UPMC PARIS UNIVERSITAS

Mention Physique - L2 - Année 2009-2010
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°1 : Indépendance linéaire. Bases. Matrices

I. Espaces vectoriels. Indépendance linéaire. Bases, dimension

A)

a) On considère les suites de p nombres réels $X = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$. On définit la somme et la multiplication par un nombre réel par

$$(x_1, x_2, \cdots, x_p) + (y_1, y_2, \cdots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_p + y_p) \quad (1)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_p) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p)\ . \quad (2)$$

Montrer que ces suites forment un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Donnez-en une base. On l'appelle $\mathbb{R}^p$, pourquoi ?

b) Considérons les suites définies par récurrence $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$, avec u_1 et u_2 donnés. Montrer qu'elles forment un espace vectoriel. Montrer que u_n est une fonction linéaire de u_1 et u_2. Quelle est sa dimension ?

B)

a) Rappeler quelle est la relation entre l'intensité ou la charge et la tension aux bornes des 3 éléments de circuit de la figure 1.a.

b) Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge du condensateur dans le circuit des figures 1.b, c et d.

c) Les solutions de chaque cas forment-elles un espace vectoriel ? De quelle dimension ? Qu'est-ce qui fixe la solution physique ?

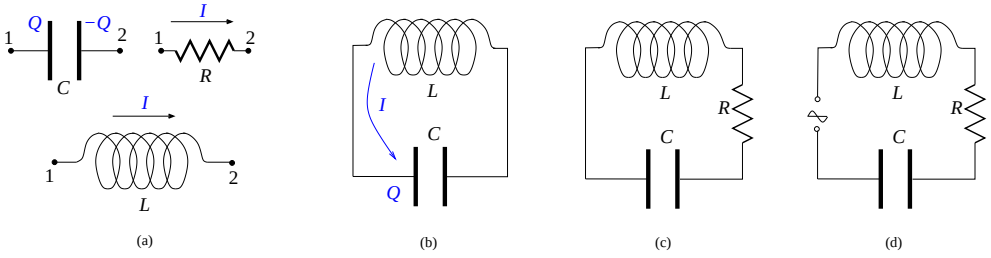


Figure 1: Circuits électriques

C) Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

$$\vec{a} = (1,0) \qquad \vec{b} = (0,1) \qquad \vec{c} = (1,1)$$

$$\vec{a} = (1,0,0) \qquad \vec{b} = (0,1,0) \qquad \vec{c} = (0,0,1)$$

$$\vec{a}' = (1,1,0) \qquad \vec{b}' = (0,1,1) \qquad \vec{c}' = (1,0,1)$$

$$\vec{a}'' = (1,1,0) \qquad \vec{b}'' = (0,1,1) \qquad \vec{c}' = (1,0,-1)$$

D) Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner la dimension de l'espace des solutions puis une base de solutions réelles

$$\text{(a)} \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$$

$$\text{(b)} \qquad \ddot{x} + 4x = 0$$

$$\text{(c)} \qquad \ddot{x} + \sqrt{3}\dot{x} + x = 0$$

E) Quel est le rang du système de vecteurs suivant ?

$$\vec{a} = (1,1,0) \qquad \vec{b} = (0,1,1) \qquad \vec{c} = (1,0,1)$$

$$\vec{a}' = (1,1,0) \qquad \vec{b}' = (0,1,1) \qquad \vec{c}' = (1,1,1)$$

$$\vec{a}'' = (1,1,0) \qquad \vec{b}'' = (0,1,1) \qquad \vec{c}'' = (1,0,-1)$$

$$P_1(x) = \cos x \qquad P_2(x) = \sin x \qquad P_3(x) = \sin 2x$$

$$Q_1(x) = \cos^2 x \qquad Q_2(x) = \sin^2 x \qquad Q_3(x) = \cos 2x$$

II. Matrices

A) Quelle est la matrice du changement de base suivant

$$(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2) \quad \longrightarrow \quad (\vec{e}_1,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2) \quad \longrightarrow \quad (\vec{e}_2,\ \vec{e}_1)$$

Écrire comment se transforment les composantes d'un vecteur quand on passe d'une base dans l'autre.

B) Calculer les produits de matrices suivants

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C) En mécanique quantique, on rencontre les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

(a) Montrer qu'elles sont de trace nulle.
(b) Calculer les produits $\sigma_i \cdot \sigma_j$ pour toutes les paires (i, j).
(c) Pour $j = 1$ par exemple, que valent $\sigma_j^2,\ \sigma_j^3, \cdots, \sigma_j^n$?

(d) Comment calculer $e^{i\alpha\sigma_1}$?
(e) Écrire les matrices $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)$ et $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$. Calculer σ_+^2, σ_-^2, $\sigma_+\sigma_-$, $\sigma_-\sigma_+$.

D) Calculer les combinaisons $J_iJ_j - J_jJ_i$ pour les matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour les matrices

$$J_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E) $\star$ Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Calculer T^2, T^3 et T^n pour n entier quelconque.
En écrivant $A = I + T$, calculer A^n pour n entier quelconque.
Calculer l'inverse de la matrice A.
Calculer l'exponentielle e^A par son développement en série.

III. Transformations géométriques ; applications linéaires

A) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les transformations suivantes sur le vecteur $\vec{X} = \overrightarrow{OM}$ sont-elles des transformations linéaires

1. rotation d'angle α autour du point O ?
2. homothétie de centre O et de facteur f ?
3. translation par un vecteur $\vec{V}$, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{V}$?
4. réflexion par rapport à un plan passant par O ?

B) Soit la rotation $\mathcal{R}(\alpha)$ d'angle α dans le plan autour de l'origine. Écrire la transformation par cette rotation des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ d'un repère orthonormé. Écrire la matrice de rotation $R(\alpha)$.
Par un raisonnement géométrique, donner l'expression de $R(\alpha)R(\beta)$ et de $R^{-1}(\alpha)$, puis vérifier par le calcul matriciel.
Que vaut la transposée $R(\alpha)^T$?

C) a) Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ doté d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, quelle est la matrice de la réflexion par rapport à la droite passant par O et colinéaire à $\vec{e}_1$?

Que devient cette matrice dans la base $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ obtenue à partir de la précédente par rotation de $\pi/4$?
b) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ doté d'une base orthonormée $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, quelle est la matrice de la réflexion par rapport au plan passant par O et engendré par les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}$? Même question pour la projection orthogonale sur ce plan.

D)
1. Quel est le noyau, quelle est l'image des 3 applications linéaires du A) ? des 2 du C) ?
2. Dans l'espace des polynômes en x de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application $D : P(x) \mapsto Q(x) = P'(x)$. Est-ce un opérateur linéaire ? Quelle est sa matrice dans la base $\{1, x, x^2, x^3\}$? Quel est le noyau, quelle est l'image de D ?

E) Soit le vecteur $\vec{\omega} = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire qui à un vecteur quelconque $\vec{r} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$.
L'application est-elle linéaire ? Pourquoi ?
Quelle est la matrice de cette application ?
Déterminer le noyau et l'image de l'application.

IV. Application aux quadripôles électriques

Matrices de transfert (ou transmission), d'impédance et d'admittance d'un quadrupôle (ou quadripôle) électrique

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Quelle relation y-a-t-il entre les matrices d'impédance Z et d'admittance Y?
Exemple d'un transformateur, avec des bobinages de self-inductance L_1 et L_2 et d'inductance

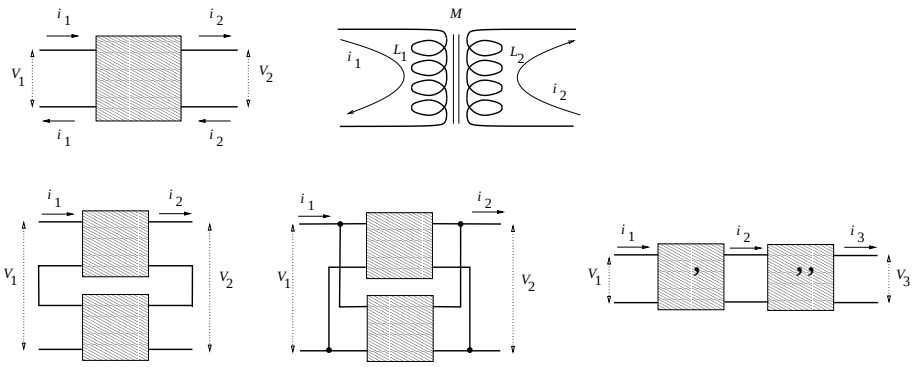


Figure 2: Circuit quadripolaire. Transformateur. Quadripôles en série, en parallèle, en cascade

mutuelle M, supposés de résistances négligeables. Écrire l'expression de V_1 et V_2 en fonction de i_1 et i_2, puis la matrice d'impédance pour des courants et intensités de fréquence ω.

Lois de composition pour des quadrupôles en série, en parallèle, en cascade (figure 2). Quelle est la matrice Z, T ou Y qui se prête le mieux au calcul de cette composition, dans chaque cas ?