Mention Physique - L2 - Année 2010-2011
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°2 : Déterminants, matrices inverses

I. Calculs de déterminants

A) Calcul direct

Calculer les déterminants suivants en les développant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & -6x & 4 \\ x & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

Dans la dernière ligne, on factorisera au mieux le polynôme en x ; comment peut-on savoir à l'avance son degré ? Commenter la forme factorisée du dernier, pouvait-on s'y attendre ?

B) Combinaison de lignes et des colonnes et développement par rapport à une ligne ou une colonne. Méthode du pivot de Gauss.

(i) Calculer le plus simplement possible

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

(ii) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$ est divisible par $(x-1)^3$.

(iii) Calculer en le factorisant au mieux $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$

(iv) $\star$ En combinant lignes et colonnes de $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$ montrer que
$D = (x+y+z)(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y)$.
Quel est l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées (x, y, z) satisfont $D = 0$?

(v) Calculer le déterminant de taille $n \times n$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

C) Récurrence

a) On se propose de calculer le déterminant de taille $n \times n$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} = \det(J - xI)$$

où J est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

(i) Pourquoi $D_n(x)$ s'annule-t-il en $x = 0$?

(ii) En simplifiant de façon adéquate l'expression de D_n, démontrer la relation de récurrence $D_n(x) = -xD_{n-1}(x) + (-x)^{n-1}$.

(iii) Calculer explicitement les expressions de D_1, D_2 et D_3 et montrer que cela suggère une expression possible de $D_n(x)$; démontrer que cette expression satisfait bien la relation de récurrence, ce qui fournit la réponse.

b) $\star$ Soit le déterminant D_n qui n'a que trois diagonales non nulles

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & -a & 1 & -a \\ 0 & 0 & & \cdots & -a & 1 \end{vmatrix}$$

– Calculer D_1 et D_2.

– Montrer que D_n satisfait une relation de récurrence de la forme $D_n = AD_{n-1} + BD_{n-2}$ avec A et B deux constantes indépendantes de n qu'on déterminera. Quelle valeur de D_0 est compatible avec cette relation ?

– Résoudre cette récurrence en fonction des "conditions initiales" D_0 et D_1 et en tirer l'expression de D_n.

c) $\star$ Calcul du déterminant de Vandermonde.

On considère le déterminant

$$D_n(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(i) Quel est le degré du polynôme $D_n(x_1, \cdots, x_n)$?
(ii) Calculer et factoriser D_2 et D_3.
(iii) Montrer que D_n s'annule chaque fois deux x coïncident, $x_i = x_j$.
(iv) Que peut-on en conclure sur les facteurs de D_n, et finalement sur l'expression de D_n ?

D) Freestyle ! Calculer et factoriser les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 1 & \cos y & \cos 2y \\ 1 & \cos z & \cos 2z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

En quoi l'exercice C c) précédent permet-il de simplifier le 3ème de ces déterminants ?

II. Indépendance de vecteurs

A) Les vecteurs suivants sont-ils indépendants ? Comparez avec le même exercice du TD 1.

$$\begin{array}{lll} \vec{a} = (1,1,0) & \vec{b} = (0,1,1) & \vec{c} = (1,0,1) \\ \vec{a}' = (1,1,0) & \vec{b}' = (0,1,1) & \vec{c}' = (1,1,1) \\ \vec{a}'' = (1,1,0) & \vec{b}'' = (0,1,1) & \vec{c}'' = (1,0,-1) \end{array}$$

B) Pour quelles valeurs de x les vecteurs $(1, x, x^2), (2x, 3, 4x), (5, 6x, 7)$ sont-ils linéairement dépendants ?

C) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, écrire l'équation du plan passant par les trois points M_1, M_2, M_3 de coordonnées suivantes, puis le dessiner sommairement

(a) $M_1 : (1,1,0) \quad M_2 : (0,1,1) \quad M_3 : (1,0,1)$ (b) $M_1 : (1,1,0) \quad M_2 : (0,1,1) \quad M_3 : (1,1,1)$

D) $\star$ Wronskien
a) Soient deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ supposées dérivables. On définit leur *wronskien* $W(f_1, f_2) = f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)$. Montrer que ces deux fonctions sont linéairement dépendantes seulement si W est identiquement nul, c'est-à-dire nul pour **tout** x. Réciproquement que peut-on dire si $W(f_1, f_2) = 0$?
b) Plus généralement, on définit le wronskien de n fonctions $f_i(x)$, $i = 1, \cdots n$, supposées $(n-1)$ fois dérivables comme le déterminant

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Montrer que si les fonctions f_i sont linéairement dépendantes, W est nul pour tout x.
c) Montrer qu'inversement il suffit que le wronskien $W(x)$ soit non nul en un point x_0 pour qu'on puisse conclure que les fonctions f_i sont linéairement **in**dépendantes.

III. Mineurs, cofacteurs. Inverses de matrices

A) Soit A une matrice $n \times n$ antisymétrique, $A^T = -A$.
a) Montrer que si n est impair, $\det A = 0$.

b) Calculer $\det A$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme d'un carré $P(a, b, \cdots, f)^2$ d'un polynôme en $a, \cdots, f$.
c) En général, on peut démontrer (et on admettra) que le déterminant de toute matrice antisymétrique de taille paire $n = 2m$ est le carré d'un polynôme des éléments de la matrice A, appelé *pfaffien*. Quel doit être le degré de ce polynôme pfaffien ?

B) Soit A une matrice $p \times p$, $\mathrm{Cof}\, A$ sa comatrice. Montrer que $\det \mathrm{Cof}\, A = (\det A)^q$, avec une puissance q qu'on déterminera.

C) $\star$ Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$, $B = \mathrm{Cof}\, A = (A_{ij})$ sa comatrice. On rappelle que $A.\mathrm{Cof}\, A^T = (\det A)I$.
(i) Montrer que si A est de rang $n-1$, $\mathrm{Cof}\, A$ est de rang 1 ;
(ii) si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$, $\mathrm{Cof}\, A$ est nulle. (On étudiera la noyau de $\mathrm{Cof}\, A$.)

D) Calculer les inverses A^{-1} des matrices A suivantes, *s'ils existent*, et vérifier en calculant $A \cdot A^{-1}$.
$A_1 = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t - \frac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{pmatrix}$
$A_5 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\star$ $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

IV. Jacobiens, orientation

A) On rappelle que le jacobien d'un changement de coordonnées $\vec{x} \to \vec{y}$ est $J = \det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$ si bien que

$$d^n y = |J| d^n x$$

Rappeler l'expression des coordonnées sphériques et cylindriques à trois dimensions.
Calculer le jacobien dans les deux changements de coordonnées suivants
– coordonnées cylindriques : $\vec{x} \to (z, r, \theta)$
– coordonnées sphériques : $\vec{x} \to (r, \theta, \phi)$

B) Orientation d'un trièdre.
Soit un système de trois vecteurs indépendants dans l'espace $\mathbb{R}^3$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, appelé trièdre. Le déterminant de ces trois vecteurs est défini par $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(i) Soit T la matrice de vecteurs colonnes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Montrer que $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det T$.
(ii) Une application linéaire A transforme les trois vecteurs du trièdre en $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = (A\vec{a}, A\vec{b}, A\vec{c})$. Montrer que $\det(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = \det A \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
(iii) On définit l'orientation d'un trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ comme le signe du déterminant $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
– Déduire de la question précédente que les applications qui préservent l'orientation des repères sont celles qui ont $\det A > 0$.
– Que se passe-t-il si $\det A = 0$?
– Donner un exemple de chaque cas $\det A > 0$, $\det A < 0$ et $\det A = 0$.