

Chapitre 00

Quelques éléments de base sur les groupes $\text{SO}(3)$, $\text{SU}(2)$ et $\text{SL}(2, \mathbb{C})$

1. Rotations de \mathbb{R}^3 , les groupes $\text{SO}(3)$ et $\text{SU}(2)$

1.1. Le groupe $\text{SO}(3)$, groupe à trois paramètres

On considère l'espace euclidien à trois dimensions et le groupe des rotations. Ces rotations laissent invariante la norme carrée du rayon vecteur $\mathbf{OM}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ¹ et sont représentées dans une base orthonormée par des matrices 3×3 orthogonales réelles, de déterminant 1 : elles forment le groupe $\text{SO}(3)$.

Toute rotation de $\text{SO}(3)$ est une rotation d'un angle ψ autour d'un axe de vecteur directeur unitaire \mathbf{n} , et les rotations associées à (\mathbf{n}, ψ) et à $(-\mathbf{n}, -\psi)$ sont identiques. On notera $R_{\mathbf{n}}(\psi)$ cette rotation. De façon très explicite (formule d'O. Rodrigues)

$$\mathbf{x}' = R_{\mathbf{n}}(\psi)\mathbf{x} = \cos \psi \mathbf{x} + (1 - \cos \psi)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \sin \psi (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x}) . \quad (1.1)$$

Comme un vecteur unitaire \mathbf{n} dans \mathbb{R}^3 dépend de deux paramètres, par exemple l'angle θ qu'il fait avec l'axe Oz et l'angle ϕ que fait sa projection dans le plan Ox, Oy avec l'axe Ox (voir figure 1) un élément de $\text{SO}(3)$ est paramétrisé par 3 variables continues. On prendra ainsi

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi . \quad (1.2)$$

$\text{SO}(3)$ est donc une variété de dimension 3. Pour la rotation d'axe \mathbf{n} colinéaire à l'axe Oz , on a la matrice

$$\mathcal{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

tandis qu'autour des axes Ox et Oy

$$\mathcal{R}_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} . \quad (1.3)'$$

Une relation que nous allons abondamment utiliser est que

$$R R_{\mathbf{n}}(\psi) R^{-1} = R_{\mathbf{n}'}(\psi) \quad (1.4)$$

¹ Dans tout ce chapitre, nous utilisons alternativement les notations (x, y, z) ou (x_1, x_2, x_3) pour désigner les coordonnées dans un repère orthonormé.

où \mathbf{n}' est le transformé de \mathbf{n} par la rotation R , $\mathbf{n}' = R\mathbf{n}$ (la vérifier !). Inversement toute rotation d'angle ψ autour d'un vecteur \mathbf{n}' peut se mettre sous la forme (1.4) : on dira plus tard que les "classes de conjugaison" du groupe $SO(3)$ sont caractérisées par l'angle ψ .

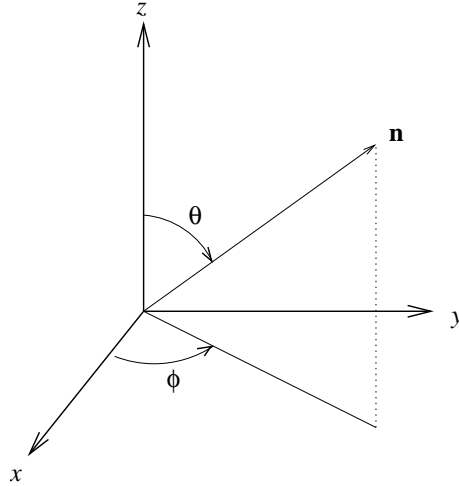


Fig. 3.1

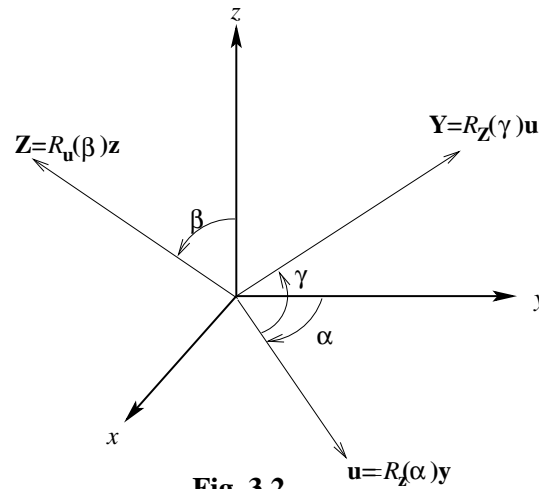


Fig. 3.2

Une autre description fait appel aux *angles d'Euler* : étant donné un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) , toute rotation peut être considérée comme résultant de la composition d'une rotation d'angle α autour de Oz qui amène Oy en Ou , suivie d'une rotation d'angle β autour de Ou amenant Oz en OZ , et enfin d'une rotation d'angle γ autour de OZ (voir figure 2). On prend donc $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ et on écrit

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{\mathbf{Z}}(\gamma)R_{\mathbf{u}}(\beta)R_z(\alpha) \tag{1.5}$$

mais selon (1.4)

$$R_{\mathbf{Z}}(\gamma) = R_{\mathbf{u}}(\beta)R_z(\gamma)R_{\mathbf{u}}^{-1}(\beta) \quad R_{\mathbf{u}}(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)$$

d'où en reportant dans (1.5)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) . \tag{1.6}$$

où on a utilisé le fait que $R_z(\alpha)R_z(\gamma)R_z^{-1}(\alpha) = R_z(\gamma)$ car les rotations autour d'un même axe commutent (elles forment un sous-groupe abélien, isomorphe à $SO(2)$). Cette méthode permet de comparer les deux paramétrisations précédentes et d'en tirer les relations entre (θ, ϕ, ψ) et (α, β, γ) .

Exercice : En utilisant (1.4), écrire la matrice R qui amène le vecteur unitaire \mathbf{z} porté par Oz sur le vecteur unitaire \mathbf{n} , puis l'expression de $R_{\mathbf{n}}(\psi)$ en termes de R_y et R_z , et en déduire les relations entre θ, ϕ, ψ et les angles d'Euler.

1.2. Du groupe $SO(3)$ au groupe $SU(2)$

Considérons une autre paramétrisation des rotations. À la rotation $R_{\mathbf{n}}(\psi)$, nous associons le vecteur unitaire à quatre dimensions $u : (u_0 = \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{u} = \mathbf{n} \sin \frac{\psi}{2})$; on a $u^2 = u_0^2 + \mathbf{u}^2 = 1$, et u appartient à la sphère unité S^3 dans l'espace \mathbb{R}^4 . Le changement de détermination de ψ par un multiple impair de 2π change u en $-u$. Il y a donc bijection entre $R_{\mathbf{n}}(\psi)$ et la paire $(u, -u)$, c'est-à-dire entre $SO(3)$ et S^3/\mathbb{Z}_2 , la sphère dans laquelle on identifie les paires de points opposés. On dira que la sphère S^3 est un "groupe de recouvrement" de $SO(3)$. En quel sens cette sphère est-elle un groupe ? Pour répondre à cette question, introduisons les matrices de Pauli $\sigma_i, i = 1, 2, 3$.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (1.7)$$

Avec la matrice identité I , elles constituent une base de l'espace des matrices 2×2 hermitiques. Elles satisfont l'identité

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \sigma_k , \quad (1.8)$$

avec ϵ_{ijk} le tenseur complètement antisymétrique, $\epsilon_{123} = +1$, ϵ_{ijk} = signature de la permutation (ijk) .

Pour u un vecteur unitaire réel à quatre dimensions (c'est-à-dire un point de S^3), formons la matrice

$$U = u_0 I - i \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.9)$$

qui est unitaire et de déterminant 1 (le vérifier et montrer aussi la réciproque : toute matrice unitaire 2×2 est de la forme (1.9), avec $u^2 = 1$). Ces matrices forment le groupe $SU(2)$ qui est donc isomorphe à S^3 . En développant l'exponentielle en puissances et en utilisant (1.8), on peut vérifier que

$$e^{-i \frac{\psi}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} . \quad (1.10)$$

Il est suggéré que la multiplication des matrices

$$U_n(\psi) = e^{-i \frac{\psi}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad \mathbf{n} \in S^2 \quad (1.11)$$

fournit la loi de groupe cherchée dans S^3 . Montrons qu'en effet à une matrice de $SU(2)$ on peut associer une rotation de $SO(3)$ et qu'au produit de deux matrices de $SU(2)$ correspond

le produit des rotations de $SO(3)$. Au point x de coordonnées x_1, x_2, x_3 , associons la matrice hermitique

$$X = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

avec inversement $x^i = \frac{1}{2}\text{tr}(X\sigma^i)$, et agissons sur cette matrice selon

$$X \mapsto X' = UXU^\dagger, \quad (1.13)$$

ce qui définit une transformation linéaire $x \mapsto x' = \mathcal{T}x$. On calcule aisément que

$$\det X = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (1.14)$$

et comme $\det X = \det X'$, la transformation linéaire $x \mapsto x' = \mathcal{T}x$ est une isométrie, donc $\det \mathcal{T} = 1$ ou -1 . Pour se convaincre qu'il s'agit bien d'une rotation, c'est-à-dire que la transformation a un déterminant 1, il suffit de calculer ce déterminant pour $U = I$ où $\mathcal{T} =$ l'identité donc $\det \mathcal{T} = 1$, puis d'utiliser la connexité de la variété $SU(2) (\cong S^3)$ pour conclure que la fonction continue $\det \mathcal{T}(U)$ ne peut sauter à la valeur -1 . En fait, en utilisant l'identité (1.8), le calcul explicite de X' conduit après un peu d'algèbre à

$$\begin{aligned} X' &= \left(\cos \frac{\psi}{2} - i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\psi}{2} \right) X \left(\cos \frac{\psi}{2} + i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\psi}{2} \right) \\ &= \left(\cos \psi \mathbf{x} + (1 - \cos \psi)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \sin \psi (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x}) \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (1.15)$$

sur lequel on reconnaît la formule (1.1). On en conclut que la transformation $x \rightarrow x'$ effectuée par les matrices de $SU(2)$ dans (1.13) est bien la rotation d'angle ψ autour de \mathbf{n} . Au produit $U_{\mathbf{n}'}(\psi')U_{\mathbf{n}}(\psi)$ dans $SU(2)$ correspond dans $SO(3)$ la composition des deux rotations $R_{\mathbf{n}'}(\psi')R_{\mathbf{n}}(\psi)$ de $SO(3)$. Il y a donc un "homomorphisme" du groupe $SU(2)$ dans $SO(3)$. Cet homomorphisme envoie les deux matrices U et $-U$ sur la même rotation.

Résumons les acquis de ce paragraphe. Nous avons montré que le groupe $SU(2)$ est un groupe de recouvrement (d'ordre 2) du groupe $SO(3)$ (le sens topologique précis en sera donné par la suite), et que l'homomorphisme de $SU(2)$ dans $SO(3)$ est fourni par les équations (1.11)-(1.13).

2. Générateurs infinitésimaux. L'algèbre de Lie $su(2)$

2.1. Générateurs infinitésimaux de $SO(3)$

Les rotations $R_{\mathbf{n}}(\psi)$ autour d'un axe \mathbf{n} donné forment un *sous-groupe à un paramètre* isomorphe à $SO(2)$. Dans ce chapitre, nous suivons l'usage en écrivant les générateurs infinitésimaux des rotations comme des opérateurs hermitiens $J = J^\dagger$. Ainsi on écrit

$$R_{\mathbf{n}}(d\psi) = (I - i d\psi J_{\mathbf{n}}) \quad (2.1)$$

où $J_{\mathbf{n}}$ est le générateur de ces rotations, une matrice hermitique 3×3 . Par la propriété de groupe,

$$R_{\mathbf{n}}(\psi + d\psi) = R_{\mathbf{n}}(d\psi)R_{\mathbf{n}}(\psi) = (I - i d\psi J_{\mathbf{n}})R_{\mathbf{n}}(\psi) , \quad (2.2)$$

ou encore

$$\frac{\partial R_{\mathbf{n}}(\psi)}{\partial \psi} = -i J_{\mathbf{n}} R_{\mathbf{n}}(\psi) \quad (2.3)$$

qui, compte tenu de $R(0) = I$, s'intègre en

$$R_{\mathbf{n}}(\psi) = e^{-i\psi J_{\mathbf{n}}} . \quad (2.4)$$

L'équation (1.4) implique que

$$R e^{-i\psi J_{\mathbf{n}}} R^{-1} = e^{-i\psi R J_{\mathbf{n}} R^{-1}} = e^{-i\psi J_{\mathbf{n}'}} \quad (2.5)$$

avec $\mathbf{n}' = R\mathbf{n}$, donc

$$R J_{\mathbf{n}} R^{-1} = J_{\mathbf{n}'}, \quad (2.6)$$

c'est-à-dire $J_{\mathbf{n}}$ se transforme comme le vecteur \mathbf{n} . Pour être plus explicites, introduisons les trois matrices de base J_1 , J_2 et J_3 décrivant les rotations infinitésimales autour des axes correspondants ². De la version infinitésimale de (1.3) on tire

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

ce qu'on peut exprimer par une formule unique

$$(J_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk} \quad (2.8)$$

² Ne pas confondre $J_{\mathbf{n}}$ indexé par le vecteur \mathbf{n} , avec J_k , $k^{\text{ième}}$ composante de \mathbf{J} . La relation entre les deux va être donnée plus bas.

à l'aide du tenseur complètement antisymétrique ϵ_{ijk} . Ce tenseur ϵ_{ijk} est en fait invariant par l'action des rotations

$$\epsilon_{lmn} \mathcal{R}_{il} \mathcal{R}_{jm} \mathcal{R}_{kn} = \epsilon_{ijk} \det \mathcal{R} = \epsilon_{ijk} \quad (2.9)$$

puisque la matrice \mathcal{R} est de déterminant 1. Cette matrice étant aussi orthogonale, on peut faire passer un \mathcal{R} au membre de droite

$$\epsilon_{lmn} \mathcal{R}_{jm} \mathcal{R}_{kn} = \epsilon_{ijk} \mathcal{R}_{il} \quad (2.10)$$

ce qui au vu de (2.8) exprime que

$$\mathcal{R}_{jm} (J_l)_{mn} \mathcal{R}_{nk}^{-1} = (J_i)_{jk} \mathcal{R}_{il} \quad (2.11)$$

c'est-à-dire

$$R J_l R^{-1} = J_i \mathcal{R}_{il} . \quad (2.12)$$

Soit R la rotation qui amène le vecteur unitaire \mathbf{z} porté par Oz sur le vecteur \mathbf{n} , on a donc $n_k = \mathcal{R}_{k3}$ et

$$J_{\mathbf{n}} = R J_3 R^{-1} \stackrel{(2.12)}{=} J_k \mathcal{R}_{k3} = J_k n_k . \quad (2.13)$$

Noter que les équations (2.12) et (2.13) sont bien compatibles avec (2.6)

$$J_{\mathbf{n}'} \stackrel{(2.6)}{=} R J_{\mathbf{n}} R^{-1} \stackrel{(2.13)}{=} R J_k n_k R^{-1} \stackrel{(2.12)}{=} J_l \mathcal{R}_{lk} n_k = J_l n'_l .$$

L'équation (2.13) prouve que les trois matrices (2.7) forment une base des générateurs des sous-groupes à un paramètre et qu'on peut donc toujours écrire

$$R_{\mathbf{n}}(\psi) = e^{-i\psi \sum_k n_k J_k} . \quad (2.14)$$

Finalement on voit que par la formule (1.6), on peut écrire toute rotation de $SO(3)$ à l'aide des J

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3} . \quad (2.15)$$

Les trois matrices J_i , $i = 1, 2, 3$ satisfont les relations de commutation suivantes

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k . \quad (2.16)$$

Comme on le verra de façon plus systématique par la suite, cette relation de commutation des générateurs infinitésimaux J code une version infinitésimale de la loi de groupe. Considérons par exemple une rotation d'angle infinitésimal $d\psi$ autour de Oy agissant sur J_1

$$R_2(d\psi) J_1 R_2^{-1}(d\psi) \stackrel{(2.12)}{=} J_k [\mathcal{R}_2(d\psi)]_{k1} \quad (2.17)$$

mais au premier ordre, $R_2(d\psi) = I - id\psi J_2$, donc le membre de gauche de (2.17) est égal à $J_1 - id\psi [J_2, J_1]$ et au membre de droite, $[\mathcal{R}_2(d\psi)]_{k1} = \delta_{k1} - id\psi (J_2)_{k1} = \delta_{k1} - d\psi \delta_{k3}$ d'après (2.8), d'où $i[J_1, J_2] = -J_3$, qui est l'une des relations (2.16).

2.2. Générateurs infinitésimaux dans $SU(2)$

Examinons maintenant les choses du point de vue de $SU(2)$. Toute matrice unitaire U (ici 2×2) peut se diagonaliser dans une base orthonormée $U = V \exp\{i \text{diag}(\lambda_k)\} V^\dagger$ et donc s'écrire

$$U = \exp iH = \sum_0^\infty \frac{(iH)^n}{n!} \quad (2.18)$$

avec H hermitique. La somme converge (pour la norme $\|M\|^2 = \text{tr}MM^\dagger$). La condition d'unimodularité $1 = \det U = \exp i \text{tr}H$ est garantie si $\text{tr}H = 0$. L'ensemble de ces matrices hermitiques de trace nulle forme un espace vectoriel \mathcal{V} de dimension 3 sur \mathbb{R} . Or les matrices hermitiques 2×2 de trace nulle sont des combinaisons linéaires à coefficients réels des 3 matrices de Pauli

$$H = \sum_{i=1}^3 \eta_k \frac{\sigma_k}{2}, \quad (2.19)$$

ce qu'on peut reporter dans (2.18). On a en fait déjà observé plus haut que toute matrice unitaire 2×2 peut s'écrire sous la forme (1.10). En comparant cette forme avec celle obtenue en (2.14), ou encore en comparant sa version infinitésimale $U_n(d\psi) = (I - i d\psi \mathbf{n} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})$ avec (2.1)-(2.13), on voit que les matrices $\frac{1}{2}\sigma_j$ jouent ici dans $SU(2)$ le rôle joué par les générateurs infinitésimaux J_j dans $SO(3)$. Or ces matrices $\frac{1}{2}\sigma$ vérifient les relations de commutation

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (2.20)$$

avec les mêmes *constantes de structure* ϵ_{ijk} que dans (2.16). Autrement dit, nous venons de découvrir que les générateurs infinitésimaux J_i (éq. (2.7)) de $SO(3)$ et $\frac{1}{2}\sigma_i$ de $SU(2)$ satisfont aux mêmes relations de commutation (on dira plus tard qu'ils forment deux représentations de la même algèbre de Lie $su(2) = so(3)$). Cela implique que des calculs menés avec les $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ et faisant appel *uniquement aux règles de commutation des générateurs* demeurent valables avec les \vec{J} , et vice versa. Par exemple, des relations (2.12), il découle sans aucun calcul supplémentaire que pour les matrices de Pauli, on a

$$e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_2} \sigma_k e^{i\frac{\beta}{2}\sigma_2} = D_2(\beta) \sigma_k D_2^{-1}(\beta) = \sigma_l \mathcal{R}_y(\beta)_{lk} \quad (2.21)$$

où on lit les éléments de matrice \mathcal{R}_y en (1.3)'. Au contraire, la relation

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$$

(dont la preuve ne fait pas appel qu'aux commutateurs) est spécifique à la représentation de dimension 2 de l'algèbre $su(2)$.

2.3. Algèbre de Lie $su(2)$

Récapitulons : nous venons d'introduire l'algèbre de commutation des générateurs infinitésimaux (ou algèbre de Lie) du groupe $SU(2)$ (ou $SO(3)$), notée $su(2)$ ou $so(3)$. Elle est définie par les relations (2.16), que nous récrivons

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k . \quad (2.16)$$

On utilise aussi beaucoup les trois combinaisons

$$J_z \equiv J_3, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2 . \quad (2.22)$$

Il est immédiat de calculer

$$[J_3, J_+] = J_+ \quad (2.23a)$$

$$[J_3, J_-] = -J_- \quad (2.23b)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3 . \quad (2.23c)$$

On vérifie aussi que l'opérateur

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3^2 + J_3 + J_- J_+ \quad (2.24)$$

commute avec tous les J

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0 . \quad (2.25)$$

\mathbf{J}^2 est l'*opérateur de Casimir*. Anticipant un peu sur la suite, nous serons souvent intéressés aux "représentations unitaires", où les générateurs J_i , $i = 1, 2, 3$ sont hermitiques, donc

$$J_i^\dagger = J_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad J_\pm^\dagger = J_\mp . \quad (2.26)$$

Pour terminer, mentionnons l'interprétation des J_i comme opérateurs différentiels agissant sur les fonctions des coordonnées de l'espace \mathbb{R}^3 . Dans l'espace \mathbb{R}^3 , l'effet d'une rotation infinitésimale sur le vecteur \mathbf{x} est de le changer en

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}$$

donc une fonction *scalair*e de \mathbf{x} , $f(\mathbf{x})$, est changée en $f'(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})$ soit

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= f(R^{-1}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \delta\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}) \\ &= (1 - \delta\psi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \wedge \nabla) f(\mathbf{x}) \\ &= (1 - i\delta\psi \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) f(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (2.27)$$

On identifie donc

$$\mathbf{J} = -i\mathbf{x} \wedge \nabla, \quad J_i = -i\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (2.28)$$

ce qui permet de le calculer dans des coordonnées quelconques, par exemple sphériques (Appendice A). (Comparer aussi (2.28) avec l'expression du moment angulaire en Mécanique Quantique $L_i = \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$). Parmi les combinaisons de J qu'on peut construire, l'une doit jouer un rôle particulier, le laplacien sur la sphère S^2 , opérateur différentiel du second ordre invariant par changement de coordonnées (Appendice A). Il doit en particulier être invariant par rotation, être de degré 2 dans les J , ce ne peut être que l'opérateur de Casimir \mathbf{J}^2 (à un facteur près). De fait le laplacien dans \mathbb{R}^3 s'écrit en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\mathbf{J}^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\Delta_{\text{sphère } S^2}}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous nous sommes restreints ici pour plus de simplicité au cas de fonctions scalaires, mais on pourrait aussi s'intéresser plus généralement à la transformation d'une collection de fonctions des coordonnées de \mathbb{R}^3 "formant une représentation" de $SO(3)$, c'est-à-dire se transformant linéairement entre elles sous l'action de ce groupe

$$A'(\mathbf{x}') = D(R)A(\mathbf{x})$$

soit encore

$$A'(\mathbf{x}) = D(R)A(R^{-1}\mathbf{x}),$$

par exemple un champ vectoriel se transformant par

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = R\mathbf{A}(R^{-1}\mathbf{x}).$$

Le produit scalaire de deux tels champs vectoriels est une fonction scalaire. Que devient la discussion qui précède sur les générateurs infinitésimaux pour de tels objets ?

3. Représentations de $SU(2)$

3.1. Représentations des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

En géométrie de l'espace \mathbb{R}^3 , les notions de vecteur ou de tenseur sont familières. Il s'agit d'objets se transformant de façon linéaire sous l'effet des rotations

$$V_i \mapsto \mathcal{R}_{ii'}V_{i'} \quad (V \otimes W)_{ij} \mapsto \mathcal{R}_{ii'}\mathcal{R}_{jj'}(V \otimes W)_{i'j'} \quad \text{etc.}$$

D'une façon générale, on appelle *représentation* d'un groupe G dans un espace vectoriel E un homomorphisme de G dans le groupe des transformations linéaires $GL(E)$. Ainsi, comme on vient de le voir, le groupe $SO(3)$ admet une représentation dans l'espace \mathbb{R}^3 (les vecteurs V de l'exemple ci-dessus), une représentation dans l'espace des tenseurs de rang deux, etc. Nous allons maintenant nous intéresser à la construction des représentations générales de $SO(3)$ et $SU(2)$. Pour les besoins de la physique, en particulier de la mécanique quantique, on a surtout besoin de représentations unitaires, dans lesquelles les matrices de représentation sont unitaires. En fait, comme on le verra, il suffit d'étudier les

représentations de $SU(2)$ pour avoir aussi celles de $SO(3)$, et mieux encore, il suffira d'étudier la façon dont sont représentés les éléments du groupe au voisinage de l'identité, c'est-à-dire étudier les représentations des générateurs infinitésimaux de $SU(2)$ (et $SO(3)$).

Il suffit donc pour trouver les représentations unitaires du groupe $SU(2)$ de trouver les représentations par des matrices hermitiques de son algèbre de Lie $su(2)$.

3.2. Représentations de l'algèbre $su(2)$

Procédons à la construction classique des représentations de l'algèbre $su(2)$. Comme précédemment, J_{\pm} et J_z désignent les représentants des générateurs infinitésimaux dans une certaine représentation. Ils satisfont aux relations de commutation (2.23) et d'hermiticité (2.26). La commutation des opérateurs J_z et \mathbf{J}^2 garantit qu'on peut en chercher des vecteurs propres communs. Les valeurs propres de ces opérateurs hermitiques étant réelles et \mathbf{J}^2 étant semi-défini positif, on peut toujours écrire ses valeurs propres sous la forme $j(j+1)$, j réel positif ou nul et on considère donc un vecteur propre commun $|j m\rangle$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2|j m\rangle &= j(j+1)|j m\rangle \\ J_z|j m\rangle &= m|j m\rangle .\end{aligned}\tag{3.1}$$

avec m un réel a priori arbitraire. Par abus de langage, on dira que $|j m\rangle$ est un "vecteur propre de valeurs propres (j, m) ".

(i) Agissons avec J_+ et $J_- = J_+^\dagger$ sur $|j m\rangle$. Utilisant la relation $J_{\pm}J_{\mp} = \mathbf{J}^2 - J_z^2 \pm J_z$ (conséquence de (2.23)), on calcule la norme carrée de $J_{\pm}|j m\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle j m|J_-J_+|j m\rangle &= (j(j+1) - m(m+1)) \langle j m|j m\rangle \\ &= (j-m)(j+m+1) \langle j m|j m\rangle \\ \langle j m|J_+J_-|j m\rangle &= (j(j+1) - m(m-1)) \langle j m|j m\rangle \\ &= (j+m)(j-m+1) \langle j m|j m\rangle .\end{aligned}\tag{3.2}$$

Ces normes carrées ne peuvent être négatives donc

$$\begin{aligned}(j-m)(j+m+1) \geq 0 & : -j-1 \leq m \leq j \\ (j+m)(j-m+1) \geq 0 & : -j \leq m \leq j+1\end{aligned}\tag{3.3}$$

qui impliquent

$$-j \leq m \leq j .\tag{3.4}$$

En outre $J_+|j m\rangle = 0$ si et seulement si $m = j$ et $J_-|j m\rangle = 0$ si et seulement si $m = -j$

$$J_+|j j\rangle = 0 \quad J_-|j -j\rangle = 0 . \quad (3.5)$$

(ii) Si $m \neq j$, $J_+|j m\rangle$ est un vecteur non nul, vecteur propre de valeurs propres $(j, m+1)$.
En effet

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 J_+|j m\rangle &= J_+ \mathbf{J}^2|j m\rangle = j(j+1)J_+|j m\rangle \\ J_z J_+|j m\rangle &= J_+(J_z + 1)|j m\rangle = (m+1)J_+|j m\rangle . \end{aligned} \quad (3.6)$$

De même si $m \neq -j$, $J_-|j m\rangle$ est un vecteur propre (non nul) de valeurs propres $(j, m-1)$.

(iii) Considérons la suite des vecteurs

$$|j m\rangle, J_-|j m\rangle, J_-^2|j m\rangle, \dots, J_-^p|j m\rangle \dots$$

S'ils sont non nuls ils constituent des vecteurs propres de J_z de valeurs propres $m, m-1, m-2, \dots, m-p \dots$ Les valeurs propres autorisées de J_z étant bornées par (3.4), cette suite doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes. Soit p l'entier tel que $J_-^p|j m\rangle \neq 0$, $J_-^{p+1}|j m\rangle = 0$. En vertu de (3.5), $J_-^p|j m\rangle$ est un vecteur propre de valeurs propres $(j, -j)$ donc $m-p = -j$ c'est-à-dire

$$(j+m) \text{ est entier.} \quad (3.7)$$

Opérant de même avec J_+, J_+^2, \dots sur $|j m\rangle$, on est mené à la conclusion que

$$(j-m) \text{ est entier} \quad (3.8)$$

et par conséquent j et m sont simultanément entiers ou demi-entiers. Pour chaque valeur de j

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

m peut prendre les $2j+1$ valeurs ³

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j . \quad (3.9)$$

³ En fait, on vient de trouver une condition nécessaire sur les j, m . Le fait que tous ces j donnent effectivement des représentations va être vérifié au paragraphe suivant.

Partant du vecteur $|j m = j\rangle$, (“vecteur de plus haut poids”), choisi de norme 1, on construit la base orthonormée $|j m\rangle$ par application répétée de J_- et on a

$$J_+ |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j m+1\rangle \quad (3.10a)$$

$$J_- |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j m-1\rangle \quad (3.10b)$$

$$J_z |j m\rangle = m |j m\rangle . \quad (3.10c)$$

Ces $2j + 1$ états forment la base de la “représentation de spin j ” de l’algèbre $su(2)$.

En fait, cette représentation de l’algèbre $su(2)$ s’étend en une représentation du groupe $SU(2)$, comme on l’expliquera plus tard.

La discussion précédente a fait jouer un rôle central à l’unitarité de la représentation et donc à l’hermiticité des générateurs infinitésimaux, donc à la positivité : $\|J_{\pm}|j m\rangle\|^2 \geq 0 \implies -j \leq m \leq j$, etc, et a permis de conclure que la représentation est nécessairement de dimension finie. Inversement on peut insister sur cette dernière condition, et montrer qu’elle suffit à assurer les conditions précédentes. Partant d’un vecteur propre $|\psi\rangle$ de J_z , la suite $J_+^p |\psi\rangle$ produit des vecteurs propres de J_z de valeur propre croissante, donc linéairement indépendants s’ils sont non nuls. Si par hypothèse la représentation est de dimension finie, cette suite est finie, et il existe un vecteur noté $|j\rangle$ tel que $J_+ |j\rangle = 0$, $J_z |j\rangle = j |j\rangle$. Par la relation $\mathbf{J}^2 = J_- J_+ + J_z (J_z + 1)$, c’est aussi un vecteur propre de valeur propre $j(j+1)$ de \mathbf{J}^2 . Il s’identifie donc avec le vecteur de plus haut poids noté précédemment $|j j\rangle$, notation que nous adoptons donc dans la suite de cette discussion. A partir de ce vecteur, les $J_-^p |j j\rangle$ forment une suite qui doit elle aussi être finie

$$\exists q \quad J_-^{q-1} |j j\rangle \neq 0 \quad J_-^q |j j\rangle = 0 . \quad (3.11)$$

On démontre aisément par récurrence que

$$J_+ J_-^q |j j\rangle = [J_+, J_-^q] |j j\rangle = q(2j+1-q) J_-^{q-1} |j j\rangle = 0 \quad (3.12)$$

donc $q = 2j+1$. Le nombre j est donc entier ou demi-entier, les vecteurs de la représentation ainsi construite sont vecteurs propres de \mathbf{J}^2 de valeur propre $j(j+1)$ et de J_z de valeur propre m satisfaisant (3.9). On a bien retrouvé tous les résultats précédents. Sous cette forme, la construction de ces “représentations de plus haut poids” se généralise à d’autres algèbres de Lie, même de dimension infinie, telle l’algèbre de Virasoso.

Les matrices de la représentation de spin j sont telles que sous l’action de la rotation $U \in SU(2)$

$$|j m\rangle \mapsto D^j(U) |j m\rangle = |j m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^j(U) . \quad (3.13)$$

Selon la paramétrisation (\mathbf{n}, ψ , angles d’Euler, ...), on écrira aussi $\mathcal{D}_{m'm}^j(\mathbf{n}, \psi)$, $\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$, etc. Par (1.6), on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle j m' | D(\alpha, \beta, \gamma) | j m \rangle \\ &= \langle j m' | e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} | j m \rangle \\ &= e^{-i\alpha m'} d_{m'm}^j(\beta) e^{-i\gamma m} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où la matrice d^j est définie par

$$d_{m'm}^j(\beta) = \langle j m' | e^{-i\beta J_y} | j m \rangle . \quad (3.15)$$

Une formule explicite pour d^j sera donnée au paragraphe suivant. On a encore

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(\mathbf{z}, \psi) &= e^{-i\psi m} \delta_{mm'} \\ \mathcal{D}_{m'm}^j(\mathbf{y}, \psi) &= d_{m'm}^j(\psi) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Exercice : Calculer $\mathcal{D}^j(\mathbf{x}, \psi)$. (On pourra utiliser (1.4).)

On note que $\mathcal{D}^j(\mathbf{z}, 2\pi) = (-1)^{2j} I$, puisque $(-1)^{2m} = (-1)^{2j}$, et la propriété est vraie pour tout axe \mathbf{n} par conjugaison (1.4)

$$\mathcal{D}^j(\mathbf{n}, 2\pi) = (-1)^{2j} I. \quad (3.17)$$

Cela montre qu'une rotation de 2π dans $SO(3)$ est représentée par $-I$ dans une représentation de spin demi-entier de $SU(2)$. Les représentations de spin demi-entier de $SU(2)$ sont des représentations "projectives", (c'est-à-dire à un signe près), de $SO(3)$; on reviendra au chapitre 2 sur la notion de représentation projective.

On vérifie aussi l'unimodularité des matrices \mathcal{D}^j (ou de façon équivalente, le fait que les représentants des générateurs infinitésimaux sont de trace nulle). Si $\mathbf{n} = R\mathbf{z}$, $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \psi) = \mathcal{D}(R)\mathcal{D}(\mathbf{z}, \psi)\mathcal{D}^{-1}(R)$, donc

$$\det \mathcal{D}(\mathbf{n}, \psi) = \det \mathcal{D}(\mathbf{z}, \psi) = \det e^{-i\psi J_z} = \prod_{m=-j}^j e^{-im\psi} = 1. \quad (3.18)$$

Il peut être utile d'écrire explicitement ces matrices dans les cas $j = \frac{1}{2}$ et $j = 1$. Le cas de $j = \frac{1}{2}$ est très simple, puisque

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(U) &= U = e^{-i\frac{1}{2}\psi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} - i \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} & -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{i\phi} & \cos \frac{\psi}{2} + i \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_3} e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_2} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} & -\sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \\ \sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} & \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

résultat attendu puisque les matrices U du groupe en forment bien évidemment une représentation. Pour $j = 1$, dans la base $|1, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$ et $|1, -1\rangle$ où J_z est diagonale

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

d'où

$$d^1(\beta) = e^{-i\beta J_y} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \beta}{2} & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos \beta}{2} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos \beta & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \beta}{2} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos \beta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

comme le lecteur le vérifiera.

Dans le paragraphe qui suit on écrit plus explicitement ces matrices de représentation du groupe $SU(2)$, et dans l'Appendice B du chapitre 2, on détaillera les équations différentielles qu'elles satisfont et leurs relations avec les "fonctions spéciales", polynômes orthogonaux et harmoniques sphériques. . .

Irréductibilité

Une notion centrale dans l'étude des représentations est celle de l'irréductibilité. Une représentation est irréductible si elle n'admet aucun sous-espace invariant. Montrons que la représentation de spin j de $SU(2)$ que nous venons de construire est irréductible. On montrera plus bas au Chapitre 2 que la représentation étant unitaire, elle est soit irréductible soit complètement réductible ; dans ce dernier cas, il existerait nécessairement des opérateurs diagonaux par blocs, différents de l'identité et commutant avec les matrices de la représentation, en particulier avec les générateurs J_i . Or dans la base (3.10) toute matrice M commutant avec J_z est diagonale, $M_{mm'} = \mu_m \delta_{mm'}$, (le vérifier !), et la commutation avec J_+ force tous les μ_m à être égaux : la matrice M est multiple de l'identité et la représentation est bien irréductible.

On peut aussi se demander pourquoi l'étude des représentations de dimension finie que nous venons de construire suffit aux besoins du physicien, par exemple en mécanique quantique, où la scène se passe en général dans un espace de Hilbert de dimension infinie. On démontrera plus bas (Chap. 2) que

Toute représentation de $SU(2)$ ou $SO(3)$ dans un espace de Hilbert est équivalente à une représentation unitaire, et donc est complètement réductible en une somme (finie ou infinie) de représentations irréductibles de dimension finie.

3.3. Construction explicite

Soient ξ et η deux variables complexes sur lesquelles les matrices $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SU(2)$ agissent selon $\xi' = a\xi + c\eta$, $\eta' = b\xi + d\eta$. En d'autres termes, ξ et η sont les vecteurs de base de la représentation de dimension 2 (représentation de spin $\frac{1}{2}$) de $SU(2)$. Une construction explicite des représentations précédentes est obtenue en considérant les polynômes homogènes de degré $2j$ dans les deux variables ξ et η , dont une base est donnée par les $2j + 1$ polynômes

$$P_{jm} = \frac{\xi^{j+m} \eta^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad m = -j, \dots, j \quad (3.22)$$

En fait, les considérations qui suivent demeurent valables si U est une matrice quelconque du groupe $GL(2, \mathbb{C})$ et en fournissent une représentation. Sous l'action de U sur ξ et η , les $P_{jm}(\xi, \eta)$ se transforment en $P_{jm}(\xi', \eta')$, eux aussi homogènes de degré $2j$ en ξ et η , qui se développent donc sur les $P_{jm}(\xi, \eta)$. Ces derniers portent donc une représentation de dimension $2j + 1$ de $SU(2)$ (ou $GL(2, \mathbb{C})$), qui n'est autre que la représentation de spin j précédente. Cela permet d'écrire des formules très explicites pour les \mathcal{D}^j .

$$P_{jm}(\xi', \eta') = \sum_{m'} P_{jm'}(\xi, \eta) \mathcal{D}_{m'm}^j(U). \quad (3.23)$$

On obtient

$$\mathcal{D}_{m'm}^j(U) = ((j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0 \\ n_1+n_2=j+m'; \quad n_3+n_4=j-m' \\ n_1+n_3=j+m; \quad n_2+n_4=j-m}} \frac{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!}. \quad (3.24)$$

Pour $U = -I$, on vérifie à nouveau que $\mathcal{D}^j(-I) = (-1)^{2j} I$.

Dans le cas particulier de $U = e^{-i\psi \frac{\sigma_2}{2}} = \cos \frac{\psi}{2} I - i \sin \frac{\psi}{2} \sigma_2$, on a donc

$$d_{m'm}^j(\psi) = ((j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!)^{\frac{1}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+j-m} \cos \frac{\psi}{2}^{2k+m+m'} \sin \frac{\psi}{2}^{2j-2k-m-m'}}{(m+m'+k)!(j-m-k)!(j-m'-k)!k!}. \quad (3.25)$$

L'expression des générateurs infinitésimaux sur les polynômes P_{jm} s'obtient en considérant des U proches de l'identité. On trouve

$$J_+ = \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \quad J_- = \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \quad J_z = \frac{1}{2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.26)$$

dont il est immédiat de vérifier les relations de commutation ainsi que l'action sur les P_{jm} en accord avec (3.10). Cela achève l'identification de (3.22) avec la représentation de spin j .

Remarques

1. Répéter la preuve de l'irréductibilité de la représentation de spin j dans cette nouvelle forme.
2. Noter que ce que les polynômes homogènes de degré $2j$ dans les variables x et y ont construit n'est autre que la puissance tensorielle $2j$ symétrisée de la représentation de dimension 2.

4. Produit direct de représentations de $SU(2)$

4.1. Produit direct de représentations et l'“addition de moments angulaires”

Intéressons nous au produit de deux représentations de spin j_1 et j_2 et à leur décomposition sur des états de spin total donné (“décomposition en représentations irréductibles”). On part donc de la représentation produit engendrée par les vecteurs

$$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \quad \text{abrégé en} \quad |m_1 m_2\rangle \quad (4.1)$$

sur lesquels agissent les générateurs infinitésimaux sous la forme

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes \mathbf{J}^{(2)} . \quad (4.2)$$

L'indice supérieur indique sur quel espace agissent les opérateurs. Par abus de notation, on écrit souvent au lieu de (4.2)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)} \quad (4.2)'$$

et (en Mécanique Quantique), on parle de l'“addition des moments angulaires” $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$. Il s'agit donc de décomposer les vecteurs (4.1) sur une base de vecteurs propres de \mathbf{J} et J_z . Comme $\mathbf{J}^{(1)2}$ et $\mathbf{J}^{(2)2}$ commutent entre eux et avec \mathbf{J}^2 et J_z , on peut chercher des vecteurs propres communs qu'on notera

$$|(j_1 j_2) J M\rangle \quad \text{ou plus simplement} \quad |J M\rangle \quad (4.3)$$

étant entendu qu'on s'est fixé la valeur de j_1 et j_2 . La question est donc double : quelles valeurs J et M peuvent-ils prendre et quelle est la matrice du changement de base $|m_1 m_2\rangle \rightarrow |J M\rangle$? En d'autres termes quelle est la décomposition (de Clebsch-Gordan) et quels sont les coefficients de Clebsch-Gordan ?

Les valeurs possibles de M , valeur propre de $J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)}$ sont aisées à trouver

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | J_z | J M \rangle &= (m_1 + m_2) \langle m_1 m_2 | J M \rangle \\ &= M \langle m_1 m_2 | J M \rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

et la seule valeur de M telle que $\langle m_1 m_2 | J M \rangle \neq 0$ est donc

$$M = m_1 + m_2 . \quad (4.5)$$

À j_1, j_2 et M fixés, il y a autant de vecteurs indépendants ayant cette valeur de M qu'il y a de couples (m_1, m_2) satisfaisant (4.5), soit

$$n(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } |M| > j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 + 1 - |M| & \text{si } |j_1 - j_2| \leq |M| \leq j_1 + j_2 \\ 2 \inf(j_1, j_2) + 1 & \text{si } 0 \leq |M| \leq |j_1 - j_2| \end{cases} \quad (4.6)$$

(voir Fig. 3.3 pour laquelle $j_1 = 5/2$ and $j_2 = 1$). Soit N_J le nombre de fois où la représentation de spin J apparaît dans la décomposition du produit des représentations de spin j_1 et j_2 . Les $n(M)$ vecteurs de valeur propre M pour J_z peuvent aussi s'interpréter comme provenant des N_J vecteurs $|JM\rangle$ pour les différentes valeurs de J compatibles avec cette valeur de M

$$n(M) = \sum_{J \geq |M|} N_J \quad (4.7)$$

soit en retranchant membre à membre deux telles relations

$$\begin{aligned} N_J &= n(J) - n(J+1) \\ &= 1 \quad \text{si et seulement si } |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

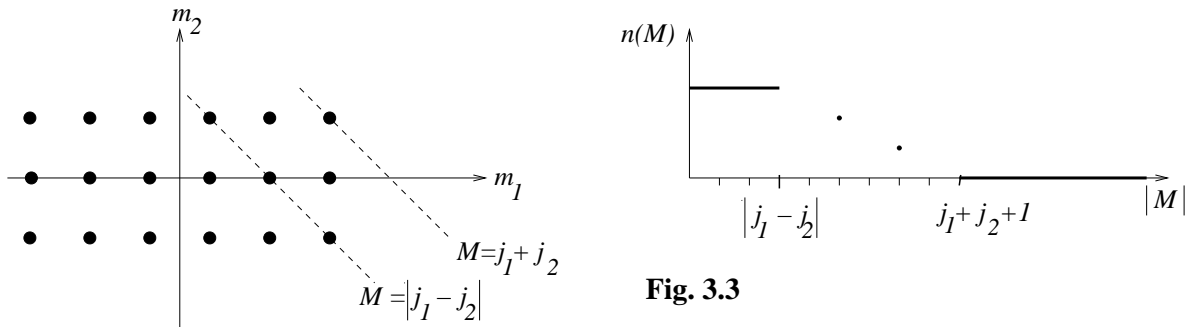


Fig. 3.3

En conclusion, nous venons de démontrer que les $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ vecteurs (4.1) (à j_1 et j_2 fixés) peuvent se réexprimer en fonction des vecteurs $|JM\rangle$ où

$$\begin{aligned} J &= |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 \\ M &= -J, -J + 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Noter qu'en définitive les multiplicités N_J valent 0 ou 1 ; c'est une particularité de $SU(2)$ que des multiplicités supérieures à 1 n'apparaissent pas dans la décomposition du produit de deux représentations "irréductibles", c'est-à-dire ici de spin fixé.

4.2. Coefficients de Clebsch-Gordan, symboles 3-j et 6-j ...

Le changement de base $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \rightarrow |(j_1 j_2) J M\rangle$ s'effectue à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan (C.G.) $\langle(j_1 j_2); J M|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle(j_1 j_2) J M|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle |(j_1 j_2) J M\rangle \quad (4.10a)$$

$$|(j_1 j_2) J M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle(j_1 j_2) J M|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle^* |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle . \quad (4.10b)$$

Leur valeur dépend en fait d'un choix de phase relative entre les vecteurs (4.1) et (4.3) ; la convention habituelle est que pour chaque valeur de J , on choisit

$$\langle j_1 m_1 = j_1; j_2 m_2 = J - j_1 | J M = J \rangle \quad \text{réel.} \quad (4.11)$$

Les autres vecteurs sont alors définis sans ambiguïté par (3.10) et on va montrer que tous les C.G. sont réels. Les C.G. satisfont des relations de récurrence conséquences de (3.10). Appliquant en effet J_{\pm} aux deux membres de (4.10a), on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \\ = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} \langle j_1 m_1 \pm 1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \pm 1 \rangle \\ + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 \pm 1 | (j_1 j_2) J M \pm 1 \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

qui permet à l'aide de la normalisation $\sum_{m_1, m_2} |\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle|^2 = 1$ et de la convention (4.11) de déterminer tous les C.G. Comme annoncé, ils sont clairement tous réels.

Les C.G. du groupe SU(2), qui décrivent un changement de base orthogonale, satisfont des propriétés d'orthogonalité et de complétude

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \\ \text{si } |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \\ \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \langle j_1 m'_1; j_2 m'_2 | (j_1 j_2) J M \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \\ \text{si } |m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2 . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Noter que dans la première ligne, m_2 est fixé par la donnée de m_1 , à M donné ; et que dans la deuxième, M est fixé en termes de m_1 et de m_2 . Chaque relation n'implique donc qu'une seule somme.

Plutôt que les coefficients de Clebsch-Gordan, on peut considérer un ensemble de coefficients équivalents, dits *symboles 3-j*. Ils sont définis par

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \quad (4.14)$$

et ont l'intérêt de jouir de propriétés de symétrie simples :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

est invariant par permutation circulaire des trois colonnes et change par le signe $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ quand deux colonnes sont permutées ou quand on change les signes de m_1 , m_2 et m_3 . Le lecteur trouvera dans la littérature de nombreuses tables et formules explicites.

Contentons nous de donner les valeurs pour les spins les plus bas

$$\begin{aligned} & |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} : & |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \\ & |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \\ & |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, -1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \otimes 1 : & |(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\rangle \\ & |(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle \right) \\ & |(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 0\rangle \right) \\ & |(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, -1\rangle \\ & |(\frac{1}{2}, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle \right) \\ & |(\frac{1}{2}, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sqrt{2} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 0\rangle \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

On note sur le cas $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ la propriété que les vecteurs de spin total $j = 1$ sont symétriques dans l'échange des deux spins, celui de spin 0 antisymétrique. La propriété est générale : dans la composition de deux représentations de spin $j_1 = j_2$, les vecteurs

résultants de spin $j = 2j_1, 2j_1 - 2, \dots$ sont symétriques, ceux de spin $2j_1 - 1, 2j_1 - 3, \dots$ sont antisymétriques.

Cela est apparent sur l'expression (4.14) ci-dessus, compte tenu des propriétés annoncées des symboles 3- j .

Dans le même ordre d'idées, soit le produit complètement antisymétrique de $2j + 1$ copies d'une représentation de spin j . On peut montrer que cette représentation est de spin 0 (exercice suivant). (Cela a une conséquence en physique atomique, dans le remplissage des couches électroniques : une couche complète a un moment orbital total et un spin total nuls donc aussi un moment angulaire total nul.)

Exercice. On considère le produit complètement antisymétrique de $N = 2j + 1$ représentations de spin j . Montrer que cette représentation est engendrée par le vecteur $\epsilon_{m_1 m_2 \dots m_N} |j m_1, j m_2, \dots, j m_N\rangle$, qu'il est invariant par l'action de $SU(2)$ et donc que la représentation construite est celle de spin $J = 0$.

On introduit aussi les *symboles 6- j* qui décrivent les deux recombinaisons possibles de 3 représentations de spins j_1, j_2 et j_3

$$\begin{aligned} |j_1 m_1; j_2 m_2; j_3 m_3\rangle &= \sum \langle (j_1 j_2) J_1 M_1 | j_1 m_1; j_2 m_2 \rangle \langle (J_1 j_3) J M | J_1 M_1; j_3 m_3 \rangle | (j_1 j_2) j_3; J M \rangle \\ &= \sum \langle (j_2 j_3) J_2 M_2 | j_2 m_2; j_3 m_3 \rangle \langle (j_1 J_2) J' M' | j_1 m_1; J_2 M_2 \rangle | j_1 (j_2 j_3); J' M' \rangle \end{aligned}$$

selon que l'on compose d'abord j_1 et j_2 en J_1 puis J_1 et j_3 en J ou d'abord j_2 et j_3 en J_2 puis j_1 et J_2 en J' . La matrice de changement de base est notée

$$\langle j_1(j_2 j_3); J M | (j_1 j_2) j_3; J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \sqrt{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_1 \\ j_3 & J & J_2 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

et les $\begin{Bmatrix} \end{Bmatrix}$ sont les symboles 6- j . On visualise l'opération d'addition des trois spins par un tétraèdre (cf. Fig. 4) dont les arêtes portent j_1, j_2, j_3, J_1, J_2 et J et le symbole est tel que deux spins portés par une paire d'arêtes opposées se trouvent dans la même colonne. Ces symboles sont tabulés dans la littérature.

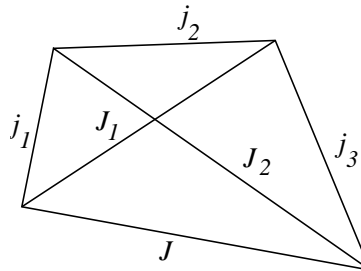


Fig. 3.4

5. Une application physique : l'isospin

Le groupe $SU(2)$ n'intervient pas en Physique qu'en tant que (lié au) groupe de rotation de l'espace euclidien. Illustrons une autre de ses apparitions par la symétrie d'isospin. Il existe dans la nature un certain nombre de particules élémentaires présentant des propriétés

voisines, mais différant par leur charge électrique. C'est le cas du proton et du neutron, de masses $938,28 \text{ MeV}/c^2$ et $939,57 \text{ MeV}/c^2$ respectivement, mais aussi du triplet de mésons pi, π^0 (masse $134,96 \text{ MeV}/c^2$) et π^\pm ($139,57 \text{ MeV}/c^2$), des mésons K etc. Il a été proposé que ceci est la manifestation d'une symétrie brisée par les effets électromagnétiques. En l'absence d'interactions électromagnétiques, le proton et le neutron d'une part, les trois mésons π de l'autre seraient des particules de même nature, de même masse, différant seulement par un nombre quantique "interne", à la façon de deux électrons dotés de spins différents. En fait le groupe régissant cette symétrie est aussi $SU(2)$, mais un $SU(2)$ agissant dans un espace abstrait autre que l'espace usuel. On a donné le nom d'*isospin* ou *spin isotopique* au nombre quantique correspondant. Pour résumer, la proposition est donc qu'il existe un groupe $SU(2)$ de symétrie de l'Hamiltonien des interactions fortes, et que les différentes particules sujettes à ces interactions forment des représentations de $SU(2)$: représentation d'isospin $I = \frac{1}{2}$ pour le nucléon (proton $I_z = +\frac{1}{2}$, neutron $I_z = -\frac{1}{2}$), isospin $I = 1$ pour les pions ($\pi^\pm : I_z = \pm 1$, $\pi^0 : I_z = 0$) etc. L'isospin est donc un "bon nombre quantique", conservé dans ces interactions. Ainsi la réaction $N \rightarrow N + \pi$, (N pour nucléon) importante en physique nucléaire, est compatible avec les règles d'addition des isospins ($\frac{1}{2} \otimes 1$ "contient" $\frac{1}{2}$). Les différentes réactions $N + \pi \rightarrow N + \pi$ autorisées par la conservation de la charge électrique

$$\begin{array}{ll}
 p + \pi^+ \rightarrow p + \pi^+ & I_z = \frac{3}{2} \\
 p + \pi^0 \rightarrow p + \pi^0 & I_z = \frac{1}{2} \\
 \quad \quad \quad \rightarrow n + \pi^+ & \text{"} \\
 p + \pi^- \rightarrow p + \pi^- & I_z = -\frac{1}{2} \\
 \quad \quad \quad \rightarrow n + \pi^0 & \text{"} \\
 n + \pi^- \rightarrow n + \pi^- & I_z = -\frac{3}{2}
 \end{array}$$

conservent aussi l'isospin total I et sa composante I_z mais l'hypothèse d'invariance par $SU(2)$ d'isospin nous apprend d'avantage. Les éléments de matrice de transition des deux réactions dans le canal $I_z = \frac{1}{2}$, par exemple, doivent être reliés par les règles d'addition de l'isospin. En inversant les relations (4.16), on obtient

$$\begin{aligned}
 |p, \pi^-\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |I = \frac{3}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |I = \frac{1}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle \\
 |n, \pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |I = \frac{3}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |I = \frac{1}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle
 \end{aligned}$$

tandis que pour $I_z = 3/2$

$$|p, \pi^+\rangle = |I = \frac{3}{2}, I_z = \frac{3}{2}\rangle .$$

L'invariance d'isospin implique que $\langle I I_z | \mathcal{T} | I' I'_z \rangle = \mathcal{T}_I \delta_{I I'} \delta_{I_z I'_z}$. En calculant alors les éléments de matrice de l'opérateur de transition \mathcal{T} entre ces différents états,

$$\begin{aligned} \langle p\pi^+ | \mathcal{T} | p\pi^+ \rangle &= \mathcal{T}_{3/2} \\ \langle p\pi^- | \mathcal{T} | p\pi^- \rangle &= \frac{1}{3} (\mathcal{T}_{3/2} + 2\mathcal{T}_{1/2}) \\ \langle n\pi^0 | \mathcal{T} | p\pi^- \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} (\mathcal{T}_{3/2} - \mathcal{T}_{1/2}) \end{aligned}$$

on trouve que les amplitudes satisfont une relation

$$\sqrt{2}\langle n, \pi^0 | \mathcal{T} | p, \pi^- \rangle + \langle p, \pi^- | \mathcal{T} | p, \pi^- \rangle = \langle p, \pi^+ | \mathcal{T} | p, \pi^+ \rangle = \mathcal{T}_{3/2}$$

conséquence non triviale de l'invariance d'isospin, qui implique des inégalités triangulaires entre les modules carrés de ces amplitudes donc entre les sections efficaces de ces réactions

$$\begin{aligned} [\sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)} - \sqrt{2\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)}]^2 &\leq \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \leq \\ &\leq [\sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)} + \sqrt{2\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)}]^2 \end{aligned}$$

qui sont bien vérifiées expérimentalement.

Mieux, on constate qu'à une énergie d'environ 180 MeV, les sections efficaces (proportionnelles aux carrés des amplitudes) sont dans les rapports

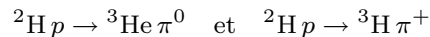
$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = 9 : 2 : 1$$

ce qui indique qu'à cette énergie, la diffusion dans le canal d'isospin 3/2 est prédominante et signale en fait l'existence d'un état intermédiaire, particule très instable ou "résonance", notée Δ , d'isospin 3/2 donc avec quatre états de charge

$$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^- .$$

Cette particule a un spin 3/2 et une masse $M(\Delta) \approx 1230 \text{ MeV}/c^2$.

Dans certains cas on peut parvenir à des prédictions plus précises. C'est le cas par exemple dans l'étude des réactions



impliquant des noyaux de deutérium (${}^2\text{H}$), de tritium (${}^3\text{H}$) et d'hélium ${}^3\text{He}$. A ces noyaux aussi on peut attribuer un isospin, 0 au deutéron qui est formé d'un proton et d'un neutron dans un état antisymétrique de leurs isospins (pour que la fonction d'onde, symétrique d'espace et de spin, soit antisymétrique), $I_z = -\frac{1}{2}$ à ${}^3\text{H}$ et $I_z = \frac{1}{2}$ à ${}^3\text{He}$ qui forment une représentation d'isospin $\frac{1}{2}$. Montrer que le rapport des sections efficaces $\sigma({}^2\text{H}p \rightarrow {}^3\text{He}\pi^0)/\sigma({}^2\text{H}p \rightarrow {}^3\text{H}\pi^+)$ est $\frac{1}{2}$.

6. Représentations de $SO(3,1)$ et $SL(2, \mathbb{C})$

6.1. Algèbre de Lie des groupes de Lorentz et Poincaré

Le groupe de Poincaré ou groupe de Lorentz inhomogène est engendré par les transformations $\Lambda \in \mathcal{L}$ et les translations d'espace-temps ; on peut noter (a, Λ) son élément générique avec une action sur un vecteur x et une loi de composition données par

$$\begin{aligned} (a, \Lambda) & : \quad x \mapsto x' = \Lambda.x + a \\ (a', \Lambda').(a, \Lambda) & = (a' + \Lambda'.a, \Lambda'.\Lambda) ; \end{aligned} \quad (6.1)$$

l'inverse de (a, Λ) est $(-\Lambda^{-1}.a, \Lambda^{-1})$ (le vérifier !).

Une transformation infinitésimale de Poincaré s'écrit $(\alpha^\mu, \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)$. L'algèbre de Lie est engendrée par des opérateurs différentiels agissant sur les coordonnées de telle sorte que $x'^\lambda = x^\lambda + \delta x^\lambda = (I - i\alpha^\mu P_\mu + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu})x^\lambda$, donc

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad P_\mu = i\partial_\mu \quad (6.2)$$

dont on calcule aisément les commutateurs

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, P_\rho] & = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu) \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] & = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \\ [P_\mu, P_\nu] & = 0 \end{aligned}$$

(6.3)

Les générateurs qui commutent avec P_0 (qui est le générateur des translations de temps, donc le hamiltonien) sont les P_μ et les J_{ij} mais pas les J_{0j} : $i[P_0, J_{0j}] = P_j$.

Posons

$$J_{ij} = \epsilon_{ijk} J^k \quad K^i = J_{0i} . \quad (6.4)$$

On a alors

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] & = i\epsilon_{ijk} J^k \\ [J^i, K^j] & = i\epsilon_{ijk} K^k \\ [K^i, K^j] & = -i\epsilon_{ijk} J^k \end{aligned} \quad (6.5)$$

et aussi

$$\begin{aligned} [J^i, P^j] & = i\epsilon_{ijk} P^k & [K^i, P^j] & = iP^0 \delta_{ij} \\ [J^i, P^0] & = 0 & [K^i, P^0] & = iP^i . \end{aligned} \quad (6.6)$$

N.B. Les deux premières des relations (6.4) et la première de (6.6) expriment bien, comme attendu, que $\mathbf{J} = \{J^i\}$, $\mathbf{K} = \{K^i\}$ et $\mathbf{P} = \{P^i\}$ se transforment comme des vecteurs sous l'action des rotations de \mathbb{R}^3 . Formons les combinaisons

$$M^j = \frac{1}{2}(J^j + iK^j) \quad N^j = \frac{1}{2}(J^j - iK^j) \quad (6.7)$$

elles satisfont

$$\begin{aligned} [M^i, M^j] &= i\epsilon_{ijk}M^k \\ [N^i, N^j] &= i\epsilon_{ijk}N^k \\ [M^i, N^j] &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

On voit donc que, si on considère les combinaisons complexes M et N de ses générateurs, l'algèbre de Lie de $\mathcal{L} = O(3, 1)$ est isomorphe à $su(2) \oplus su(2)$. L'introduction du $\pm i$, cependant, fait que les représentations *unitaires* de \mathcal{L} ne découlent pas simplement de celles de $SU(2) \times SU(2)$. Les représentations de dimension finie, non unitaires, sont indexées par une paire (j_1, j_2) , entiers ou demi-entiers.

6.2. Groupes de recouvrement de \mathcal{L}_+^\uparrow et \mathcal{P}_+^\uparrow

De la même façon que de l'étude de $SO(3)$ on a été conduit (pour des raisons qui seront discutées aux chapitres 1 et 2) à celle de $SU(2)$, son "groupe de recouvrement", de même dans le cas du groupe de Lorentz, on est amené à étudier son groupe de recouvrement $SL(2, \mathbb{C})$.

Il existe une manière simple de voir comment $SL(2, \mathbb{C})$ et \mathcal{L}_+^\uparrow sont reliés, qui est une extension quadri-dimensionnelle de la méthode suivie au §1.2. On utilise les matrices σ^μ constituées de $\sigma_0 = I$ et des trois matrices de Pauli familières. Notons qu'on a

$$\text{tr}\sigma_\mu\sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu} \quad \sigma_\mu^2 = I \quad \text{sans sommation sur l'indice } \mu.$$

À tout vecteur réel $x \in \mathbb{R}^4$, associons la matrice hermitique

$$X = x^\mu\sigma_\mu \quad x^\mu = \frac{1}{2}\text{tr}X.\sigma_\mu \quad \det X = x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2.$$

Une matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ agit sur X selon

$$X \mapsto X' = AXA^\dagger$$

qui est bien hermitique et définit donc $x'^\mu = \frac{1}{2}\text{tr}X'.\sigma_\mu$ réel, avec $\det X' = \det X$, donc $x^2 = x'^2$. C'est une transformation linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 qui préserve la norme minkovskienne

x^2 , c'est donc une transformation de Lorentz, et on vérifie qu'elle est dans \mathcal{L}_+^\dagger et que $A \rightarrow \Lambda$ est un homomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ dans \mathcal{L}_+^\dagger .

Cependant, les deux transformations A et $-A \in SL(2, \mathbb{C})$ donnent la même transformation de $\mathcal{L}_+^\dagger : SL(2, \mathbb{C})$ est un recouvrement d'ordre 2 de \mathcal{L}_+^\dagger . Pour le groupe de Poincaré, on raisonne de même, son recouvrement est le produit (“semi-direct”) du groupe des translations par $SL(2, \mathbb{C})$. Si on note $\underline{a} := a^\mu \sigma_\mu$

$$(\underline{a}, A)(\underline{a}', A') = (\underline{a} + A.\underline{a}'.A^\dagger, A.A')$$

(on parle aussi du “groupe $SL(2, \mathbb{C})$ inhomogène”, ou $ISL(2, \mathbb{C})$).

6.3. Représentations irréductibles de dimension finie de $SL(2, \mathbb{C})$

La construction du § 3.3 fournit une représentation explicite de $GL(2, \mathbb{C})$ et donc de $SL(2, \mathbb{C})$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, (3.24) donne l'expression de $\mathcal{D}_{mm'}^j(A)$:

$$\mathcal{D}_{mm'}^j(A) = [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0 \\ n_1+n_2=j+m; \quad n_3+n_4=j-m' \\ n_1+n_3=j+m; \quad n_2+n_4=j-m}} \frac{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \quad (3.24)$$

Noter que $\mathcal{D}^T(A) = \mathcal{D}(A^T)$ (car échanger $m \leftrightarrow m'$ équivaut à $n_2 \leftrightarrow n_3$, donc à $b \leftrightarrow c$) et $(\mathcal{D}(A))^* = \mathcal{D}(A^*)$ (car les coefficients numériques dans (3.24) sont réels) donc $\mathcal{D}^\dagger(A) = \mathcal{D}(A^\dagger)$.

Cette représentation est appelée $(j, 0)$, elle est de dimension $2j + 1$. Il en existe une autre de dimension $2j + 1$, non équivalente, notée $(0, j)$, c'est la représentation “contragrédiente conjuguée” (au sens du chap 2. § 1.3) $\mathcal{D}^j(A^{\dagger -1})$. Le remplacement de A par $A^{\dagger -1}$ s'interprète dans la construction du § 6.2 si au lieu d'associer $X = x^\mu \sigma_\mu$ à x , on lui associe $\tilde{X} = x^0 \sigma_0 - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. On note que $\sigma_2 \cdot (\sigma_i)^T \cdot \sigma_2 = -\sigma_i$ pour $i = 1, 2, 3$ donc $\tilde{X} = \sigma_2 \cdot X^T \cdot \sigma_2$. Pour la transformation $A : X \mapsto X' = A.X.A^\dagger$, on a

$$\tilde{X}' = \sigma_2 \cdot (X')^T \cdot \sigma_2 = \sigma_2 (A.X.A^\dagger)^T \cdot \sigma_2 = (\sigma_2 A^T \sigma_2)^\dagger \tilde{X} (\sigma_2 \cdot A^T \sigma_2) .$$

Toute matrice A de $SL(2, \mathbb{C})$ peut elle-même s'écrire $A = a^\mu \sigma_\mu$, avec $(a^\mu) \in \mathbb{C}^4$, et comme $\det A = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2 = 1$ (le “S” de $SL(2, \mathbb{C})$), on vérifie aisément que $A^{-1} = a^0 \sigma_0 - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, donc $\sigma_2 A^T \sigma_2 = A^{-1}$. Finalement

$$\begin{aligned} X' &= AXA^\dagger \\ \tilde{X}' &= (A^{-1})^\dagger \tilde{X} A^{-1} . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Remarque. Les deux représentations $(j, 0)$ et $(0, j)$ sont inéquivalentes sur $SL(2, \mathbb{C})$, mais équivalentes sur $SU(2)$. En effet dans $SU(2)$, $A = U = (U^\dagger)^{-1}$.

Finalement, on démontre que toute représentation de dimension finie de $SL(2, \mathbb{C})$ est complètement réductible et peut donc s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles. La représentation irréductible de dimension finie la plus générale de $SL(2, \mathbb{C})$ est notée (j_1, j_2) , avec j_1 et j_2 entiers ou demi-entiers ≥ 0 ; elle est définie par

$$(j_1, j_2) = (j_1, 0) \otimes (0, j_2) .$$

Toutes ces représentations peuvent être obtenues à partir des représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$. En effet $(j_1, 0)$ et $(0, j_2)$ se construisent par produit tensoriel symétrisé des représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$, comme on l'a fait pour $SU(2)$. Seules les représentations (j_1, j_2) ayant j_1 et j_2 simultanément entiers ou demi-entiers fournissent de vraies représentations de \mathcal{L}_\dagger^+ . Les autres sont des représentations à un signe près.

Exercice : montrer que la représentation $(0, j)$ est équivalente à la complexe conjuguée de la représentation $(j, 0)$. (On pourra le montrer d'abord pour $j = \frac{1}{2}$ en comparant $(A^{-1})^T$ et A^* , puis pour les représentations de j quelconque obtenues par produit tensoriel d'ordre j à partir de $j = \frac{1}{2}$.)

• *Représentations spinorielles*

Revenons aux deux représentations spinorielles $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$. Ce sont des représentations de dimension 2 (spineurs à deux composantes). Il est traditionnel de noter les indices des composantes avec des indices "pointés" ou non pointés, pour la représentation $(0, \frac{1}{2})$ et la $(\frac{1}{2}, 0)$, respectivement. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}, 0) \quad \xi = (\xi^\alpha) &\mapsto \xi' = A \cdot \xi = \begin{pmatrix} a\xi^1 + b\xi^2 \\ c\xi^1 + d\xi^2 \end{pmatrix} \\ (0, \frac{1}{2}) \quad \xi = (\xi^{\dot{\alpha}}) &\mapsto \xi' = A^* \cdot \xi = \begin{pmatrix} a^*\xi^{\dot{1}} + b^*\xi^{\dot{2}} \\ c^*\xi^{\dot{1}} + d^*\xi^{\dot{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.10}$$

On note que la forme alternée $(\xi, \eta) = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \xi^T(i\sigma_2)\eta$ est invariante dans $(\frac{1}{2}, 0)$ (et aussi dans $(0, \frac{1}{2})$), ce qui découle à nouveau de

$$A^T(i\sigma_2)A = i\sigma_2 \iff (\sigma_2 A^T \sigma_2) \cdot A = A^{-1} \cdot A = I .$$

On peut donc utiliser cette forme pour abaisser les indices α (ou $\dot{\alpha}$). Ainsi

$$\begin{aligned} \text{dans } \left(\frac{1}{2}, 0\right) : (\xi, \eta) &= \xi_\alpha \eta^\alpha & \xi_2 &= \xi^1 & \xi_1 &= -\xi^2 \\ \text{dans } \left(0, \frac{1}{2}\right) : (\xi, \eta) &= \xi_{\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} & \xi_{\dot{2}} &= \xi^{\dot{1}} & \xi_{\dot{1}} &= -\xi^{\dot{2}} \end{aligned}$$

• *Représentation* (j_1, j_2)

Les $\{\xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2j_1}} \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dots \dot{\beta}_{2j_2}\}$ symétriques en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2j_1}$ et en $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dots, \dot{\beta}_{2j_2}$, forment la représentation irréductible (j_1, j_2) . (On ne peut pas diminuer le rang en prenant des traces, le seul tenseur invariant étant la forme précédente *alternée*). La dimension de cette représentation est $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Les représentations les plus usuelles rencontrées en théorie des champs sont $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Cette dernière correspond aux 4-vecteurs, comme on l’a vu plus haut :

$$x \mapsto X = x^0 \sigma_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \xrightarrow{A \in SL(2, \mathbb{C})} X' = A.X.A^\dagger$$

c’est-à-dire

$$X = X^{\alpha\dot{\beta}} \rightarrow (X')^{\alpha\dot{\beta}} = A^{\alpha\alpha'} (A^{\dot{\beta}\dot{\beta}'})^* X^{\alpha'\dot{\beta}'},$$

ce qui montre que X se transforme bien selon la représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice. Montrer que les représentations $(1, 0)$ et $(0, 1)$, de dimension 3, décrivent des tenseurs $F^{\mu\nu}$ de rang 2 self-duaux ou anti-self-duaux, c’est-à-dire satisfaisant

$$F^{\mu\nu} = \pm i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

6.4. *Représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré. États à une particule.*

Selon le théorème de Wigner qui sera discuté au chapitre 2, pour décrire l’action des transformations propres orthochrones de Lorentz ou de Poincaré sur les états d’une théorie quantique, nous avons besoin de représentations *unitaires* de ces groupes, ou plutôt de leurs “recouvrements universels” $SL(2, \mathbb{C})$ et $ISL(2, \mathbb{C})$. Comme on le verra plus bas (chap. 2), les représentations unitaires (de classe L^2) du groupe non compact $SL(2, \mathbb{C})$ sont nécessairement de dimension infinie (à l’exception de la représentation triviale $(0, 0)$, qui décrit un état invariant par rotation et sous l’effet des boosts, c’est-à-dire le vide !).

Revenons aux relations de commutation de l’algèbre de Lie (6.3). On cherche un ensemble maximal d’opérateurs commutants. Les quatre P_μ commutent. Soit (p_μ) une valeur propre pour un état propre des P_μ , état “à une particule”, et on suppose que l’état propre noté $|p\rangle$ n’est indexé que par p^μ et par des indices discrets : c’est en effet le sens de “état à une particule”, au contraire d’un état à deux particules qui dépendrait d’une impulsion relative, variable continue

$$P_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle. \tag{6.11}$$

On considère aussi le tenseur de Pauli-Lubanski introduit au chapitre 1

$$W^\lambda = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} J_{\mu\nu} P_\rho \tag{6.12}$$

et on vérifie (exercice !) que (6.3) implique

$$[W_\mu, P_\nu] = 0 \quad (6.13a)$$

$$[W^\mu, W^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\rho P_\sigma \quad (6.13b)$$

$$[J_{\mu\nu}, W_\lambda] = i(g_{\nu\lambda} W_\mu - g_{\mu\lambda} W_\nu) . \quad (6.13c)$$

La dernière relation signifie que W est un 4-vecteur de Lorentz. On note aussi que $W.P = 0$ en raison de l'antisymétrie du tenseur ϵ . On montre enfin (le vérifier !) que $P^2 = P_\mu P^\mu$ et $W^2 = W_\mu W^\mu$ commutent avec tous les générateurs P et J : ce sont les opérateurs de Casimir de l'algèbre. Selon le lemme de Schur, (cf plus bas, chap. 2, § 1.4) ils sont dans toute représentation irréductible proportionnels à l'identité, autrement dit, leurs valeurs propres peuvent être utilisées pour indexer les représentations irréductibles.

En physique, on n'a en principe que deux types de représentations à considérer⁴ : les représentations où $P^2 > 0$ et celles où $P^2 = 0$, $W^2 = 0$.

• *Représentations* $P^2 = p^2 = M^2 > 0$

Les représentations où $P^2 = p^2 = M^2 > 0$, $p^0 > 0$ et $W^2 < 0$ décrivent des particules de masse M . Les vecteurs de la représentation peuvent être choisis états propres des P_μ de valeur propre p_μ et d'une composante de W . On peut écrire

$$\frac{W_\mu}{M} = \sum_{i=1}^3 S_i n_\mu^{(i)} \quad , \quad \frac{W^2}{M^2} = -\mathbf{S}^2 = -(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

où $n^{(i)}$ sont trois quadrivecteurs orthogonaux à p et entre eux, donc de genre espace, normés à $(n^{(i)})^2 = -1$. Les S_i satisfont

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k ,$$

comme conséquence de la relation (6.13b). Nous sommes donc de retour sur le terrain familier des représentations de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$. Les représentations unitaires sont telles que \mathbf{S}^2 a pour valeur propre $s(s+1)$, où s est entier ou demi-entier. Les vecteurs $n^{(i)}$ forment avec p un repère orthonormé (ou "tétrade"), noté $[p]$. On suppose cette tétrade $\{p, n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}$ orientée, $\det[p] = 1$. Les vecteurs de la représentation sont alors indexés par $[p]$ et par la valeur propre $s_3 \in \{-s, -s+1, \dots, +s\}$ de S_3 .

Ces états forment une représentation irréductible unitaire (cf plus bas) de $\text{ISL}(2, \mathbb{C})$. Cette représentation est de **dimension infinie**, puisque p peut prendre toute valeur sur la couche de masse $p^2 = M^2$, $p^0 > 0$. L'action des générateurs infinitésimaux sur l'état $|[p], s_3\rangle$ est donnée par

$$\begin{aligned} P_\mu |[p], s_3\rangle &= p_\mu |[p], s_3\rangle \\ S_3 |[p], s_3\rangle &= s_3 |[p], s_3\rangle \\ (S_1 \pm iS_2) |[p], s_3\rangle &= \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3+1)} |[p], s_3\rangle \\ \frac{W^2}{M^2} |[p], s_3\rangle &= -s(s+1) |[p], s_3\rangle \end{aligned} \quad (6.14)$$

et celle des transformations finies de $\text{ISL}(2, \mathbb{C})$ par

$$U(a, A) |[p], s_3\rangle = U(a, I) U(0, A) |[p], s_3\rangle = e^{i(A.p).a} |[A.p], s'_3\rangle \mathcal{D}_{s'_3 s_3}^s ([Ap]^{-1} A [p]) . \quad (6.15)$$

Par un petit abus de notation, $[p]$ désigne ici un élément de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ correspondant à la transformation de Lorentz qui envoie $[\overset{0}{p}] = \{(M, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ sur $[p] = \{p, n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}$. Noter que $[Ap]^{-1} A [p]$ envoie $[\overset{0}{p}]$ sur lui-même : c'est un élément du *stabilisateur* (les physiciens disent "petit groupe") de $[\overset{0}{p}]$, qui est ici $\text{SU}(2)$. $\mathcal{D}^s([Ap]^{-1} A [p])$ est donc une matrice unitaire.

Si on change de tétrade, $[p] \rightarrow [p]', |[p], s_3\rangle = [p]', s'_3\rangle \mathcal{D}_{s'_3 s_3}^s ([p]^{-1} [p])$.

⁴ ce qui ne veut pas dire qu'il n'existe pas d'autres représentations irréductibles ; par exemple les représentations "non physiques" où $P^2 = -M^2 < 0$

Cette propriété d'unitarité fait que le produit scalaire

$$\langle [p'], s'_3 | [p], s_3 \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (6.16)$$

où $p^0 := \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$, est invariant par $SL(2, \mathbb{C})$. La normalisation globale de (6.16) est bien sûr affaire de convention. (Rappelons aussi le calcul au chapitre 1 de la mesure invariante de Lorentz sur la couche de masse).

Une dernière remarque : ces états $|[p], s_3\rangle$ sont *non normalisables*. On peut leur préférer des superpositions linéaires

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3p}{2p^0 (2\pi)^3} \sum_{s_3} \varphi_{s_3}([p]) |[p], s_3\rangle$$

avec maintenant

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \frac{d^3p}{2p^0 (2\pi)^3} \sum_{s_3} \varphi_{s_3}^*([p]) \psi_{s_3}([p]) ,$$

qui sont normalisables si les fonctions d'onde φ et ψ sont de carré sommable.

• *Représentations où $P^2 = 0$, $W^2 = 0$*

De telles représentations décrivent des particules de masse nulle. Dans l'espace propre de P_μ , $p^2 = 0$, on a $W.P = 0$.

Soient $n_1(p), n_2(p)$ deux quadrivecteurs de genre espace orthogonaux à p , tels que $\det(\hat{t}, n^{(1)}, n^{(2)}, p) > 0$ (ici \hat{t} est le vecteur unitaire porté par l'axe du temps futur.) Comme situation de référence, on prendra $\overset{0}{p} = (1, 0, 0, 1)$, $n^{(1)}(\overset{0}{p}) = (0, 1, 0, 0)$, $n^{(2)}(\overset{0}{p}) = (0, 0, 1, 0)$ complétés par $\hat{t} = (1, 0, 0, 0)$. On décompose W sur cette base selon

$$W_\mu = \lambda(p)p_\mu + W_1 n_\mu^{(1)} + W_2 n_\mu^{(2)} \quad (6.17)$$

avec des relations de commutation

$$[W_1, \lambda] = -iW_2 \quad [W_2, \lambda] = iW_1 \quad [W_1, W_2] = 0 . \quad (6.18)$$

L'opérateur $\lambda(p)$ est appelé "hélicité".

Soit à nouveau $[p]$ la transformation de $SL(2, \mathbb{C})$ qui envoie $(\overset{0}{p}, n^{(1)}(\overset{0}{p}), n^{(2)}(\overset{0}{p}))$ sur $(p, n^{(1)}, n^{(2)})$. Les états à une particule $|p_\mu, \lambda(p)\rangle$ que nous considérons sont états propres de P_μ et de $\lambda(p)$

$$\begin{aligned} P_\mu |[p], \lambda\rangle &= p_\mu |[p], \lambda\rangle \\ \lambda(p) |[p], \lambda\rangle &= \lambda |[p], \lambda\rangle . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Seules les représentations où $W^2 = 0$, c'est-à-dire où W_1 et W_2 sont représentés par 0, sont réalisées dans la nature.

Cherchons quel est le stabilisateur de $\overset{0}{p}$, c'est-à-dire, une fois transcrit en termes de matrices 2×2 , de $\overset{0}{p} \sigma_0 + \overset{0}{p} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce stabilisateur est constitué des matrices unimodulaires A telles que $A \overset{0}{p} A^\dagger = \overset{0}{p}$, soit (petit calcul simple)

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & ze^{-i\phi/2} \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} .$$

Le stabilisateur est donc maintenant $ISO(2)$, le groupe de rotations et translations à deux dimensions ("I" pour inhomogène : translation de z et rotation de ϕ). La rotation est représentée par $e^{i\lambda\phi}$, donc λ doit être entier ou demi-entier. Pour une transformation finie

$$U(a, A) |[p], \lambda\rangle = e^{i(A.p).a} |[A.p], \lambda\rangle \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{|\lambda|} ([A.p]^{-1} A[p]) . \quad (6.20)$$

Noter que selon (6.19) ou (6.20), l'hélicité n'est pas affectée par le groupe de Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow . C'est l'introduction (éventuelle) de la parité qui oblige à considérer simultanément les hélicités $\pm\lambda$, un fait que nous avons déjà rencontré dans l'étude des spineurs de Dirac de masse nulle. Pour un photon,

$\alpha_+|p, +1\rangle + \alpha_-|p, -1\rangle$ décrit un état de polarisation “elliptique” ; $\alpha_+ = 0$ ou $\alpha_- = 0$, un état de polarisation circulaire ; $|\alpha_+| = |\alpha_-| = 1/\sqrt{2}$ un état de polarisation linéaire.

Il faudrait maintenant compléter cette discussion des représentations du groupe orthochrone propre de Lorentz (ou de Poincaré) par l’étude des représentations des transformations discrètes de renversement du temps et de la parité. . .

Bibliographie

La référence historique pour le physicien est le livre d’E. Wigner [Wi].

Pour une discussion détaillée du groupe des rotations, ainsi que de nombreuses formules et tables, se reporter à : J.-M. Normand, *A Lie group : Rotations in Quantum Mechanics*, North-Holland.

Pour une étude approfondie des représentations physiques des groupes de Lorentz et Poincaré

P. Moussa et R. Stora, *Angular analysis of elementary particle reactions*, dans *Analysis of scattering and decay*, édité par M. Nikolic, Gordon and Breach 1968.

Problème

1. On considère deux représentations de spin $\frac{1}{2}$ du groupe SU(2) et leur produit direct (ou tensoriel). On note $\mathbf{J}^{(1)}$ et $\mathbf{J}^{(2)}$ les générateurs infinitésimaux agissant dans chaque représentation, et $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}$ ceux agissant dans leur produit direct, cf. (4.2), (4.2)’.

- Que peut-on dire des opérateurs $\mathbf{J}^{(1)2}$, $\mathbf{J}^{(2)2}$ et \mathbf{J}^2 et de leurs valeurs propres ?
- Montrer qu’on peut exprimer $\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)}$ en termes de ces opérateurs et en déduire que les opérateurs

$$\frac{1}{4}(3\mathbf{I} + 4\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}(\mathbf{I} - 4\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)})$$

sont des projecteurs sur des espaces qu’on précisera.

- En prenant en compte les symétries d’échange des états, que pouvez-vous dire de l’opérateur

$$\frac{1}{2}\mathbf{I} + 2\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)} ?$$