

Mention Physique - L2 - Année 2009-2010

Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TP N°3 : Probabilités

Variables aléatoires. Erreurs

A – Distribution de Maxwell

La fonction

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(- \frac{mv^2}{2kT} \right) \quad (1)$$

représente la distribution de vitesses des molécules de masse m dans un gaz parfait, à l'équilibre thermodynamique à la température T ; k est la constante de Boltzmann.

1. Rappeler la relation entre cette loi et la loi gaussienne.
2. En calculant l'intégrale (avec Maple), déterminer la fonction de répartition correspondante:

$$F(V) = \int_0^V dv f(v) \quad (2)$$

3. En choisissant les valeurs numériques $m = k = T = 1$, tracer les courbes de $f(v)$ et de $F(V)$.
4. Déterminer le pourcentage des molécules, dans le gaz, ayant la vitesse ("réduite", c'est-à-dire correspondant au choix des valeurs numériques des constantes ci-dessus) supérieure à $\frac{1}{2}$, à 1, à 2, à 5.
5. En calculant les intégrales correspondantes avec Maple, déterminer les valeurs numériques de $\langle v \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\sigma = (\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$.

6. Dans les unités initiales, avec m, k, T ayant des valeurs quelconques, quelle est la valeur de la vitesse v qui correspond à la vitesse réduite $v = 1$?
7. Donner les valeurs des moyennes $\langle v \rangle, \langle v^2 \rangle, \sigma = (\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ en rétablissant leur dépendance dans les paramètres m, k, T .

B – Distribution de Lorentz

On s'intéresse à une variable aléatoire X dont la loi (la densité de probabilité) est la distribution de Lorentz centrée en 0

$$f_0(x) = \frac{A}{x^2 + a^2} \quad (3)$$

Le paramètre a correspond à la largeur de la distribution.

1. Déterminer la valeur de la constante de normalisation A .
2. Déterminer la fonction de répartition $F_0(x) = p(X < x)$.

En prenant la valeur numérique $a = 1$, tracer les courbes de $f_0(x)$ et de $F_0(x)$.

3. Une distribution plus générale, centrée en un point x_0 , est de la forme:

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2 + a^2} \quad (4)$$

En prenant les valeurs numériques $a = 1, x_0 = 5$, tracer la courbe de la fonction $f(x)$.

4. Déterminer la fonction de répartition correspondante $F(x)$ et tracer sa courbe.
5. Le calcul de la moyenne $\langle X \rangle$ pour les distributions $f_0(x)$ et $f(x)$ rencontre un problème : l'intégrale correspondante, sur x de $-\infty$ à $+\infty$, est mal définie. Vous pouvez le constater en essayant de calculer cette intégrale avec Maple. Mais on peut contourner ce problème en calculant l'intégrale (avec Maple) d'abord dans des limites finies (données par un paramètre supplémentaire L) de $x = -L$ à $x = L$, et en définissant ensuite l'intégrale comme la limite $L \rightarrow \infty$. C'est ce que l'on appelle la *partie principale* de l'intégrale.

Calculer de cette manière la moyenne $\langle x \rangle$ pour les distributions $f_0(x)$ et $f(x)$. Ces résultats étaient-ils prévisibles?

6. Essayez de déterminer de la même manière le 2ème moment, $\langle X^2 \rangle$, et l'écart-type $\sigma = (\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$, pour les distributions $f_0(x)$ et $f(x)$.

Quel résultat trouve-t-on pour σ ?

Conclure sur la possibilité de définir l'écart-type σ pour la distribution de Lorentz.

C – Analyses statistiques de données expérimentales

Supposons que des mesures expérimentales ont été faites d'une grandeur physique $y(x)$, fonction de x (x pourrait être la température, ou l'intensité d'un champ magnétique, etc.). Les résultats sont donnés par une liste de mesures en 11 valeurs de x : $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, ... , $x_{10} = 4$, $x_{11} = 5$. Les résultats sont les suivants

$$\begin{aligned}
 u(-5) &= 0.2, & \sigma(-5) &= 0.13 \\
 u(-4) &= 0.48, & \sigma(-4) &= 0.12 \\
 u(-3) &= 0.6, & \sigma(-3) &= 0.15 \\
 u(-2) &= 1.31, & \sigma(-2) &= 0.15 \\
 u(-1) &= 2.23, & \sigma(-1) &= 0.16 \\
 u(0) &= 3.15, & \sigma(0) &= 0.14 \\
 u(1) &= 2.06, & \sigma(1) &= 0.18 \\
 u(2) &= 1.34, & \sigma(2) &= 0.14 \\
 u(3) &= 0.8, & \sigma(3) &= 0.13 \\
 u(4) &= 0.3, & \sigma(4) &= 0.13 \\
 u(5) &= 0.25, & \sigma(5) &= 0.12
 \end{aligned} \tag{5}$$

Nous notons $u(x_i)$ les valeurs expérimentales de la grandeur physique y . Le résultat de ces mesures, pour chaque x_i , est considéré comme une variable aléatoire ; $\sigma(x_i)$ est une estimation de l'erreur (la "barre d'erreur"), qui peut être déterminée également, lors de l'expérience.

Supposons que, pour des raisons théoriques, on s'attende à ce que les données expérimentales ci-dessus puissent être décrites par une des deux fonctions suivantes :

1) soit par

$$y_1(x) = \frac{A}{x^2 + a^2} \tag{6}$$

2) soit par

$$y_2(x) = B \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (7)$$

avec des paramètres A , a ou B , b inconnus, dont les valeurs doivent être déterminées également à partir des données expérimentales.

Pour décider entre les deux fonctions et estimer les valeurs des paramètres, nous utilisons la procédure suivante (appelée dans le jargon scientifique le “fit” des points expérimentaux par une courbe):

1) Calculons la somme

$$\chi^2(A, a) = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} \frac{(y(x_i) - u(x_i))^2}{(\sigma(x_i))^2} \quad (8)$$

avec $y(x) = y_1(x)$ pour la première fonction, (et de même pour la deuxième, on définit un $\chi^2(B, b)$).

2) Puis, au $\chi^2(A, a)$ ainsi obtenu (qui est donc une fonction des paramètres (A, a)), nous appliquons une procédure de minimisation, pour trouver les valeurs de A et a qui rendent minimale la valeur de χ^2 .

Entre les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$, la “meilleure” est celle qui donne la valeur la plus petite à ce minimum de χ^2 . De plus, pour une bonne qualité absolue de ce “fit”, c’est-à-dire pour une bonne approximation des données par la fonction f retenue, il faut que la valeur de ce χ^2 minimal soit inférieure à 1.

Il est proposé d’appliquer cette procédure:

- 1) pour choisir entre les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$;
- 2) pour estimer les valeurs numériques des paramètres (A, a, B, b) ;
- 3) pour tracer finalement les deux courbes, la meilleure et la moins bonne, dans un plan.

Pour trouver le minimum de χ^2 , on peut penser à deux méthodes :

- ou bien utiliser la commande `extrema` de Maple

$$\text{extrema}(X1, \{A, a\}, 'soln')$$

qui renvoie la valeur minimale de $X1$ et (grâce à l’option `'soln'`) les valeurs de A et a à ce minimum ;

- ou bien calculer les dérivées partielles de $X1$ et chercher par `fsolve` leurs zéros.

On appliquera celle de ces méthodes qui fonctionne le mieux.

Les valeurs de la fonction $y(x)$ ($y_1(x)$ ou $y_2(x)$) doivent être préparées comme des listes $y[i]$, $i = 1..11$, tout comme les valeurs expérimentales $u[i]$ et leurs barres d'erreurs $s[i] = \sigma(x_i)$.

D – Désintégration radioactive (*question bonus*)

Le temps de désintégration d'un atome radioactif est une variable aléatoire T dont la distribution (densité de probabilité) est donnée par la fonction:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (9)$$

Nous allons prendre dans la suite $\lambda = 1$. Dans ce cas t devient une variable de temps sans dimension, un "temps réduit".

1. Déterminer et tracer les courbes (avec Maple):

(a) de la fonction de répartition

$$F(t) = p(T < t) \quad (10)$$

(b) de la probabilité qu'un atome survive jusqu'à l'instant T :

$$p(T > t) \quad (11)$$

2. Déterminer (numériquement, avec Maple) combien il reste d'atomes en moyenne au bout du temps réduit $t = 0.3, 1, 3, 5, 10$, sachant qu'il y a initialement 1000 atomes.