

Chapitre 4

Symétries globales en physique des particules.

La physique des particules va nous offrir un terrain de choix pour illustrer les différentes manifestations de symétries en physique. Nous ne nous occuperons dans ce chapitre et le suivant que de “symétries internes”, excluant les symétries d’espace-temps.

Nous allons examiner tour à tour différents types de symétries et leurs réalisations, comme symétrie exacte ou brisée explicitement, spontanément ou par des anomalies quantiques. Nous consacrerons pas mal d’attention au groupe de saveur $SU(3)$.

1. Symétries globales exactes ou brisées. Brisure spontanée

1.1. Panorama. Symétries exactes ou brisées

Les transformations dont on s’occupera dans ce chapitre sont des *transformations globales*. Un groupe G agit sur les degrés de liberté de chaque champ $\phi(x)$ de la même façon en tous les points x de l’espace-temps. Par exemple, G agit sur ϕ par l’intermédiaire d’une représentation, et à chaque élément g du groupe correspond une matrice ou opérateur $D(g)$, indépendamment du point x

$$\phi(x) \mapsto D(g)\phi(x) . \tag{1.1}$$

Selon le théorème de Wigner, on suppose que cette transformation est aussi réalisée sur les états de l’espace de Hilbert de la théorie par un opérateur unitaire $U(g)$; en tant qu’opérateur, $\phi(x) \mapsto U(g)\phi(x)U^\dagger(x)$.

Cette transformation peut être une *symétrie* de la dynamique, auquel cas $U(g)$ commute avec l’hamiltonien du système, ou dans le langage lagrangien, elle laisse le lagrangien invariant et donne donc naissance à des courants de Noether j_i^μ de divergence nulle (cf chap.0), à des charges conservées Q_i , $i = 1, \dots, \dim G$. Ces charges agissent sur les champs comme générateurs infinitésimaux, classiquement au sens du crochet de Poisson, $\{Q_i, \phi(x)\}\delta\alpha^i = \delta\phi(x)$, et si tout se passe bien dans la théorie quantique, comme opérateurs dans l’espace de Hilbert dotés de relations de commutation avec les champs $[Q_i, \phi(x)]\delta\alpha^i = -i\hbar\delta\phi(x)$ et entre eux $[Q_i, Q_j] = iC_{ij}^k Q_k$. Une question importante va en effet être de savoir si une symétrie apparente au niveau classique, disons sur le lagrangien, est bien réalisée dans la théorie quantique.

• Un exemple de *symétrie exacte* est fourni par l'invariance de groupe $U(1)$, associé à la conservation de la charge électrique. Un champ portant une charge électrique q (fois $|e|$) est un champ complexe, il se transforme sous l'action du groupe $U(1)$ selon la représentation irréductible indexée par l'entier q

$$\phi(x) \mapsto e^{iq\alpha} \phi(x) ; \quad \phi^\dagger(x) \mapsto e^{-iq\alpha} \phi^\dagger(x),$$

et il y a invariance (du lagrangien) si tous les champs se transforment ainsi, avec un courant de Noether $j^\mu(x)$, somme des contributions des différents champs chargés, de divergence nulle, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, et la charge associée $Q = \sum q_i$ est conservée. La théorie quantique est l'électrodynamique quantique, et on y démontre que la symétrie classique par le groupe $U(1)$, la conservation du courant (et l'invariance de jauge) sont bien préservées par la quantification et en particulier par la renormalisation, par exemple que toutes les charges électriques se renormalisent de la même façon, cf cours de Théorie Quantique des Champs.

D'autres invariances et lois de conservation de nature similaire sont celles associées aux charges baryoniques ou leptoniques, conservées (jusqu'à plus ample informé ...).

• Une symétrie peut aussi être *brisée* explicitement. Par exemple le lagrangien contient des termes non invariants sous l'action de G . Dans ce cas, les courants de Noether ne sont pas conservés, mais leur divergence s'écrit

$$\partial_\mu j_i^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \alpha^i}, \quad (1.2)$$

cf. Chapitre 0, § 4.2. Nous verrons plus bas avec $SU(3)$ un exemple de symétrie brisée (ou approchée).

Certains types de brisures, dites "douces" (soft), sont telles que la symétrie est restaurée à courte distance ou haute énergie. C'est par exemple le cas de l'invariance d'échelle (par dilatations d'espace), brisée par la présence de toute échelle de masse dans la théorie, mais restaurée –de façon un peu subtile– à courte distance, cf. l'étude du groupe de renormalisation dans les cours de théorie des champs.

• Un mécanisme plus subtil de brisure de symétrie est celui de *brisure spontanée de symétrie*. On appelle ainsi les situations où l'état fondamental du système ne possède pas une symétrie apparente sur le lagrangien. L'exemple le plus simple présentant ce phénomène est celui d'un système classique à un degré de liberté décrit par le potentiel "à double puits" de la figure 1(a). Bien que le potentiel exhibe une symétrie \mathbb{Z}_2 manifeste par $x \rightarrow -x$, le système choisit un état fondamental dans l'un des deux minima du potentiel, ce qui brise la symétrie. Ce mécanisme joue un rôle fondamental en physique, avec des manifestations dans des situations très variées, de la matière condensée –ferromagnétisme, superfluidité, supraconductivité ... – à la physique des particules –symétrie chirale, phénomène de Higgs– et à la cosmologie.

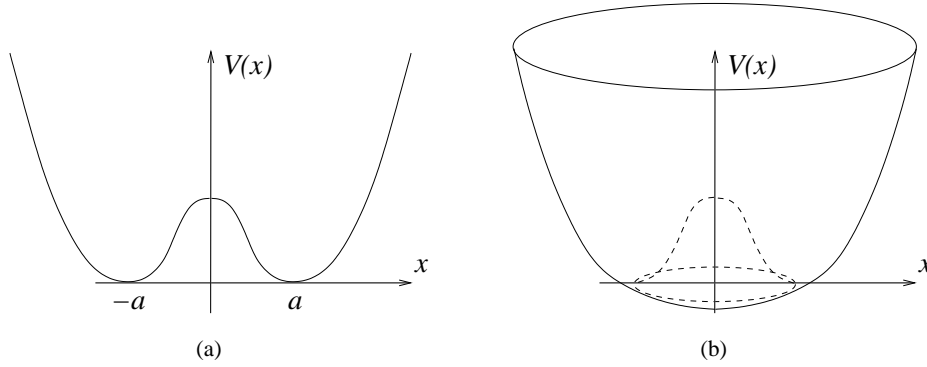


Fig. 1: Potentiels (a) à “double puits” ; (b) en “chapeau mexicain”

▷ *Exemple. Brisure spontanée du modèle $O(n)$*

Le lagrangien du “modèle $O(n)$ ” bosonique (minkovskien, ici), pour un champ $\phi = \{\phi^i\}$ réel à n composantes,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2)^2 \quad (1.3)$$

est invariant sous l’effet des rotations de $O(n)$. Le courant de Noether $j_\mu^a = \partial_\mu\phi^i(T^a)_{ij}\phi^j$ (avec T^a antisymétrique réelle) a une divergence nulle, ce qui implique la conservation d’une “charge” etc. Le minimum du potentiel correspond à l’état fondamental, alias le vide, de la théorie. Si le paramètre m^2 est choisi négatif, le minimum du potentiel $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2)^2$ n’est plus en $\phi^2 = 0$ mais en une certaine valeur v^2 de ϕ^2 telle que $-m^2 = \lambda v^2$, cf Fig. 1(b). Le champ ϕ “choisit” spontanément une direction \hat{n} ($\hat{n}^2 = 1$) dans l’espace interne, dans laquelle sa valeur moyenne dans le vide (“vev” dans le jargon français) est non nulle

$$\langle 0|\phi|0\rangle = v\hat{n} . \quad (1.4)$$

Cette “vev” brise le groupe d’invariance $G = O(n)$ de départ en son sous-groupe H qui laisse invariant le vecteur $\langle 0|\phi|0\rangle = v\hat{n}$, soit un groupe isomorphe à $O(n-1)$. Que cette valeur moyenne dans le vide d’un champ non invariant par le groupe soit non nulle, $\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$, est le signal que le vide n’est pas invariant : on est bien dans un cas de *symétrie brisée spontanément*. C’est le mécanisme à l’œuvre dans un ferromagnétique à basse température, par exemple, où l’aimantation non nulle signale la brisure spontanée de la symétrie d’isotropie spatiale.

Exercice (cf cours de F. David) : Posant $\phi = (v + \sigma)\hat{n} + \pi$, où π désigne les $n-1$ composantes du champ ϕ orthogonales à $\langle \phi \rangle = v\hat{n}$, calculer les termes de $V(\sigma, \pi)$ linéaires et quadratiques dans les champs σ et π ; vérifier que le terme linéaire en σ s’annule

(minimum du potentiel), que σ a un terme de masse non nul, mais que les π sont de masse nulle, ce sont les *bosons de Nambu–Goldstone* de la symétrie brisée spontanément. Il s’agit là d’un phénomène général : toute symétrie continue brisée spontanément s’accompagne de l’apparition d’excitations de masse nulle en nombre égal à celui des générateurs de la symétrie brisée (*théorème de Goldstone*). Plus précisément quand un groupe G se brise spontanément en un sous-groupe H (le groupe de symétrie résiduelle, groupe d’invariance du fondamental), il apparaît un nombre $d(G) - d(H)$ de bosons de Goldstone de masse nulle. Dans l’exemple précédent, $G = O(n)$, $H = O(n - 1)$, $d(G) - d(H) = n - 1$.

Donnons une démonstration simple de ce théorème dans le cas d’une théorie lagrangienne des champs. On écrit $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)$ avec des notations très génériques, ϕ désigne un ensemble de champs $\{\phi_i\}$ sur lequel agit un groupe de transformations G . Le potentiel V est supposé invariant sous l’action de transformations infinitésimales $\delta^a \phi_i$, $a = 1, \dots, \dim G$. Par exemple pour des transformations linéaires : $\delta^a \phi_i = T_{ij}^a \phi_j$. On a donc

$$\frac{\partial V(\phi(x))}{\partial \phi_i(x)} \delta^a \phi_i(x) = 0 .$$

Dérivons cette équation par rapport à $\phi_j(x)$ (en omettant l’argument x partout)

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \frac{\partial \delta^a \phi_i}{\partial \phi_j} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta^a \phi_i = 0$$

et évaluons la en $\phi(x) = v$, un minimum (constant, indépendant de x) du potentiel : le premier terme s’annule, le second nous dit que

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=v} \delta^a v_i = 0 , \tag{1.5}$$

en notant (un peu abusivement) $\delta^a v_i = \delta^a \phi_i|_{\phi=v}$. Par ailleurs on quantifie la théorie au voisinage de ce minimum v (“vide” de la théorie) en écrivant $\phi(x) = v + \varphi(x)$ et en développant

$$V(\phi) = V(v) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=v} \varphi_i \varphi_j + \dots$$

et les masses des champs φ se lisent alors sur la forme quadratique. Or (1.5) nous apprend que la “matrice de masse” $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=v}$ a autant de “modes zéros” (vecteurs propres de valeur propre nulle) qu’il y a de variations indépendantes $\delta^a v_i \neq 0$. Si H est le groupe d’invariance de v , $\delta^a v_i \neq 0$ pour les générateurs de G qui ne sont pas générateurs de H , et il y a donc bien $\dim G - \dim H$ modes de masse nulle.

1.2. Brisure de la symétrie chirale

Considérons un lagrangien impliquant des fermions de masse nulle,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + g(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) , \tag{1.6}$$

où $\psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N}$ est un vecteur à N composantes qui sont des champs de 4-spineurs. Noter l’absence de terme de masse $\bar{\psi} \psi$. Ce lagrangien est invariant sous l’action des deux types de transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} \delta_A \psi(x) &= \delta A \psi(x) \\ \delta_B \psi(x) &= \delta B \gamma_5 \psi(x) , \end{aligned} \tag{1.7}$$

où les matrices A et B sont antihermitiennes infinitésimales, de taille $N \times N$; elles agissent sur les indices de “saveur” α mais pas sur les indices spinoriels, et commutent donc avec les matrices γ . On rappelle que γ_5 est hermitienne et anticommute avec les γ_μ . Vérifier que $\delta_A \bar{\psi} = -\bar{\psi} \delta A$, $\delta_B \bar{\psi} = \bar{\psi} \delta B \gamma_5$. Les courants de Noether conservés sont respectivement

$$J_\mu^a = \bar{\psi} T^a \gamma_\mu \psi \quad J_\mu^{a(5)} = \bar{\psi} T^a \gamma_5 \gamma_\mu \psi , \quad (1.8)$$

avec T^a des générateurs infinitésimaux du groupe unitaire $U(N)$. Les transformations de la première ligne sont dites “vectorielles”, celle de la seconde ligne, qui impliquent γ_5 , sont dites “axiales”. On peut aussi redire cela en termes de transformations indépendantes de $\psi_L := \frac{1}{2}(I - \gamma_5)\psi$ et de $\psi_R := \frac{1}{2}(I + \gamma_5)\psi$; on se rappelle que $(\gamma_5)^2 = I$, et que $\frac{1}{2}(I \pm \gamma_5)$ sont donc des projecteurs ; on a donc $\bar{\psi}_L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(I + \gamma_5)$, etc, et

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R + (\bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R)(\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R)$$

qui est clairement invariant par les transformations unitaires finies $\psi_L \rightarrow U_1 \psi_L$, $\psi_R \rightarrow U_2 \psi_R$, avec $U_1, U_2 \in U(N)$. Le groupe de *symétrie chirale* est donc $U(N) \times U(N)$.

Si maintenant nous introduisons un terme de masse $\delta \mathcal{L} = -m \bar{\psi} \psi$ (qui “couple” les composantes ψ_L et ψ_R : $\delta \mathcal{L} = -m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$), la symétrie “vectorielle” est préservée, mais l’axiale ne l’est plus et donne lieu à une divergence

$$\partial^\mu J_\mu^{a(5)}(x) \propto m \bar{\psi} T^a \gamma_5 \psi . \quad (1.9)$$

Le groupe de symétrie résiduelle est $U(N)$, sous-groupe “diagonal” de $U(N) \times U(N)$ (diagonal en ce sens que l’on prend $U_1 = U_2$ dans les transformations de $\psi_{L,R}$.)

La symétrie axiale peut aussi être brisée spontanément. Partons d’un lagrangien somme de termes du type (1.6) avec $N = 2$ et (1.3) pour $n = 4$, avec un terme couplant les fermions à quatre champs de bosons, nommés traditionnellement σ et $\boldsymbol{\pi}$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} + g(\sigma + i \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5))\psi + \frac{1}{2}((\partial \boldsymbol{\pi})^2 + (\partial \sigma)^2) - \frac{1}{2}m^2(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 , \quad (1.10)$$

dans laquelle les matrices de Pauli ont été désignées exceptionnellement par $\boldsymbol{\tau}$ pour ne pas les confondre avec le champ σ . Le groupe de symétrie est $U(2) \times U(2)$, avec les champs ψ_L , ψ_R et $\sigma + i \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}$ se transformant respectivement par les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $SU(2) \times SU(2)$ (cf exercice A). Si $m^2 < 0$, le champ $\phi = (\sigma, \boldsymbol{\pi})$ acquiert une vev, qu’on peut orienter dans la direction σ en ayant introduit au préalable un petit

terme de brisure explicite $\delta\mathcal{L} = c\sigma$, l’analogie d’un petit champ magnétique, qu’on fait tendre vers zéro par la suite. La vev est donnée comme plus haut par $v = -m^2/\lambda$, et en réécrivant le champ $\sigma(x) = \sigma'(x) + v$, où le champ σ' a maintenant une valeur moyenne nulle dans le vide, on voit que les fermions ont acquis un terme de masse $m_\psi = -gv$, tandis que les π sont de masse nulle. Ce lagrangien, le modèle σ de Gell-Mann–Lévy, a été proposé comme modèle expliquant la brisure de l’invariance chirale et la faible masse des mésons π , quasi-bosons de Nambu–Goldstone (“quasi” parce que la symétrie chirale n’est qu’approchée avant d’être brisée spontanément). Nous en retrouverons des éléments dans le modèle standard.

1.3. Brisures quantiques. Anomalies

Un autre mode de brisure de symétrie, de nature purement quantique, se manifeste dans les *anomalies* des théories quantiques de champs. Une symétrie, apparente au niveau classique du lagrangien, est brisée par l’effet des “corrections quantiques”. C’est par exemple ce qui se produit avec certaines symétries chirales, du type qu’on vient d’étudier : un courant axial de divergence classiquement nulle peut acquérir par un “effet à une boucle” une divergence $\partial_\mu J_5^\mu \neq 0$. Dans le cas où le courant “anormal” est le courant de Noether d’une symétrie classique interne, cette symétrie est brisée par l’anomalie quantique, ce qui peut donner lieu à des effets physiques intéressants (cf. discussion de la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, par exemple dans [IZ] chap 11). Mais dans une théorie comme une théorie de jauge où la conservation du courant axial est cruciale pour assurer la cohérence –renormalisabilité, unitarité–, l’anomalie constitue un danger potentiel qu’il faut contrôler. C’est ce qui se produit dans le Modèle Standard, et nous y reviendrons au chap. 5. Un autre exemple est fourni par l’invariance par dilatation d’une théorie de masse nulle, cf l’étude du groupe de renormalisation dans le cours de F. David.

2. La symétrie de saveur SU(3) et le modèle des quarks.

Une symétrie approchée de grande importance est celle de SU(3) de saveur, à laquelle nous consacrons le reste de ce chapitre.

2.1. Pourquoi le groupe SU(3) ?

On a vu (Chapitre 00) que si on néglige leurs interactions faibles et électromagnétiques, les *hadrons*, c’est-à-dire les particules soumises aux interactions fortes telles le proton et le neutron, les mésons π etc, sont classifiés en “multiplets” d’un groupe SU(2) d’isospin. Ou dit autrement, l’hamiltonien (ou lagrangien) des interactions fortes est invariant sous l’action de ce groupe SU(2) et en conséquence, le groupe SU(2) est représenté dans l’espace des états hadroniques par des représentations unitaires. Proton et neutron appartiennent à une représentation de dimension 2, d’isospin $\frac{1}{2}$, les trois pions π^\pm, π^0 forment une représentation de dimension 3, d’isospin 1, etc. La charge électrique Q de chacune des

particules que nous venons de citer est reliée à la valeur propre de la troisième composante I_z de l'isospin par la relation

$$Q = \frac{1}{2}\mathcal{B} + I_z \quad [\text{pour SU}(2)] \quad (2.1)$$

où apparaît un nouveau nombre quantique \mathcal{B} , la *charge baryonique*, supposée conservée (additivement) dans toutes les interactions (jusqu'à nouvel ordre). \mathcal{B} vaut 0 pour les mésons π , et 1 pour les "baryons" que sont le proton et le neutron.

Cette relation entre Q et I_z doit être amendée pour une nouvelle famille de mésons ($K^\pm, K^0, \overline{K}^0 \dots$) ou de baryons $\Lambda^0, \Sigma, \Xi, \dots$ découverts à la fin des années 50. On leur attribue un nouveau nombre quantique, l'*étrangeté* S . Cette étrangereté est également supposée conservée (additivement) dans les interactions fortes. Ainsi, si S vaut -1 pour le Λ^0 et $+1$ pour le K^+ et le K^0 , le processus $p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ conserve l'étrangeté, tandis que la désintégration observée $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ viole cette loi de conservation, car elle procède par les interactions faibles. La relation (2.1) doit être modifiée en la *relation de Gell-Mann–Nishima*

$$Q = \frac{1}{2}\mathcal{B} + \frac{1}{2}S + I_z = \frac{1}{2}Y + I_z, \quad (2.2)$$

où on a introduit l'*hypercharge* Y , qui, à ce stade, vaut $Y = \mathcal{B} + S$.

Ces lois de conservation et différentes propriétés des mésons et baryons découverts alors, en particulier leur organisation en "octets", ont conduit au début des années 60 Gell-Mann et Ne'eman à postuler l'existence d'un groupe $SU(3)$ de symétrie approchée des interactions fortes. Les nombres quantiques conservés et simultanément mesurables I_z et Y sont interprétés comme les valeurs propres de deux charges commutantes, c'est-à-dire de deux éléments d'une algèbre de Cartan de rang 2, et c'est l'algèbre de $SU(3)$ qui est le candidat naturel, puisque possédant une représentation de dimension 8 (cf exercice C du chap. 3). Dans la représentation 3 de définition de $SU(3)$, on construit une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(3)$, faite de 8 matrices hermitiennes λ_a qui jouent le rôle des matrices de Pauli σ_i pour $\mathfrak{su}(2)$. Ces matrices sont normalisées par

$$\text{tr}\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}. \quad (2.3)$$

λ_1 et λ_2 , λ_4 et λ_5 , λ_6 et λ_7 ont les mêmes éléments de matrice que σ_1 et σ_2 en position $\begin{pmatrix} \cdot & * & \cdot \\ * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & * & \cdot \end{pmatrix}$ respectivement, où les points signifient des zéros.

Les deux générateurs de l'algèbre de Cartan sont

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Les charges I_z et Y sont alors les représentants dans la représentation considérée de $\frac{1}{2}\lambda_3$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$. Voir l'exercice B pour le changement de coordonnées de (λ_1, λ_2) (indices de Dynkin d'une représentation, à ne pas confondre avec les matrices précédentes !) en (I_z, Y) .

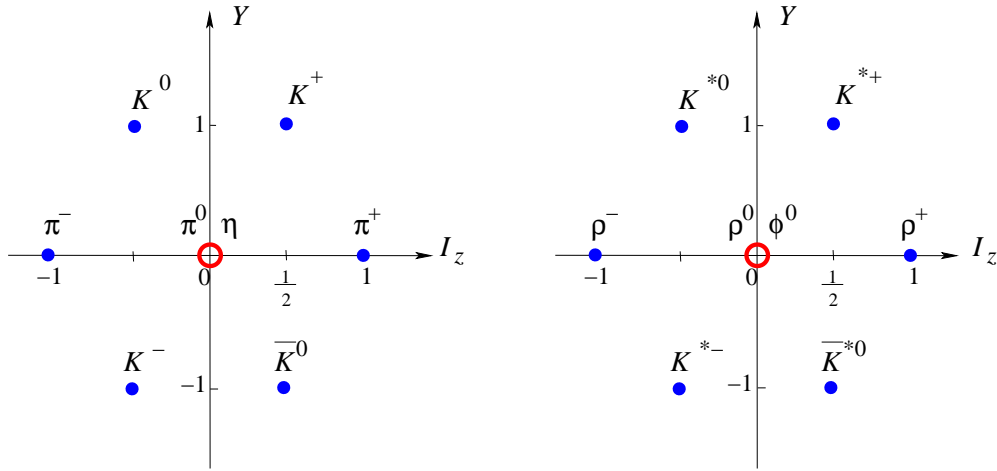


Fig. 2: Les octets de mésons pseudoscalaires ($J^P = 0^-$) et vecteurs ($J^P = 1^-$).

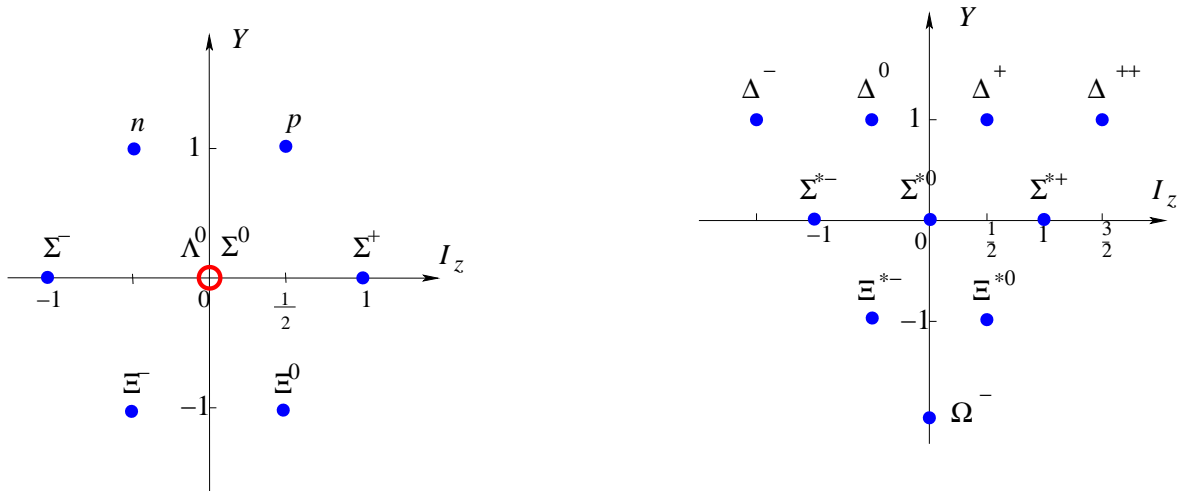


Fig. 3: L'octet ($J^P = \frac{1}{2}^+$) et le décuplet ($J^P = \frac{3}{2}^+$) de baryons.

Les matrices λ_a satisfont des relations de commutation

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \tag{2.5}$$

avec les constantes de structure (réelles, complètement antisymétriques) f_{abc} de l'algèbre $su(3)$. Il est utile de considérer aussi les anticommutateurs

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c . \tag{2.6}$$

Grâce à (2.3), (2.5) et (2.6) peuvent se récrire comme $\text{tr}([\lambda_a, \lambda_b]\lambda_c) = 4if_{abc}$, $\text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\}\lambda_c) = 4d_{abc}$. On trouve ces nombres f et d tabulés dans la littérature ... mais on les recalcule aisément ! Attention, au contraire de (2.5), la relation (2.6) et les constantes d_{abc} (réelles, complètement symétriques) sont propres à la représentation de dimension 3.

Les hadrons s'organisent en représentations de $SU(3)$. Chaque multiplet regroupe des particules de même spin J et parité P . C'est ainsi que deux octets de mésons de J^P égal à 0^- ou 1^- et qu'un octet et un "décuplet" de baryons de charge baryonique $\mathcal{B} = 1$ sont aisément identifiés. Contrairement à la symétrie d'isospin, la symétrie $SU(3)$ ¹ n'est pas une symétrie exacte des interactions fortes. Les règles de conservation ou de sélection auxquelles elle donne lieu ne sont qu'approchées.

À ce point, on peut s'interroger sur l'absence d'autres représentations de trialité nulle, telle la représentation 27, ou de celles de trialité non nulle, comme la 3 et la $\bar{3}$. On y reviendra au § 2.5.

2.2. Conséquences de la symétrie $SU(3)$

◦ Les octets de champs

Concentrons nous sur les deux octets de baryons $\mathcal{N} = (N, \Sigma, \Xi, \Lambda)$ et de mésons pseudoscalaires $\mathcal{P} = (\pi, K, \eta)$. Au vu de ce que l'on a dit au chap. 3, § 4.2, à savoir que la représentation adjointe est faite de tenseurs de rang (1, 1) et de trace nulle, il est naturel de regrouper les 8 champs associés à ces particules sous forme d'une matrice de trace nulle.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

et

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Pour s'assurer que les assignements de champs/particules aux différents éléments de matrice sont corrects, il suffit de vérifier leurs nombres quantiques de charge et d'hypercharge. Les générateurs de charge Q et d'hypercharge Y

$$Q = I_z + \frac{1}{2}Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

¹ dite "de saveur", selon la terminologie moderne, mais appelée "symétrie unitaire" ou "voie octuple" à l'époque de Gell-Mann et Ne'eman...

agissent dans la représentation adjointe par commutation et on a bien

$$[Q, \Phi] = \begin{pmatrix} 0 & \pi_+ & K_+ \\ -\pi_- & 0 & 0 \\ -K_- & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [Y, \Phi] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_+ \\ 0 & 0 & K_0 \\ -K_- & -\overline{K}_0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice : (i) sans aucun calcul, que doit valoir $[I_z, \Phi]$? Vérifier.

(ii) Calculer $\text{tr}\Phi^2$; en quoi le résultat justifie-t-il le choix de normalisation dans (2.7) ? Voir aussi le Problème 2.c.

◦ *Produits tensoriels dans SU(3) et couplages invariants*

On rappelle que pour SU(3), avec les notations du chapitre 3,

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27 . \quad (2.10)$$

Montrons que cela a des implications immédiates sur le nombre de couplages invariants entre champs.

• On se propose d'écrire un lagrangien invariant par SU(3) impliquant les champs d'octets Φ et Ψ précédents. Quel est le nombre de "couplages de Yukawa", c'est-à-dire de la forme $\overline{\Psi}\Phi\Psi$, invariants par SU(3) ? Autrement dit, quel est le nombre d'invariants dans $8 \otimes 8 \otimes 8$? Selon un raisonnement fait au chap 2, (cf § 3.2), ce nombre est égal au nombre de fois où la représentation 8 apparaît dans $8 \otimes 8$, soit selon (2.10), 2. Il y a donc deux couplages de Yukawa invariants indépendants. Si on écrit les deux octets de champs Ψ et Φ sous forme de matrices 3×3 de trace nulle comme au sous-paragraphe précédent, $\Psi = \{\psi_j^i\}$ et $\Phi = \{\phi_k^i\}$, ces deux couplages s'écrivent

$$\text{tr}\overline{\Psi}\Psi\Phi = \overline{\psi}_j^i \psi_i^k \phi_k^j \quad \text{et} \quad \text{tr}\overline{\Psi}\Phi\Psi = \overline{\psi}_j^i \phi_i^k \psi_k^j \quad (2.11)$$

(cette écriture omet les indices des spineurs de Dirac, l'éventuelle matrice γ_5 etc). On préfère souvent récrire ces deux termes en termes de leurs somme et différence, donc de $\text{tr}\overline{\Psi}[\Phi, \Psi]$ et $\text{tr}\overline{\Psi}\{\Phi, \Psi\}$, appelés terme f et terme d, par référence à (2.5) et (2.6).

• Autre question de même nature : quel est *a priori* le nombre d'amplitudes invariantes par SU(3) dans la diffusion de deux particules des octets \mathcal{N} et \mathcal{P} : $\mathcal{N}_i + \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{N}_f + \mathcal{P}_f$? (On ne prend en compte que l'invariance par SU(3), en ne considérant pas d'éventuelles symétries discrètes.) Il s'agit donc de chercher le nombre d'invariants dans la 4ème puissance tensorielle de la représentation 8. Ou encore de façon équivalente, le nombre de fois où l'on trouve la même représentation dans les deux produits $8 \otimes 8$ et $8 \otimes 8$. Si m_i sont

les multiplicités apparaissant dans $8 \otimes 8$, soit $m_1 = 1, m_8 = 2$, etc, cf (2.10), ce nombre est $\sum_i m_i^2 = 8$. Il y a donc huit amplitudes invariantes. Autrement dit on peut écrire *a priori* l'amplitude de diffusion sous la forme

$$\langle \mathcal{N}_f \mathcal{P}_f | \mathcal{T} | \mathcal{N}_i \mathcal{P}_i \rangle = \sum_{r=1}^8 A_r(s, t) \langle (I, I_z, Y)_{(\mathcal{N}_f)}, (I, I_z, Y)_{(\mathcal{P}_f)} | r, (I, I_z, Y)_{(r)} \rangle \langle r, (I, I_z, Y)_{(r)} | (I, I_z, Y)_{(\mathcal{N}_i)}, (I, I_z, Y)_{(\mathcal{P}_i)} \rangle$$

(avec s et t les invariants relativistes usuels $s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 - p_3)^2$), toute la dépendance dans la nature des particules membres des octets, repérées par les valeurs de leur isospin et hypercharge, étant contenue dans des coefficients de Clebsch-Gordan de $SU(3)$.

- Soient $\Phi_i, i = 1, 2, 3, 4$ quatre champs d'octets distincts. Combien de couplages de degré 4 invariants par $SU(3)$ peut-on former avec ces quatre champs ? D'une part, le raisonnement précédent nous donne huit couplages ; de l'autre, il est clair que les termes $\text{tr}(\Phi_{P_1} \Phi_{P_2} \Phi_{P_3} \Phi_{P_4})$ et $\text{tr}(\Phi_{P_1} \Phi_{P_2}) \text{tr}(\Phi_{P_3} \Phi_{P_4})$ sont invariants pour toutes les permutations P . Un décompte rapide donne 9 termes différents, en contradiction avec l'argument précédent. Quelle est l'origine de cette contradiction ? Pour en savoir plus, rendez-vous au problème 1 en fin de chapitre...

2.3. Brisures électromagnétiques de la symétrie $SU(3)$

La symétrie $SU(3)$ est brisée, on l'a dit, par les interactions fortes. Bien sûr, tout comme la symétrie $SU(2)$ d'isospin, elle l'est aussi par les interactions électromagnétiques et les interactions faibles. Nous n'examinerons pas ici l'effet de ces dernières mais décrivons deux conséquences des brisures fortes et électromagnétiques.

Le lagrangien d'interaction d'une particule de charge q avec le champ électromagnétique A s'écrit

$$\mathcal{L}_{em} = -qj^\mu A_\mu \tag{2.12}$$

où j est le courant électrique. Le champ A est invariant par les transformations de $SU(3)$, mais comment j se transforme-t-il ? On connaît la transformation de sa charge $Q = \int d^3x j_0(\mathbf{x}, t)$, puisque selon (2.2), Q est une combinaison linéaire de deux générateurs Y et I_z . Q se transforme donc selon la représentation adjointe (8, alias (1,1) en termes d'indices de Dynkin). Et il est naturel de supposer que le courant j se transforme de la même manière. C'est d'ailleurs ce que l'on trouve quand on construit le courant j^μ comme courant de Noether de la symétrie $U(1)$ (exercice, le vérifier).

◦ *Moments magnétiques*

Les facteurs de forme électromagnétiques de l'octet de baryons sont définis par

$$\langle B | j_\mu(x) | B' \rangle = e^{ikx} \bar{u} (F_e^{BB'}(k^2) \gamma_\mu + F_m^{BB'}(k^2) \sigma_{\mu\nu} k^\nu) u' \quad (2.13)$$

où \bar{u} et u' sont des spineurs de Dirac décrivant respectivement les baryons B et B' ; k est la quadri-impulsion transférée de B' à B . F_e est le facteur de forme électrique, si $B = B'$, $F_e(0) = q_B$, charge électrique de B , tandis que F_m est le facteur de forme magnétique et $F_m^{BB}(0)$ donne le moment magnétique du baryon B . On veut calculer ces facteurs au premier ordre électromagnétique et à l'ordre zéro dans les autres termes brisant éventuellement la symétrie.

D'un point de vue groupiste, l'élément de matrice $\langle B | j_\mu(x) | B' \rangle$ relève du théorème de Wigner-Eckart : il y a deux façons de projeter 8×8 sur 8 (cf l'équ. (4.2) du chap 3), (ou encore, il y a deux façons de construire un invariant avec $8 \otimes 8 \otimes 8$). Il y a donc deux "éléments de matrice réduits", donc deux amplitudes indépendantes pour chacun des deux facteurs de forme, complétées par des coefficients de Clebsch-Gordan de $SU(3)$. Par un argument similaire à (2.11), on vérifie que l'on peut écrire

$$F_{e,m}^{BB'}(k^2) = F_{e,m}^{(1)}(k^2) \text{tr} \bar{B} Q B' + F_{e,m}^{(2)}(k^2) \text{tr} \bar{B} B' Q$$

où Q est la matrice de (2.9)

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

et $\text{tr} \bar{B} Q B'$ signifie le coefficient de $\bar{B} B'$ dans la trace matricielle $\text{tr} \bar{\Psi} Q \Psi$, et de même pour $\text{tr} \bar{B} B' Q$. Par exemple, le moment magnétique du neutron $\mu(n)$ est proportionnel au terme magnétique en $\bar{n}n$, soit $-\frac{1}{3}(F_m^{(1)} + F_m^{(2)})$. Les quatre fonctions $F_{e,m}^{(1,2)}$ sont inconnues (leur calcul ferait appel à la théorie des interactions fortes) mais on peut les éliminer et trouver des relations

$$\begin{aligned} \mu(n) = \mu(\Xi^0) = 2\mu(\Lambda) = -2\mu(\Sigma^0) & \quad \mu(\Sigma^+) = \mu(p) \\ \mu(\Xi^-) = \mu(\Sigma^-) = -(\mu(p) + \mu(n)) & \quad \mu(\Sigma^0 \rightarrow \Lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu(n), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où la dernière quantité est le *moment magnétique de transition* $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda$. Ces relations sont en accord qualitatif avec les valeurs expérimentales.

Les moments magnétiques des “hypérons” (baryons de masse plus élevée que les nucléons) sont mesurés par leur précession de spin dans un champ magnétique ou dans des transitions dans des atomes “exotiques” dans le noyau desquels un nucléon a été remplacé par un hypéron. Le moment magnétique de transition $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda$ est déterminé à partir de la section efficace $\Lambda \rightarrow \Sigma^0$ dans le champ coulombien d’un noyau lourd. On lit dans les tables

$$\begin{aligned}
 \mu(p) &= 2.792847351 \pm 0.000000028 \mu_N & \mu(n) &= -1.9130427 \pm 0.00000005 \mu_N \\
 \mu(\Lambda) &= -0.613 \pm 0.004 \mu_N & |\mu(\Sigma^0 \rightarrow \Lambda)| &= 1.61 \pm 0.08 \mu_N \\
 \mu(\Sigma^+) &= 2.458 \pm 0.010 \mu_N & \mu(\Sigma^-) &= -1.160 \pm 0.025 \mu_N \\
 \mu(\Xi^0) &= -1.250 \pm 0.014 \mu_N & \mu(\Xi^-) &= -0.6507 \pm 0.0025 \mu_N
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où μ_N est le magnéton nucléaire, $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.152 \cdot 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$.

◦ *Écarts de masses électromagnétiques*

Des hypothèses et méthodes analogues permettent de trouver des relations entre les écarts de masses électromagnétiques, entre particules de même hypercharge et isospin I , mais de charge différente, voir Problème 3.

2.4. *Écarts de masses “forts”. Formule de masse de Gell-Mann–Okubo.*

Au vu des disparités entre masses au sein d’un multiplet, le terme de masse dans le lagrangien (ou l’hamiltonien) ne peut être un invariant de $SU(3)$. Gell-Mann et Okubo ont fait l’hypothèse que le terme non invariant ΔM se transforme selon la représentation 8, plus précisément, puisqu’il doit avoir un isospin et une hypercharge nuls, qu’il se transforme comme la composante η ou Λ des octets. On est donc conduit à considérer les éléments de matrice $\langle H | \Delta M | H \rangle$ pour les hadrons H d’un multiplet, et à faire appel une nouvelle fois au théorème de Wigner–Eckart. Selon les règles de décomposition de produit tensoriel données au chap. 3, la représentation 8 apparaît au plus 2 fois dans le produit d’une représentation irréductible de $SU(3)$ par sa conjuguée, (le vérifier, en se rappelant que $8 = 3 \otimes \bar{3} \ominus 1$) ; il y a au plus deux amplitudes indépendantes qui décrivent les écarts de masse au sein du multiplet, ce qui conduit à des relations entre ces écarts de masse.

Un argument élégant permet d’éviter le calcul des coefficients de Clebsch–Gordan et de trouver ces deux amplitudes dans toute représentation. Les huit générateurs infinitésimaux se transformant eux-mêmes selon la représentation 8 (représentation adjointe), on les dispose selon une matrice 3×3 comme précédemment

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Y + I_z & \sqrt{2}I_+ & * \\ \sqrt{2}I_- & \frac{1}{2}Y - I_z & * \\ * & * & -Y \end{pmatrix}$$

où les * désignent des générateurs changeant l’étrangeté qui ne nous concernent pas. (Noter que $G_{11} = I_z + \frac{1}{2}Y = Q$, la charge électrique, est invariante par l’action (par commutation avec G) des générateurs $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ qui préservent la charge électrique.) On cherche deux combinaisons des générateurs I_z

et Y se transformant comme l'élément $(3, 3)$ de cette matrice. L'une est bien sûr Y lui-même, l'autre est fournie par l'élément $(3, 3)$ du cofacteur de G , $\text{cof}G_{33} = \frac{1}{4}Y^2 - I_z^2 - 2I_+I_- = \frac{1}{4}Y^2 - \vec{I}^2$.

On obtient ainsi, pour toute représentation (tout multiplet), une formule de masse

$$M = m_1 + m_2Y + m_3(I(I + 1) - \frac{1}{4}Y^2) \tag{2.16}$$

ce qui laisse trois constantes indéterminées (dépendant du multiplet). Par exemple pour l'octet de baryons, on a quatre masses expérimentales, ce qui conduit à la règle de somme

$$\frac{M_\Xi + M_N}{2} = \frac{3M_\Lambda + M_\Sigma}{4} \tag{2.17}$$

bien vérifiée expérimentalement : on trouve 1128,5 MeV/c² au membre de gauche, 1136 MeV/c² à celui de droite². Pour le décuplet, vérifier que cette même formule donne des écarts de masse égaux entre les quatre particules Δ , Σ^* , Ξ^* et Ω^- . Cela a permis de prédire avec justesse l'existence et la masse de cette dernière particule, ce qui a été considéré comme un des grands succès de SU(3). Pour l'octet de mésons pseudoscalaires, la formule de masse implique (empiriquement) les carrés de masses

$$m_K^2 = \frac{3m_\eta^2 + m_\pi^2}{4} .$$

2.5. Les quarks

Les représentations 3 et $\bar{3}$ sont à ce stade les grandes absentes de la scène : parmi les particules observées, aucun "triplet" ne semble se manifester. Le modèle de Gell-Mann-Zweig fait l'hypothèse qu'un triplet (représentation 3) de quarks (u, d, s) ("up", "down" et "strange") et sa représentation conjuguée $\bar{3}$ d'antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) rassemblent les constituants élémentaires de tous les hadrons (connus à l'époque). Leurs charges et hypercharges sont respectivement

<i>Quarks</i>	:	u	d	s	\bar{u}	\bar{d}	\bar{s}
<i>Isospin I_z</i>	:	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
<i>Charge baryonique \mathcal{B}</i>	:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>Étrangeté S</i>	:	0	0	-1	0	0	1
<i>Hypercharge Y</i>	:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
<i>Charge électrique Q</i>	:	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Table 1. Nombres quantiques des quarks u, d, s

² Les masses observées de ces hadrons sont $M_N \approx 939$ MeV/c², $M_\Lambda = 1116$ MeV/c², $M_\Sigma \approx 1195$ MeV/c², $M_\Xi \approx 1318$ MeV/c² ; celles des mésons pseudoscalaires $m_\pi \approx 137$ MeV/c², $m_K \approx 496$ MeV/c² et $m_\eta = 548$ MeV/c². Pour le décuplet, $M_\Delta \approx 1232$ MeV/c², $M_{\Sigma^*} \approx 1385$ MeV/c², $M_{\Xi^*} \approx 1530$ MeV/c², $M_\Omega \approx 1672$ MeV/c².

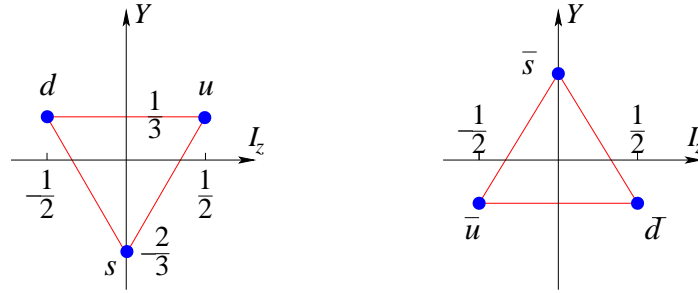


Fig. 4: Les triplets de quarks et antiquarks.

On se rappelle (chapitre 3 §4) que toute représentation irréductible de $SU(3)$ s'obtient dans la décomposition de produits itérés des représentations 3 et $\bar{3}$; en particulier, $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ et $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$. Les mésons et baryons observés dans la nature et répertoriés comme ci-dessus selon des représentations 8 et 10 de $SU(3)$ sont des états liés de paires $q\bar{q}$ ou qqq , respectivement. Plus généralement, on suppose que seules les représentations de trialité nulle peuvent donner lieu à des particules observables. Ainsi,

$$p = uud, \quad n = udd, \quad \Omega^- = sss, \quad \Delta^{++} = uuu, \quad \dots, \quad \Delta^- = ddd,$$

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^0 = \frac{(u\bar{u} - d\bar{d})}{\sqrt{2}}, \quad \pi^- = d\bar{u}, \quad \eta_8 = \frac{(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})}{\sqrt{6}}, \quad K^+ = u\bar{s}, \quad K^0 = d\bar{s} \quad \text{etc.}$$

Le modèle des quarks interprète le singulet qui apparaît dans le produit $3 \times \bar{3}$ comme un état lié $\eta_1 = \frac{(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})}{\sqrt{3}}$. Les particules physiquement observées η (masse 548 MeV) et η' (958 MeV) résultent d'un "mélange" (c'est-à-dire une combinaison linéaire) de ces η_1 et η_8 dû aux interactions brisant $SU(3)$. Exercice : compléter sur la figure 3 les interprétations des baryons comme états liés des quarks en s'aidant des charges et nombres quantiques.

2.6. Courants hadroniques et interactions faibles

Les interactions faibles sont phénoménologiquement bien décrites par un lagrangien effectif de la forme "courant-courant" (Fermi)

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^\rho(x) J_\rho^\dagger(x) \quad (2.18)$$

où G est la constante de Fermi qui vaut (dans les unités où $\hbar = c = 1$)

$$G = (1,026 \pm 0,001) \times 10^{-5} m_p^{-2} . \quad (2.19)$$

(Mais ce lagrangien d'interaction a le défaut majeur de ne pas être renormalisable, un défaut que vient corriger la théorie de jauge du Modèle Standard. À basse énergie, $\mathcal{L}_{\text{Fermi}}$

fournit toutefois une bonne description de la physique, d'où le qualificatif d'“effectif”.) Le courant J_ρ est la somme d'une contribution leptonique et d'une hadronique

$$J_\rho(x) = l_\rho(x) + h_\rho(x) \quad (2.20)$$

Le courant leptonique

$$l_\rho(x) = \bar{\psi}_e(x)\gamma_\rho(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu(x)\gamma_\rho(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_\mu} \quad [+ \bar{\psi}_\tau(x)\gamma_\rho(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_\tau}]$$

est la somme des contributions des familles de leptons, e , μ (et τ que nous omettrons en première analyse). Le courant hadronique si on se borne aux deux premières familles s'écrit

$$h_\rho = \cos\theta_C h_\rho^{(\Delta S=0)} + \sin\theta_C h_\rho^{(\Delta S=1)} \quad (2.21)$$

comme combinaison de courants conservant ou changeant l'étrangeté, pondérée par l'angle de Cabibbo $\theta_C \approx 0,25$. (Ce “mélange” s'étend à l'introduction de la troisième famille, cf chapitre suivant.) Enfin chacun des courants $h_\rho^{(\Delta S=0)}$, $h_\rho^{(\Delta S=1)}$ est de la forme “ $V - A$ ”, selon l'idée de Feynman et Gell-Mann, c'est-à-dire est une combinaison de courants vectoriel et axial,

$$\begin{aligned} h_\rho^{(\Delta S=0)} &= (V_\rho^1 - iV_\rho^2) - (A_\rho^1 - iA_\rho^2) \\ h_\rho^{(\Delta S=1)} &= (V_\rho^4 - iV_\rho^5) - (A_\rho^4 - iA_\rho^5) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les courants vectoriels $V_\rho^{1,2,3}$ sont les courants de Noether d'isospin, les autres composantes de V_ρ ceux de la symétrie $SU(3)$. On montre que leur conservation (exacte pour l'isospin, approchée pour les autres) implique que dans l'élément de matrice $G\langle p|h_\rho^{(\Delta S=0)}|n\rangle = \bar{u}_p\gamma_\rho(G_V(q^2) - G_A(q^2)\gamma_5)u_n$ mesuré dans la désintégration beta à transfert d'impulsion quasi-nul, le facteur de forme vectoriel $G_V(0) = G$. Au contraire, les courants axiaux ne sont pas conservés et $G_A(0)$ est “renormalisé” (c'est-à-dire habillé) par les interactions fortes, $G_A/G_V \approx 1.22$. Le courant électromagnétique n'est autre que la combinaison $j_\rho = V_\rho^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}V_\rho^8$. Dans le modèle des quarks, ces courants hadroniques sont de la forme

$$V_\rho^a(x) = \bar{q}(x)\frac{\lambda^a}{2}\gamma_\rho q(x) \quad A_\rho^a(x) = \bar{q}(x)\frac{\lambda^a}{2}\gamma_\rho\gamma_5 q(x) . \quad (2.23)$$

Nous les retrouverons dans le Modèle Standard.

3. De SU(3) à SU(4) et aux six saveurs

3.1. Nouvelles saveurs

La découverte au milieu des années 70 de particules d'un nouveau type a relancé le jeu : ces particules portent un autre nombre quantique, le "charme" (postulé antérieurement par Glashow, Iliopoulos et Maiani et par Kobayashi et Maskawa pour des raisons différentes). Cela amène à ajouter une 3ème direction à l'espace des symétries internes, en sus de l'isospin et de l'étrangeté (ou de l'hypercharge). C'est un groupe SU(4), encore plus sévèrement brisé que SU(3), qui est à l'œuvre. Les particules s'organisent en représentations de ce SU(4), etc. Une quatrième saveur, le charme, est donc ajoutée, et un quatrième quark c charmé constitue avec u, d, s la représentation 4 de SU(4), tout aussi inobservable que la 3 de SU(3), selon le même principe.

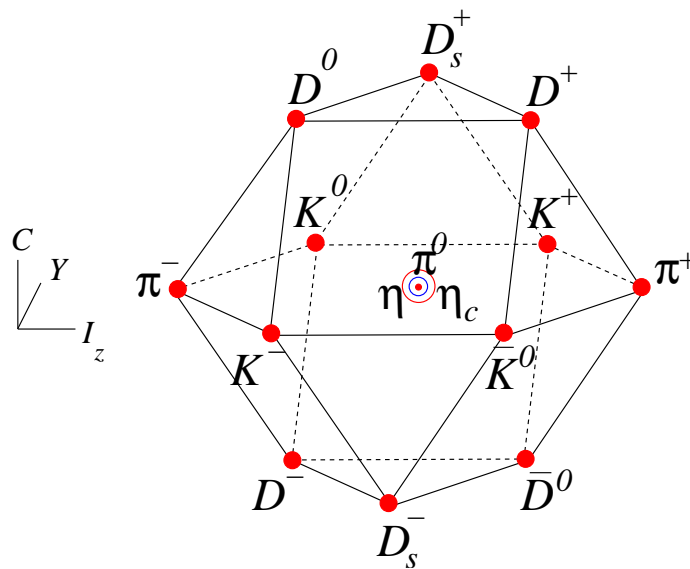


Fig. 5: Les mésons de spin $J^P = 0^-$ de la représentation 15 de SU(4).

Au jour d'aujourd'hui, on pense qu'il existe en tout six saveurs, les deux dernières étant la "beauté" (*beauty* ou *bottomness*) et la vérité (...?) (*truth* ou *topness*), donc deux quarks supplémentaires b et t . Des mésons B , états liés $u\bar{b}$, $d\bar{b}$ etc, sont observés quotidiennement par exemple dans l'expérience LHC_b au LHC, tandis que les preuves expérimentales de l'existence du quark t sont plus indirectes. Le groupe hypothétique de saveur SU(6) est

très fortement brisé, comme l'attestent les masses des 6 quarks³

$$m_u \approx 1.5 - 4 \text{ MeV}, \quad m_d \approx 4 - 8 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 80 - 130 \text{ MeV}$$

$$m_c \approx 1.15 - 1.35 \text{ GeV}, \quad m_b \approx 4 - 5 \text{ GeV}, \quad m_t \approx 175 \text{ GeV}$$

ce qui réduit son utilité. On peut toutefois récrire (2.2) sous la forme

$$Q = \frac{1}{2}Y + I_z \quad Y = \mathcal{B} + S + C + B + T$$

avec les différents nombres quantiques contribuant additivement à l'hypercharge. La convention est que la saveur d'un quark est nulle ou du même signe que sa charge électrique Q , voir Table 1. Ainsi $C(c) = 1$, $B(b) = -1$ etc. La Table 1 est donc à compléter comme suit

<i>Quarks</i>	:	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>t</i>
<i>Isospin I_z</i>	:	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
<i>Charge baryonique \mathcal{B}</i>	:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
<i>Étrangeté S</i>	:	0	0	-1	0	0	0
<i>Charme C</i>	:	0	0	0	1	0	0
<i>Beauté B</i>	:	0	0	0	0	-1	0
<i>Vérité T</i>	:	0	0	0	0	0	1
<i>Hypercharge Y</i>	:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
<i>Charge électrique Q</i>	:	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Table 2. Nombres quantiques des quarks u, d, s, c, b, t

3.2. Introduction de la couleur

Des problèmes variés avec le modèle des quarks originel ont conduit à l'hypothèse (Han-Nambu) que chaque saveur est dotée d'une multiplicité 3, qui reflète l'existence d'un groupe $SU(3)$ **différent** du précédent, le *groupe de couleur* $SU(3)_c$.

Les considérations menant à cette hypothèse de triplement sont d'une part l'étude de la particule Δ^{++} , de spin 3/2, composée de 3 quarks u . Ce système de 3 quarks a un spin 3/2 et un moment angulaire orbital $L = 0$, qui lui donnent une fonction d'onde symétrique, en contradiction avec le caractère fermionique des quarks. Le degré de liberté supplémentaire de couleur permet une antisymétrisation supplémentaire (conduisant à un état singulet de couleur), et lève donc ce problème. D'autre part, le processus de désintégration $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ est proportionnel à la somme $\sum Q^2 I_z$ pour l'ensemble des constituents fermioniques élémentaires. Le proton, avec sa charge $Q = 1$ et $I_z = \frac{1}{2}$, conduit à une valeur en accord

³ Il faudrait bien sûr préciser le sens de la masse d'une particule qui reste invisible, ce qu'on sait faire indirectement et avec plusieurs définitions possibles, d'où les plages de valeurs données.

avec l'expérience. Les quarks (u, d, s) avec les valeurs $Q = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ et $I_z = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ conduisant à un résultat trois fois trop petit, que la multiplicité de couleur vient corriger.

Selon l'hypothèse de confinement des quarks, seuls les états de la représentation 1 de $SU(3)_c$ sont observables. Les autres états, dits "colorés", sont liés de façon permanente au sein des hadrons. Cela s'applique aux quarks, mais aussi aux *gluons*, des particules vectorielles (spin 1) se transformant selon la représentation 8 de $SU(3)_c$, dont l'existence est requise par la construction de la théorie de jauge des interactions fortes, la chromodynamique quantique, voir chap. 5.

Pour être plus précis, l'hypothèse de confinement s'applique à température nulle ou faible, la libération des quarks et gluons pouvant se produire dans la matière hadronique sous haute température ou pression (au sein du "plasma de quarks et gluons").

Le modèle des quarks avec son groupe de couleur $SU(3)_c$ est maintenant considéré comme faisant partie de la chromodynamique quantique. Les six saveurs de quarks sont regroupées en trois "générations", (u, d) , (c, s) , (t, b) , qui sont en correspondance avec trois générations de leptons, (e^-, ν_e) , (μ^-, ν_μ) , (τ^-, ν_τ) . Cette correspondance est importante pour la cohérence du modèle standard (compensation des anomalies), voir chap. suivant.

★

Références

Sur $SU(3)$ de saveur, la référence incontournable, contenant tous les articles historiques, est M. Gell-Mann et Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, Benjamin 1964. On y trouvera en particulier les tables de coefficients de Clebsch-Gordan pour $SU(3)$ par J.J. de Swart.

Dans la discussion des brisures de $SU(3)$, on a suivi S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge Univ. Press 1985.

Pour un exposé plus récent sur la physique des saveurs, voir K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, World Scientific 1992.

Toutes les propriétés des particules citées se trouvent dans les tables du Particle Data Group, en ligne sur le site http://pdg.lbl.gov/2012/reviews/contents_sports.html

★

Exercices pour le chapitre 4

A. Modèle sigma et brisure de la symétrie chirale

On considère le lagrangien (1.10) et on définit $W = \sigma + i\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\tau}$.

1. Que vaut $\det W$? Montrer que l'on peut récrire \mathcal{L} en termes de $\psi_{L,R}$ et W selon

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R + \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + g(\bar{\psi}_L W \psi_R + \bar{\psi}_R W^\dagger \psi_L) + \mathcal{L}_K - \frac{1}{2} m^2 \det W - \frac{\lambda}{4} (\det W)^2$$

où \mathcal{L}_K est le terme cinétique des champs $(\sigma, \boldsymbol{\pi})$. On peut donner à ce terme la forme $\mathcal{L}_K = \frac{1}{2} (\det \partial_0 W - \sum_{i=1}^3 \det \partial_i W)$ (d'allure un peu étrange, mais bel et bien invariant de Lorentz !).

2. Montrer que \mathcal{L} est invariant par les transformations de $SU(2) \times SU(2)$ avec $\psi_L \rightarrow U\psi_L$, $\psi_R \rightarrow V\psi_R$, à condition que W se transforme d'une façon qu'on précisera. Justifier l'assertion faite au § 1.2 : ψ_L , ψ_R et W se transforment respectivement par les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Si le champ W acquiert une vev v , par exemple selon la direction de σ , $\langle \sigma \rangle = v$, montrer que le champ ψ acquiert une masse $M = -gv$.

B. Dans $SU(3)$, identifier le changement de base qui fait passer des poids Λ_1, Λ_2 du chapitre 3 aux axes utilisés dans les figures 2, 3 et 4. En déduire la transformation des coordonnées (λ_1, λ_2) (indices de Dynkin) aux coordonnées physiques (I_z, Y) . Quelle est la dimension de la représentation de $SU(3)$ exprimée en termes de l'isospin et de l'hypercharge de son plus haut poids ?

C. Compléter et justifier tous les arguments esquissés aux § 2.2, 2.3 et 2.4. En particulier vérifier que la formule (2.16) conduit bien pour l'octet de baryon à la règle (2.17), et pour le décuplet, à des écarts de masse constants.

D. Combien d'amplitudes indépendantes sont nécessaires pour décrire la diffusion $\mathcal{B}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}\mathcal{D}$, où \mathcal{B} et \mathcal{D} décrivent l'octet et le décuplet de baryons ?

Problèmes.

1. **Couplages à quatre champs invariants par $SU(3)$.**

On considère une matrice A , hermitienne, 3×3 et de trace nulle.

a. Montrer que l'équation caractéristique

$$A^3 - (\text{tr} A) A^2 + \frac{1}{2} ((\text{tr} A)^2 - \text{tr} A^2) A - \det A = 0$$

implique une relation entre $\text{tr}A^4$ et $(\text{tr}A^2)^2$.

b. Si le groupe $SU(3)$ agit sur A par $A \rightarrow UAU^\dagger$, montrer que toute somme de produits de traces de puissances de A est invariante. On appelle une telle somme “polynôme invariant en A ”. Combien y-a-t-il de tels polynômes invariants de degré 4 en A et linéairement indépendants ?

c. On “polarise” alors l’identité trouvée en a., c’est-à-dire qu’on écrit $A = \sum_{i=1}^4 x_i A_i$ avec 4 matrices A_i du type précédent et 4 coefficients x_i arbitraires, et que l’on identifie le coefficient de $x_1 x_2 x_3 x_4$. Montrer que l’on obtient une identité de la forme (identité de Burgoyne)

$$\sum_P \text{tr}(A_{P_1} A_{P_2} A_{P_3} A_{P_4}) = a \sum_P \text{tr}(A_{P_1} A_{P_2}) \text{tr}(A_{P_3} A_{P_4}) \quad (B)$$

avec des sommes sur les permutations P de 4 éléments et un coefficient a qu’on déterminera. Combien de termes distincts apparaissent dans chacun des membres de cette identité ?

d. Combien de polynômes de degré 4 quadrilinéaires en A_1, \dots, A_4 , invariants par l’action de $SU(3)$ $A_i \rightarrow U A_i U^\dagger$ et linéairement indépendants peut-on écrire ? Pourquoi l’identité (B) est-elle utile ?

2. Invariance cachée du lagrangien bosonique

On cherche à écrire un lagrangien pour le champ Φ de l’octet des mésons *pseudoscalaires*, cf (2.7).

a. Pourquoi est-il naturel d’imposer que ce lagrangien soit pair dans le champ Φ ?

b. En utilisant les résultats du Problème 1., écrire la forme la plus générale du lagrangien de degré inférieur ou égal à 4 et pair en Φ , invariant par $SU(3)$.

c. On écrit alors chaque champ complexe en distinguant sa partie réelle et sa partie imaginaire, par exemple $K^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 - iK_2)$, $K^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 + iK_2)$, et de même avec K^0, \bar{K}^0 et avec π^\pm . Calculer $\text{tr} \Phi^2$ avec cette paramétrisation et montrer qu’on obtient une forme quadratique simple dans les 8 composantes réelles. Quel est le groupe d’invariance G de cette forme quadratique ? Ce groupe est-il un sous-groupe de $SU(3)$?

d. En déduire que tout lagrangien de degré 4 en Φ invariant par $SU(3)$ est en fait invariant par ce groupe G .

3. Écarts de masses électromagnétiques dans un octet de $SU(3)$

Question préliminaire. Étant donné un espace vectoriel E de dimension d , on note $E \otimes E$ l’espace des tenseurs de rang 2 et $(E \otimes E)_S$, resp. $(E \otimes E)_A$, l’espace des tenseurs de rang 2

symétriques, resp. antisymétriques, appelé encore produit tensoriel (anti)symétrisé. Quelle est la dimension des espaces $E \otimes E$, $(E \otimes E)_S$, $(E \otimes E)_A$?

On fait l'hypothèse que $SU(3)$ est une symétrie *exacte* des interactions fortes, et on se propose d'étudier les différences de masses dues aux effets électromagnétiques.

a. Combien y a-t-il de différences de masses indépendantes entre baryons de mêmes nombres quantiques I et Y mais de charges Q (ou de composantes I_z) différentes, dans l'octet de baryons $J^P = \frac{1}{2}^+$?

On admettra que ces effets électromagnétiques résultent de perturbations *du second ordre* dans le lagrangien $\mathcal{L}_{em}(x) = -qj^\mu(x)A_\mu(x)$. Si $|B\rangle$ est un état de baryon, il faudrait donc calculer

$$\delta M_B = \langle B | \left(\int d^4x \mathcal{L}_{em} \right)^2 | B \rangle .$$

Faute de savoir calculer cet élément de matrice, on veut calculer le nombre d'amplitudes indépendantes y contribuant.

b. Expliquer pourquoi ce calcul amène à compter les invariants apparaissant dans le produit tensoriel de *quatre* représentations 8. Au vu des calculs effectués en cours, que devrait être ce nombre ?

c. Mais attention ! le produit des deux lagrangiens est symétrique. En ce qui concerne le produit $\int \mathcal{L}_{em} \int \mathcal{L}_{em}$, il faut donc décomposer en représentations irréductibles le produit tensoriel symétrisé $(8 \otimes 8)_S$. Utiliser le résultat de la Question préliminaire pour calculer le nombre de tenseurs indépendants symétriques de rang 2 dans la représentation 8. Montrer que ce nombre est compatible avec la décomposition qu'on admettra

$$(8 \otimes 8)_S = 1 \oplus 8 \oplus 27 .$$

d. i) Quel est alors le nombre d'amplitudes invariantes contribuant à δM_B ?

d. ii) Quel est le nombre d'amplitudes invariantes contribuant à $\delta M_B - \delta M_{B'}$ pour deux hadrons B et B' de mêmes nombres quantiques, comme discuté au a. ?

d. iii) Dans l'esprit de ce qui a été fait en cours sur les amplitudes contribuant aux moments magnétiques, pouvez-vous écrire une base d'invariants en termes des matrices Ψ , $\bar{\Psi}$ et Q ?

e. i) Montrer *a priori* que le nombre d'amplitudes calculé à la question d. ii) implique une relation entre les écarts de masse électromagnétiques.

e. ii) Calculer alors $\Delta_{em}M = \alpha \text{tr} \bar{B} Q^2 B + \beta \text{tr} \bar{B} B Q^2 + \gamma \text{tr} \bar{B} Q B Q$, (l'usage de Maple ou de Mathematica peut aider...), identifier dans cette expression les coefficients $\Delta_{em}M_p$ de $\bar{p}p$, $\Delta_{em}M_n$ de $\bar{n}n$, etc, et vérifier la relation

$$M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} = M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} + M_p - M_n . \quad (R)$$

Les valeurs expérimentales sont $M_n = 939,56 \text{ MeV}/c^2$, $M_p = 938,27 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\Xi^-} = 1321,71 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\Xi^0} = 1314,86 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\Sigma^-} = 1197,45 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\Sigma^0} = 1192,64 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\Sigma^+} = 1189,37 \text{ MeV}/c^2$. Calculer les valeurs des deux membres de la relation (R). Commenter.

f. Octet des mésons pseudoscalaires. Pourrait-on raisonner de façon analogue avec les mésons pseudoscalaires ?

g. Quid des écarts électromagnétiques au sein du décuplet $(\frac{3}{2})^+$?