

Chapitre 5

Théories de jauge. Modèle standard

En dehors d'un bref commentaire sur l'invariance de jauge de l'électrodynamique classique, les transformations qu'on a rencontrées jusqu'à maintenant dans ce cours étaient des transformations globales, indépendantes du point d'espace-temps où elles s'appliquent. Un autre type de symétrie, beaucoup plus contraignant sur la dynamique du système, consiste à supposer que la transformation est *locale*. En chaque point d'espace-temps, agit une copie distincte du groupe de transformations. Une telle symétrie, appelée *symétrie de jauge*, est familière en électrodynamique. Son extension à des groupes de transformations non abéliens par Yang et Mills s'est avérée être une des idées théoriques les plus fécondes de la seconde moitié du XXème siècle. Un cours entier devrait lui être consacré. Plus modestement, le présent chapitre en donnera une introduction élémentaire.

1. Invariance de jauge. Couplage minimal. Lagrangien de Yang–Mills

1.1. Invariance de jauge de l'électrodynamique

L'étude de l'électrodynamique a familiarisé avec la notion d'invariance locale. Le lagrangien de l'électrodynamique

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (1.1)$$

est invariant sous l'effet de transformations de jauge infinitésimale

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= -\partial_\mu \delta\alpha(x) \\ \delta\psi(x) &= ie\delta\alpha(x)\psi(x) , \end{aligned} \quad (1.2)$$

puisque le tenseur de champ

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

est invariant, et que la combinaison

$$i\cancel{D}\psi(x) := (i\cancel{\partial} - e\cancel{A})\psi(x)$$

se transforme comme ψ . La forme finie de ces transformations est aussi aisée à écrire

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \\ \psi(x) &\mapsto e^{ie\alpha(x)}\psi(x) , \end{aligned} \quad (1.3)$$

ce qui montre bien que les transformations sont celles d'une version locale (dépendant de x) du groupe $U(1)$ ou \mathbb{R} (selon qu'on identifie ou non α et $\alpha + 2\pi/e$). Les transformations globales correspondantes sont celles qui conduisent à un courant de Noether conservé, lié à la conservation de la charge électrique. Le lagrangien met aussi en évidence le "couplage minimal" du champ ψ au champ électromagnétique¹. Tout autre champ chargé de charge q se couple au champ électromagnétique par un terme impliquant la "dérivée covariante" $i\partial_\mu - qA_\mu(x)$.

C'est par exemple le cas d'un champ ϕ de boson chargé, donc complexe, dont la contribution au lagrangien s'écrit

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi^*(\partial^\mu + iqA_\mu)\phi - V(\phi^*\phi) \quad (1.4)$$

qui est bien invariant sous $\phi(x) \mapsto e^{iq\alpha(x)}\phi(x)$, $A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)$.

1.2. Extension non abélienne de Yang–Mills

Selon l'observation brillante de Yang et Mills (1954), cette construction se transpose au cas d'un groupe de Lie non abélien G , avec toutefois quelques intéressantes petites modifications ... Soit ψ un champ (que nous notons comme un champ fermionique, mais la chose est sans importance) se transformant par G selon une certaine représentation \mathcal{D} . Soient T_a les représentants des générateurs infinitésimaux dans cette représentation, nous les supposons antihermitiens : $[T_a, T_b] = C_{ab}{}^c T_c$; la transformation infinitésimale de ψ s'écrit donc

$$\delta\psi(x) = T_a\delta\alpha^a\psi(x) . \quad (1.5)$$

(Dans ce chapitre, on notera t_a les matrices correspondantes dans la représentation adjointe.) Pour étendre l'idée de transformation locale, nous avons besoin d'un champ de jauge A_μ , permettant de construire une dérivée covariante $D_\mu\psi$. Il est naturel de considérer que A_μ vit dans l'algèbre de Lie de G , et porte donc des indices de la représentation adjointe

$$A_\mu(x) = \{A_\mu^a(x)\} \quad (1.6)$$

ou encore est représenté dans toute représentation par la matrice antihermitique²

$$A_\mu(x) = T_a A_\mu^a(x) . \quad (1.7)$$

¹ Un terme supplémentaire dans le lagrangien de la forme $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ serait invariant de jauge invariant mais non minimal.

² Attention, cette convention implique que certaines expressions diffèrent par un facteur i du cas abélien

La dérivée covariante s'écrit

$$D_\mu \psi(x) := (\partial_\mu - A_\mu(x))\psi(x) , \quad (1.8)$$

ou encore, en composantes

$$D_\mu \psi_A(x) := (\partial_\mu \delta_{AB} - A_\mu^a(x) (T_a)_A^B) \psi_B(x) . \quad (1.9)$$

Cette dérivée se transforme bien comme ψ , à l'instar du cas abélien, à condition qu'on impose à A_μ de se transformer selon

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \delta \alpha^a(x) + C_{bc}^a \delta \alpha^b(x) A_\mu^c(x) . \quad (1.10)$$

Au terme $\partial_\mu \delta \alpha^a(x)$ près, on voit que $\{A_\mu^a\}$ se transforme bien selon la représentation adjointe (dont les matrices sont $(t_a)_b^c = -C_{ab}^c$). Enfin un tenseur de champ se transformant de façon covariante (c'est-à-dire sans terme inhomogène en $\partial \delta \alpha^a(x)$) peut être construit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \quad (1.11)$$

ou en composantes

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c . \quad (1.12)$$

On démontre, au prix d'un peu d'algèbre, et en utilisant l'identité de Jacobi, que

$$\delta F_{\mu\nu}^a(x) = C_{bc}^a \delta \alpha^b(x) F_{\mu\nu}^c(x) , \quad (1.13)$$

qui est bien une transformation infinitésimale dans la représentation adjointe.

Il est en fait profitable, et peut-être plus éclairant, de regarder l'effet d'une transformation *finie* locale $g(x)$ du groupe G ,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\mapsto \mathcal{D}(g(x))\psi(x) \\ A_\mu &= A_\mu^a T_a \mapsto \mathcal{D}(g(x))(-\partial_\mu + A_\mu(x))\mathcal{D}(g^{-1}(x)) , \end{aligned} \quad (1.14)$$

et pour la dérivée covariante agissant sur ψ ,

$$D_\mu \psi(x) \mapsto \mathcal{D}(g(x))D_\mu \psi(x) \quad (1.15)$$

ou encore³

$$D_\mu \mapsto \mathcal{D}(g(x))D_\mu\mathcal{D}(g^{-1}(x)) . \quad (1.16)$$

Or on vérifie aisément que dans une représentation donnée

$$[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu} := -F_{\mu\nu}^a T_a \quad (1.17)$$

d'où il découle que $F_{\mu\nu}(x) \mapsto \mathcal{D}(g(x))F_{\mu\nu}\mathcal{D}(g^{-1}(x))$, et qu'en particulier, dans la représentation adjointe, la transformation finie de $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t_a$ est

$$F_{\mu\nu}(x) \mapsto g(x)F_{\mu\nu}(x)g^{-1}(x) , \quad (1.18)$$

dont (1.13) est la version infinitésimale.

◦ “Pure jauge”

Si le tenseur $F_{\mu\nu}$ s'annule dans le voisinage d'un point x_0 , on peut écrire localement (c'est-à-dire dans ce voisinage) $A_\mu(x)$ comme une “pure jauge”, c'est-à-dire

$$F_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow A_\mu(x) = (\partial_\mu g(x)) g^{-1}(x) . \quad (1.19)$$

L'appellation “pure jauge” se justifie par le fait qu'un tel $A_\mu(x) = (\partial_\mu g(x)) g^{-1}(x)$ est le transformé de jauge d'un champ de jauge ... nul ! Le \Leftarrow se démontre au prix d'une ligne de calcul, pour le \Rightarrow , voir huit lignes plus bas... Insistons sur le caractère local de cette propriété.

◦ *Transport parallèle le long d'une courbe*

Un autre objet intéressant est l'élément du groupe attaché à une courbe C allant de x_0 à x

$$\gamma(C) := P \exp \left(\int_C dx^\mu A_\mu(x) \right) \quad (1.20)$$

où $A = A^a t_a$ est pris dans la représentation adjointe et où le symbole P signifie qu'une paramétrisation $x(s)$ de la courbe ayant été choisie, les termes dans le développement de l'exponentielle sont ordonnés de droite à gauche selon les s croissants (cf le T -produit en

³ Attention aux notations : dans cette équation, qui porte sur un opérateur différentiel, la dérivée ∂_μ contenue dans D_μ agit sur tout ce qui est à sa droite, tandis que dans la deuxième équation (1.14), elle n'agit que sur $\mathcal{D}(g^{-1}(x))$.

théorie quantique des champs). On montre que sous l'effet de la transformation de jauge (1.14)

$$\gamma(C) \mapsto g(x)\gamma(C)g^{-1}(x_0) . \quad (1.21)$$

Plus généralement, pour toute représentation \mathcal{D} et avec $A = A^a T_a$, (1.20) définit un $\gamma_{\mathcal{D}}(C)$ dans la représentation \mathcal{D} se transformant selon $\gamma_{\mathcal{D}}(C) \mapsto \mathcal{D}(g(x))\gamma_{\mathcal{D}}(C)\mathcal{D}(g^{-1}(x_0))$.

Exercice. Démontrer l'assertion (1.21) en considérant d'abord une trajectoire infinitésimale de x à $x + dx$, c'est-à-dire $\gamma(C) \approx 1 + A_{\mu}(x)dx^{\mu}$, et en effectuant une transformation de jauge finie

$A_{\mu} \rightarrow g(x)(-\partial_{\mu} + A_{\mu}(x))g^{-1}(x)$, montrer que $\gamma(C) \rightarrow g(x + dx)\gamma(C)g^{-1}(x)$. Le résultat pour une courbe finie s'ensuit en combinant ces éléments de courbe infinitésimaux.

Étant donné un objet, tel le champ ψ , se transformant selon une représentation \mathcal{D} , le rôle de $\gamma_{\mathcal{D}}(C)$ est de "transporter" $\psi(x_0)$ en un objet noté ${}^t\psi(x)$ se transformant comme $\psi(x)$. Montrer que pour un trajet infinitésimal $(x, x + dx)$ la différence ${}^t\psi(x + dx) - \psi(x + dx)$ fait apparaître de façon naturelle la dérivée covariante.

Considérons alors le cas où $x = x_0$. La boucle C est fermée et $\gamma(C)$ se transforme de façon covariante, $\gamma(C) \mapsto g(x_0)\gamma(C)g^{-1}(x_0)$. Examinons à nouveau le cas d'une boucle infinitésimale. On montre alors que

$$\gamma(C) \approx \exp \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} F_{\mu\nu} , \quad (1.22)$$

où l'intégrale s'effectue sur une surface infinitésimale \mathcal{S} s'appuyant sur C .

Exercice: Démontrer cette assertion en considérant un circuit carré élémentaire s'étendant à partir de x le long des axes de coordonnées μ et ν : $(x \rightarrow x + dx^{\mu} \rightarrow x + dx^{\mu} + dx^{\nu} \rightarrow x + dx^{\nu} \rightarrow x)$, et développer au second ordre en dx pour obtenir $\gamma(C) \approx 1 + dx^{\mu} dx^{\nu} F_{\mu\nu}$ (sans sommation sur μ, ν). Indication : la formule du commutateur du Chap. 1, équ. (3.8), simplifie beaucoup le calcul !

Cela a une conséquence immédiate : si $F = 0$, tout $\gamma(C)$ de la forme (1.20) n'est pas sensible à de petites variations du contour C à extrémités x_0 et x fixées et ne dépend donc que de x_0 et x . Le $g(x, x_0) := \gamma(C)$ qui en résulte satisfait $(\partial_{\mu} - A_{\mu})g(x, x_0) = 0$, (vérifier !), ce qui achève la démonstration de (1.19).

◦ *Boucle de Wilson*

Revenons au cas d'une boucle fermée C dans (1.20). Comme on vient de le noter, $\gamma(C)$ se transforme de façon covariante, $\gamma(C) \mapsto g(x_0)\gamma(C)g^{-1}(x_0)$. Sa trace

$$W(C) = \text{tr} \gamma(C) = \text{tr} P \exp \oint dx^\mu A_\mu(x) \quad (1.23)$$

est donc invariante. Toute quantité physique doit être "invariante de jauge", c'est-à-dire invariante par une transformation de jauge. C'est le cas de $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $\bar{\psi} i \not{\partial} - \not{A} \psi$ etc. L'intérêt de $W(C)$ est d'être une quantité invariante *non locale*, dépendant du contour C . Noter qu'elle dépend de la représentation dans laquelle on évalue $A = A^a T_a$.

Cette *boucle de Wilson* a été proposée par Wilson et Polyakov comme permettant la mesure du potentiel d'interaction entre les particules se propageant le long de C , et comme fournissant donc un bon indicateur du confinement. Voir plus bas au § 3.1, et voir le Problème à la fin de ce chapitre pour une version discrétisée de cette quantité.

1.3. Géométrie des champs de jauge

Les considérations qui précèdent montrent que la théorie des champs de jauge a une forte coloration géométrique. Le langage approprié pour discuter ces choses est celui de la *théorie des fibrés*, fibré principal pour le groupe de jauge, fibré vectoriel pour chacun des champs de matière comme ψ , au dessus de l'espace de base qui est l'espace-temps. Le champ de jauge est une connexion sur le fibré, qui permet de définir un transport parallèle de point à point. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ en est la courbure, ce qu'exprime (1.17). Toutes ces notions sont définies localement, dans un système de coordonnées locales (une carte), et les changements de carte implique des transformations de la forme (1.14). Ce langage devient particulièrement utile quand on s'intéresse aux propriétés topologiques (instantons etc) ou globales (problème de Gribov) des théories de jauge. Pour la simple introduction aux propriétés de symétrie locale et à la construction *perturbative* du modèle standard, nous n'en aurons pas besoin.

1.4. Lagrangien de Yang-Mills

Le lagrangien décrivant le champ de jauge couplé à un champ de matière tel ψ via le couplage minimal s'écrit donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\psi} (i(\not{\partial} - \not{A}) - m) \psi, \quad (1.24)$$

avec un paramètre, le couplage g . La valeur de ce couplage est évidemment liée à la normalisation des matrices T_a intervenant dans $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$. On montre (cf Exercice B en fin de chapitre) que pour toute algèbre de Lie simple on peut choisir une base telle que dans toute représentation R , $\text{tr} T_a T_b = -T_R \delta_{ab}$, avec T_R un coefficient réel positif dépendant du groupe et de la représentation. On choisira pour écrire $F_{\mu\nu}$ la représentation fondamentale de dimension la plus basse (la représentation de définition de dimension N dans le cas de $SU(N)$) avec la normalisation $T_f = \frac{1}{2}$, donc $\text{tr} T_a T_b = -\frac{1}{2} \delta_{ab}$. Au lagrangien \mathcal{L} , on peut ajouter la contribution de champs de bosons, etc. Noter que la représentation portée

par les fermions et les autres champs de matière, qui apparaît dans la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu^a T_a$, peut différer de cette représentation fondamentale.

Tel quel, \mathcal{L} de (1.24) ressemble beaucoup au lagrangien du cas abélien (1.1), après qu'on a effectué le changement $A \rightarrow gA$.

Retenons les éléments les plus marquants de cette construction :

- comme dans le cas abélien, le principe d'invariance de jauge implique un couplage de type universel, via la dérivée covariante ;
- contrairement au cas abélien où chaque charge est indépendante et non quantifiée (tout au moins si le groupe de jauge est \mathbb{R} et non pas $U(1)$), la constante de couplage g de tous les champs au champ de jauge est la même à l'intérieur de chaque composante simple du groupe de jauge ;
- comme dans le cas abélien, le champ de jauge vient naturellement sans terme de masse : un terme de masse $\frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu$ brise en effet l'invariance de jauge. Cela est très embarrassant pour les applications physiques, les champs vectoriels (de spin 1) de masse nulle étant exceptionnels dans la nature (le champ électromagnétique et ses excitations photoniques étant le contre-exemple de base), et nous contraindra à introduire des mécanismes “doux” de brisure de l'invariance de jauge (brisure spontanée) pour y remédier ;
- contrairement au cas abélien, le champ de jauge porte une charge du groupe : on a vu que pour les transformations globales (indépendantes de x) du groupe G , A_μ se transforme selon la représentation adjointe. La propriété du champ d'être chargé a des implications importantes dans de nombreux phénomènes, les effets infra-rouges entre autres, mais aussi ultraviolets (signe de la fonction β), comme on verra plus bas.

1.5. Quantification. Règles de Feynman.

La quantification de la théorie de Yang–Mills nécessite de surmonter de sérieuses difficultés que nous nous contenterons d'évoquer. Comme dans l'électrodynamique, la forme quadratique du champ de jauge dans le lagrangien,

$$(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \quad \text{ou dans l'espace de Fourier} \quad A_\mu(-k)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})A_\nu(k)$$

est dégénérée, donc non inversible, ce qui est un reflet de l'invariance de jauge ; en conséquence, le propagateur du champ A_μ n'est *a priori* pas défini. Il faut donc “fixer la jauge”, en imposant une condition non-invariante de jauge, et la procédure de Faddeev et Popov, justifiée par leur étude générale de la quantification des *systèmes contraints*, conduit via l'introduction de champs supplémentaires à des règles de Feynman explicites, (voir par exemple [IZ, chap. 12] et les cours du second semestre).

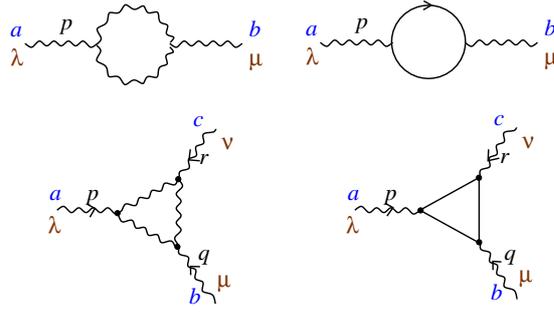


Fig. 1: Quelques diagrammes à une boucle dans une théorie de jauge

On démontre, et cela a été une étape décisive dans la construction du Modèle Standard⁴, que la théorie de jauge ainsi quantifiée est renormalisable : toutes les divergences ultraviolettes apparaissant dans les calculs de diagrammes de Feynman, peuvent, à tout ordre fini de la série des perturbations, être absorbées dans une redéfinition des paramètres – couplages, normalisation des champs, masses – du lagrangien. Ainsi à l’ordre à une boucle, les diagrammes de la figure 1 ont des divergences qui peuvent être absorbées dans un changement de la normalisation du champ A_μ (“renormalisation de fonction d’onde”) et une renormalisation de la constante de couplage g

$$g \mapsto g_0 = \left(1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3}C_2 - \frac{4}{3}T_f \right) \log \frac{\Lambda}{\mu} \right) g , \tag{1.25}$$

où Λ est une échelle de coupure ultraviolette (“cutoff”) et μ une échelle de masse indispensable à la définition de la procédure de renormalisation.

2. Champs de jauge massifs

2.1. Interactions faibles et bosons intermédiaires

On a vu au chapitre 4 (équ. (2.18)) que le lagrangien de Fermi

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^\rho(x) J_\rho^\dagger(x) \tag{2.1}$$

fournissait une bonne description de la physique de basse énergie des interactions faibles : processus leptoniques tel $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$ ou $\bar{\nu}_\mu \mu^-$, semi-leptoniques comme $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ou la désintégration β du neutron $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, ou non leptoniques : $\Lambda \rightarrow p \pi^-$, $K^0 \rightarrow \pi \pi$,

⁴ G. ’t Hooft et M. Veltman, prix Nobel 1999

etc. Mais qu'il n'était théoriquement pas satisfaisant, puisqu'il conduit à une théorie non renormalisable, rendant impossible tout calcul au delà du "terme de Born", le premier ordre de la série des perturbations, lequel viole l'unitarité.

La violation de l'unitarité apparaît dans le calcul de la section efficace totale σ de tout processus, au premier ordre de la série des perturbations. Un simple argument dimensionnel donne à haute énergie

$$\sigma \sim \text{const. } G^2 s$$

où s est le carré de l'énergie dans le centre de masse. Mais ce comportement est en conflit avec des résultats généraux basés sur l'unitarité qui prévoient que σ doit décroître dans chaque onde partielle comme $1/s$. Une violation de l'unitarité du terme de Born est donc attendue à une énergie de l'ordre de $\sqrt{s} \sim G^{-\frac{1}{2}} \sim 300 \text{ GeV}$. Et la non-renormalisabilité de la théorie empêche d'améliorer ce terme de Born.

L'idée est alors de regarder $\mathcal{L}_{\text{Fermi}}$ comme l'approximation d'une théorie où le courant chargé J^ρ est couplé à un champ vectoriel W de masse M , dans la limite de grande masse $M^\#$. Considérons le nouveau lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{boson int.}} = gJ^\rho(x)W_\rho^\dagger(x) + \text{h.c.} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + M^2W_\rho^\dagger W^\rho . \quad (2.2)$$

Dans la limite de grande masse M , on peut négliger le terme cinétique $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ par rapport au terme de masse, le champ W devient un simple champ auxiliaire sans dynamique sur lequel on peut intégrer en "complétant le carré", et on retrouve $\mathcal{L}_{\text{Fermi}}$ à condition que

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{M^2} \quad (2.3)$$

reliant le nouveau couplage g au couplage de Fermi. La théorie (2.2) avec son "boson intermédiaire" W , vecteur des interactions faibles, est-elle la bonne théorie des interactions faibles ? En fait le propagateur du champ massif W est

$$-i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}}{k^2 - M^2} \quad (2.4)$$

qui se comporte mal pour $k \gg M$ et rend à nouveau la théorie non-renormalisable : on n'a fait que déplacer le problème. La solution vient d'une manière douce et subtile (!) d'introduire la masse du champ W , via un mécanisme de brisure spontanée de symétrie.

[#] L'inverse de la masse M représente la portée des interactions faibles qu'on sait courte, et la masse M est donc élevée (de l'ordre de 100 GeV, comme nous verrons).

2.2. Brisure spontanée de symétrie de jauge. Mécanisme de Brout–Englert–Higgs

Revenons au cas abélien décrit par (1.1)-(1.4) et supposons maintenant que le potentiel V soit tel que son minimum soit localisé à une valeur non nulle de $\phi^* \phi$. En conséquence, le champ ϕ acquiert une vev $\langle \phi \rangle = v/\sqrt{2} \neq 0$. Reparamétrisant le champ ϕ selon

$$\phi(x) = e^{iq\theta(x)/v} \frac{v + \varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

avec v réel et φ hermitien, et accompagnant cela d'une transformation de jauge

$$\begin{aligned} \phi(x) &\mapsto \phi'(x) = e^{-iq\theta(x)/v} \phi(x) = \frac{v + \varphi(x)}{\sqrt{2}} \\ A_\mu(x) &\mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{v} \partial_\mu \theta(x) \end{aligned}$$

et de la transformation correspondante pour les éventuels autres champs chargés ($\psi \dots$), on voit que le lagrangien $\delta\mathcal{L}$ de (1.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= (\partial_\mu - iqA'_\mu)\phi'(\partial^\mu + iqA'^\mu)\phi' - V(\phi'^2) \\ &= \frac{1}{2}|(\partial_\mu - iqA'_\mu)\varphi|^2 + \frac{1}{2}q^2v^2A'_\mu A'^\mu - V\left(\frac{1}{2}(v + \varphi)^2\right). \end{aligned}$$

Au final, on voit que la brisure spontanée de la symétrie $U(1)$ par le champ bosonique ϕ conduit à l'apparition d'un terme de masse du champ de jauge A'_μ ! On note aussi que le champ θ qui en l'absence du champ de jauge, aurait été le champ de Goldstone, a purement et simplement disparu, "avalé" par le nouveau mode massif ("longitudinal") du vecteur A'_μ ; le nombre total de degrés de liberté de ces champs n'est donc pas modifié. C'est le mécanisme de Brout–Englert–Higgs, dans sa version abélienne. Si le boson ϕ est couplé à un champ de fermions ψ par un terme du type $\bar{\psi}\phi\psi$, l'apparition de sa "vev" donne lieu à un terme de masse $\frac{qv}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\psi$ pour le ψ .

Ce mécanisme de Brout–Englert–Higgs s'étend à un groupe de jauge non abélien. Les détails dépendent du schéma de brisure et du choix de représentation pour le champ bosonique. En général, si le groupe G est brisé en un sous-groupe H , les $r = \dim G - \dim H$ bosons de Goldstone, qui sont en correspondance avec les générateurs du quotient ("coset") G/H , se muent en modes longitudinaux de r vecteurs. Il reste $\dim H$ champs vectoriels de masse nulle. Exemple : le modèle standard électrofaible du § 3.2 : $G = SU(2) \times U(1)$, $H = U(1)$ (pas celui qu'on croit !), trois champs de jauge deviennent massifs, un demeure de masse nulle.

Une étape cruciale dans la construction du modèle standard a été de comprendre que ce mécanisme de brisure spontanée de symétrie dans une théorie de jauge, décrit ici au niveau classique, est compatible avec la quantification de la théorie. La renormalisabilité à 4 dimensions de la théorie de jauge n'est pas affectée par cette brisure, et la théorie obtenue est bien unitaire. Seuls les états physiques (champs de jauge massifs ou de masse nulle, bosons ayant subsisté à la brisure etc) participent à la somme sur les états intermédiaires dans la relation d'unitarité.

3. Le modèle standard

Ce qu'on appelle actuellement le modèle standard de la physique des particules est une théorie de jauge basée sur un groupe de jauge non simple : $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, dans lequel les différents facteurs jouent des rôles bien distincts. Comme le groupe a trois facteurs, la théorie dépend *a priori* de trois constantes de couplage indépendantes et possède des champs de jauge pour chacun, qui sont couplés aux champs de matière, quarks et leptons, ainsi qu'à des champs de bosons qui jouent un rôle auxiliaire mais crucial !

3.1. Le secteur fort

Le groupe $SU(3)$ est celui de la couleur (cf chap. 4, § 3.2.). Les champs de jauge A_μ portent des indices de la représentation adjointe (de dimension 8). Les particules associées, ou *gluons*, sont des particules de spin 1 et de masse nulle, jamais observées directement jusqu'à présent. Les champs de gluons sont couplés aux degrés de liberté de couleur des champs fermioniques de quarks, ψ_{Ai} , qui portent un indice A de la représentation 3 (ou $\bar{3}$ pour les $\bar{\psi}$) (et aussi un indice de saveur $i = u, d, s, c, b, t$, sur lequel $SU(3)_c$ n'agit pas). La théorie ainsi définie est la Chromodynamique Quantique (QCD dans l'acronyme anglais). Elle décrit la physique de toutes les interactions fortes. Son lagrangien est du type (1.24), avec des masses fermioniques dépendant de la saveur, engendrées par le secteur faible.

◦ Liberté asymptotique

Connaissant les règles de Feynman et la renormalisabilité de la théorie, cf § 1.6, on peut calculer la renormalisation de la constante de couplage g , (1.25), et la fonction beta correspondante. On trouve⁵

$$\beta(g) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g(\Lambda) \Big|_{g_0} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2 - \frac{4}{3} T_f \right) + O(g^5) \quad (3.1)$$

⁵ David J. Gross, H. David Politzer, Frank Wilczek, prix Nobel 2004

Il apparaît donc que cette fonction beta est négative au voisinage de $g = 0$, tant que le coefficient $\frac{11}{3}C_2 - \frac{4}{3}T_f > 0$ (pas trop de champs de matière !), autrement dit que $g = 0$ est un point fixe attractif ultraviolet du groupe de renormalisation : $\frac{dg^2(\lambda)}{d \log \lambda} < 0 \Rightarrow g^2(\lambda) \sim (2b \log \lambda)^{-1} \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \infty$, avec $b =$ coefficient du terme $-g^3$ dans (3.1). C'est la liberté asymptotique, une propriété fondamentale des interactions fortes. Exercice : combien de triplets de quarks sont compatibles avec la liberté asymptotique de la QCD ?

Cette théorie de jauge non abélienne est la seule théorie des champs locale et renormalisable à 4 dimensions à posséder cette propriété de liberté asymptotique. Comme telle, elle est la seule compatible avec les résultats des expériences de diffusion profondément inélastique de leptons sur des hadrons, qui révèlent la structure interne de ces derniers comme faite de constituants quasi-libres à très courte distance.

Ce groupe de jauge SU(3) est non brisé, ni explicitement, ni spontanément. Ceci est essentiel pour la cohérence du scénario imaginé pour expliquer le confinement des quarks et gluons (cf chap. 4, § 3.2.) : les particules non singulets du groupe de jauge sont réputées inobservables, car soumises à des interactions d'intensité croissant avec la distance quand on cherche à les séparer.

Cette propriété d'“esclavage infra-rouge” (c'est-à-dire à grande distance) est le pendant de celle de “liberté asymptotique”, à courte distance. Elle montre que le phénomène de confinement est un phénomène de couplage fort, par essence non-perturbatif, c'est-à-dire inaccessible aux calculs de la théorie des perturbations.

Une approche non-perturbative qui a fourni de nombreux résultats qualitatifs et quantitatifs est la discrétisation de la chromodynamique en une *théorie de jauge sur un réseau*. Cela a ouvert la voie à l'utilisation de méthodes empruntées à la Mécanique Statistique des modèles sur réseau, analytiques (calculs de couplage fort ou de haute température, de champ moyen, ...) ou numériques (Monte-Carlo). Le scénario de confinement semble confirmé dans cette approche par l'étude de la valeur moyenne de la boucle de Wilson définie plus haut (§ 1.2). Selon l'idée de Wilson et Polyakov, pour une boucle rectangulaire C de dimensions $T \times R$, $T \gg R$, et portant la représentation σ du groupe de jauge, $W^{(\sigma)}(C)$ décrit la propagation pendant le temps T d'une paire de particules statiques (de masse très grande), figées à une distance relative R . On cherche à calculer le potentiel entre ces charges statiques

$$V_\sigma(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log W^{(\sigma)}(C) .$$

Si la boucle de Wilson a une “loi d'aire”, $\log W(C) \sim -\kappa RT$, le potentiel entre les charges statiques croît linéairement, $V \sim \kappa R$, ce qui est en accord avec l'idée de confinement. C'est ce qui se passe en général dans une théorie de jauge sur réseau en couplage fort, voir le Problème en fin de chapitre. Les calculs de Monte-Carlo confirment que ce comportement persiste aux couplages faibles pertinents pour la théorie continue (le couplage de la théorie sur réseau est le couplage effectif à l'échelle de la maille du réseau a , donc selon la liberté asymptotique, $g_0^2 = g^2(\Lambda = 1/a) \rightarrow 0$), et permettent même de déterminer numériquement le coefficient κ , ou *tension de corde*.

La QCD est toujours un sujet d'étude très actif. Les interactions fortes sont en effet omni-présentes et l'observation de toute autre interaction, de tout autre effet, présuppose une connaissance aussi précise que possible de la contribution forte. Alors que le LHC commence à fournir des données, les calculs des contributions de QCD gardent une importance fondamentale.

3.2. Le secteur électro-faible, une esquisse.

Le groupe $U(1) \times SU(2)$ est celui qui décrit les interactions électro-faibles (modèle de Glashow–Salam–Weinberg⁶). On parle parfois d’isopin faible et d’hypercharge faible pour désigner les générateurs de ces groupes $SU(2)$ et $U(1)$. Nous nous contenterons de présenter les grandes lignes de la construction, sans bien expliquer les raisons qui ont conduit aux choix de groupes, de représentations etc.

Appelons A_μ^a , W_μ^i et B_μ les champs de jauge de $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$ respectivement. Les quarks et leptons *gauches*, $\psi_L := \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$, et *droits*, $\psi_R := \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$, sont couplés aux champs W_μ et B_μ de façon différente. On peut écrire la dérivée covariante de l’un de ces champs selon

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - g_3 A_\mu^a T_a - g_2 W_\mu^j t_j - i \frac{g_1}{2} y B_\mu) \psi \tag{3.2}$$

où les représentations assignées à chaque champ, lepton ou quark, gauche ou droit, sont la représentation triplet de $SU(3)_c$ pour les quarks et la triviale pour les leptons, bien sûr, et pour la partie électro-faible, données dans la Table ci-dessous :

<i>Quarks & Leptons</i>	:	(ν_L^e, e_L)	ν_R^e	e_R	(u_L, d_L)	u_R	d_R
<i>Isospin faible t_z</i>	:	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	0	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	0
<i>Hypercharge faible y</i>	:	$(-1, -1)$	0	-2	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>Charge électrique $Q = \frac{1}{2}y + t_z$</i>	:	$(0, -1)$	0	-1	$(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Table 1. Nombres quantiques faibles des leptons ν^e et e et des quarks u, d .

Les choses se répètent à l’identique pour les autres générations.

Une conséquence remarquable de l’utilisation de $SU(2)$ comme groupe de symétrie des interactions faibles est qu’en plus des deux courants chargés $J_\mu^{1,2}$ (ou J_μ^\pm) de la théorie de Fermi apparaît une troisième composante J_μ^3 . Ce courant neutre, qui *n’est pas* le courant électromagnétique et qui est couplé au champ de jauge W_3^μ , est nécessairement présent et contribue par exemple à la diffusion $e^- \nu_\mu \rightarrow e^- \nu_\mu$ interdite dans la théorie de Fermi. La découverte expérimentale de ces courants neutres (1973)⁷ a été la première confirmation de la validité du Modèle Standard.

Le groupe $U(1)_{em}$ de l’électromagnétisme est identifié par les charges des champs. C’est un “mélange” du facteur $U(1)$ initial et d’un sous-groupe $U(1)$ de $SU(2)$. Ce mélange est caractérisé par un angle θ_W , dit angle de Weinberg : si on note B_μ et W_μ les

⁶ S. Glashow, A. Salam, S. Weinberg, prix Nobel 1979

⁷ En lire l’histoire dans <http://cerncourier.com/cws/article/cern/29168>

champs de jauge des groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement, le champ électromagnétique est $A_\mu^{em} = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^0$, la combinaison orthogonale correspondant à un autre champ vectoriel nommé Z^0 .

Examinons les termes de “courant neutre” couplant par exemple l’électron et son neutrino aux bosons neutres W^0 et B . On les lit sur les dérivées covariantes (3.2) avec les nombres quantiques de la Table 1

$$\frac{1}{2}i[\bar{e}_L(-g_2W^0 - g_1B)e_L + \bar{e}_R(-2g_1B)e_R + \bar{\nu}_e(g_2W^0 - g_1B)\nu_e]$$

La rotation $W^0 = \cos \theta_W Z^0 + \sin \theta_W A$, $B = -\sin \theta_W Z^0 + \cos \theta_W A$ doit être telle que la charge électrique e (couplage au A) est la même pour e_L et e_R et nulle pour ν_e . Il vient

$$2e = g_2 \sin \theta_W + g_1 \cos \theta_W = 2g_1 \cos \theta_W \quad \text{et} \quad g_2 \sin \theta_W - g_1 \cos \theta_W = 0$$

qui sont bien compatibles et fournissent

$$\tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2} \quad e = g_1 \cos \theta_W = g_2 \sin \theta_W . \quad (3.3)$$

Le résultat de ce calcul ne dépend bien sûr pas de la représentation à laquelle on l’applique. A ce stade nous n’avons fait qu’un changement de paramètres, $(g_1, g_2) \mapsto (e, \theta_W)$ mais ces derniers sont physiquement observables.

Le lagrangien contient aussi un couplage à un champ bosonique, supposé être un doublet complexe de $SU(2)$ $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ (isospin faible $\frac{1}{2}$, hypercharge faible $y = +1$), $|D\Phi|^2$ où $D_\mu \Phi = (\partial_\mu - g_2 W_\mu^i \frac{\tau_i}{2} - \frac{1}{2}g_1 B_\mu)\Phi$. Le champ Φ est doté d’un potentiel $V(\Phi)$ en “chapeau mexicain”, responsable de la brisure spontanée de $U(1) \times SU(2)$ en $U(1)_{em}$, et donc de l’apparition des masses des champs vectoriels selon le mécanisme décrit au § 2, et même de celle des fermions. Ce champ dit de Higgs (2 composantes complexes, donc 4 hermitiennes) voit trois de ces composantes disparaître au profit des modes longitudinaux des champs de jauge devenus massifs. Une seule des quatre composantes demeure, et c’est cette composante φ (et la “particule de Higgs” qu’elle crée) que l’on espère découvrir prochainement dans les expériences du LHC. En parallèle, trois des quatre champs de jauge, les W^\pm et le Z^0 , deviennent massifs, le quatrième, le champ électromagnétique A demeurant de masse nulle.

La brisure de la symétrie $U(1) \times SU(2)$ par le champ Φ s’effectue dans une direction qui préserve $U(1)_{em}$. (Ou plus exactement c’est la direction de cette brisure qui détermine ce qu’on appelle $U(1)_{em}$.) On écrit, en généralisant (2.5) au groupe $SU(2)$ de générateurs $i\frac{\tau^j}{2}$ ($\tau^j =$ matrices de Pauli)

$$\Phi(x) = e^{i\xi_j(x)\frac{\tau^j}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\varphi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,$$

que l’on accompagne d’une transformation de jauge, ce qui fait disparaître les champs ξ_j et donne pour les champs W et B la forme quadratique (termes de masse)

$$\mathcal{L}_{(2)} = \frac{1}{8}v^2[(g_1B - g_2W^3)^2 + g_2^2((W^1)^2 + (W^2)^2)]$$

C'est bien comme attendu la composante $Z^0 = (g_1 B - g_2 W^3) / \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ qui devient massive, ainsi que $W^{1,2}$, tandis que la combinaison orthogonale $A = (g_2 B + g_1 W^3) / \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ demeure de masse nulle. On trouve

$$\boxed{M_{W^\pm} = \frac{1}{2} v g_2 \quad M_{Z^0} = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.4)$$

et en utilisant (3.3), la relation $G = \frac{g_2^2}{8M_W^2}$ qu'on lit sur le lagrangien et la valeur expérimentale de e et de $G = 10^{-5} m_p^2$

$$M_{W^\pm} = \frac{38}{\sin \theta_W} \text{GeV} \quad M_{Z^0} = \frac{M_W}{\cos \theta_W} = \frac{38}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \text{GeV} .$$

Ces expressions subissent ensuite de petites corrections perturbatives. Enfin la masse du fameux et tant attendu boson de Higgs φ n'est pas prédite par la théorie mais devrait être dans l'intervalle 100–200 GeV. Les derniers résultats du LHC semblent exclure la plus grande partie de cet intervalle, laissant une "fenêtre" entre 120 et 140 GeV pour sa masse dans le scénario le plus simple.

Les "bosons intermédiaires" associés aux champs vectoriels massifs W^\pm et Z^0 ont été découverts expérimentalement dès la fin des années 70⁸; ils ont des masses $M_{W^\pm} = 80.4 \text{ GeV}$ et $M_{Z^0} = 91.2 \text{ GeV}$ compatibles avec une valeur de l'angle de Weinberg donnée par

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.23 , \quad (3.5)$$

également compatible avec tous les autres résultats expérimentaux.

Au total, le lagrangien décrivant toutes les interactions en dehors de la gravitation a la forme remarquablement simple et compacte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} + \sum_{\substack{\text{quarks \& leptons} \\ \text{gauches et droits}}} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + |D\Phi|^2 - V(\Phi) + \text{couplages fermions - Higgs} , \quad (3.6)$$

où $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ désigne les trois tenseurs de champs de jauge \mathbf{A} , \mathbf{W} et A . Noter que l'invariance $SU(2) \times U(1)$ interdit les couplages entre fermions gauches et droits (qui se transforment sous des représentations différentes), et donc interdit des termes de masse. La seule échelle de masse se trouve dans $V(\Phi)$, et ce sont le mécanisme de Higgs et le couplage du champ Φ aux fermions –leptons et quarks– qui donnent lieu à l'apparition des masses de fermions et de (certains) bosons-vecteurs. Ce couplage, dit de Yukawa, est de la forme générale, (écrite ici pour les quarks),

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{ij}^d \bar{\psi}_{Li} \cdot \Phi d_{Rj} - Y_{ij}^u \bar{\psi}_{Li} \cdot \tilde{\Phi}^\dagger u_{Rj} + \text{h.c.} , \quad (3.7)$$

⁸ Carlo Rubbia et Simon van der Meer, prix Nobel 1984

avec des matrices *a priori* arbitraires $Y_{ij}^d, Y_{ij}^u : i, j = 1, 2, 3$ sont des indices de génération, le point dénote le produit scalaire des doublets d'isospin Φ et $\tilde{\Phi}^\dagger = \begin{pmatrix} \phi^{0\dagger} \\ -\phi^{+\dagger} \end{pmatrix}$ avec les doublets des quarks

$$\psi_{Li} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L = \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \right).$$

Des couplages du même type apparaissent entre leptons et champs scalaires.

La vev $v/\sqrt{2}$ du champ ϕ^0 donne alors naissance à une “matrice de masse”. Une complication de la théorie décrite par (3.6) est que la diagonalisation de cette matrice de masse des quarks fait intervenir une rotation par une matrice unitaire de (u_L, c_L, t_L) et de (d_L, s_L, b_L) par rapport à la base couplée aux champs de jauge dans (3.6) : si (u_L, c_L, t_L) et (d_L, s_L, b_L) désignent les états propres de masse, le courant hadronique chargé couplé au champ W^+ est

$$J_\mu = (\overline{u\bar{c}t})_L \gamma_\mu M \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (3.8)$$

avec M la *matrice unitaire de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*⁹. Ce mécanisme généralise à 3 générations le mélange par l'angle de Cabibbo rencontré au chapitre 4, (équ. (2.20)) dans le cas de 2 générations. On écrit la matrice M sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

avec 4 angles δ et θ_{ij} , ($c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$), et $\theta_{12} = \theta_C =$ angle de Cabibbo. Expérimentalement $0 \ll \theta_{13} \ll \theta_{23} \ll \theta_{12} \ll \pi/2$. La mesure précise des éléments de matrice de M est actuellement l'objet d'une activité intense, en relation avec l'étude de la violation de la symétrie CP (due en grande partie à la phase $e^{i\delta}$) et des “oscillations de saveurs”.

C'est tout un cours qui serait nécessaire pour rendre compte des détails et des succès du modèle standard, cf les cours du 2ème semestre...

⁹ M. Kobayashi, T. Maskawa, prix Nobel 2008, avec Y. Nambu

4. Compléments

4.1. Modèle standard et au delà.

Le modèle standard est à la fois remarquablement vérifié et peu satisfaisant. En dehors de la présence de neutrinos massifs, dont on est maintenant convaincu et qui nécessite de petits amendements au lagrangien (3.6), on n'a à ce jour observé aucun désaccord significatif entre les résultats expérimentaux et les prédictions du modèle. Les aspects non satisfaisants du modèle standard sont pourtant nombreux : le nombre jugé excessif (une vingtaine) de paramètres libres dans le modèle, le manque de "naturel" de la façon dont certains termes doivent être ajustés de façon extrêmement fine ; la question du boson de Higgs dont la découverte est espérée au LHC, mais que certains physiciens considèrent comme une construction *ad hoc* ; etc.

Il faut mentionner les tentatives d'améliorer le modèle standard en fusionnant les 3 groupes de jauge au sein d'un plus grand groupe d'une théorie "grand-unifiée" (GUT en anglais;-). On y consacre le paragraphe suivant.

Les extensions les plus en vogue du modèle standard sont en définitive celles basées sur la supersymétrie. Le "MSSM", ("*Maximally Supersymmetric (extension of the) Standard Model*"), ou le "NMSSM" ("*Next-to ...*"), résolvent le problème de hiérarchie, prédisent une convergence des couplages électro-faibles et fort, et prédisent aussi l'existence de partenaires supersymétriques pour toutes les particules connues. Pour confirmation, rendez-vous peut-être dans quelques mois au LHC...

4.2. Théories grand-unifiées ou GUTs

L'observation que les trois constantes de couplage g_1, g_2, g_3 semblent à partir de leurs valeurs mesurées aux énergies actuelles converger sous l'effet du groupe de renormalisation vers une valeur commune à une énergie d'environ 10^{15} ou 10^{16} GeV a été une forte incitation dans le sens d'une grande unification, voir fig. 2. La théorie grand-unifiée qui en résulte doit non seulement être une théorie de jauge dotée d'un seul couplage si le groupe d'unification G est simple, mais aussi être capable de prédire le contenu en champs et particules de matière selon les représentations de $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ à partir de représentations du groupe G . Pour des raisons variées, le groupe $SU(5)$ est le meilleur candidat. Cette GUT possède $\dim SU(5) = 24$ champs de jauge.

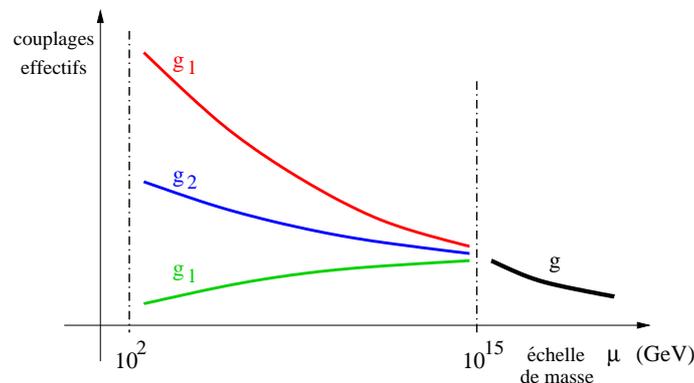


Fig. 2: Évolutions schématisées des 3 couplages effectifs du modèle standard et de celui de la théorie grand-unifiée

La raison principale du choix de $SU(5)$ vient du nombre de fermions chiraux par génération. Chaque génération du Modèle Standard contient deux saveurs de quarks venant chacune en 3 couleurs, plus un lepton, et chacun de ces 6+1 champs peut avoir deux chiralités, plus un neutrino supposé de masse nul et chiral. Au total il y a 15 fermions chiraux par génération. (Se rappeler que l'antiparticule d'un fermion droit est gauche : on peut se contenter de raisonner sur des fermions gauches.) On cherche donc un groupe G simple possédant une représentation (réductible ou irréductible) de dimension 15 pouvant regrouper tous les fermions gauches de chaque génération. Le seul candidat est en définitive le groupe $SU(5)$ qui possède des représentations de dimension 15 : la représentation tensorielle symétrique, et des représentations somme de 5 (ou $\bar{5}$) et 10 (ou $\bar{10}$).

Le groupe $SU(5)$ des matrices unitaires 5×5 contient un sous-groupe $SU(3)$ (sous-matrices 3×3 du coin supérieur gauche), un sous-groupe $SU(2)$ (blocs 2×2 du coin inférieur droit), ce qui donne les générateurs correspondants de $SU(3) \times SU(2)$; le sous-groupe $U(1)$ est engendré par la matrice diagonale et de trace nulle $\text{diag}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Il est clair que ces trois groupes commutent entre eux.

Il faut alors décomposer tous les champs (les représentations 5, 10, 15 et 24) en représentations de $SU(3) \times SU(2)$. Cet exercice montre que la représentation 15 est à écarter et que la représentation réductible $\bar{5} \oplus 10$ est la représentation appropriée pour les champs de fermions : la $\bar{5}$ se décompose en représentations $(\bar{3}, 1) \oplus (1, 2)$ et contient les antiquarks \bar{d}_L et les leptons gauches e_L^- et ν_e ; la 10 se décompose en $(1, 1) \oplus (3, 2) \oplus (\bar{3}, 1)$ contenant le lepton gauche e_L^+ singlet de $SU(2)$ et de $SU(3)$, les deux quarks gauches u_L, d_L qui forment un doublet de $SU(2)$ et les antiquarks \bar{u}_L .

De même, les 24 champs de jauge incorporent les 8 champs de gluons, les 3+1 vecteurs du secteur électro-faible, plus 12 champs supplémentaires, qui acquièrent une masse très grande lors de la brisure attendue de $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

La brisure $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ devrait intervenir à une énergie de grand-unification de l'ordre de 10^{15} ou 10^{16} GeV, énergie à laquelle les couplages g_3, g_2, g_1 de $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$ semblent converger (fig. 2). Les générateurs infinitésimaux étant maintenant rigidement liés au sein du groupe simple $SU(5)$, on peut relier la charge électrique et le couplage au champ de jauge de $SU(2)$ et prédire l'angle de Weinberg : on trouve que $\sin^2 \theta = \frac{3}{8}$, ... mais ce calcul s'applique à l'énergie d'unification ! L'angle est renormalisé entre cette énergie et les énergies de la physique actuelle.

Une conséquence frappante de l'unification quarks-leptons au sein de multiplets est la violation des conservations séparées des nombres leptonique et baryonique. En particulier, l'existence de termes d'interaction, par exemple $X^\rho (\bar{d}\gamma_\rho e^+ + \bar{u}^c \gamma_\rho u)$, avec un des champs de jauge supplémentaires (les matrices des générateurs sont omises), permet la désintégration du proton $p = d u u \rightarrow d \bar{d} e^+ = \pi^0 e^+$, et par d'autres canaux encore. Il faut donc calculer soigneusement si le taux de désintégration est compatible avec les données expérimentales sur la durée de vie du proton (borne actuelle $10^{32 \pm 1}$ ans), ... ce qui n'est pas le cas !

Il faudrait encore montrer dans quelle représentation se placent les champs bosoniques de Higgs pour permettre la brisure en deux étapes $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ à deux échelles extrêmement différentes.

Au final, la GUT $SU(5)$

- incorpore par construction la structure des générations de fermions ;
- elle place dans une même représentation leptons et quarks et explique donc la commensurabilité de leurs charges électriques et la compensation des anomalies (voir § suivant) ;
- elle réduit le nombre de paramètres du modèle standard et prédit la valeur de l'angle de Weinberg (à l'échelle d'unification) ;
- à l'inverse elle n'explique pas le pourquoi des trois générations observées ;
- elle n'élucide pas la question du "naturel" (que nous avons juste évoquée) ni celle reliée de la "hiérarchie" (pourquoi le rapport M_{GUT}/M_W est-il aussi grand ?) ;
- enfin, défaut fatal, elle prédit des effets tels la désintégration du proton à des taux qui semblent incompatibles avec les observations.

C'est ce dernier point qui a conduit à abandonner ce schéma d'unification et à lui préférer des voies supersymétriques.

4.3. Anomalies

On a mentionné au chapitre 4 l'existence des anomalies chirales, affectant le courant axial $J_\mu^{(5)}$ de la symétrie classique $U(1)$. Dans la théorie de jauge du Modèle Standard, les champs de jauge électro-faibles sont couplés de façon différente aux fermions gauches et droits, autrement dit, ils sont couplés aux courants axiaux, cf le lagrangien

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\not{\partial} - \not{A}) \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi$$

qui contient un terme $A_a^\mu J_{\mu a}$ avec $J_{\mu a} = \bar{\psi} T_a \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi$. Classiquement ce courant $J_{\mu a}$ devrait avoir une dérivée covariante (dans la représentation adjointe) nulle si la masse des fermions s'annule. On peut à nouveau effectuer le calcul de la divergence (covariante) de ce courant à l'ordre à une boucle, et on trouve que

$$D_\mu J^\mu = \frac{i}{24\pi^2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} T_a (A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma) .$$

Curieusement le membre de droite n'est pas invariant de jauge (mais sa forme ne doit rien au hasard et est dictée par des considérations géométriques que nous ne discuterons pas). L'anomalie de ce courant "non-singlet" (c'est-à-dire portant une représentation non triviale du groupe de jauge) brise donc l'invariance de jauge. Ce faisant elle met en danger toute la cohérence, renormalisabilité et unitarité, de la construction de la théorie. On conçoit que le contrôle de cette anomalie soit crucial pour la construction d'une théorie physique.

Or on constate que le coefficient "groupiste" de l'anomalie est proportionnel à

$$d_{abc} = \text{tr}(T_a \{T_b, T_c\})$$

où $\{T_b, T_c\}$ est l'anticommutateur des générateurs infinitésimaux, cf Exercice B.3.

En pratique on s'assure de l'annulation de l'anomalie dans deux cas :

- a) Supposons que les fermions appartiennent tous à des représentations réelles ou pseudoréelles. On rappelle (cf chap 2) que l'on désigne ainsi les situations où la représentation est équivalente à sa représentation conjuguée, $T_a^* = CT_a C^{-1}$. On s'est placé dans des représentations unitaires où les T_a sont antihermitiques, $T_a = -T_a^\dagger = -T_a^T$. On vérifie alors (cf Exercice B.3) que le coefficient groupiste $d_{abc} = -d_{abc} = 0$ s'annule et l'anomalie avec lui. Ainsi les théories (quadridimensionnelles) de groupe SU(2) (dont les représentations sont réelles ou pseudoréelles) n'ont pas d'anomalie.
- b) Une autre situation est celle où il y a compensation des anomalies venant des différentes représentations portées par les fermions. C'est ce qui se passe dans le modèle standard. Selon l'argument du a), il n'y a pas d'anomalie associée aux seuls courants d'isospin faible, couplés au champ de jauge SU(2). Mais il peut a priori y en avoir avec les courants d'hypercharge faible (groupe U(1)), ainsi que des anomalies mixtes, par exemple 1 courant U(1) et deux SU(2) etc. Il faut donc vérifier que pour tous les choix de trois générateurs indexés par a, b, c , la constante d_{abc} s'annule quand on somme sur toutes les représentations de fermions. En définitive, on montre que tout se réduit à l'annulation de $\text{tr}(t_3^2 Q)$ pour chaque génération, qui est bien satisfaite. C'est encore ce qui se passe pour la théorie SU(5) discutée au § précédent : on montre que pour chaque génération, les contributions des représentations $\bar{5}$ et 10 se compensent.

★

Références

Sur les aspects géométriques des théories de jauge et une introduction à la théorie des fibrés, voir par exemple M. Daniel et C. Viallet, *The geometric setting of gauge theories of the Yang-Mills type*, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 175-197.

Sur les théories de jauge, Yang-Mills, le modèle standard, etc, on peut consulter tout livre de théorie quantique des champs postérieur à 1975, par exemple [IZ], [PS], [Wf], [Z-J].

Sur les aspects “groupistes” des théories de jauge, voir L. O’Raifeartaigh, *op. cit.*.

Une très bonne revue de la grand-unification est donnée dans *Introduction to unified theories of weak, electromagnetic and strong interactions - SU(5)*, A. Billoire et A. Morel, rapport Saclay DPh-T/80/068.

Pour une revue historique de ces développements, voir *Broken Symmetries*, note du Comité Nobel, 2008,

http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2008/phyadv08.pdf

Pour une revue détaillée du Modèle Standard et une compilations de toutes les propriétés connues des particules élémentaires, voir *The Review of Particle Physics*, sur <http://pdg.lbl.gov/> déjà cité au Chap. 4.

Exercices.**A. Champ de jauge non abélien**

1. Compléter les démonstrations de (1.21) et (1.22).
2. Pour un champ de jauge non abélien A , soit F son tenseur de champ. Montrer que la dérivée covariante de F est telle que

$$D_{\mu a}^b F_{\nu\rho b} t^a = [D_{\mu}, F_{\nu\rho}] = \partial_{\mu} F_{\nu\rho} - [A_{\mu}, F_{\nu\rho}] .$$

Démontrer alors l'identité

$$[D_{\mu}, F_{\nu\rho}] + [D_{\nu}, F_{\rho\mu}] + [D_{\rho}, F_{\mu\nu}] = 0 .$$

Rappeler quelle est la version abélienne de cette identité et son interprétation.

3. Soit l'opérateur $\mathcal{D} = \not{\partial} - \not{A}$ agissant sur des fermions de Dirac dans la représentation R . On veut calculer \mathcal{D}^2 . En écrivant $D_{\mu} D_{\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = \frac{1}{2} D_{\mu} D_{\nu} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} + \frac{1}{2} [D_{\mu}, D_{\nu}] \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}$, montrer qu'on peut écrire \mathcal{D}^2 comme somme de $D^2 = D_{\mu} D^{\mu}$ et d'un terme de la forme $a F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$, où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$. Calculer a .

B. Facteurs groupistes...

1. *Opérateurs de Casimir* (cet exercice aurait dû se trouver au chapitre 1 !)

Soient G un groupe de Lie simple et compact de dimension d , R une de ses représentations, que l'on suppose irréductible et unitaire. Soient t_a une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G , T_a ses représentants dans la représentation R . Les t_a et T_a sont choisis antihermitiens. On considère alors la forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie définie par

$$(X, Y)^{(R)} = \text{tr}(T_a T_b) x^a y^b$$

si $X = x^a t_a$ et $Y = y^b t_b \in \mathfrak{g}$ (avec sommation sur les indices répétés).

- a) Démontrer que cette forme est invariante en ce sens que

$$\forall Z \in \mathfrak{g} \quad ([X, Z], Y)^{(R)} + (X, [Y, Z])^{(R)} = 0 .$$

On rappelle que toute forme bilinéaire invariante sur une algèbre de Lie simple est proportionnelle à la forme de Killing.

- b) Démontrer que l'on peut choisir une base des t_a et donc des T_a telle que

$$\text{tr}(T_a T_b) = -T_R \delta_{ab}$$

avec T_R un coefficient dépendant de la représentation.

- c) Quel est le signe de T_R ?
 d) On considère alors l'opérateur de Casimir quadratique

$$C_2^{(R)} = - \sum_{\alpha} (T_{\alpha})^2 .$$

Sur combien de valeurs de a somme-t-on dans cette expression ?

- e) Rappeler pourquoi $C_2^{(R)}$ est un multiple de l'identité dans l'espace de représentation de R

$$C_2^{(R)} = c_2(R) \mathbb{I} .$$

- f) En quoi les hypothèses de simplicité de G et d'irréductibilité de R sont-elles importantes pour ce résultat ?
 g) Quel est le signe de $c_2(R)$? Justifier.
 h) Montrer que T_R est relié à la valeur de l'opérateur de Casimir quadratique $c_2(R)$. Pour cela, on pourra calculer de deux façons différentes la quantité

$$\text{tr} \sum_{\alpha} (T_{\alpha})^2 .$$

- i) À quoi se réduit cette relation pour la représentation adjointe de G ?
 j) On normalise les générateurs (antihermitiens) de $SU(N)$ à être tels que dans la représentation de définition $\text{tr} T_a T_b = -\frac{1}{2} \delta_{ab}$, soit $T_f = \frac{1}{2}$. Cela est-il bien vérifié par les générateurs infinitésimaux $i \frac{\sigma_a}{2}$ de $SU(2)$? Quelle est alors la valeur de c_2 dans cette représentation de définition ?

2. Calculs de traces et de Casimir dans les représentations de $SU(N)$

- a) Montrer que l'expression (3.10) du chap. 3 (modifiée par un facteur 2 !) $c_2(\Lambda) = \frac{1}{2} \langle \Lambda, \Lambda + 2\rho \rangle$ se réécrit $c_2(\Lambda) = \frac{1}{2} (\langle \Lambda + \rho, \Lambda + \rho \rangle - \langle \rho, \rho \rangle)$, soit pour $SU(N)$, en utilisant les expressions (3.8) et (3.19) du chap 3

$$c_2(\Lambda) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N-1} \left([(\lambda_i + 1)^2 - 1] i(N - i) + 2 \sum_{j=i+1}^{N-1} [(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1) - 1] i(N - j) \right) .$$

- b) Calculer cette expression pour la représentation de définition. La valeur obtenue est-elle en accord avec celle trouvée à la question 1.j) ci-dessus ?
- c) Rappeler pourquoi le poids le plus haut de la représentation adjointe est la plus haute racine (notée θ dans l'appendice A du chap 3). Pourquoi l'expression $\theta = \Lambda_1 + \Lambda_{N-1}$ est-elle en accord avec ce qu'on sait de la représentation adjointe ?
- d) Calculer la valeur de $c_2(\Lambda)$ pour la représentation adjointe.
- e) Vérifier cette valeur pour $SU(2)$ par le calcul direct de $c_2(\text{adj})$.
- f) Quelle est la valeur de T_{adj} qu'on en déduit, au vu de la question 1.i) ?

3. Coefficients des anomalies

Avec les mêmes notations et conventions que précédemment,

- a) Dans le calcul de certains diagrammes de Feynman dans une théorie de jauge sur le groupe G , on rencontre le coefficient

$$d_{\alpha\beta\gamma} = \text{tr} (T_\alpha (T_\beta T_\gamma + T_\gamma T_\beta)) .$$

Montrer que $d_{\alpha\beta\gamma}$ est complètement symétrique dans ses trois indices.

- b) On rappelle que la représentation est dite réelle ou *pseudoréelle* si elle est (unitairement) équivalente à sa conjuguée, donc si dans la base où les T_α sont antihermitiens, on peut trouver une matrice unitaire U telle que le complexe conjugué de chaque T_α vérifie

$$(T_\alpha)^* = UT_\alpha U^{-1} .$$

Montrer que si cette condition est satisfaite, $d_{\alpha\beta\gamma}$ est identiquement nul. Cette condition est importante pour assurer la cohérence de la théorie de jauge, c'est la condition de compensation des anomalies.

- c) La représentation de spin $\frac{1}{2}$ de $SU(2)$ est-elle pseudoréelle ? Celle de spin j ? Justifier votre réponse.
- d) Donner deux exemples de représentations (pas nécessairement irréductibles) non triviales de $SU(3)$ qui sont pseudoréelles, et deux qui ne le sont pas.
- e) Que vaut le coefficient d pour le groupe $U(1)$ et une représentation de charge q ?

C. Brisure spontanée de $SU(2)$

On considère une théorie de jauge de groupe $SU(2)$ couplée à un champ de bosons $\vec{\Phi}$ de spin 1, considéré comme un vecteur de dimension 3. On note $V(\vec{\Phi}^2)$ le potentiel de ce champ.

1. Écrire le lagrangien et les transformations de jauge des champs \vec{A}_μ et $\vec{\Phi}$.
2. On suppose qu'il y a brisure spontanée de symétrie : le champ $\vec{\Phi}$ acquiert une vev v selon une direction, par exemple 3 : $\langle \vec{\Phi} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$. Quel est le groupe de symétrie résiduel ? Quel sera l'effet sur le champ A_μ ? Décrire les champs et particules physiques après brisure de symétrie.

Problème. Théories de jauge sur réseau

Dans tout ce problème, G désigne un groupe de Lie compact, $\chi^{(\rho)}$ le caractère de sa représentation irréductible unitaire ρ .

1. Montrer que les relations d'orthogonalité des $\mathcal{D}^{(\rho)}$ impliquent les formules suivantes :

$$\int_G \frac{d\mu(g)}{v(G)} \chi^{(\rho)}(g \cdot g_1 \cdot g^{-1} \cdot g_2) = \frac{1}{n_\rho} \chi^{(\rho)}(g_1) \chi^{(\rho)}(g_2), \quad (4.1)$$

et

$$\int_G \frac{d\mu(g)}{v(G)} \chi^{(\rho)}(g \cdot g_1) \chi^{(\sigma)}(g^{-1} \cdot g_2) = \frac{\delta_{\rho, \sigma}}{n_\rho} \chi^{(\rho)}(g_1 \cdot g_2). \quad (4.2)$$

Rappeler pourquoi une représentation de G peut toujours être considérée comme unitaire et montrer qu'alors

$$\chi^{(\rho)}(g^{-1}) = \chi^{(\bar{\rho})}(g) = (\chi^{(\rho)}(g))^*, \quad (4.3)$$

où $\bar{\rho}$ est la représentation conjuguée de ρ .

On fera un usage fréquent de ces trois relations dans la suite.

2. Soit χ le caractère d'une représentation réelle r (pas nécessairement irréductible) de G , β un paramètre réel.

a) Montrer que l'on peut développer $\exp \beta \chi(g)$ sur les caractères des représentations irréductibles de G selon

$$e^{\beta \chi(g)} = \sum_{\rho} n_{\rho} b_{\rho} \chi^{(\rho)}(g),$$

avec des fonctions $b_{\rho}(\beta)$.

Exprimer la fonction $b_{\rho}(\beta)$ à l'aide d'une intégrale sur le groupe.

En utilisant (4.3), montrer que les fonctions $b_{\rho}(\beta)$ sont réelles, $b_{\rho}(\beta) = (b_{\rho}(\beta))^* = b_{\bar{\rho}}(\beta)$.

b) Montrer que b_{ρ} est non nul pourvu que la représentation ρ apparaisse dans une puissance tensorielle $r^{\otimes n}$.

c) Pour $G = \text{SU}(2)$ et $r = (j = \frac{1}{2})$, la représentation de spin $\frac{1}{2}$, la condition du b) est-elle satisfaite pour tout ρ ? Pourquoi ?

Si $r = (j = 1)$, quelles sont les représentations pour lesquelles b_ρ est a priori nul ?

d) Pour $G = \text{SU}(3)$ et $\chi = \chi^{(3)} + \chi^{(\bar{3})}$, montrer que b_ρ est non nul pour tout ρ .

Pour $\beta \rightarrow 0$, quel est le comportement dominant de $b_a(\beta)$ si a désigne la représentation adjointe de $\text{SU}(3)$? Plus généralement quel est le comportement dominant de $b_\rho(\beta)$ où ρ est la représentation de plus haut poids $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$?

3. On définit un modèle de mécanique statistique à d dimensions de la façon suivante. Sur un réseau hypercubique de dimension d et de maille a , les degrés de liberté sont attachés aux liens entre sites voisins et prennent leur valeur dans le groupe compact G . A chaque lien orienté $\ell = \vec{ij}$ on associe l'élément de G noté $g_\ell = g_{ij}$, à $-\ell = \vec{ji}$, on associe $g_{ji} = g_\ell^{-1}$. A chaque carré élémentaire (ou "plaquette") $p = ijkl$, on associe le produit des éléments des liens :

$$g_p = g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{kl} \cdot g_{li}$$

et l'"énergie" d'une configuration de ces variables est donnée par

$$E = - \sum_{\text{plaquettes } p} \chi(g_p) \tag{4.4}$$

où χ est, comme à la question 2, le caractère d'une certaine représentation réelle du groupe. Le poids de Boltzmann est donc

$$e^{-\beta E} = \prod_p e^{\beta \chi(g_p)} \quad , \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

et la fonction de partition s'écrit

$$Z = \prod_{\text{liens } \ell} \int_G \frac{d\mu(g_\ell)}{v(G)} \prod_{\text{plaquettes}} e^{\beta \chi(g_p)} . \tag{4.5}$$

a) Montrer que l'énergie E est invariante par redéfinition des g_{ij} selon $g_{ij} \mapsto g_i \cdot g_{ij} \cdot g_j^{-1}$, où $g_i \in G$, (c'est une invariance *locale*, l'analogie dans ce formalisme discret de l'invariance de jauge étudiée dans ce chapitre), et que E ne dépend pas de l'orientation des plaquettes.

b) On cherche à mieux comprendre la relation avec le formalisme du § 1. Les degrés de liberté g_{ij} représentent les variables de chemin définies en (1.20), $g_{ij} = g(j, i)$ le long de l'arête du site i au site j

$$g_{ij} \equiv P \exp \int_{l=\vec{ij}} A_\mu dx^\mu$$

- Pour une maille a du réseau petite, montrer en utilisant par exemple la formule de BCH et en développant au premier ordre non nul que

$$g_p = \exp(a^2 F_{\mu\nu} + o(a^2))$$

où μ et ν désignent les directions du bord de la plaquette p . (On s'intéresse ici à une version euclidienne de la théorie de jauge, et la position des indices μ, ν n'importe pas.) Montrer alors que l'énergie E_p (4.4) s'écrit

$$E_p \sim \text{const. } a^4 (F_{\mu\nu})^2 + \text{const.}'$$

où on déterminera la première constante en fonction de la représentation choisie pour χ .

- Expliquer pourquoi le paramètre β de la question 3 s'identifie (à un facteur près) à l'inverse du couplage g^2 de la théorie de jauge continue. En fait il s'agit plutôt de la constante de couplage "nue" (ou non renormalisée), pourquoi ?

On se restreint d'abord pour simplicité à $d = 2$ dimensions. Pour un réseau fini de \mathcal{N} plaquettes, par exemple un rectangle de taille $L_1 \times L_2$ (voir figure 1), on désire calculer Z . On choisit des "conditions aux bords libres", autrement dit les variables g_ℓ des bords du rectangle sont indépendantes. On s'intéresse aussi à la valeur moyenne $W^{(\sigma)}(C)$ de $\chi^{(\sigma)}(g_C)$ où g_C désigne le produit ordonné des g_ℓ le long d'une courbe fermée orientée C pour une certaine représentation irréductible σ de G

$$W^{(\sigma)}(C) := \langle \chi^{(\sigma)}(g_C) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{\text{liens } \ell} \int_G \frac{d\mu(g_\ell)}{v(G)} \chi^{(\sigma)} \left(\prod_{\ell \in C} g_\ell \right) \prod_p e^{\beta \chi(g_p)}. \quad (4.6)$$

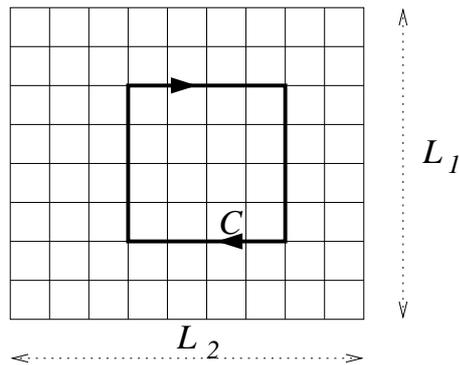


Figure 1.

- d)** Montrer en utilisant les résultats de la question 2 qu'on peut développer chaque $\exp \beta \chi(g_p)$ sur les caractères des représentations irréductibles de G selon

$$e^{\beta \chi(g_p)} = \sum_{\rho} n_{\rho} b_{\rho} \chi^{(\rho)}(g_p). \quad (4.7)$$

e) On insère dans (4.5) ou (4.6) le développement (4.7) pour chaque plaquette. Montrer que si deux plaquettes ont en commun un lien ℓ , les formules de la question 1 permettent d'intégrrer sur la variable g_ℓ de ce lien et que les deux représentations portées par les plaquettes s'identifient alors.

En utilisant alors de façon répétée ces formules de la question 1, montrer que l'on peut intégrer sur toutes les variables g_ℓ et que

$$Z = b_1^N \quad W^{(\sigma)}(C) = n_\sigma \left(\frac{b_\sigma}{b_1} \right)^A \tag{4.8}$$

où A désigne l'aire de la courbe C , c'est-à-dire le nombre de plaquettes qu'elle enferme, et l'indice 1 se rapporte à la représentation identité.

f) On se place maintenant en dimension $d = 3$. Les variables g_ℓ sont attachées aux liens d'un réseau cubique. L'énergie est toujours donnée par (4.4), où la somme court sur toutes les plaquettes de ce réseau tridimensionnel. Comme précédemment, $W^{(\sigma)}(C) = \langle \chi^{(\sigma)}(g_C) \rangle$ reçoit des contributions de configurations de plaquettes formant une surface de bord C .

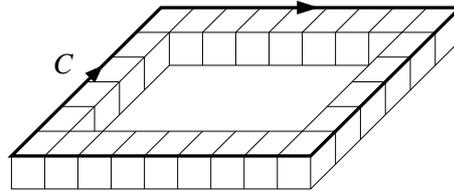


Figure 2.

On va voir que peuvent contribuer aussi à $W^{(\sigma)}(C)$ des configurations de plaquettes formant un tube qui s'appuie sur le contour C (figure 2).

– Montrer en effet que pour une telle configuration l'application répétée des formules (4.1) et (4.2) sur toutes les variables g_ℓ conduit à l'expression suivante

$$W^{(\sigma)}(C) \Big|_{\text{tube}} = \sum_{\rho} \left(\frac{b_\rho}{b_1} \right)^P \int_G \frac{d\mu(g)}{v(G)} \chi^{(\rho)}(g) \chi^{(\rho)}(g^{-1}) \chi^{(\sigma)}(g) \tag{4.9}$$

où P est le nombre de plaquettes constituant le tube.

– À quelle condition \mathcal{C} sur la représentation σ de la boucle C la contribution de la représentation ρ au membre de droite de (4.9) est-elle non nulle ?

– Donner un exemple pour $G=\text{SU}(2)$ de représentations σ pour laquelle cette condition \mathcal{C} n'est *jamais* satisfaite quelle que soit ρ , et donc ces configurations tubulaires absentes.

– À l'inverse donner un exemple (toujours pour $\text{SU}(2)$) d'un choix possible de σ qui la satisfait.

On admettra qu'à haute température (β petit), la contribution dominante à $W^{(\sigma)}(C)$ est du type (4.9) si la condition \mathcal{C} peut être satisfaite, et du type (4.8) dans le cas contraire.

4. L'évaluation de la valeur moyenne de la "boucle de Wilson" $W^{(\sigma)}(C)$ dans la limite d'une grande boucle C ayant la forme d'un rectangle $R \times T$ permet de calculer le potentiel $V_\sigma(R)$ entre deux particules chargées statiques séparées par la distance R , l'une portant la représentation σ du groupe et l'autre étant son antiparticule. Plus précisément on admettra que

$$V_\sigma(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log W^{(\sigma)}(C) .$$

Évaluer la dépendance de $V_\sigma(R)$ en R qui découle soit de (4.8), soit de la contribution à (4.9) due à la représentation ρ . Qu'en concluez-vous sur l'interaction entre les deux particules dans ces deux situations ?

Physiquement, ce type de considérations fournit un modèle discrétisé (sur réseau) et très simplifié ici (deux ou trois dimensions, pas de quarks) de la chromodynamique quantique. On peut répéter ce calcul en dimension plus élevée, où les résultats ci-dessus apparaissent comme le terme dominant dans un développement à β petit ("haute température"). Le fait que la valeur moyenne ci-dessus décroisse comme x^A ($x = b_\sigma/b_1 < 1$ pour β assez petit) pour de grandes aires est un signal du "confinement des quarks" dans cette théorie, c'est-à-dire de l'impossibilité de séparer une paire quark-antiquark à grande distance ...

★