Mention Physique - L2 - Année 2010-2011
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°4 : Valeurs et vecteurs propres. Diagonalisation

I. Valeurs propres, vecteurs propres. Diagonalisation

A) Pour chacune des matrices suivantes :

a) Rechercher ses valeurs propres et vecteurs propres dans $\mathbb{C}$.

b) Quand la matrice est diagonalisable, trouver une base de vecteurs propres et écrire la matrice de diagonalisation V et son inverse V^{-1}. Calculer $V^{-1}AV$ pour vérifier vos calculs.

c) Quand la matrice n'est pas diagonalisable trouver une base de vecteurs dans laquelle elle s'écrit sous forme triangulaire supérieure.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

B) $\star$ 1. Déterminer dans quels cas les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} \quad a^2 \neq 0; \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

2. Montrer que les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables et trouver une matrice de passage.

II. Calcul des puissances d'une matrice

1. Calculez la puissance $n^{ième}$ des trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

2. Calculez la puissance $n^{ième}$ des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La première a déjà été rencontrée au IA). Pour la seconde, on essaiera de la mettre sous la forme la plus simple possible, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

et on utilisera la question précédente.

III. Applications aux équations différentielles

A) Résoudre les systèmes différentiels suivants

1.
$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - 2y + z \\ \dot{y} &= -2x + y - 2z \\ \dot{z} &= x - 2y - 2z \end{cases}$$
avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

2.
$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x + y + z \\ \dot{y} &= x + 4y + z \\ \dot{z} &= x + y + 4z \end{cases}$$
avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

3.
$$\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y + 3z \\ \dot{y} &= y + 2z \\ \dot{z} &= z \end{cases}$$
avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

4.
$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + y \\ \dot{y} &= -4x - y \\ \dot{z} &= 4x - 8y - 2z \end{cases}$$
avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$

B) Oscillateur amorti

Soit un oscillateur amorti décrit par $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{dx}{dt} - \omega_0^2 x$ avec $\tau > 0$.

1. Montrer que cette équation peut être réécrite comme une équation différentielle du premier ordre :
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$
avec v la vitesse de l'oscillateur et A une matrice 2×2 que l'on déterminera.

2. Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice A ?

   Dans quels cas la matrice A est-elle diagonalisable ?

3. On suppose ici que la matrice A est diagonalisable. On veut déterminer l'évolution de l'oscillateur à partir de conditions initiales quelconques :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad .$$

Exprimer $x(t)$ et $v(t)$ en fonction de x_0, v_0 et des valeurs propres λ_1 et λ_2 de A.

4. Montrer que, lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe un vecteur ϕ_2 satisfaisant $A\phi_2 = \lambda\phi_2 + \phi_1$ avec λ l'unique valeur propre de A et ϕ_1 un vecteur propre de A.

Montrer que les vecteurs ϕ_1 et ϕ_2 constituent une base de l'espace vectoriel des matrices 2×1.

Déterminer alors l'évolution de l'oscillateur à partir de conditions initiales quelconques.

IV. Oscillateurs mécaniques couplés

A) 1) Montrer que les oscillateurs couplés de la figure 1 vérifient un système d'équations de la forme :

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 \\ m\ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -kM \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où les composantes de la matrice M sont à déterminer (k est le coefficient d'élasticité, le même pour les ressorts R_1 et R_2).

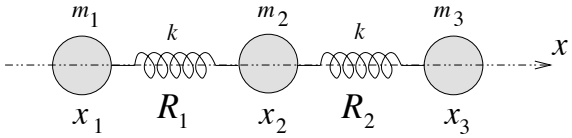


Figure 1: 2 ressorts couplés : on suppose que $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et que les ressorts R_1 et R_2 sont identiques, de coefficient d'élasticité k. On admet que les masses glissent sans friction le long de l'axe horizontal.

2) Vérifier que les valeurs propres de la matrice M ci-dessus sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Trouver les vecteurs propres de M. En utilisant ces résultats, interpréter les modes propres du système d'oscillateurs de la figure 1.

B) Chaîne de 3 oscillateurs en boucle, de N oscillateurs

1. On considère une chaîne de 3 oscillateurs couplés : les masses oscillent et les ressorts glissent sans friction le long d'un fil circulaire. On note x_i, $i = 1, 2, 3$ l'écart à sa position d'équilibre de la i-ième masse.

– Écrire le système d'équations couplées

– Dans le cas où toutes les masses sont égales et les ressorts de même raideur, écrire la matrice de couplage A.

– Montrer que $\det A = 0$. Écrire le polynôme caractéristique de A et en chercher les racines.

– Que sont les fréquences propres du système ? À quoi correspond la valeur propre nulle ?

– Calculer les modes propres en diagonalisant la matrice de couplage.

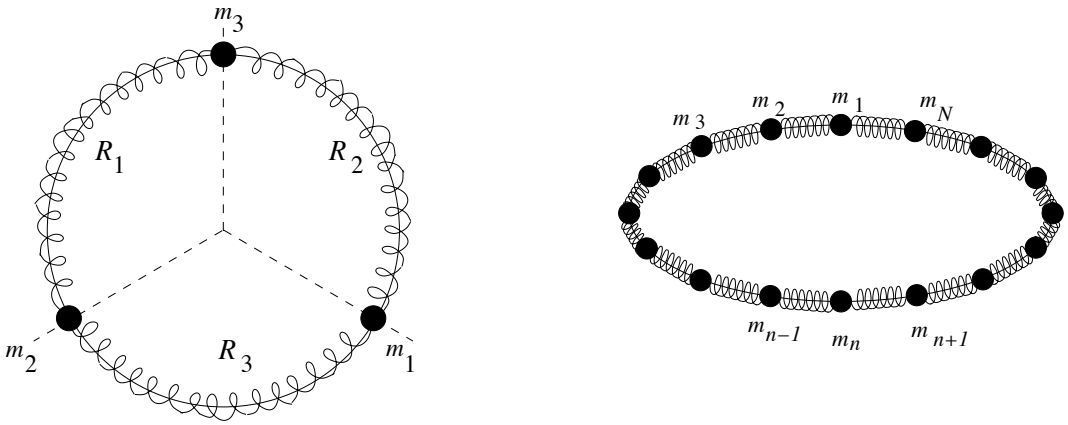


Figure 2: 3 ou N ressorts couplés

2. Généraliser au cas d'une chaîne de N masses et ressorts, voir figure 2.
–Écrire la matrice de couplage dans le cas symétrique (mêmes masses, mêmes raideurs) et montrer à nouveau qu'elle admet 0 comme valeur propre.
– Pour trouver les autres valeurs propres et modes propres, chercher des solutions du système d'équations différentielles couplées sous la forme d'"ondes planes", $x_n^{(s)} = ae^{i(\omega_s t + k_s n)}$. Commenter la raison de ce choix de solutions.
– Quelles valeurs peut *a priori* prendre k_s ? Écrire la relation reliant ω_s et k_s. Quelle est la fréquence propre la plus élevée ? Est-elle simple ou "dégénérée" ? Pourquoi ?

V. Oscillateurs électriques couplés

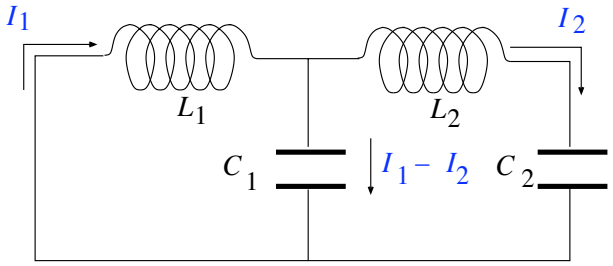


Figure 3: 2 oscillateurs électriques couplés

On rappelle que les tensions aux bornes et les courants traversant une bobine d'induction d'inductance L, resp. un condensateur de capacité C, satisfont

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} \qquad I_C = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} \ .$$

Pour le circuit de la figure 3, écrire les deux équations différentielles qui relient U_{C_1} et U_{C_2}.
Montrer l'analogie avec les deux ressorts couplés étudiés plus haut.
Étudier les modes propres de ce circuit, en prenant $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1} = 1,\ \omega_2 = 1/\sqrt{L_2C_2} = 2$.