Sur les symétries exactes d'espace-temps

J.-B. Zuber

CEA, Service de Physique Théorique de Saclay ,
F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France

Un des thèmes de cette École est l'étude des symétries en physique des particules. C'est un truisme de dire que les symétries jouent un rôle fondamental dans tous les domaines de la Physique. En physique des particules, elles nous permettent de comprendre et d'organiser le spectre des états observés, de prédire des lois de conservation et des règles de sélection dans des processus de diffusion, etc. Souvent ces symétries ne sont qu'approchées, ou "brisées" par référence à une situation idéale de symétrie exacte. C'est le cas des symétries de saveur, des symétries discrètes dans le renversement d'espace ou de temps, de la supersymétrie ...

Certaines symétries, par contre, sont considérées comme exactes et intangibles, au moins à l'échelle à laquelle nous les testons. Les remettre en cause conduirait à un bouleversement majeur de la théorie. C'est le cas des symétries d'espace–temps, reflétant, d'une part, l'invariance relativiste et de l'autre, l'invariance par PCT, le renversement simultané des directions d'espace–temps, accompagné de la conjugaison de charge. Ce sont ces symétries exactes que nous allons discuter ici.

Cours donné à l'École d'Été de Physique des Particules, LAPP, Annecy, 26–30 Septembre 1994

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYMÉTRIES.

1. Symétries en Mécanique Quantique

1.1. Transformations d'un système quantique. Théorème de Wigner.

En Mécanique Quantique, les états d'un système sont décrits par des vecteurs $|\psi\rangle$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, (représentés encore par leur fonction d'onde $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$) et les quantités physiquement observables sont les carrés des modules des valeurs moyennes d'opérateurs auto-adjoints $A = A^\dagger$, soit

$$|\langle\phi|A|\psi\rangle|^2 \ .$$

En fait et plus précisément, un état physique est représenté par un "rayon", c'est-à-dire un vecteur $|\psi\rangle$ *à une phase près* : $|\psi\rangle \approx e^{i\alpha}|\psi\rangle$.

Dans ce contexte, on est souvent confronté à la situation suivante : il existe une transformation g du système (vecteurs d'état et observables) qui laisse inchangées ces quantités

$$|\langle {}^g\phi|{}^gA|{}^g\psi\rangle| = |\langle\phi|A|\psi\rangle| \ . \tag{1.1}$$

On peut alors démontrer le théorème suivant (Wigner) :

Si une bijection g entre les rayons d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ préserve les modules des produits scalaires $|\langle {}^g\phi|{}^g\psi\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle|$, alors cette bijection est un opérateur $U(g)$ linéaire ou anti-linéaire unitaire sur $\mathcal{H}$,

$$|{}^g\phi\rangle = U(g)|\phi\rangle, \qquad U(g)U^\dagger(g) = \mathbf{1} \ , \tag{1.2}$$

unique à une phase près.

La situation où l'opérateur est linéaire est la plus familière. U satisfait

$$U(\lambda|\phi\rangle + \lambda'|\phi'\rangle) = \lambda U|\phi\rangle + \lambda' U|\phi'\rangle \ , \tag{1.3}$$

son adjoint est défini par

$$\langle U\phi|\psi\rangle = \langle\phi|U^\dagger\psi\rangle \qquad \Big(= \langle\psi|U\phi\rangle^*\Big) \ . \tag{1.4}$$

Si U est unitaire, $U^{-1} = U^\dagger$ donc

$$\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \ .$$

Ceci est à contraster avec le cas antilinéaire. Un opérateur est *antilinéaire* s'il satisfait

$$U(\lambda|\phi\rangle + \lambda'|\phi'\rangle) = \lambda^* U|\phi\rangle + \lambda'^* U|\phi'\rangle \ , \tag{1.5}$$

avec un adjoint défini par

$$\langle U\phi|\psi\rangle = \langle\phi|U^\dagger\psi\rangle^* \qquad \Big(= \langle\psi|U\phi\rangle^*\Big) \ , \tag{1.6}$$

donc si U est unitaire

$$\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle \ .$$

La transformation des observables se déduit aisément de ce qui précède :

$$A \mapsto {}^gA = U(g)AU(g)^\dagger \ . \tag{1.7}$$

Le cas anti-linéaire se rencontre dans l'étude du renversement du sens du temps. En effet, le renversement du temps $\mathcal{T}$ laisse l'opérateur position $\vec{r}$ invariant mais change le signe des vitesses donc de l'opérateur impulsion $\vec{p}$

$$\begin{aligned} r'_j &= U(\mathcal{T})r_jU(\mathcal{T})^\dagger = r_j \\ p'_j &= U(\mathcal{T})p_jU(\mathcal{T})^\dagger = -p_j \end{aligned} \tag{1.8}$$

et les relations de commutation canoniques $[r_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$ ne peuvent être compatibles avec (1.8) que si $U(\mathcal{T})$ est antilinéaire

$$\begin{aligned} [r'_j, p'_k] &= -[r_j, p_k] = -i\hbar\delta_{jk} \\ &= U(\mathcal{T})[r_j, p_k]U(\mathcal{T})^\dagger = U(\mathcal{T})i\hbar\delta_{jk}U(\mathcal{T})^\dagger \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.2. Groupe de transformations. Représentations, représentations projectives.

Les transformations g d'un système peuvent se composer et s'inverser et forment donc d'un point de vue mathématique un groupe G.

On rappelle qu'un groupe est un ensemble doté d'une opération associative $g.(g'.g'') = (g.g').g''$, avec un élément neutre noté e : $g.e = e.g = g$ et telle que tout élément a un inverse $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$.

Quand on étudie un groupe, on est souvent conduit à construire des opérateurs linéaires $U(g)$ agissant dans un certain espace vectoriel de façon compatible avec la loi de groupe :

$$U(g_1.g_2) = U(g_1)U(g_2) \ , \tag{1.10}$$

et on dit que de tels U forment une **représentation** du groupe.

Dans le cas qui nous occupe, soit $U(g)$ l'opérateur unitaire qui réalise la transformation dans l'espace $\mathcal{H}$ des états du système quantique. Comme $U(g)$ est unique à une phase près (théorème de Wigner), la composition de deux transformations g_1 et g_2 est réalisée aussi bien par $U(g_1)U(g_2)$ que par $U(g_1.g_2)$ donc

$$U(g_1.g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1)U(g_2) \ , \tag{1.11}$$

où $\omega(g_1, g_2) = e^{i\zeta(g_1,g_2)}$ est une phase. On choisit $U(e) = \mathbf{1}$ donc $\zeta(e, g) = \zeta(g, e) = 0$. L'équation (1.11) définit ce qu'on appelle une représentation projective (ou à une phase près).

Pour résumer, la définition à une phase près des états de la Mécanique Quantique implique qu'un groupe de transformations est réalisé par une représentation projective. En fait, dans une grande variété de cas, l'étude des représentations projectives d'un groupe G est équivalente à celle des représentations usuelles d'un groupe plus grand $\widetilde{G}$ ("groupe de recouvrement"). C'est ainsi qu'au groupe des rotations $G = SO(3)$ on associe son groupe de recouvrement $SU(2)$ et l'étude des représentations projectives (en fait à un signe près) de $SO(3)$ conduit aux représentations de spin entier ou demi-entier.

Deux concepts reviendront fréquemment dans la suite, ceux de représentation irréductible et de représentation unitaire. Une représentation, agissant dans un certain espace (d'états en physique) n'est pas **irréductible** si on peut trouver un sous-espace d'états laissé globalement invariant par l'action des représentants du groupe. On peut illustrer cette situation, en anticipant un peu, par le cas d'un système doté d'états de spin $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$: le sous-espace des états de spin $\frac{1}{2}$ par exemple est laissé invariant par l'action du groupe des rotations, et l'espace entier ne forme pas l'espace d'une représentation irréductible. Il est clair que pour éviter les redondances et simplifier la discussion, on cherche à se ramener à des situations de représentations irréductibles. Une représentation est dite **unitaire** si les opérateurs $U(g)$ de (1.10) sont unitaires. En vertu du théorème de Wigner, ces représentations jouent un rôle fondamental en Physique.

1.3. Invariance et lois de conservation.

Jusqu'à présent nous avons mené la discussion des transformations d'un système quantique sans rien supposer sur son invariance sous ces transformations, c'est-à-dire sur la façon dont ces transformations affectent sa dynamique. En d'autres termes, les transformations pouvaient être considérées comme des changements de point de vue (de repère, de coordonnées, de base...) dans lequel les états et les observables changeaient.

Supposons maintenant que sous l'action d'un certain groupe de transformations G, le système est invariant, en ce sens que sa dynamique, contrôlée par son Hamiltonien H est inchangée. On va donc écrire que

$$H = U(g)HU^\dagger(g) \tag{1.12}$$

ou de façon équivalente

$$[H, U(g)] = 0 \ . \tag{1.13}$$

On définira donc une invariance (ou symétrie) d'un système quantique par un groupe G comme l'existence d'une représentation unitaire de ce groupe dans l'espace des états commutant avec l'Hamiltonien.

Cette situation implique en particulier l'existence de lois de conservation. En effet toute observable $\mathcal{F}$ fonction des $U(g)$ commute avec H donc est une "quantité conservée" :

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{F}\left(U(g)\right)}{\partial t} = \left[\mathcal{F}\left(U\right), H\right] = 0 \tag{1.14}$$

et chacune de ses valeurs propres est un "bon nombre quantique".

L'exemple le plus simple est fourni par le groupe des translations. Pour un Hamiltonien écrit sous la forme $\frac{1}{2}\sum\frac{\vec{p}_k^2}{2m} + V(\vec{x}_1\cdots,\vec{x}_N)$ l'invariance (1.12) ou (1.13) signifie que le potentiel est invariant par translation $\vec{x}_k \mapsto \vec{x}_k + \vec{a}$, $k = 1,\cdots,N$. On montre que $U(\vec{a}) = \exp i\vec{a}.\vec{P}$, $\vec{P} = \sum_k \vec{p}_k$, ces opérateurs commutent avec H et entre eux, et sont tous des quantités conservées. L'impulsion totale du système n'est autre que $\vec{P}$, et chaque état propre de H est dégénéré par rapport à $\vec{P}$.

On discute de la même façon l'invariance de rotation et la conservation du moment cinétique, l'invariance (éventuelle) sous la parité et la conservation du nombre quantique (discret) de même nom, etc.

2. Petit panorama des symétries en Physique

L'existence de symétries (ou invariances) se manifeste de multiples façons en Physique et la liste qui suit n'est certainement pas limitative mais plutôt une collection d'exemples. On peut distinguer des symétries discrètes (comme la parité) ou continues (rotations), agissant dans l'espace usuel (translations, dilatations, etc) ou dans un espace abstrait : invariance d'isospin, de couleur, etc.

Transformations d'espace discrètes : Parité $\mathcal{P}$, renversement du temps $\mathcal{T}$, invariances (translations, rotations, réflexions) d'un système discret comme un cristal, . . .

Transformations d'espace continues : Translations, rotations, dilatations et autres transformations conformes (invariance d'échelle et invariance conforme des systèmes "critiques"), invariances de translations et de rotation de l'espace à 3 dimensions, ou de l'espace-temps (groupes de Lorentz et Poincaré), . . .

Transformations discrètes dans un espace abstrait : invariance $\mathbb{Z}_2$ du modèle d'Ising, conjugaison de charge $\mathcal{C}$, échange de particules identiques . . .

Transformations continues dans un espace abstrait : invariances d'isospin, ou plus généralement de saveur, de couleur, . . .

Transformations de systèmes quantiques, échangeant le rôle des bosons et fermions : "supersymétrie".

etc etc

3. Un groupe continu : le groupe des rotations à trois dimensions

Avant de considérer les groupes de Lorentz et Poincaré, il est instructif d'étudier celui des rotations de l'espace usuel à trois dimensions. Rappelons les étapes principales de cette étude.

Soit l'espace euclidien à trois dimensions, rapporté à un repère orthonormé où les coordonnées sont notées soit (x_1, x_2, x_3), soit (x, y, z). On considère le groupe des rotations. Ces rotations laissent invariante la norme carrée du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et sont représentées dans une base orthonormée par des matrices 3×3 orthogonales réelles, de déterminant 1 : elles forment le groupe $SO(3)$.

La façon la plus simple de décrire une rotation est par son axe spécifié par un vecteur unitaire $\vec{n}$ et l'angle de rotation ψ autour de cet axe. Comme $\vec{n}$ dépend lui-même de deux angles polaires θ, ϕ, le groupe est un groupe à trois paramètres variant continûment dans un intervalle borné :

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi, \quad 0 \le \psi \le \pi \ . \tag{3.1}$$

On dit que le groupe est un groupe continu **compact** de dimension 3. (Par contraste, le groupe des translations est un groupe continu *non compact.* Pourquoi ?). L'expression explicite des matrices de rotation autour des axes de coordonnées est utile

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \qquad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \ . \tag{3.2$'$}$$

On cherche donc à construire les représentations de ce groupe $SO(3)$.

La remarque fondamentale dans l'étude des groupes continus comme $SO(3)$ ("groupes de Lie") est qu'il suffit pour une large part de considérer des éléments infinitésimaux du groupe. Si on écrit pour un angle infinitésimal $d\psi$

$$R_n(d\psi) = \mathbf{1} - i d\psi J_n \tag{3.3}$$

où J_n est le **générateur infinitésimal** des rotations d'axe $\hat{n}$, on a

$$R_n(\psi + d\psi) = (\mathbf{1} - i d\psi J_n) R_n(\psi) \tag{3.4}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial\psi} R_n(\psi) = -i J_n R_n(\psi) \tag{3.5}$$

qui s'intègre immédiatement (compte tenu de $R_n(0) = \mathbf{1}$) en

$$R_n(\psi) = e^{-i\psi J_n} \ . \tag{3.6}$$

A nouveau l'expression des générateurs infinitésimaux autour des axes de coordonnées est utile; ce sont les matrices antisymétriques (pourquoi ?)

$$J_1 = J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

ce qu'on peut exprimer par une formule unique

$$(J_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk} \tag{3.8}$$

à l'aide du tenseur complètement antisymétrique ϵ_{ijk} : $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jki}$. Les trois matrices J_i, $i = 1, 2, 3$ satisfont les relations de commutation suivantes

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{3.9}$$

comme on s'en convainc aisément.

Pour une représentation $U(R)$ du groupe des rotations satisfaisant donc la relation (1.10), on introduit de même les générateurs infinitésimaux

$$U(R_n(d\psi)) = \mathbf{1} - i d\psi J_n$$

Par abus de notation, on désigne l'opérateur identité $\mathbf{1}$ et les générateurs infinitésimaux par les mêmes notations que dans la représentation explicite (3.2)-(3.3), alors qu'il s'agit maintenant d'opérateurs (de matrices) d'une taille dépendant de la représentation considérée. On démontre qu'une conséquence de (1.10) est que les J_i satisfont les mêmes relations de commutation (3.9) dans *toutes* les représentations. Ces relations de commutation définissent l'**algèbre de Lie** $su(2)$.

Si la représentation est unitaire, alors les générateurs infinitésimaux sont hermitiques : $J_i^\dagger = J_i$. C'est par exemple le cas quand on considère l'espace des fonctions $f(\vec{x})$ des coordonnées (de carré sommable) se transformant selon

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}) &= f\left(R^{-1}\vec{x}\right) = f(\vec{x} - \delta\psi\hat{n} \wedge \vec{x}) \\ &= \left(1 - \delta\psi\hat{n}.\vec{x} \wedge \vec{\nabla}\right) f(\vec{x}) \\ &= (1 - i\delta\psi\hat{n}.\vec{J}) f(\vec{x}) \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

On identifie donc

$$\vec{J} = -i\vec{x} \wedge \vec{\nabla}, \qquad J_i = -i\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{3.11}$$

où on retrouve (à un facteur $\hbar$ près) la forme familière du moment angulaire "orbital" en Mécanique Quantique.

On introduit alors les combinaisons des générateurs

$$J_z \equiv J_3, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2 \tag{3.12}$$

Il est immédiat de calculer

$$[J_3, J_+] = J_+ \tag{3.13a}$$
$$[J_3, J_-] = -J_- \tag{3.13b}$$
$$[J_+, J_-] = 2J_3\ . \tag{3.13c}$$

On vérifie aussi que l'opérateur

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3^2 + J_3 + J_-J_+ \tag{3.14}$$

commute avec tous les J

$$[\vec{J}^2, J_.] = 0\ . \tag{3.15}$$

$\vec{J}^2$ est l'**opérateur de Casimir**. Dans une représentation unitaire, les générateurs J_i, $i = 1, 2, 3$ sont hermitiques donc

$$J_i^\dagger = J_i, \quad i = 1,2,3 \qquad J_\pm^\dagger = J_\mp\ . \tag{3.16}$$

La construction des représentations est alors effectuée selon une méthode classique. La commutation des opérateurs J_z et $\vec{J}^2$ garantit qu'on peut en chercher des vecteurs propres communs. Les valeurs propres de ces opérateurs hermitiques étant réelles et $\vec{J}^2$ étant semi-défini positif, on peut toujours écrire ses valeurs propres sous la forme $j(j+1)$, j réel positif ou nul et on considère donc un vecteur propre commun $|jm\rangle$

$$\begin{aligned}\vec{J}^2|j\,m\rangle &= j(j+1)|j\,m\rangle \\ J_z|jm\rangle &= m|jm\rangle\ .\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec m un réel a priori arbitraire. Par action répétée de J_+ ou de J_- on montre que *si la représentation est de dimension finie (ou encore si elle est unitaire)*, alors j et m doivent être simultanément entiers ou demi–entiers et on construit la base orthonormée $|j\,m\rangle$

$$J_+|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j\,m+1\rangle \tag{3.18a}$$
$$J_-|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j\,m-1\rangle \tag{3.18b}$$
$$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle\ . \tag{3.18c}$$

Finalement, si on insiste pour avoir une vraie représentation du groupe $SO(3)$, on est forcé de se restreindre aux valeurs entières de j et m, tandis que si on accepte aussi (comme c'est le cas en Mécanique Quantique, cf. les représentations projectives discutées au paragraphe 1.2) les représentations à un signe près, on peut aussi accepter des valeurs demi-entières. Les $2j+1$ états $|jm\rangle$ forment la base de la "représentation de spin j" du groupe $SO(3)$. On trouve dans les livres l'expression explicite des matrices de rotation dans chacune de ces représentations.

Pour résumer, le caractère continu du groupe a permis de restreindre d'abord l'étude à des rotations infinitésimales. Pour un groupe compact comme $SO(3)$, on sait par ailleurs qu'il suffit d'étudier des représentations de dimension finie qui se trouvent alors être unitaires [1]. Dans le groupe $SO(3)$ cela a conduit à la contrainte que les nombres j et m qui caractérisent les représentations sont entiers ou demi-entiers. Le caractère *discret* des nombres j et m qui caractérisent ces représentations est donc intimement lié au caractère *compact* du groupe.

[1] plus précisément toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est équivalente à une représentation unitaire

4. Les groupes de Lorentz et de Poincaré

4.1. Définition

Le groupe de Lorentz est le groupe de transformations linéaires de l'espace–temps (Minkowski) laissant invariante la métrique

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{4.1}$$

(dans toutes ces notes, on adopte des unités telles que la vitesse de la lumière vaut $c = 1$). Autrement dit, une transformation de Lorentz $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto x'$ est donnée par une matrice Λ 4×4 :

$$x'^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{4.2}$$

telle que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$ avec

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{4.3}$$

C'est donc une matrice telle que

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{4.4}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \Lambda^t g \Lambda = g \\ \text{c'est-à-dire} \qquad & \Lambda^{t\,-1} = g \Lambda g^{-1} \end{aligned} \tag{4.5}$$

ce qui généralise la propriété d'orthogonalité des matrices de rotation de l'espace euclidien. On dénote par $SO(3,1)$ le groupe de ces matrices.

De (4.4), (4.5), on déduit que $\det \Lambda^2 = 1$ donc $\det \Lambda = 1$ ou $= -1$ et que $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)2 = 1$ donc $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Il est clair que par déformation continue de Λ on ne change pas le signe de chacune de ces égalités ou inégalités : le groupe de Lorentz est donc constitué de quatre *nappes* disconnexes, seule la nappe $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ étant connectée à l'identité **1**. Un exemple de transformations telle que $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ est offert par le renversement du temps. Les transformations satisfaisant $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$ forment le sous-groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ des transformations de Lorentz "propres orthochrones".

En pratique, deux classes de transformations de Lorentz interviennent fréquemment, les rotations de l'espace usuel à 3 dimensions

$$R : \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

et les transformations de Lorentz spéciales ("boosts"= poussées ?) le long d'un axe de coodonnées, par exemple,

$$B_x : \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

avec $\operatorname{th}\alpha = v/c$, v la vitesse de la "poussée", α sa "rapidité". En fait on montre que toute transformation de Lorentz peut s'écrire comme produit de telles transformations dépendant en tout de six paramètres (angles et rapidité). Le groupe de Lorentz est un groupe continu de dimension 6. Il est clair qu'il n'est pas compact, une rapidité pouvant prendre toute valeur réelle.

4.2. Le groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est obtenu en adjoignant aux transformations de Lorentz, transformations linéaires donc homogènes, les translations d'espace et de temps

$$x^\mu \mapsto x^{'\mu} = x^\mu + a^\mu . \tag{4.8}$$

C'est un groupe continu de dimension $6 + 4 = 10$. Si on note (a, Λ) la transformation de Poincaré $x \mapsto x' = \Lambda x + a$, montrer que le produit (la composée) des deux transformations s'écrit

$$(a', \Lambda').(a, \Lambda) = (a' + \Lambda' a, \Lambda'.\Lambda) \ : \tag{4.9}$$

la transformation de Lorentz Λ' *agit* sur la translation a.

5. Générateurs infinitésimaux

Dans une représentation du groupe de Poincaré, les transformations sont "représentées" par des opérateurs — des matrices de taille finie si la représentation est de dimension finie. Comme plus haut pour les rotations, on use de la même notation pour la transformation et son représentant.

Des transformations infinitésimales sont représentées par des opérateurs proches de l'opérateur identité $\mathbf{1}$. C'est ainsi qu'une translation de quadrivecteur infinitésimal da peut s'écrire

$$T(da) = \mathbf{1} - i da^\mu P_\mu \tag{5.1}$$

où $P = \{P_\mu\}$ est le quadri-vecteur impulsion, tandis qu'une transformation de Lorentz (propre orthochrone) infinitésimale se paramétrise selon

$$\Lambda = \mathbf{1} - \frac{i}{2} d\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \tag{5.2}$$

avec $d\omega^{\mu\nu} = -d\omega^{\nu\mu}$ et $J_{\mu\nu}$ est un ensemble d'opérateurs tels que $J_{\nu\mu} = -J_{\mu\nu}$. On démontre que ces générateurs infinitésimaux satisfont

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[P_\mu, J_{\rho\sigma}] &= i(P_\rho g_{\mu\sigma} - P_\sigma g_{\mu\rho}) \\
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(J_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu} g_{\mu\rho} + J_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \ .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Ces équations ne sont qu'une version infinitésimale de la loi de groupe (4.9) : La première exprime que les translations commutent entre elles, la seconde est une version infinitésimale de l'action des transformations de Lorentz sur les translations mentionnée après (4.9), et la troisième joue pour le groupe de Lorentz le rôle joué dans le groupe des rotations par (3.9).

On peut utiliser ces équations pour étudier les représentations du groupe de Poincaré. Il est en fait plus simple de raisonner comme suit : on a vu plus haut que toute transformation de Lorentz (propre orthochrone) est le produit d'une rotation spatiale et d'une poussée de Lorentz. La forme infinitésimale de cette assertion est que toute transformation de Lorentz infinitésimale est obtenue par combinaison linéaire des générateurs infinitésimaux de rotation J_i et de poussée K_j $(i, j = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}
R(\delta\psi) &= \mathbf{1} - i\delta\psi^i J_i \\
B(\delta\alpha) &= \mathbf{1} - i\delta\alpha^j K_j
\end{aligned} \tag{5.4}$$

où on lit l'expression matricielle de J_i et K_j sur celle de R et B (eq. (4.6) et (4.7)). J_i est bien entendu le moment cinétique usuel (générateur des rotations) et la relation avec les $J_{\mu\nu}$ est fournie par

$$J_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k \qquad K_j = J_{j0} \ . \tag{5.5}$$

On vérifie alors aisément les relations de commutation

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{5.6a}$$
$$[K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \tag{5.6b}$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \tag{5.6c}$$

où le dernier signe $-$ va jouer un rôle important. Si on introduit les combinaisons

$$M_j = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \tag{5.7a}$$
$$N_j = \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \tag{5.7b}$$

on vérifie aussi que

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k \tag{5.8a}$$
$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k \tag{5.8b}$$
$$[M_i, N_j] = 0 \tag{5.8c}$$

et on dit que les générateurs infinitésimaux M et N du groupe de Lorentz forment une algèbre de Lie $su(2) \times su(2)$.

6. Représentations du groupe de Lorentz

Sous la forme (5.8), les relations de commutation ont pris une forme très simple, puisqu'on y reconnaît deux copies découplées (c'est-à-dire commutantes) de l'algèbre de $su(2)$ étudiée plus haut. Mais *attention*! les représentations **unitaires** du groupe de Lorentz ne peuvent être obtenues à partir de celles de $su(2) \times su(2)$: à cause du facteur $i = \sqrt{-1}$ dans (5.7), lui-même une conséquence du signe $-$ dans (5.6c), (lui-même une manifestation du caractère non compact du groupe de Lorentz), les représentations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et de $SU(2) \times SU(2)$ ne peuvent être simultanément unitaires. Dans une représentation unitaire de $SU(2) \times SU(2)$, M_i et N_j sont hermitiques mais alors les J et K ne le sont pas et

$$e^{i\alpha^j K_j} \quad , \quad e^{i\psi^i J_i}$$

ne sont pas unitaires. En fait un théorème affirme qu'un groupe non compact comme $\mathcal{L}_+^\uparrow$ n'a pas de représentation de dimension finie unitaire.

On va donc considérer

– d'une part des représentations de dimension finie mais non unitaires, obtenues par l'identification avec $SU(2) \times SU(2)$. Elles sont indexées par

deux nombres (j_1, j_2) entiers ou demi-entiers positifs ou nuls. Bien que non unitaires, elles servent à décrire les transformations des champs; ainsi la représentation $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ est celle qui décrit le champ de Dirac.
– d'autre part, des représentations unitaires, mais de dimension infinie. Ce sont les représentations importantes pour décrire les états à une, deux, ... particules. Selon des arguments esquissés plus haut, elles dépendent de paramètres pouvant varier continûment.

Nous ne conduirons pas cette étude en détail mais nous bornerons à en indiquer quelques points saillants. Plutôt que le groupe de Lorentz, on considérera le groupe de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$ des transformations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ auxquelles on a adjoint les translations d'espace–temps.

Deux générateurs infinitésimaux y jouent un rôle important:

$$P_\mu \qquad \text{et} \qquad W^\lambda = -\frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} J_{\mu\nu} P_\rho \ .$$

Dans cette expression, $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ est une version quadri–dimensionnelle du tenseur ϵ_{ijk} : $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ est non nul si et seulement si λ, μ, ν et ρ sont tous distincts, il vaut $+1$ si $\lambda = 0, \mu = 1, \nu = 2, \rho = 3$ et il est complètement antisymétrique. Ainsi $\epsilon^{0ijk} = \epsilon_{ijk}$, le tenseur tri-dimensionnel. W^λ, le "vecteur de Pauli-Lubanski" fournit une version covariante du moment cinétique. En anticipant un peu sur ce qui va suivre, on peut en effet observer que pour un état massif, dans le repère où P_μ a pour valeur propre $(M, \vec{0})$, on a $W^0 = 0, W^i = MJ^i$.

On montre (le vérifier !!) que P^2 et $W^2 = W^\mu W_\mu$ commutent avec tous les générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré : ce sont les "opérateurs de Casimir", qu'on peut supposer diagonalisés dans une représentation irréductible (selon le "lemme de Schur").

6.1. Représentations physiques unitaires du groupe de Poincaré.

Physiquement on a à considérer deux types de représentations

1) les représentations où $P^2 = M^2 > 0$, $W^2 = -M^2 s(s+1)$ qui décrivent des particules massives. Les états (vecteurs) de la représentation peuvent aussi être choisis états propres des P_μ (puisqu'ils commutent entre eux), de valeurs propres p_μ (tels que $p^2 = p^\mu p_\mu = M^2$) et d'**une** composante de W. Pour spécifier cette dernière, on note que $W.p = 0$, donc le quadrivecteur W n'a pas de composante sur p et s'écrit

$$\frac{W_\mu}{M} = \sum_{i=1}^{3} S_i n_\mu^{(i)} \tag{6.1}$$

où $n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ sont 3 quadrivecteurs orthogonaux à p et entre eux, donc de genre espace. Les composantes S_i de W dans cette base dépendent de p mais

satisfont des relations de commutation déjà rencontrées

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k \ . \tag{6.2}$$

Nous sommes de retour sur le terrain familier des représentations du groupe des rotations à 3 dimensions. $\vec{S}^2$ a pour valeurs propres $s(s+1)$, avec s entier ou demi-entier, S_3 a pour valeurs propres s_3 qui prend les valeurs $-s, -s+1, \cdots, s$ et on note $|(Ms)[p]s_3\rangle$ ou plus simplement $|[p]s_3\rangle$ ces états de la représentation (M, s). La notation $[p]$ désigne l'ensemble ("tétrade") $\{p, n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}$. On a

$$\begin{aligned} P_\mu|[p]s_3\rangle &= p_\mu|[p]s_3\rangle \\ S_3|[p]s_3\rangle &= s_3|[p]s_3\rangle \\ (S_1 \pm iS_2)|[p]s_3\rangle &= \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 \pm 1)}|[p]s_3 \pm 1\rangle \\ \frac{W^2}{M^2}|[p]s_3\rangle &= -s(s+1)|[p]s_3\rangle \end{aligned} \tag{6.3}$$

Ces états forment une représentation irréductible unitaire de dimension infinie (p peut prendre toutes les valeurs sur sa couche de masse $p^2 = M^2$) du groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Pour la forme explicite de l'action du groupe dans cette représentation ou la dépendance des états dans le choix de la tétrade $[p]$, le lecteur est invité à se reporter aux références citées à la fin de ces notes.

2) Les représentations où $P^2 = 0$, $W^2 = 0$ décrivent les états de masse nulle. Soit p_μ un quadrivecteur de genre lumière $p^2 = 0$, valeur propre de P_μ. Le fait que $W^2 = W.P = 0$ implique que dans cet espace propre W_μ est proportionnel à p_μ :

$$W_\mu = \lambda(p) p_\mu$$

où l'opérateur λ est l'"hélicité"; les états $|[p]\lambda\rangle$ sont vecteurs propres de P_μ et $\lambda(p)$

$$\begin{aligned} P_\mu|[p]\lambda\rangle &= p_\mu|[p]\lambda\rangle \\ \lambda(p)|[p]\lambda\rangle &= \lambda|[p]\lambda\rangle \end{aligned}$$

On montre que l'hélicité λ est entière ou demi-entière, et de signe quelconque. On montre aussi que les états $|[p]\lambda\rangle$ à λ fixé forment une représentation du groupe de Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$. En d'autres termes, les transformations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ n'affectent pas l'hélicité λ. C'est l'introduction (éventuelle) de la parité qui oblige à considérer simultanément les hélicités $\pm|\lambda|$.

Ceci n'est que le prélude à l'exploitation systématique de l'invariance relativiste. En découlent la construction des invariants cinématiques, les décompositions d'amplitudes en termes de ces invariants, la discussion des états à deux particules (ou plus) etc...

7. Théorème CPT

La théorie quantique des champs est le formalisme actuellement le mieux adapté pour décrire dans un cadre à la fois quantique et relativiste des systèmes où le nombre de particules n'est pas fixé. Les champs sont des opérateurs capables de créer ou d'annihiler les particules. La dynamique du système est codée dans un lagrangien $\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}(x)$, où $\mathcal{L}(x)$ est en général un polynôme dans les champs et leurs dérivées. L'invariance relativiste de la théorie découle de celle du lagrangien.

Ce cadre est aussi adapté à la discussion de l'effet des symétries discrètes de parité P, de renversement du temps T et de conjugaison de charge C.

En pratique, les théories usuelles ne font appel qu'à des champs fondamentaux de spin 0, $\frac{1}{2}$ ou 1, notés respectivement ϕ, ψ et A_μ, et nous nous contenterons de discuter les symétries discrètes dans ces cas.

On peut alors énoncer le

Théorème *Pour tout lagrangien hermitien, local dans les champs, invariant par le sous-groupe de Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$, où les champs obéissent à la relation spin–statistique, CPT est une symétrie.*

Expliquons d'abord les termes de cette proposition. La relation spin-statistique signifie que l'on suppose que les particules identiques de spin entier (resp. demi-entier) doivent obéir à la statistique de Bose-Einstein (resp. de Fermi-Dirac), ou encore que les champs décrivant ces bosons (resp. ces fermions) doivent être quantifiés à l'aide de relations de commutation (resp. d'anticommutation). Ainsi un champ décrivant une particule de spin $\frac{1}{2}$ doit être décrit par un champ $\psi(x)$ anticommutant avec lui-même pour des séparations de genre espace : $\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x)$ si $(x-y)^2 < 0$. (En fait on utilisera ce type de relations à points coïncidents, les singularités qui apparaissent étant supprimées par une prescription de "produit normal".)

La localité du lagrangien signifie qu'il n'est composé que de termes impliquant des produits de champs au même point :

$$\mathcal{L}(x) = \ (\phi(x))^4, \quad \overline{\psi}(x)\psi(x)\phi(x), \quad \partial_\mu\phi(x)\, A^\mu(x), \cdots$$

L'hermiticité du lagrangien est la condition qui assure l'unitarité de la théorie, c'est-à-dire la conservation des probabilités. Elle peut ne pas être manifeste, comme par exemple dans le cas d'une interaction impliquant des produits de 2 champs de fermions ψ_1 et ψ_2 de la forme

$$\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2 = \left(\overline{\psi}_1\right)_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}(\psi_2)_\beta \ . \tag{7.1}$$

Ici et dans ce qui suit, α, β sont les indices spinoriels prenant les valeurs de 1 à 4 et Γ désigne l'une des 16 matrices 4×4 :

$$\mathbf{1}, \quad \gamma^\mu, \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\mu], \quad \gamma^\mu\gamma^5, \quad i\gamma^5 \tag{7.2}$$

Les matrices γ^μ satisfont $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}\mathbf{1}$, $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^\dagger$: γ^0 est hermitique, les γ^i, $i = 1,2,3$ sont antihermitiques, et $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ hermitique. Le conjugué de ψ est défini par $\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$. Ainsi le produit de deux fermions ci-dessus est tel que son conjugué hermitique est

$$\begin{aligned}\left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)^\dagger &= \left((\overline{\psi}_1^\dagger)_\alpha(\gamma^0\Gamma)_{\alpha\beta}(\psi_2)_\beta\right)^\dagger = \psi^\dagger_{2\beta}(\gamma^0\Gamma)^\dagger_{\beta\alpha}\psi_{1\alpha} = \overline{\psi}_2(\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0)\psi_1 \\ &= \overline{\psi}_2\Gamma\psi_1 \ ,\end{aligned} \tag{7.3}$$

où la première ligne est juste une suite de réarrangements et l'équation de la deuxième ligne est vraie pour le choix (7.2) de matrices Γ. Ainsi un lagrangien d'interaction à quatre fermions, comme celui de la "vieille théorie de Fermi", du type

$$\mathcal{L} = \lambda_i\left(\overline{\psi}_1\Gamma_i\psi_2\right)\left(\overline{\psi}_3\Gamma'_i\psi_4\right) + \lambda_i^*\left(\overline{\psi}_2\Gamma_i\psi_1\right)\left(\overline{\psi}_4\Gamma'_i\psi_3\right) \tag{7.4}$$

est bien hermitique, pourvu que les couplages (pas nécessairement réels) soient comme indiqués.

Un tel lagrangien est invariant par les transformations de Lorentz propres si les paires de matrices (Γ_i, Γ'_i) sont de la forme

$$(\Gamma_i, \Gamma'_i) = (\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{1}, i\gamma^5), (i\gamma^5, i\gamma^5), (\gamma^\mu, \gamma_\mu), (\gamma^\mu, \gamma_\mu\gamma^5), \text{etc}$$

c'est-à-dire font apparaître des paires d'indices de Lorentz contractés.

Considérons maintenant l'effet des différentes transformations discrètes C, P et T sur une expression de la forme (7.1). Ces transformations sont réalisées par des opérateurs linéaires unitaires (pour C et P) ou antilinéaire unitaire (pour T) notés $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$. On démontre que pour un champ de fermions de spin $\frac{1}{2}$ (champ de Dirac) ψ

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\overline{\psi}^t(x) \tag{7.5a}$$

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = \gamma^0\psi(\widetilde{x}) \tag{7.5b}$$

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = A\psi(-\widetilde{x}) \ . \tag{7.5c}$$

On a noté $\widetilde{x} = (x^0, -\vec{x})$ le renversé par parité d'espace du quadrivecteur x. La matrice C est telle que $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^t$ et A telle que $A\gamma^\mu A^{-1} = (\gamma^\mu)^t$; on peut prendre par exemple $C = i\gamma^0\gamma^2$ qui satisfait $C = -C^t = -C^{-1}$ et $A = i\gamma^1\gamma^3$.

Examinons comment l'expression (7.1) se transforme sous l'action des trois transformations. Sous l'action de C, on a (7.5a), et $\mathcal{C}\overline{\psi}\mathcal{C}^{-1} = -\psi^t C^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)\mathcal{C}^{-1} &= -\psi_1^t C^{-1}\Gamma C\overline{\psi}_2^t \\ &= -\epsilon_\Gamma \psi_1^t \Gamma^t \overline{\psi}_2^t \\ &= +\epsilon_\Gamma \overline{\psi}_2 \Gamma \psi_1 \end{aligned} \tag{7.6}$$

où le signe ϵ_Γ dépend de la matrice Γ et vaut $+,-,-,+,+$ pour les 5 cas de (7.2), dans l'ordre. Le dernier changement de signe dans (7.6) est très important pour la suite et provient de l'anticommutation des fermions : il reflète donc la relation spin-statistique.

Sous l'action de P, on a (7.5b) et $\mathcal{P}\overline{\psi}\mathcal{P}^{-1} = \psi^\dagger = \overline{\psi}\gamma^0$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)(x)\mathcal{P}^{-1} &= \left(\overline{\psi}_1(\gamma^0\Gamma\gamma^0)\psi_2\right)(\widetilde{x}) \\ &= \epsilon'_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)(\widetilde{x}) \end{aligned} \tag{7.7}$$

avec à nouveau un signe dépendant de Γ : $\epsilon'_\Gamma = 1, g_{\mu\mu}, g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}, -g_{\mu\mu}, -1$ selon les cas respectifs de (7.2). Par exemple, $\mathcal{P}\left(\overline{\psi}_1\gamma^\mu\gamma^5\psi_2\right)(x)\mathcal{P}^{-1} = -\left(\overline{\psi}_1\gamma_\mu\gamma^5\psi_2\right)(\widetilde{x})$

Finalement sous l'action de T,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)(x)\mathcal{T}^{-1} &= \left(\overline{\psi}_1(A^{-1}\Gamma^* A)\psi_2\right)(-\widetilde{x}) \\ &= \epsilon''_\Gamma \left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)(\widetilde{x}) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Noter que l'antilinéarité de $\mathcal{T}$ est responsable de la conjugaison complexe de la matrice Γ. Cette fois est apparu un signe $\epsilon''_\Gamma = 1, g_{\mu\mu}, -g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}, g_{\mu\mu}, -1$

En combinant tous ces signes nous en concluons que

$$\begin{aligned} \mathcal{CPT}\left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)(x)(\mathcal{CPT})^{-1} &= \epsilon_\Gamma^{(CPT)}\left(\overline{\psi}_2\Gamma\psi_1\right)(-x) \\ &= \epsilon_\Gamma^{(CPT)}\left(\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\right)^\dagger(-x) \end{aligned} \tag{7.9}$$

Ce dernier signe $\epsilon_\Gamma^{(CPT)}$ est simplement (-1) à la puissance du nombre d'indices de Lorentz de la quantité (7.2). Dans un invariant de Lorentz, ce nombre est pair et donc les deux termes de (7.4) sont échangés (les couplages λ sont conjugués par l'antilinéarité de $\mathcal{T}$) en même temps que x est changé en $-x$, ce qui est sans effet sous le signe d'intégration $\int d^4x$. Nous en concluons que le lagrangien $\int d^4x\mathcal{L}(x)$ de (7.4) est bien **invariant** sous l'effet de CPT.

On peut se convaincre que la même conclusion s'applique à tout lagrangien invariant de Lorentz formé à l'aide de champs de spin 0 ϕ, de spin $\frac{1}{2}$ ψ et de champs de spin 1 A_μ. Il suffit de connaître les transformations de ϕ et A_μ.

Par exemple pour un champ vectoriel (comme un champ de jauge) noté A_μ

$$\begin{aligned} \mathcal{P}A_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} &= \pm A^\mu(\widetilde{x}) \\ \mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} &= \mp A_\mu(x) \\ \mathcal{T}A_\mu(x)\mathcal{T}^{-1} &= A_\mu(-\widetilde{x}) \ , \end{aligned} \tag{7.10}$$

donc

$$\mathcal{CPT}A_\mu(x)(\mathcal{CPT})^{-1} = -A_\mu(-x) \ , \tag{7.11}$$

en accord avec la loi de transformation des expressions quadratiques en ψ.

Pour terminer, insistons sur l'importance de ce résultat. Que la théorie soit ou non invariante par parité ou par renversement du temps, le théorème affirme que l'opération combinée CPT est une symétrie. Inversement, le fait que CP ne soit pas conservé, comme il sera discuté dans les autres cours de cette Ecole, est une indication indirecte mais "incontournable" (selon le théorème) que l'invariance par T est aussi brisée. Ce théorème a été établi dans des approches plus rigoureuses que celle présentée ici, mais relevant toujours du domaine de la théorie des champs locale. Savoir ce qu'il advient dans un cadre plus large comme celui des théories de cordes est un sujet actuellement discuté.

Références (succintes)

Théorème de Wigner : cf. A. Messiah, *Mécanique Quantique*, vol. 2, p. 540 ff, Dunod 1959.

Groupes de Lorentz et de Poincaré : une référence très détaillée est P. Moussa et R. Stora, *Angular Analysis of Elementary particle Reactions*, notes de cours à l'Ecole d'Hercegnovi, Nikolic edr, 265 (1966); voir aussi G. Mahoux, *Représentations physiques du groupe de Poincaré*, notes de cours à l'Université d'Orsay.

CPT : on pourra se reporter à C. Itzykson et J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill 1980, pages 156 ff; voir aussi J.D. Bjorken et S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw Hill 1965. L'article original de Pauli dans *Niels Bohr and the Development of Physics*, W. Pauli edr, Pergamon Press, 1962, est aussi très intéressant à lire.