedge dy(\vec{v}_s \otimes \vec{v}) = dx(\vec{v}_s)dy(\vec{v}) - dy(\vec{v}_s)dx(\vec{v}) = 2v_x$$

et l'orientation est également vers les x croissants.

7.4.2 Théorème de Green

On considère, comme dans la preuve partielle que nous avons donnée du théorème de Stokes, un domaine $\mathcal{S}$ compact du plan euclidien bordé par une courbe continue $\mathcal{C}$, voir la figure 7.13. Comme expliqué dans l'exemple 10, cette courbe est orientée dans le sens trigonométrique. Soit α une 1-forme différentielle sur le plan euclidien. Le théorème de Stokes,

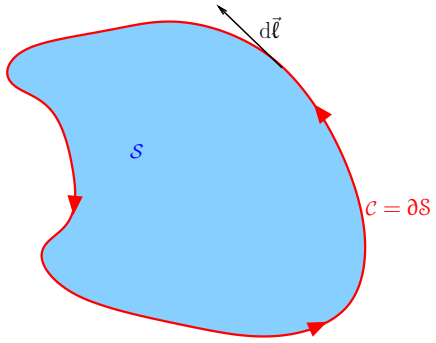


FIGURE 7.13 – Théorème de Green.

voir l'éqn. (7.185) implique que

$$\int_{\mathcal{S}} d\alpha = \int_{\partial\mathcal{S}} \alpha = \oint_{\mathcal{C}} \alpha \,. \tag{7.194}$$

Soit $\vec{v}$ le champ de vecteurs associé par dualité à la 1-forme α. Le membre de droite de l'équation (7.194) s'interprète alors comme la circulation de $\vec{v}$ sur la courbe $\mathcal{C}$, voir la définition 6 du cours n° 5.

Si nous munissons le plan euclidien de coordonnés cartésiennes (x, y), nous avons premièrement

$$\alpha = v^x dx + v^y dy \tag{7.195}$$

où $\vec{v} = v^x \vec{e}_x + v^y \vec{e}_y$, puis

$$d\alpha = \frac{\partial v^x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial v^y}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial v^y}{\partial x} - \frac{\partial v^x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \,. \tag{7.196}$$

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 9 (théorème de Green). *Soit $\mathcal{S}$ un domaine du plan euclidien bordé par une courbe $\mathcal{C}$ fermée, continue, sans intersection avec elle-même, et orientée dans le sens trigonométrique. Pour tout champ de vecteurs $\vec{v}$,*

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} dx dy \left(\frac{\partial v^y}{\partial x} - \frac{\partial v^x}{\partial y} \right) . \tag{7.197}$$

7.4.3 Théorème de Kelvin–Stokes

Considérons toujours une surface $\mathcal{S}$ bornée par une courbe $\mathcal{C}$, mais cette fois plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. voir la figure 7.14. Si α est une 1-forme, nous avons toujours l'égalité

$$\int_{\mathcal{S}} d\alpha = \int_{\partial\mathcal{S}} \alpha = \oint_{\mathcal{C}} \alpha \,. \tag{7.198}$$

Le membre de droite de cette égalité peut toujours s'interpréter comme la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{v}$ dual à α, c.-à.-d. , en coordonnées cartésiennes par exemple :

$$\vec{v} = v^x \vec{e}_x + v^y \vec{e}_y + v^z \vec{e}_z \quad \longleftrightarrow \quad \alpha = v^x dx + v^y dy + v^z dz \tag{7.199}$$

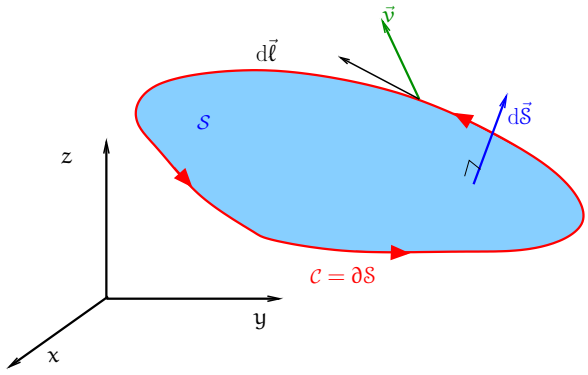


FIGURE 7.14 – Théorème de Kelvin–Stokes.

Pour l'interprétation du membre de gauche de l'égalité (7.198), nous pouvons faire à la notion d'intégrale de surface d'un champ de vecteurs, ou flux d'un champ de vecteurs, développée à la sous-section 7.3.4, en écrivant $d\alpha = *\big(*\, d\alpha\big)$, voir la propriété 4 donnée dans le cours n° 6.

Le champ de vecteur en question est donc champ de vecteur dual à la 1-forme différentielle $*d\omega$. Or ceci n'est rien d'autre, voir la section 6.4 du cours n° 6, que le rotationnel de $\vec{v}$:

$$*d\alpha \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}, \tag{7.200}$$

où α est duale au champ de vecteur $\vec{x}$, voir l'éqn. (7.199).

Théorème 10 (théorème de Kelvin–Stokes). *Soit $\mathcal{S}$ une surface compacte de l'espace euclidien à trois dimensions, bordé par une courbe $\mathcal{C}$ fermée, continue, sans intersection avec elle-même, dont l'orientation est induite par celle de $\mathcal{S}$. Pour tout champ de vecteurs $\vec{v}$,*

$$\int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} \,. \tag{7.201}$$

Pour obtenir l'orientation de la courbe (et donc du vecteur $d\vec{\ell}$) on peut utiliser la règle dite « du tire-bouchon ». Il faut imaginer qu'on serre une vis dans le sens du vecteur $d\vec{S}$.

Exemple 11 (théorème d'Ampère). En régime stationnaire, le champ magnétique dans le vide satisfait l'équation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}$, où $\vec{\jmath}$ est le vecteur densité de courant. En appliquant le théorème de Kelvin–Stokes, on obtient le théorème d'Ampère,

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0\int_{\mathcal{S}}\vec{\jmath}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mu_0 I \tag{7.202}$$

donnant la circulation du champ magnétique en fonction de l'intensité totale I du courant électrique passant à travers la surface $\mathcal{S}$ bordée par le contour $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$.

7.4.4 Théorème de Gauß-Ostrogradski

Considérons un volume $\mathcal{V}$ compact dans l'espace euclidien à trois dimensions (par exemple une boule de rayon R), bordé par une surface $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$.

Si α est une 1-forme sur l'espace euclidien à trois dimensions, alors l'application de l'opérateur de Hodge donne une 2-forme $\star\alpha$ qui s'intègre naturellement sur la surface $\mathcal{S}$. Le théorème de Stokes dans ce contexte prend la forme suivante :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}*\alpha = \int_{\mathcal{S}} *\alpha\,. \tag{7.203}$$

Analysons la signification de cette relation du point de vue vectoriel, en considérant comme auparavant que la 1-forme différentielle α est duale à un champ de vecteurs $\vec{v}$.

Le membre de droite de l'eqn. (7.203) s'interprète alors, voir la sous-section 7.3.4, comme le flux de $\vec{v}$ à travers la surface $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$, c.-à.-d. comme $\int_{\mathcal{S}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$.

Concernant le membre de gauche de l'eqn. (7.203), nous pouvons premièrement écrire, en utilisant la propriété 4 du cours n° 6 :

$$\mathrm{d}*\alpha = *^2\mathrm{d}*\alpha = *\big(*\,\mathrm{d}*\alpha\big)\,, \tag{7.204}$$

et reconnaître dans le terme entre parenthèses la divergence de $\vec{v}$, voir la définition 15 du cours n° 6, qui est un scalaire ou, dit autrement, une zéro-forme. Deuxièmement, d'après l'équation (7.104), l'intégrale de $\big(*\,\mathrm{d}*\alpha\big)$ correspond à l'intégrale de $\mathrm{div}\,\vec{v} = *\mathrm{d}*\alpha$ sur le volume $\mathcal{V}$.

Théorème 11 (théorème de Gauß–Ostrogradski). *Soit $\mathcal{V}$ un volume compact de l'espace euclidien à trois dimensions, bordé par une surface $\mathcal{S}$ continue par morceaux et sans bord, dont l'orientation est induite par celle de $\mathcal{V}$. Pour tout champ de vecteurs $\vec{v}$, nous avons :*

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{v}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{S}}\,. \tag{7.205}$$

En pratique, avec l'orientation ordinaire de l'espace euclidien (associée à la forme de volume $\Omega = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ en coordonnées cartésiennes), le vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$ pointe vers l'*extérieur* du volume, voir la figure 7.15.

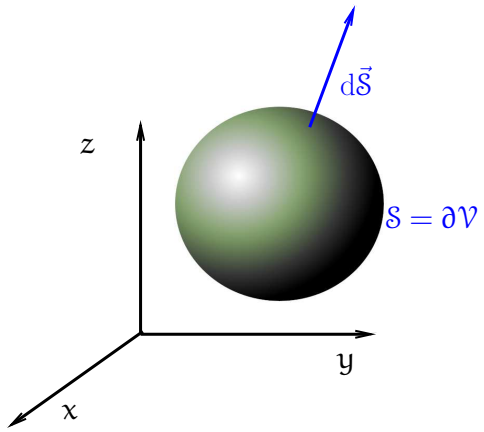


FIGURE 7.15 – Théorème de Gauß–Ostrogradski.

Un cas particulier correspond au cas où la 1-forme différentielle α est exacte, c.-à.-d. est donnée par la différentielle d'une application :

$$\alpha = df\,, \tag{7.206}$$

ce qui signifie que le champ de vecteurs $\vec{v}$ dual à α correspond en réalité à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. En se souvenant que, pour une application f,

$$\text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \Delta f\,, \tag{7.207}$$

voir l'eqn. (6.178), nous avons :

$$\boxed{\int_V \Delta f = \int_S \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{dS}} \tag{7.208}$$

Exemple 12 (théorème de Gauß). Le champ électrique dans le vide satisfait l'équation

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \tag{7.209}$$

où ρ représente la densité de charge électrique. D'après l'équation (7.205), nous avons alors, pour tout volume V bordé par une surface S,

$$\boxed{\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}} \tag{7.210}$$

où Q représente la charge électrique totale contenue dans le volume V.

Appendice : p-forme induite

Démontrons le résultat annoncé sous l'éqn. (7.179). Nous avons

$$\alpha_F = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \sum_{k_1 \cdots k_p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{k_p}} \right) du^{k_1} \wedge \cdots \wedge du^{k_p} \tag{7.211}$$

Pour $k_1, \ldots, k_p$ donnés, soit $\sigma \in S_p$ la permutation telle que $k_r = \sigma(r)$, pour $r = 1, \ldots, p$. On peut alors troquer les sommes sur $k_1, k_2, \ldots, k_p$ pour une somme sur les permutations, car les $(k_1, \ldots, k_p)$ qui ne sont pas des permutations de $(1, 2, \ldots, p)$ ne contribuent pas par antisymétrie, et nous avons :

$$\alpha_F = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{\sigma(p)}} \right) du^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge du^{\sigma(p)} \tag{7.212}$$

En utilisant l'antisymétrie du produit extérieur, ce résultat peut s'écrire :

$$\alpha_F = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{\sigma(p)}} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \tag{7.213}$$

où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Nous pouvons maintenant réordonner le produit de dérivées partielles entre parenthèses comme :

$$\alpha_F = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) \left(\frac{\partial x^{i_{\sigma^{-1}(p)}}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{i_{\sigma^{-1}(p)}}}{\partial u^p} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \tag{7.214}$$

où σ^{-1} est la permutation inverse de σ. L'antisymétrie totale des composantes $\alpha_{i_1 \cdots i_p}$ permet de réecrire le résultat comme :

$$\alpha_F = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_{\sigma^{-1}(1)} \cdots i_{\sigma^{-1}(p)}} \epsilon(\sigma) \left(\frac{\partial x^{i_{\sigma^{-1}(p)}}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{i_{\sigma^{-1}(p)}}}{\partial u^p} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \tag{7.215}$$

où nous avons utilisé le fait que $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma) = 1/\epsilon(\sigma)$. En réalisant que sommer sur tous les $(i_1, \ldots, i_p)$ est identique à sommer, pour σ donné, sur tous les $(i_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, i_{\sigma^{-1}(p)})$, nous avons

$$\alpha_F = \frac{1}{p!} \left(\sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma)^2 \right) \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_2} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^p} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \tag{7.216}$$

Comme $\epsilon(\sigma)^2 = 1$ et que S_p comporte $p!$ élements, nous avons finalement le résultat annoncé :

$$\alpha_F = \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_2} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^p} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^p \tag{7.217}$$