Chapitre 000
Équations de Klein-Gordon et de Dirac

(Notes de cours de 2007)

1. Rappels de Mécanique Quantique

Les phénomènes de la physique quantique exhibent deux aspects fondamentaux, en rupture avec ceux de la physique classique :

- le caractère *discret* de certaines quantités physiques (énergie, moment cinétique, ...) lié à l'existence d'une nouvelle grandeur fondamentale, ayant les dimensions d'une action
$$\hbar = 1,055\ 10^{-34}\ \mathrm{kg.m^2/s}$$
(Exemples : spectre d'énergie de "quanta" $\hbar\omega$, ω une fréquence caractéristique du système ; moment cinétique = $\hbar \times$ générateur infinitésimal des rotations $\Leftrightarrow$ spectre $= \hbar\times$ entier ou demi-entier...)
- le caractère *probabiliste* des observations, qui force à abandonner le déterminisme de la physique classique.

1.1. Postulats

Le formalisme de la Mécanique Quantique rend compte de ces phénomènes en se basant sur les postulats suivants :

a) les états ("purs") d'un système sont décrits par les *rayons* d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire par les vecteurs de $\mathcal{H}$ à un facteur non nul près (ou encore par les vecteurs normés à une phase près). Ces vecteurs sont notés ψ, ou encore, selon la notation de Dirac $|\psi\rangle$ ("ket") et leur conjugué, $\langle\psi|$ ("bra"), avec un produit scalaire $\langle\psi|\phi\rangle$. Un tel vecteur dépend du temps : $|\psi(t)\rangle$. Ainsi, pour une particule sans degré de liberté supplémentaire (spin etc), dans l'espace à trois dimensions, $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Par opposition à un état pur, un mélange est représenté par une matrice densité...

b) Les quantités physiquement observables (ou simplement "observables") sont des opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$, $A = A^\dagger$.

En général, l'opérateur est non borné, (cf $A = \hat{x}$ dans $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$), et défini seulement sur un sous-ensemble $D(A)$ dense dans $\mathcal{H}$.

c) Dans une mesure de A, on n'observe que les valeurs $\alpha \in \mathrm{Spec}(A)$. On notera P_I le projecteur spectral sur l'intervalle $I = [\alpha_1, \alpha_2]$.

d) La probabilité de mesurer $\alpha \in I$ dans l'état $|\psi\rangle$ (c'est-à-dire le pourcentage d'occurrence de la valeur α parmi celles obtenues dans un grand nombre de mesures répétées sur des systèmes identiques, préparés dans le même état) est

$$p(I) = \frac{\langle\psi|P_I|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

La *valeur moyenne* de A est donc $\langle A\rangle = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$.
Après mesure de la valeur $a \in I$ pour A, il y a "réduction du paquet d'onde" $\psi \mapsto P_I\psi$.

e) Parmi les observables, l'opérateur hamiltonien H joue un rôle privilégié : il régit l'évolution dans le temps selon l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \ .$$

1.2. Principe de correspondance

Ces postulats sont complétés par le "principe de correspondance" qui suggère ce que doit être l'opérateur A du formalisme quantique, étant donné son analogue classique. Ce principe fait aussi appel à l'observation que dans le passage mécanique classique $\rightarrow$ mécanique quantique, on passe du crochet de Poisson au commutateur

$$\{f,g\} \rightarrow [f_{\rm op}, g_{\rm op}] = -i\hbar\,\{f,g\} \ .$$

En particulier on a le commutateur canonique entre les opérateurs $q_{\rm op}$ et $p_{\rm op}$ de position et d'impulsion, soit

$$[q_{\rm op}, p_{\rm op}] = i\hbar$$

(opérateurs conjugués). Noter cependant que ce principe de correspondance n'est pas sans ambiguïté : il ne dit rien sur l'ordre des opérateurs p et q à adopter pour passer d'une fonction $f(p,q)$ à sa version quantique $f_{\rm op}(p_{\rm op}, q_op)$. On omettra l'indice "op" dans la suite chaque fois que cela ne prêtera pas à confusion.

Notons $|q\rangle$ l'état propre de l'opérateur $q_{\rm op}$ de valeur propre q

$$q_{\rm op}|q\rangle = q|q\rangle \ , \qquad \langle q|q'\rangle = \delta(q-q') \qquad \int dq|q\rangle\langle q| = Id \ .$$

À la description d'un état par un vecteur normalisé ψ (à une phase près), on peut préférer celle par sa *fonction d'onde* $\psi(q)$, obtenue par produit scalaire

$$\psi(q) = \langle q|\psi\rangle \ .$$

L'action de $p_{\rm op}$ sur ψ se traduit en un opérateur différentiel sur $\psi(q)$

$$p_{\rm op} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q} \qquad i.e. \qquad \langle q|p_{\rm op}\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi(q)$$

de telle sorte que $[q_{\rm op}, p_{\rm op}] = i\hbar$ est bien vérifiée. En particulier, pour les états propres notés $|p\rangle$ de $p_{\rm op}$

$$p_{\rm op}|p\rangle = p|p\rangle$$

on a les fonctions d'onde $\psi_p(q) = \langle q|p\rangle$ satisfaisant

$$\langle q|p_{\rm op}|p\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

d'où

$$\langle q|p\rangle = \psi_p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\frac{i}{\hbar}p.q\ ,$$

(avec une normalisation conventionnelle).

Toutes les considérations précédentes s'étendent bien sûr à des vecteurs positions et impulsions à d dimensions euclidiennes ou minkowskiennes. Résumons donc le principe de correspondance, en notant désormais les coordonnées de positions par $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ ou (x, y, z)

$$\text{Energie } E \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$
$$\text{Impulsion } p^i \mapsto -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}$$

ou en notations minkovskiennes,

$$p^\mu \mapsto i\hbar\partial^\mu = (i\partial^0, -i\boldsymbol{\nabla})\ .$$

2. Équation de Klein-Gordon

Le principe de correspondance appliqué à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste, $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ conduit à l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde notée maintenant $\psi(\mathbf{x}, t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\Delta}{2m} + V(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x}, t)\ , \tag{2.1}$$

(avec $\Delta = \nabla^2$ le laplacien).

De la même façon, il est suggéré d'appliquer le principe de correspondance à l'expression de l'énergie d'une particule relativiste libre, $E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$, ce qui conduit à l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2\Delta + m^2c^2\right)\psi(\mathbf{x},t) = 0 \ . \tag{2.2}$$

On a déjà rencontré au chapitre 0 le d'Alembertien $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$: c'est le laplacien dans la géométrie minkovskienne $\Box = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. À partir de maintenant, nous adoptons des unités telles que $\hbar = c = 1$, si bien que nous écrirons l'équation de Klein-Gordon libre sous la forme

$$\left(\Box + m^2\right)\psi = 0 \ . \tag{2.2$'$}$$

Couplage minimal au champ électromagnétique

On peut écrire aisément une équation de Klein-Gordon couplée au champ électromagnétique si on admet le principe de couplage minimal, qui consiste à remplacer les dérivées ∂_μ par une dérivée covariante (covariante vis à vis des transformations de jauge)

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + iqA_\mu(x) \ . \tag{2.3}$$

On écrira donc

$$\left((\partial + iqA)^\mu(\partial + iqA)_\mu + m^2\right)\psi = 0 \tag{2.4}$$

Exercice : cette équation découle-t-elle d'un lagrangien ? Si oui, lequel ? De quelle transformation sur ψ faut-il accompagner une transformation de jauge $A_\mu \to A_\mu + \partial\phi(x)$?

L'équation (2.2), qui est bien invariante relativiste (et découle d'un principe d'action comme on a vu au chapitre précédent), constitue-t-elle une équation décente pour une fonction d'onde ? Il y a plusieurs manifestations des difficultés rencontrées dans cette interprétation :

1) Les niveaux d'énergie qui découlent de (2.2), sont solutions de $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ avec les deux signes $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. L'existence de niveaux d'énergie négative non bornée inférieurement, donc arbitrairement basse, est un problème majeur, qui semble indiquer une instabilité de la théorie.
2) Peut-on arbitrairement se restreindre aux racines positives, en ne gardant que $H = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$? L'évolution d'une particule libre décrite par cet hamiltonien semble violer la causalité. Pour deux points séparés x, y par un intervalle de genre espace,

donc en principe sans communication causale, on trouve que l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution

$$\langle \mathbf{x}, t | e^{-iHt} | \mathbf{y}, 0 \rangle = \int d^3p \, e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}.(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

ne s'annule pas pour $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 > t^2$, cf cours de C. Bachas. et [PS, p 14].

3) Si la théorie décrite par (2.2) admet bien un courant conservé dans l'évolution temporelle, à savoir

$$j_\mu = \frac{i}{2m}(\psi^* \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi)^* \psi) \tag{2.5}$$

satisfaisant $\partial^\mu \psi_\mu = 0$, on constate que la densité $\rho(x) = j_0$ n'est pas définie positive. Elle ne saurait représenter la densité de probabilité de présence de la particule décrite par ψ, qu'on attend dans une théorie sensée.

Toutes ces incohérences vont être levées par l'introduction de la théorie quantique des champs, une théorie décrivant un système à nombre arbitraire de particules, dans laquelle l'objet ψ est promu du rôle de fonction d'onde à celui d'opérateur capable de créer et annihiler ces particules. C'est le changement de point de vue traditionnellement appelé *seconde quantification*.

Nous examinerons maintenant une autre équation d'onde relativiste, originellement proposée par Dirac pour pallier aux insuffisances de l'équation de Klein-Gordon. L'équation de Dirac conduit elle aussi à des incohérences, également levées par la théorie quantique. Néanmoins son étude se révèle très profitable, sur le plan physique –elle offre une excellente description de phénomènes de basse énergie, atome d'hydrogène, etc– et sur le plan technique –représentations spinorielles, etc– qui seront utiles dans le contexte de la théorie quantique des champs.

3. Équation de Dirac

3.1. Les matrices γ de Dirac

Selon l'idée de Dirac, essayons de trouver une racine carrée à l'opérateur $\mathbf{p}^2+m^2 = -\Delta+m^2$ en utilisant une représentation matricielle

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\nabla} + \beta m\right)\psi =: H\psi \tag{3.1}$$

où la fonction d'onde ψ a maintenant plusieurs composantes, supposées indépendantes, et $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont des matrices hermitiennes, de telle façon que l'opérateur H défini par le membre de droite soit lui même hermitien. On demande aussi que (3.1) soit compatible avec (2.2), chaque composante de ψ satisfaisant cette équation.

Si les matrices satisfont les relations d'*anticommutation* [1]

$$\begin{aligned}\{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad \text{si } i \neq j \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= I\end{aligned} \tag{3.2}$$

on calcule

$$\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\nabla} + \beta m\right)^2 = -\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 = -\Delta + m^2$$

et l'on retrouve bien l'équation de Klein-Gordon en calculant $(i\partial_t)^2\psi$. Mettons l'équation de Dirac (3.1) sous forme covariante en introduisant le nouvel ensemble de matrices

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \gamma_0 = \beta \\ \gamma^i &= -\gamma_i = \beta\alpha^i\end{aligned} \tag{3.3}$$

qui satisfont donc

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I \ . \tag{3.4}$$

Dans la suite, la matrice identité I du membre de droite de (3.4) (d'une dimension pas encore fixée !) sera souvent considérée comme implicite et omise. Noter que puisque les matrices α^i et β sont hermitiennes et anticommutent, la matrice γ^0 est hermitienne mais les γ^i, $i = 1, 2, 3$ sont *antihermitiennes*. Il sera utile d'utiliser aussi les matrices γ avec indices covariants

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3) \ . \tag{3.5}$$

ainsi que la notation

$$\not{a} := a^\mu \gamma_\mu \ . \tag{3.6}$$

On vérifie immédiatement comme conséquence de (3.4) la relation d'usage constant

$$\not{a}^2 = a^2 = a_\mu a^\mu \ . \tag{3.7}$$

On peut maintenant récrire l'équation de Dirac sous la forme

$$(i\not{\partial} - m)\psi \equiv (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \ , \tag{3.8}$$

et on se réfère à l'opérateur différentiel $(i\not{\partial} - m)$ comme l'opérateur de Dirac. On vérifie que

$$(i\not{\partial} - m)(i\not{\partial} + m) = (i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m) = -(\Box + m^2) \ .$$

[1] L'anticommutateur $\{\ ,\ \}$ est quelquefois noté $[\ ,\ ]_+$ par certains auteurs.

3.2. Une représentation explicite des matrices γ

Notons d'abord qu'à deux ou trois dimensions d'espace-temps, avec la métrique "minkowskienne" $(+,-)$ ou $(+,-,-)$, on connaît une solution de (3.4) en termes des matrices de Pauli[2]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{3.9}$$

qui satisfont les relations bien connues

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \text{donc} \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \ .$$

Cela permet de choisir à deux ou trois dimensions,

$$\beta = \sigma_1 \qquad \alpha_1 = \sigma_2 \qquad \text{et éventuellement} \qquad \alpha_2 = \sigma_3 \ .$$

À quatre dimensions, cela suggère de construire les matrices cherchées comme blocs de matrices de Pauli. On peut prendre par exemple

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} , \tag{3.10}$$

ce qui constitue la "représentation de Dirac", mais il existe d'autres choix utiles, comme on le verra par la suite.

Noter que les matrices (3.10) satisfont aussi la propriété de conjugaison suivante

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \ . \tag{3.11}$$

3.3. L'algèbre de Clifford des matrices γ. La "γ-gymnastique".

L'algèbre engendrée par l'identité I et des générateurs γ^μ satisfaisant (3.4) est ce qu'on appelle une algèbre de Clifford. Cherchons en une base linéaire. On introduit la notation

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \ . \tag{3.12}$$

On vérifie que ${\gamma^5}^\dagger = -i\gamma_3^\dagger\gamma_2^\dagger\gamma_1^\dagger\gamma_0^\dagger = \cdots = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$ est hermitienne et que

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \qquad \text{et} \qquad (\gamma^5)^2 = I \ . \tag{3.13}$$

[2] N.B. Pour les matrices de Pauli, on ne distinguera pas les positions supérieure ou inférieure de l'indice : $\sigma^i \equiv \sigma_i$.

Introduisons encore une autre notation très utile dans la suite :

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{3.14}$$

avec cette fois les commutateurs des matrices γ. Le facteur i rend les matrices σ_{ij} hermitiennes, et les σ_{0i} antihermitiennes. Noter que γ^5 commute avec les $\sigma_{\mu\nu}$.

Vérifier que dans la représentation (3.10)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{0j} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} . \tag{3.15}$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le résultat

Proposition L'algèbre (de Clifford) des matrices γ est engendrée linéairement par les $4^2 = 16$ matrices suivantes $I,\ \gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu},\ \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5$.

Cela permet de démontrer le théorème important suivant

Théorème *Toutes les solutions de (3.4) sont équivalentes, et toutes les solutions de (3.4)-(3.11) [en dimension 4 ?] sont unitairement équivalentes. Autrement dit, pour toute paire de matrices γ_μ, γ'_μ satisfaisant (3.4), il existe une matrice inversible S telle que*

$$\exists S \text{ inversible} \qquad \gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1} \ ;$$

si en outre γ_μ et γ'_μ satisfont (3.11)

$$\exists U \text{ unitaire} \qquad \gamma'_\mu = U\gamma_\mu U^\dagger \ . \tag{3.16}$$

La démonstration est laissée en exercice.

Dans le reste de ce paragraphe, toutes les identités énoncées ne sont conséquences que de (3.4) et éventuellement de (3.11), et sont donc indépendantes de la représentation choisie pour ces matrices.

Exercices Montrer que chacune des seize matrices de la liste précédente a un carré égal à $\pm I$ et que la trace de chacune (sauf I) s'annule. Vérifier leur indépendance linéaire et en déduire la proposition précédente. Pour chacune des matrices Γ de cette liste, comparer $\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$ et Γ.

Que peut-on dire de la matrice $i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$?

Vérifier la commutation de γ_5 et de $\sigma^{\mu\nu}$.

Montrer la décomposition de $\gamma_5\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma}$.

[En dimension paire quelconque $d = 2n$, une base linéaire de l'algèbre de Clifford est donnée par les produits antisymétrisés $1, \gamma_\mu, \gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]}, \cdots, \gamma_{[\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_d]}$. Quelle est la dimension de cette algèbre ? Quelle est la dimension minimale à donner aux matrices γ ?]

Des identités d'usage très courant dans les calculs sont les suivantes

$$\begin{array}{rlrl} \not a \not b & = a.b - i\sigma_{\mu\nu}a^\mu b^\nu & & \\ \gamma^\mu\gamma_\mu = 4 & & \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu & \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} & & \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu & \\ \gamma^\mu\sigma^{\rho\sigma}\gamma_\mu = 0 & & \gamma^\mu\sigma^{\nu\rho}\gamma^\sigma\gamma_\mu = 2\gamma^\sigma\sigma^{\nu\rho} & \end{array} \tag{3.17}$$

etc, etc. C'est évidemment un bon exercice de les vérifier.

Finalement, des traces des matrices de l'algèbre interviennent aussi souvent à la fin des calculs. Il est bon de savoir que

$$\mathrm{tr} I = 4 \qquad \mathrm{tr}\gamma^\mu = 0 \qquad \mathrm{tr}\gamma_5 = 0\ , \tag{3.18}$$

de se rappeler que la trace d'un nombre impair de matrices γ^μ, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, s'annule (pourquoi ?), par exemple

$$\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu = 0 \tag{3.19}$$

et de savoir calculer les autres, telles

$$\begin{array}{ll} \mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} & \mathrm{tr}\sigma^{\mu\nu} = 0 \\ \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0 & \mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu \quad = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ . & \end{array} \tag{3.20}$$

3.4. Covariance relativiste. Représentation spinorielle. Parité

Pour démontrer l'invariance relativiste de l'équation de Dirac, il nous faut trouver la transformation de $\psi(x)$ sous l'effet d'une transformation de Lorentz de son argument x. Soit $x' = \Lambda x$ une transformation de Lorentz faisant passer des coordonnées dans un premier référentiel à celles dans un second[3]. On cherche une transformation $\psi \to \psi'$ telle que l'équation de Dirac prenne la même forme dans les deux référentiels,

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\psi(x) = 0 \tag{3.21a}$$

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m)\psi'(x') = 0\ . \tag{3.21b}$$

Supposons la transformation $\psi \to \psi'$ linéaire et écrivons-la sous la forme

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)\ . \tag{3.22}$$

[3] Il s'agit là du point de vue *passif.* Un autre point de vue, dit actif, totalement équivalent au passif dans ses implications, consiste à considérer que x' est la coordonnée décrivant dans le même référentiel un autre système, obtenu à partir de l'original par la transformation Λ.

La matrice cherchée $S(\Lambda)$ est de dimension 4, elle est donc une combinaison linéaire des 16 matrices de la base de l'algèbre de Clifford du paragraphe précédent. Cette matrice doit aussi être inversible (transformation inverse $x' \to x$). L'équation (3.21b) se récrit donc

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - m)S(\Lambda)\psi(x) = 0$$

et ceci doit être une conséquence de (3.21a), c'est-à-dire

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \ . \tag{3.23}$$

Cherchons $S(\Lambda)$ pour une transformation infinitésimale. On écrit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \qquad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu + O(\omega^2)$$

avec $\omega_{\mu\nu}$ antisymétrique (cf. chapitre 0, § 4.2). Montrons que

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots \\ S^{-1}(\Lambda) &= I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots \end{aligned} \tag{3.24}$$

où les points de suspension représentent des termes d'ordre supérieur en ω et les matrices σ sont celles qui ont été introduites plus haut en (3.14),

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{3.14}$$

satisfont bien (3.23). Cela est bien le cas puisque

$$\frac{i}{4}[\sigma_{\rho\sigma}, \gamma^\mu]\omega^{\rho\sigma} = \omega^{\mu\nu}\gamma_\nu \ ,$$

comme l'identité

$$[\sigma_{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = -2i(\delta^\mu{}_\rho\gamma_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\gamma_\rho)$$

le montre, ce qui achève la démonstration. Pour une transformation finie, $S(\Lambda)$ est donc de la forme

$$S(\Lambda) = e^{-(i/4)\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \ . \tag{3.25}$$

On rappelle de la discussion du § 3.3 que les σ_{ij} sont hermitiennes, les σ_{0i} antihermitiennes, donc les $S(\Lambda)$ sont unitaires pour les rotations usuelles de $\mathbb{R}^3$, mais hermitiennes pour un "boost".

Remarque. On vient de montrer que les matrices $\sigma_{\mu\nu}$ fournissent une solution à (3.23). Est-ce la seule ? Pourquoi est-elle naturelle ? Ces questions seront réexaminées plus bas, au chap. ?.

Moment angulaire

Pour terminer cette discussion, nous revenons à l'opérateur de spin covariant W^μ, construit à partir de P^μ et de l'opérateur de moment angulaire $J^{\nu\rho}$, générateur infinitésimal des transformations de Lorentz (cf chap. 0, § 4.2)

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma \ . \tag{3.26}$$

Comme on le verra plus bas au chapitre ? dans l'étude des représentations du groupe de Poincaré, si M^2 désigne la valeur propre de l'opérateur P^2, les valeurs propres possibles de W^2 sont

$$W^2 = -M^2S(S+1) \tag{3.27}$$

où S est le spin, entier ou demi-entier, de la représentation. Pour l'équation de Dirac (ou de Klein-Gordon) libre, $P^\mu = i\partial^\mu$ donc $P^2 = -\partial^2 = m^2$. Selon la discussion du chapitre 1, on identifie $J_{\mu\nu}$ en calculant

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= (I - \frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu})\psi(x)\\ &= (I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu})\psi(x^\rho - \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma)\\ &= (I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + x_\mu\omega^{\mu\nu}\partial_\nu)\psi(x)\end{aligned}$$

d'où

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \ . \tag{3.28}$$

On calcule alors

$$W_\mu = \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma \tag{3.29}$$

et un dernier calcul, faisant appel à l'une des identités sur les produits de tenseurs ϵ du chapitre 1 (§ 2.2), conduit à

$$W^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)m^2 \tag{3.30}$$

d'où il découle que le spin de la particule décrite par l'équation de Dirac est $\frac{1}{2}$.

Transformations discrètes P et T

Rappelons que le groupe de Lorentz a quatre *nappes* disconnexes, cf chap. 0, § 2.1. Nous avons examiné la covariance de l'équation de Dirac sous l'effet des transformations du groupe de Lorentz infinitésimales. Par intégration, les transformations finies sont celles qui sont dans la même composante connexe que l'identité. Il nous faut encore examiner le cas des transformations discrètes. Considérons d'abord la parité d'espace

$$x = (x^0, \mathbf{x}) \mapsto x' = \Lambda_P x = (x^0, -\mathbf{x}) \ , \tag{3.31}$$

avec

$$(\Lambda_P)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{3.32}$$

Selon le même argument qu'en (3.23), l'équation de Dirac garde la même forme dans les coordonnées x et x' si l'on peut trouver une matrice S_P, $\psi'(x') = S_P\psi(x)$, telle que S_P commute avec γ_0 et anticommute avec les γ^i, $i = 1, 2, 3$. Il est clair que tout multiple de la matrice γ^0 fait l'affaire et si on veut une transformation unitaire, il reste une phase arbitraire

$$\psi'(x') = \eta_P \gamma^0 \psi(x) \ . \tag{3.33}$$

L'opération $\mathcal{T}$ de renversement du temps $t \to -t$ devrait en principe pouvoir se décrire de manière analogue. Il y existe en fait une différence importante, liée au caractère nécessairement *anti*-linéaire de la transformation, dans un contexte de mécanique quantique.

Rappelons d'abord ce qu'on entend par opérateur antilinéaire. Un tel opérateur satisfait

$$U(\lambda|\phi\rangle + \mu|\psi\rangle) = \lambda^* U|\phi\rangle + \mu^* U|\psi\rangle$$

et son adjoint est défini par

$$\langle\phi|U^\dagger|\psi\rangle = \langle U\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|U\phi\rangle \ .$$

S'il est en outre unitaire, on a

$$\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle U\phi|U\psi\rangle^* \ ,$$

donc $\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$.

En mécanique quantique, la transformation $\mathcal{T}$ supposée unitaire (cf Théorème de Wigner au chapitre 3) laisse l'opérateur position $\mathbf{x}$ inchangé, mais change le signe des vitesses, donc de l'impulsion $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathcal{T}\mathbf{x}\mathcal{T}^\dagger = \mathbf{x} \\ \mathbf{p}' &= \mathcal{T}\mathbf{p}\mathcal{T}^\dagger = -\mathbf{p} \ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Les relations de commutation canoniques ne sont compatibles avec cette transformation que si $\mathcal{T}$ est antilinéaire

$$\begin{aligned}[x'_j, p'_k] &= -[x_j, p_k] = -i\hbar\delta_{jk} \\ &= \mathcal{T}[x_j, p_k]\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}i\hbar\delta_{jk}\mathcal{T}^\dagger\end{aligned}$$

Autre argument : $\mathcal{T}$ commute avec les translations dans le temps dont le générateur est l'hamiltonien : $\mathcal{T}iH\mathcal{T}^\dagger = -iH$ (puisque $t \to -t$). Si $\mathcal{T}$ était linéaire, on conclurait que $\mathcal{T}H\mathcal{T}^\dagger = -H$, ce qui est gênant si on veut que $\mathrm{Spec}(H) \geq 0$!

Revenant à l'équation de Dirac, on cherche donc une transformation antilinéaire $\psi(x) \to \psi'(x')$ où $x' = (-t, \mathbf{x})$. La transformation est de la forme

$$\psi'(x') = \eta_T S_T \psi^*(x) \ , \tag{3.35}$$

où S_T est une matrice 4×4 telle que l'équation pour ψ' obtenue par conjugaison de (3.1) ait la forme (3.1)

$$i\frac{\partial \psi'}{\partial t'} = \left(-\frac{1}{i}(S_T\boldsymbol{\alpha}^* S_T^{-1}).\boldsymbol{\nabla} + S_T\beta^* S_T^{-1} m\right)\psi'(x') \tag{3.36}$$

Cela est bien le cas si

$$S_T\boldsymbol{\alpha}^* S_T^{-1} = -\boldsymbol{\alpha} \qquad S_T\beta^* S_T^{-1} = \beta \ .$$

Dans la représentation usuelle des matrices γ, où $\alpha^{2*} = -\alpha^2$ tandis que les autres α et β sont réelles, il faut trouver S_T qui anticommute avec α^1 et α^3 et commute avec α^2 et β. On prend

$$S_T = -i\alpha^1\alpha^3 = i\gamma_1\gamma_3 \tag{3.37}$$

le facteur i étant choisi de façon à avoir $S_T^2 = I$.

3.5. Combinaisons bilinéaires de ψ et $\overline{\psi}$

Par conjugaison hermitique de (3.8), on a

$$i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} + m\psi^\dagger = 0$$

ce qu'on note aussi

$$\psi^\dagger(i \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^{\mu\dagger} + m) = 0 \ .$$

On introduit la notation

$$\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 \tag{3.38}$$

qui sera d'usage constant dans la suite. En utilisant (3.11) on a donc

$$\overline{\psi}(i \overleftarrow{\not\partial} + m) = 0 \ . \tag{3.39}$$

Par transformation de Lorentz, $\overline{\psi}$ se transforme selon

$$\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x)\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \tag{3.40}$$

y compris pour la parité, pour laquelle $\overline{\psi}(x') = \eta_P^* \overline{\psi}(x)\gamma^0$.

Nous allons maintenant étudier les différentes combinaisons bilinéaires $\overline{\psi}(x)\gamma^A\psi(x)$, où γ^A parcourt la base de l'algèbre de Clifford considérée plus haut. En utilisant (3.22), (3.40) et (3.23), on note que $\overline{\psi}\psi$ est un scalaire de Lorentz, $\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ un vecteur, $\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ un tenseur antisymétrique d'ordre 2, et $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ et $\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ respectivement un *pseudo*-scalaire et un *pseudo*-vecteur, ce qui veut dire que sous l'effet de la parité, ils reçoivent un signe opposé à celui d'un scalaire ou d'un vecteur.

Physiquement, le vecteur $j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ joue un rôle important. D'abord, en vertu des équations de Dirac satisfaites par ψ et $\overline{\psi}$, il est conservé

$$\partial^\mu j_\mu = \overline{\psi}(\overleftarrow{\not\partial} + \overrightarrow{\not\partial})\psi = 0 \ . \tag{3.41}$$

En outre, sa composante temporelle $\psi^\dagger\psi$ est définie positive, et il paraît donc qualifié pour le rôle de courant de probabilité, dans l'interprétation de ψ comme une fonction d'onde. (Rappelons notre échec à ce stade avec l'équation de Klein-Gordon, cf fin du § 2.) En fait, par la suite, en théorie quantique des champs, $\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ sera interprété comme le courant électromagnétique.

Les considérations précédentes nous permettent aussi de répondre à la question : l'équation de Dirac découle-t-elle d'un principe d'action ? La réponse est oui, l'action de Dirac libre s'écrit

$$S = \int d^4x\, \overline{\psi}(x)(i\not\partial - m)\psi(x) \ . \tag{3.42}$$

Dans le calcul des variations, on doit considérer les parties réelle et imaginaire de ψ comme indépendantes, ou ce qui revient au même, ψ et $\overline{\psi}$ comme indépendants, et on retrouve immédiatement (3.8) et (3.39). L'action est bien invariante relativiste.

Il est enfin important de noter que j_μ est le courant de Noether pour la transformation des champs

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x) \qquad \overline{\psi}(x) \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}(x) \ . \tag{3.43}$$

Sa conservation reflète l'invariance de l'action (3.42) pour de telles transformations indépendantes de x ("globales").

On peut aussi étudier l'effet d'une transformation *chirale*

$$\psi(x) \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x) \qquad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x) e^{i\alpha\gamma_5} \ , \tag{3.44}$$

d'une grande importance en physique hadronique. Montrer que le courant de Noether correspondant est $j^5_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$ et que sa divergence est

$$\partial_\mu j^{\mu\,5}(x) = 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi \ . \tag{3.45}$$

Exercice. Identités de Fierz [...]

3.6. Représentations de Weyl et de Majorana.

Selon une observation déjà faite, il est quelquefois utile de considérer d'autres représentations des matrices γ que celle donnée plus haut. Deux autres représentations sont souvent considérées :

(∗) la représentation de Weyl, ou représentation chirale, consiste à choisir γ^0 anti-bloc-diagonale, au contraire de (3.10)[4].

$$\gamma^0 = -\sigma_1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = i\sigma_2 \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.46}$$

On calcule alors

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \qquad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \ . \tag{3.47}$$

On constate que les matrices $\sigma^{\mu\nu}$ sont diagonales par blocs. Puisque les transformations $S(\Lambda)$ de (3.25) en sont des exponentielles, on en conclut que dans cette représentation, si on écrit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

les composantes ψ_L et ψ_R, spineurs à deux composantes, se transforment indépendamment sous l'effet des rotations d'espace et des "boosts"[5]. (Dans le langage de la théorie des

[4] Attention que d'autres auteurs peuvent avoir des conventions légèrement différentes, par exemple [PS].

[5] Cette conclusion est bien sûr indépendante de la représentation choisie. Si on définit les combinaisons $\psi_{\substack{R\\L}} = \frac{1}{2}(I \pm \gamma^5)\psi$, vecteurs propres de la chiralité γ^5 : $\gamma^5\psi_{\substack{R\\L}} = \pm\psi_{\substack{R\\L}}$, la commutation de γ^5 avec $\sigma_{\mu\nu}$ déjà notée plus haut, donc avec $S(\Lambda)$, implique que la chiralité est préservée par les transformations de Lorentz.

groupes qu'on étudiera plus tard, la représentation du sous-groupe de Lorentz propre $\mathcal{L}_+^\uparrow$ est manifestement "réductible".) Il est légitime de se demander pourquoi on ne s'est donc pas contenté de spineurs à deux composantes. La raison tient à la transformation de parité, effectuée par la matrice γ^0. C'est la parité qui mélange ψ_L et ψ_R (et rend la représentation du groupe entier de Lorentz irréductible).

Noter que dans cette représentation, l'équation de Dirac s'écrit

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & -i(\partial_0 - \vec\sigma.\vec\nabla) \\ -i(\partial_0 + \vec\sigma.\vec\nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{3.49}$$

et donc que le terme de masse couple les deux *spineurs de Weyl*.

Dit autrement, le terme de masse $\overline{\psi}\psi$ se récrit en termes de $\psi_{\substack{R\\L}} = \frac{1}{2}(I\pm\gamma^5)\psi$ et de $\overline{\psi}_{\substack{R\\L}} = \frac{1}{2}\overline{\psi}(I\mp\gamma^5)$ comme $\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L$. Il couple les deux chiralités.

En l'absence de terme de masse, si $m = 0$, les deux équations se découplent en

$$i(\partial_0 \pm \vec\sigma.\vec\nabla)\psi_{\substack{R\\L}} = 0$$

(cf plus bas au § 6, la discussion des particules de masse nulle).

$(*)$ La représentation de Majorana permet de bien prendre en compte les propriétés de *réalité* des spineurs. Si on choisit

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{3.50}$$

c'est-à-dire toutes les matrices γ purement imaginaires, l'opérateur différentiel $(i\partial\!\!\!/ - m)$ est purement réel et on peut en chercher des solutions réelles.

Exercice. Pour chacune de ces deux représentations, trouver quelle est la matrice unitaire U qui l'"entrelace" avec la représentation de Dirac, au sens de (3.16).

3.7. Matrices de Dirac en métrique euclidienne

Dans le cas euclidien à d dimensions, on cherche des matrices γ^μ, $\mu = 1, \cdots, d$, hermitiennes et satisfaisant

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} I \ . \tag{3.51}$$

Ces matrices engendrent une algèbre de Clifford de dimension (comme espace vectoriel) 2^d. Supposons d pair. La dimension de ces matrices est donc au moins $2^{d/2}$. On en donnera une construction explicite plus bas. Étant de telles matrices, la matrice

$$\gamma_{d+1} = i^{-d/2}\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_d$$

satisfait

$$\gamma_{d+1}^2 = I \qquad \{\gamma_{d+1}, \gamma_\mu\} = 0 \tag{3.52}$$

(le vérifier : d est pair !). On peut donc considérer que (3.51) s'applique à $\mu, \nu = 1, \cdots, d+1$.
Si d est impair, on peut prendre les $(d-1)$ matrices $\gamma_1, \cdots, \gamma_{d-1}$ de la dimension $d-1$ et leur adjoindre la matrice $\gamma_d = i^{-\frac{d-1}{2}}\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{d-1}$.

Construction explicite par produit tensoriel du cas $d = 2$.
À $d = 2$, on prend $\gamma_1 = \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2, \gamma_3 = \sigma_3$ (comparer avec le cas minkowskien au § 3.2). Ces matrices sont hermitiennes et de trace nulle. Puis on construit par récurrence, pour toute dimension d paire

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^{(d+2)} &= \sigma_1 \otimes \gamma_\mu^{(d)} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu^{(d)} \\ \gamma_\mu^{(d)} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \qquad \mu = 1, \cdots, d+1 \\ \gamma_{d+2}^{(d+2)} &= \sigma_2 \otimes I_d = \begin{pmatrix} 0 & -iI_d \\ iI_d & 0 \end{pmatrix} \\ \text{d'où} \qquad \gamma_{d+3}^{(d+2)} &= \sigma_3 \otimes I_d = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & -I_d \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.53}$$

(I_d est la matrice identité de dimensions $2^{d/2} \times 2^{d/2}$.) Ces matrices γ sont hermitiennes en toute dimension paire. Vérifier qu'elles satisfont bien les relations d'anticommutation. Il est aussi intéressant de savoir lesquelles sont des matrices symétriques. Par construction, si $\gamma_\mu^{(d)}$ est symétrique, resp. antisymétrique, alors $\gamma_\mu^{(d+2)}$ l'est aussi pour $\mu = 1, \cdots, d+1$ tandis que $\gamma_{d+2}^{(d+2)}$ est antisymétrique et $\gamma_{d+3}^{(d+2)}$ est symétrique. Donc en toute dimension paire,

$$\begin{aligned} &\gamma_1, \gamma_3, \cdots, \gamma_{d+3} \text{ sont symétriques} \\ &\gamma_2, \gamma_4, \cdots, \gamma_{d+2} \text{ sont antisymétriques.} \end{aligned}$$

Identités de trace dans le cas euclidien
Si d est pair, $\mathrm{tr}\gamma_\mu = 0$, $\mu = 1, \cdots, d+1$ et toute trace d'un nombre pair de matrices se calcule explicitement

$$\mathrm{tr}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2n}} = \Big(\sum_p \epsilon_p \delta_{\mu_{p_1}\mu_{p_2}} \cdots \delta_{\mu_{p_{2n-1}}\mu_{p_{2n}}}\Big) \mathrm{tr} I_d \quad \text{avec} \quad \mu_i = 1, \cdots, d+1$$

où la somme porte sur tous les *appariements* d'indices, et ϵ_P désigne la signature de la permutation correspondante. Le nombre de ces appariements est le nombre de Catalan $C_n = (2n)!/(n!(n+1)!)$. Pour un nombre impair de matrices γ, si une matrice γ_μ donnée apparaît un nombre de fois pair (ou 0 fois), la trace s'annule. Si toutes apparaissent une fois et une seule, et donc en particulier γ_{d+1}, on place cette dernière en dernière position et on a

$$\mathrm{tr}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_d}\gamma_{d+1} = i^{d/2}\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}\mathrm{tr}I$$

(noter que dans l'euclidien, $\epsilon_{12\cdots d} = 1$.)

Exercice : vérifier toutes les assertions de ce paragraphe !

4. Contenu physique de l'équation de Dirac

4.1. Ondes planes et projecteurs

Comme $e^{\pm ik.x}$ est fonction propre de l'opérateur différentiel $(i\partial\!\!\!/ - m)$, il est naturel de chercher des solutions de (3.8) sous la forme d'ondes planes. La notation traditionnelle consiste à écrire

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ik.x}u(k) \qquad \text{solution d'énergie positive} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ik.x}v(k) \qquad \text{solution d'énergie négative} \end{aligned} \tag{4.1}$$

étant entendu que $k^0 > 0$, et que $k^2 = m^2$. Le quadrivecteur k^μ est en effet l'énergie-impulsion de la particule. Les spineurs u et v satisfont

$$(k\!\!\!/ - m)u(k) = 0 \qquad (k\!\!\!/ + m)v(k) = 0 . \tag{4.2}$$

Pour construire explicitement $u(k)$ et $v(k)$, on se place dans le référentiel où la particule (de masse $m > 0$) est au repos : $k = (m, \mathbf{0})$. Les équations ci-dessus se réduisent à

$$(\gamma^0 - 1)u(m, \mathbf{0}) = 0 \qquad (\gamma^0 + 1)v(m, \mathbf{0}) = 0$$

et une base de solutions, dans la représentation de Dirac (3.10), est donnée par

$$u^{(1)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{(2)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{(1)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{(2)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{4.3}$$

Les solutions à k quelconque s'obtiennent alors en effectuant un boost sur les solutions au repos, ou plus simplement en écrivant

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + k^0)}} u^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) \qquad v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + k^0)}} v^{(\alpha)}(m, \mathbf{0}) , \tag{4.4}$$

qui sont bien solutions de (4.2) puisque $(\not{k} - m)(\not{k} + m) = k^2 - m^2 = 0$. Leur normalisation est choisie de façon que (avec $\alpha, \beta = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \overline{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= \delta_{\alpha\beta} \qquad & \overline{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= 0 \\ \overline{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= -\delta_{\alpha\beta} \qquad & \overline{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= 0 , \end{aligned} \tag{4.5}$$

comme on va le montrer ci-dessous. En effet, les équations (4.5) sont équivalentes à dire que les matrices

$$\Lambda_+(k) := \sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k) \otimes \overline{u}^{(\alpha)}(k) \qquad \Lambda_-(k) := -\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(k) \otimes \overline{v}^{(\alpha)}(k) \tag{4.6}$$

sont les projecteurs sur les états d'énergie positive, resp. négative. Un petit calcul auxiliaire consiste à vérifier que $(\not{k} + m)^2 = 2m(\not{k} + m)$, $(\not{k} + m)(I + \gamma^0)(\not{k} + m) = 2(m + k^0)(\not{k} + m)$ ou encore $(I + \gamma^0)(\not{k} + m)(I + \gamma^0) = 2(m + k^0)(I + \gamma^0)$. Compte tenu de la normalisation dans (4.4), cela conduit à

$$\Lambda_\pm(k) = \frac{1}{2m(m + k^0)} (\not{k} \pm m) \frac{I \pm \gamma^0}{2} (\not{k} \pm m) = \frac{\pm\not{k} + m}{2m} . \tag{4.7}$$

et à

$$\Lambda_\pm^2(k) = \Lambda_\pm(k) \qquad \Lambda_\pm(k)\Lambda_\mp(k) = 0 \qquad \mathrm{tr}\Lambda_\pm = 2 \qquad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = I \tag{4.8}$$

comme on s'y attend pour des projecteurs orthogonaux sur des espaces de dimension 2.

Cette dimensionnalité 2 reflète l'existence des degrés de liberté de spin. On désire maintenant construire les projecteurs sur les états propres de spin, analogues covariants de $\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)$ pour un spin $\frac{1}{2}$ non-relativiste. Les solutions au repos $u^{(\alpha)}(m, \mathbf{0})$ et $v^{(\alpha)}(m, \mathbf{0})$ de (4.3) sont clairement vecteurs propres de $\Sigma^3 := \sigma_{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ pour les valeurs propres 1 pour $\alpha = 1$ et -1 pour $\alpha = 2$. (En général, on définit $\Sigma^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_{jk}$ et dans la base usuelle de matrices γ, $\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$.) Les projecteurs sur les états propres de spin des solutions au repos sont donc $\frac{1}{2}(I \pm \Sigma^3)$. Si $\hat{z}$ est le vecteur unitaire dans la direction 3 (axe des z), on définit

$$P(\hat{z}) = \frac{1}{2}(I + \gamma^5 \not{\hat{z}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I + \sigma_3 & 0 \\ 0 & I - \sigma_3 \end{pmatrix}$$

puisque $\gamma^5 \not{\hat{z}} = -\gamma^5\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \gamma^0\sigma_{12} = \gamma^0\Sigma^3$. P projette donc sur la solution $u^{(1)}$ d'énergie positive de spin $\frac{1}{2}$ et sur celle $v^{(2)}$ d'énergie négative de spin $-\frac{1}{2}$. Attention au signe ! Ce choix peut paraître un peu pervers, mais en fait se prête bien à l'application d'une transformation de Lorentz. Un boost de Lorentz Λ amène en effet les solutions au repos sur les solutions (4.4), amène $\hat{z}$ sur le (quadri)vecteur $n^{(z)} := \Lambda\hat{z}$ et transforme $P(\hat{z})$ en le projecteur cherché

$$P(n^{(z)}) = \frac{1}{2}(I + \gamma_5 \not{n}^{(z)}) \ , \tag{4.9}$$

le projecteur sur $u^{(1)}(k)$ et $v^{(2)}(k)$. (On rappelle que les matrices $S(\Lambda)$ de Lorentz commutent avec γ^5 et transforment $\not{\hat{z}}$ en $\not{n}^{(z)}$.) On peut généraliser cette expression à tout n orthogonal à k, donc de genre espace, et normalisé à $n^2 = -1$ et considérer donc $P(n) = \frac{1}{2}(I + \gamma^5 \not{n})$. Si Λ est le boost qui amène $(m, \mathbf{0})$ sur k (ne pas confondre ce Λ avec les projecteurs $\Lambda_\pm(k)$!), l'opérateur $P(n)$ projette sur l'état de spin qui dans le référentiel au repos est polarisé dans la direction $\Lambda^{-1}n$. Par abus de langage, on dira que $P(n)$ est le projecteur sur l'état polarisé le long de n. Les relations

$$\begin{aligned} &[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0 \\ &(\Lambda_+(k) + \Lambda_-(k))(P(n) + P(-n)) = I \\ &\mathrm{tr}\Lambda_\pm(k)P(n) = 1 \ , \end{aligned} \tag{4.10}$$

qui sont aisément vérifiées, montrent que les deux types de projecteurs $\Lambda_\pm$ et P sont compatibles (ils commutent), que leurs produits $\Lambda_\pm P(\pm n)$ sont des projecteurs sur des espaces complémentaires de dimension 1, toutes choses compatibles avec leur interprétation comme projecteurs sur les états d'énergie-impulsion et de spin fixés.

Remarque. Une remarque importante. Tout, dans la discussion de ce paragraphe, a été restreint au cas où $m \neq 0$: usage répété du référentiel de repos, normalisations avec dénominateur m.... La situation de masse nulle va nécessiter un traitement séparé, cf plus bas § 6.

Remarques et exercices

• De quel opérateur de spin généralisant Σ_3 les solutions (4.4) sont-elles vecteurs propres ? Montrer que $u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$ sont vecteurs propres de $W.n^{(z)}$, où W est l'opérateur de spin de Pauli-Lubanski, cf (3.26).

• Montrer que (4.6) peut être raffiné en $u^{(1)}(k) \otimes \overline{u}^{(1)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m}\frac{1+\gamma^5\not{n}^{(z)}}{2}$. Écrire les relations analogues pour les autres spineurs (4.4).

• **Hélicité** Il existe un choix privilégié de n tel que $\mathbf{n}$ soit proportionnel à $\mathbf{k}$ dans le référentiel considéré (ou dans tout autre référentiel s'en déduisant par un boost dans la direction de $\mathbf{k}$). Soit

$$n_k := \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m}, \frac{k^0}{m} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \tag{4.11}$$

On a bien $n_k^2 = -1$, $n_k.k = 0$, donc $\Lambda^{-1} n_k = (0, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ dans le référentiel de repos. Alors, le projecteur $P(n_k)$ agissant sur les solutions d'énergie positive, resp. négative, donne

$$P(n_k)\Lambda_{\pm}(k) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\mathbf{\Sigma}.\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)\Lambda_{\pm}(k)$$

et donc projette sur les états propres de spin le long de la direction de $\mathbf{k}$, ce qu'on appelle les états d'*hélicité* : il projette sur les états d'énergie et d'hélicité positives, et sur les états d'énergie et d'hélicité négatives.

Un état propre d'hélicité positive le reste-t-il par transformation de Lorentz ? La réponse est non, expliquer pourquoi.

• Démontrer l'*identité de Gordon*

$$\overline{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m}\overline{u}^{(\alpha)}(p)\Big((p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu\Big)u^{(\beta)}(q)\ . \tag{4.12}$$

(On pourra noter que, sandwiché entre $\overline{u}(p)$ et $u(q)$, γ^μ peut être remplacé par $(\not{p}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{q})/2m$.) Quelle serait la formule analogue pour des solutions d'énergie négative ? pour l'élément de matrice de $\gamma_5\gamma^\mu$?

4.2. Couplage minimal au champ électromagnétique

Supposons maintenant que la particule sujette à l'équation de Dirac porte une charge électrique q. (Pour un électron cette charge serait négative $q = e = -|e|$.) Selon un principe maintenant bien éprouvé, nous construisons l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique par le couplage minimal $i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu$, soit

$$(i\not{\partial} - q\not{A} - m)\psi = 0\ . \tag{4.13}$$

Notant $D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$ (dérivée covariante), donc $\not{D} = \not{\partial} + iq\not{A}$, calculons $(\not{D})^2$. On ne peut utiliser brutalement l'identité $\not{a}^2 = a^2$ valable pour un quadrivecteur, en raison de la non-commutation des dérivées covariantes. On écrit

$$\begin{aligned}\not{D}^2 &= D^\mu D^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \\ &= \tfrac{1}{2} D^\mu D^\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \tfrac{1}{2}[D^\mu, D^\nu]\gamma_\mu\gamma_\nu \\ &= D_\mu D^\mu + \frac{iq}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= D^2 + \tfrac{1}{2} q F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \ .\end{aligned} \tag{4.14}$$

En formant

$$(i\not{\partial} - q\not{A} + m)(i\not{\partial} - q\not{A} - m)\psi = (-D^2 - \tfrac{1}{2}qF^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - m^2)\psi = 0$$

on trouve une équation qui diffère de celle obtenue à partir de l'équation de Klein-Gordon par le couplage minimal. Le terme supplémentaire $-\frac{q}{2}F.\sigma$ décrit un couplage du champ à un moment dipolaire électrique et à un moment magnétique portés par la particule. En effet, dans la représentation de Dirac où $\sigma_{0j} = i\alpha_j$ et $\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\mathrm{diag}\,(\sigma_k)$, on trouve

$$-\frac{1}{2}qF^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = -q(i\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) \ .$$

L'interprétation va en être plus claire dans la limite non-relativiste.

4.3. Limite non relativiste

Examinons la limite non relativiste de l'équation de Dirac couplée à un champ, (4.13). Autrement dit, on suppose les énergies en jeu, cinétique ou électromagnétique, petites par rapport à l'énergie au repos m (fois c^2 implicite). La représentation de Dirac des matrices se prête bien à cet exercice, car les deux composantes supérieures, resp. inférieures de ψ dans cette base sont d'ordre différent dans cette limite. Écrivant $\psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\pi} := (\mathbf{p} - q\mathbf{A})$, et se rappelant la forme (3.10) des matrices $\boldsymbol{\alpha}$ et β, on trouve

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\pi}\chi + qA^0\varphi + m\varphi \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\pi}\varphi + qA^0\chi - m\chi \ .\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dans la limite relativiste, le terme de masse m est le terme dominant dans la première équation, et il est cohérent de supposer que χ est sous-dominant par rapport à φ. Si on pose

$$\varphi = e^{-imt}\Phi \qquad \chi = e^{-imt}X$$

avec Φ et X lentement variables, (4.15) devient

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma.\pi} X + qA^0\Phi \\ i\frac{\partial X}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma.\pi}\Phi + qA^0 X - 2mX \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sous l'hypothèse que $|qA^0| \ll 2m$ et que X est lentement variable, on peut approximer la solution de la deuxième équation par

$$X \approx \frac{\boldsymbol{\sigma.\pi}}{2m}\Phi \ll \Phi$$

et en reportant dans la première, on trouve

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Big[\frac{(\boldsymbol{\sigma.\pi})^2}{2m} + qA^0\Big]\Phi \ , \tag{4.17}$$

qui n'est autre que l'équation de Pauli, équation non-relativiste satisfaite par la fonction d'onde d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ dans un champ électromagnétique. On calcule sans peine, en utilisant les relations de commutation des matrices de Pauli

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma.\pi})^2 &= \frac{1}{2}\{\sigma_i,\sigma_j\}\pi^i\pi^j + \frac{1}{4}[\sigma_i,\sigma_j][\pi^i,\pi^j] = \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\sigma_k\left(\frac{-q}{i}\right)(\nabla_i A^j - \nabla_j A^i) \\ &= \boldsymbol{\pi}^2 - q\boldsymbol{\sigma.B} \ , \end{aligned}$$

ce qui permet de récrire l'hamiltonien (le membre de droite de (4.17)) comme

$$H_{\text{Pauli}} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma.B} + qA^0 \ .$$

Le premier et le dernier termes sont ceux attendus du couplage minimal appliqué à l'équation de Schrödinger. Le deuxième terme décrit un couplage entre le spin et le champ magnétique, de la forme (en rétablissant les $\hbar$ et c)

$$H_{\text{magnet}} = -\frac{q\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma.B} = -\boldsymbol{\mu.B}$$

où le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ est

$$\boldsymbol{\mu} = 2\frac{q}{2m}\frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2} \ . \tag{4.18}$$

En général, pour un objet chargé de moment cinétique $\mathbf{J}$ et de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$, on définit le *rapport gyromagnétique* g par

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{q}{2m}\mathbf{J} \ . \tag{4.19}$$

Ici $\mathbf{J} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$. Pour la particule décrite par l'équation de Dirac (et son approximation non-relativiste de Pauli), le rapport gyromagnétique est donc 2.

La théorie quantique des champs va apporter des corrections à cette valeur. Ces corrections sont infimes mais calculables et mesurables avec une précision inouïe pour une particule comme l'électron ou le muon qui ne sont soumis qu'aux interactions électrofaibles : l'accord entre expérience et théorie sur la valeur de $g_e - 2$ (ou de $g_\mu - 2$) est un des grands triomphes de la TQC. Les corrections sont par contre grandes et non calculables systématiquement pour le proton ou le neutron, soumis aussi aux interactions fortes : $g_p \approx 5.585$.

4.4. Spectre relativiste de l'atome d'hydrogène

cf TD, [BDm] et [IZ]

5. Particules et trous. La mer de Dirac.

5.1. La mer de Dirac. Particules et trous, antiparticules.

La présence d'états d'énergie négative non bornée inférieurement est très préoccupante puisqu'elle semble indiquer une instabilité de la théorie. La solution proposée par Dirac est élégante et instructive –on en retrouve des avatars dans des contextes très divers, depuis la physique des solides (théorie de Fermi) jusqu'à des problèmes de mathématiques (représentations de l'algèbre de Virasoro, par exemple). Elle consiste à supposer que dans le vide, tous les états d'énergie négative sont occupés –c'est la "mer de Dirac". Cela, joint au principe d'exclusion de Pauli, interdit une dangereuse transition d'un état physique d'énergie positive vers un de ces états. Inversement un état de cette mer peut être excité vers un état d'énergie positive, laissant derrière lui un "trou", de charge opposée, qui va être interprété comme une anti-particule, un positron si la particule de Dirac est l'électron. Il faut pour cela fournir une énergie E supérieure à l'intervalle d'énergie (*gap*) entre l'état initial et l'état final, soit $E \geq 2mc^2$. L'excédent $E - 2mc^2$ est emporté comme énergie cinétique par l'électron et le trou-positron. C'est le phénomène de création de paire.

La théorie de Dirac prédit donc des phénomènes nouveaux (nouveaux pour l'époque où elle a été proposée, et pour le cadre de la mécanique quantique habituelle) : création et annihilation de paires électron–positron. Cette théorie contient donc ce qui fait l'essence d'une théorie quantique de champs : l'existence d'un nombre de particules arbitraire.

5.2. Conjugaison de charge

Si ψ solution de l'équation de Dirac (4.13) décrit la particule de charge q, mettons l'électron, on voudrait trouver quel ψ^c décrit son antiparticule, de charge $-q$. On veut avoir simultanément

$$(i\partial\!\!\!/ - qA\!\!\!/ - m)\psi = 0 \tag{5.1a}$$

$$(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/ - m)\psi^c = 0 \ . \tag{5.1b}$$

En conjugant et transposant la première équation, on a

$$\left[\gamma_\mu^T(-i\partial^\mu - qA^\mu) - m)\right]\overline{\psi}^T = 0 \ .$$

Si on peut trouver une matrice C telle que

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \tag{5.2}$$

alors $C\overline{\psi}^T$ satisfait (5.1b). Or il existe une telle matrice C dans toute représentation des matrices γ. Ainsi dans la représentation de Dirac, où γ^1 et γ^3 sont antisymétriques, et γ^0 et γ^2 symétriques, il suffit de prendre un multiple de $\gamma^0\gamma^2$. On choisit

$$\begin{aligned} C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ C^{-1} = C^T = C^\dagger = -C \end{aligned} \tag{5.3}$$

et on prend

$$\psi^c = \eta_c C\overline{\psi}^T \tag{5.4}$$

avec une phase arbitraire η_c qu'on prendra égale à 1 dans la suite. L'opération de conjugaison de charge qui est antilinéaire dans le présent contexte, reprendra un caractère linéaire dans le cadre de la TQC.

Exercice : montrer que ψ^c se transforme par Lorentz comme ψ et donc que $\overline{\psi}\psi^c$ est un invariant de Lorentz. Un tel terme est appelé terme de masse de Majorana, quelle symétrie brise-t-il ? [Voir plus bas et en TD de TQC la discussion des champs de Majorana.]

Action de la conjugaison de charge sur le spin.

Soit ψ une solution de Dirac, état propre des projecteurs du § 4.1

$$\psi = \frac{\epsilon \not{p} + m}{2m}\,\frac{1+\gamma^5 \not{n}}{2}\psi \qquad\qquad p^0 > 0\ ,$$

donc d'énergie de signe ϵ et de polarisation “le long du vecteur n”. On calcule alors sa conjuguée de charge

$$\begin{aligned} \psi^c = C\overline{\psi}^T &= C\gamma^0 \left(\frac{\epsilon \not{p} + m}{2m}\right)^* \left(\frac{1+\gamma^5 \not{n}}{2}\right)^* \psi^* \\ &= \frac{-\epsilon \not{p} + m}{2m}\,\frac{1+\gamma^5 \not{n}}{2}\psi^c \end{aligned} \tag{5.5}$$

La conjugaison de charge fait donc passer –comme prévu– d'une solution d'énergie positive à une d'énergie négative. Le spin est renversé, ce qui est en accord avec notre discussion du § 5.1.

6. Particules de masse nulle

6.1. Chiralité et hélicité

Considérons l'équation de Dirac de masse nulle.

$$i\partial\!\!\!/\psi = 0 \text{ ou encore } p\!\!\!/\psi = 0\ . \tag{6.1}$$

On remarque est que l'opérateur de Dirac $\partial\!\!\!/$ anticommute avec l'opérateur de "chiralité" γ^5. Ou dit autrement, puisque

$$\partial\!\!\!/(1 \pm \gamma^5) = (1 \mp \gamma^5)\partial\!\!\!/\ ,$$

l'opérateur de Dirac $\partial\!\!\!/$ fait passer de spineurs de chiralité positive (vecteurs propres de $\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$) à ceux de chiralité négative.

Plus tard dans le cours de TQC (discussion des "anomalies chirales"), on rencontrera le déterminant de l'opérateur de Dirac en présence d'un champ de jauge $\det D\!\!\!\!/(A)$. La remarque précédente, qui s'étend à $D\!\!\!\!/(A)$, montre que l'opérateur $D\!\!\!\!/(A)$ fait passer d'un espace à un autre, et que son déterminant ne peut avoir un sens intrinsèque, une source potentielle de difficultés . . .

On note aussi que $\gamma^5\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, et donc $\gamma^5\gamma^0\gamma^i = \Sigma^i$, donc (6.1) multiplié par $\gamma^5\gamma^0$ implique

$$\gamma^5 p^0\psi = \boldsymbol{\Sigma}.\boldsymbol{p}\,\psi \tag{6.2}$$

Pour une solution d'énergie positive, $\psi(x) = e^{-ik.x}\tilde{\psi}(k)$, avec $k^2 = 0$, $k^0 = |\mathbf{k}|$, $\mathbf{k} = k^0\hat{\mathbf{k}}$ et (6.2) se récrit

$$\boldsymbol{\Sigma}.\hat{\mathbf{k}}\,\tilde{\psi}(k) = \gamma^5\tilde{\psi}(k)\ , \tag{6.3}$$

ce qui signifie que l'hélicité égale la chiralité. Pour une solution d'énergie négative, c'est l'opposé.

Remarque. On a déjà souligné que la chiralité est conservée par les transformations du groupe de Lorentz. Ce n'est en général pas le cas de l'hélicité, sauf dans le cas de masse nulle. Si $m \neq 0$, un spineur d'hélicité positive acquiert sous l'effet d'une transformations du groupe de Lorentz une composante d'hélicité opposée. Si $m = 0$, ce n'est pas le cas, comme on vient de le voir.

Exercices

– En indexant les solutions d'énergie positive et négative par leur chiralité, on écrit

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-ik.x}u_\pm(k) \\ e^{ik.x}v_\pm(k) \end{cases} \qquad \text{avec } k^2 = 0,\ k^0 = |\mathbf{k}| > 0\ . \tag{6.4}$$

$$\gamma^5 u_\pm(k) = \pm u_\pm(k) \qquad \gamma^5 v_\pm(k) = \pm v_\pm(k)\ .$$

Trouver l'expression explicite des spineurs à quatre composantes $u_\pm(k)$ et $v_\pm(k)$ comme fonctions des coordonnées θ et φ de $\hat{\mathbf{k}}$.

– Montrer que le conjugé de charge d'un spineur de chiralité positive est de chiralité négative.

6.2. Spineurs de Weyl

Comme on l'a noté plus haut au § 3.6, pour des particules de masse nulle, les deux composantes de chiralité obéissent à des équations découplées. Si on n'admet qu'une seule chiralité et qu'on renonce à l'invariance par parité, on peut se contenter d'une réalisation des matrices de Dirac de dimension 2. On parle de spineurs de Weyl pour ces spineurs à deux composantes, de chiralité donnée

$$\begin{aligned} \text{chiralité} = 1, \qquad & (p^0 - \mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma})\psi_R(p) = 0 \\ \text{chiralité} = -1, \qquad & (p^0 + \mathbf{p}.\boldsymbol{\sigma})\psi_L(p) = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

6.3. Petite incursion dans le monde des neutrinos

Pendant longtemps, on a cru que les neutrinos des trois espèces ("familles" ou "générations") connues, ν_e, ν_μ et ν_τ, étaient de masse nulle, et n'existaient dans la nature que dans leur chiralité (et hélicité) négative, (neutrinos "gauches"). Leurs antiparticules, les antineutrinos $\overline{\nu}_e$, $\overline{\nu}_\mu$ et $\overline{\nu}_\tau$, n'existant, eux, que dans l'hélicité et la chiralité positives.

Les résultats observationnels accumulés au cours des dix ou quinze dernières années (oscillations dans les neutrinos solaires et autres) ne semblent plus laisser place au doute : les neutrinos ont une masse petite mais non nulle, les deux chiralités existent même si leur physique est très différente.

Plusieurs scenarii sont actuellement envisagés. Ou bien les neutrinos sont des spineurs de Dirac, dotés d'une petite masse de Dirac couplant leurs composantes gauche et droite. La composante droite du ν ou la gauche du $\overline{\nu}$ ne participent pas aux interactions faibles usuelles et ne sont couplés que par leur terme de masse (et leur couplage au boson de Higgs). On parle de neutrinos "stériles". Ce scenario est compatible avec la conservation du nombre leptonique, la quantité conservée associée par le théorème de Noether à l'invariance par $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, $\overline{\psi} \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}$ pour les différents champs de leptons.

Ou bien ils sont identiques à leur antiparticule, c'est-à-dire qu'ils sont ce qu'on appelle des particules de Majorana, ce qui autorise l'existence d'un terme de masse de Majorana (cd § 5.2). Ce qu'on appelle usuellement le ν et le $\overline{\nu}$ sont alors les deux états d'hélicité de cette particule de Majorana. Le terme de masse de Majorana viole la conservation du nombre leptonique. Un test de ce scenario consisterait en l'observation de la désintégration β double

$$(Z, A) \to (Z + 2, A) + e^- + e^-$$

interdite si le neutrino est une particule de Dirac, puisque violant la conservation du nombre leptonique.

En fait, la situation est plus compliquée que ce qui vient d'être esquissé. L'existence des trois familles de neutrinos autorise des termes de masse de type Dirac ou Majorana, bilinéaires dans ces différents champs et leurs conjugués. On parle alors d'une matrice de masse...

Ce sujet est d'une grande actualité, pour ses implications cosmologiques etc.

Les spineurs de Majorana jouent aussi un rôle central dans la construction de théories supersymétriques...

Pour plus de détails sur les spineurs et champs de Majorana, voir les TD ou [PS].

Problème

On démontre dans le cours de TQC que l'élément de matrice du courant électromagnétique entre deux états d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ peut s'écrire

$$\langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle = e^{iq.x} \overline{u}^{(\beta)}(p') O^\mu(p', p) u^{(\alpha)}(p)$$

où $q = p' - p$ et $O^\mu(p', p)$ est une matrice de l'algèbre de Clifford.
1. Dresser la liste des $O^\mu(p', p)$ compatibles avec l'invariance sous le groupe de Lorentz propre orthochrone et montrer que six d'entre eux sont linéairement indépendants, compte tenu de l'équation de Dirac satisfaite par $u^{(\alpha)}(p)$ et $\overline{u}^{(\beta)}(p')$.
2. Montrer que la contrainte de conservation du courant $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, donc de "transversité" $q_\mu O^\mu(p', p) = 0$, restreint cette liste à quatre termes.
3. En conclure que l'expression donnée au chapitre 3 d'un livre de TQC bien connu est incomplète et qu'on doit par exemple écrire

$$O^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + i\frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) + \gamma^5 \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_3(q^2) + \gamma^5 (q^2 \gamma^\mu - \not{q} q^\mu) F_4(q^2) \ .$$

4. Montrer que l'hermiticité de l'opérateur courant j^μ se traduit par la condition $O^\mu(p, p')^\dagger = \gamma^0 O^\mu(p', p) \gamma^0$ et discuter quelles conditions de réalité cela fournit sur les fonctions $F_i(q^2)$.
5. Montrer que si j^μ se transforme comme $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ sous l'effet des transformations discrètes, l'invariance par parité implique que $F_3(q^2) = F_4(q^2) = 0$, celle par renversement du temps $F_3(q^2) = 0$.
6. $j^0(x)$ étant la densité de charge électrique, montrer qu'on a

$$\int d^3x \langle p', \beta | j^0(x) | p, \alpha \rangle = q \frac{p^0}{2m} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\alpha\beta}$$

(avec une normalisation conventionnelle) et en déduire que $F_1(0) = q$.
7. Pour l'interprétation physique des autres termes $F_i(q^2)$, il est utile de considérer la limite de particules presqu'au repos, $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$. En étudiant dans cette limite $\int d^4x A_\mu(x) \langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle$, montrer que $F_1(0) + F_2(0)$ et $F_3(0)$ donnent les coefficients des termes $\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B}$ et $\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{E}$ dans le lagrangien d'interaction et décrivent les moments magnétique et dipolaire électrique de la particule considérée.
8. Le dernier coefficient, qui décrirait dans cette même limite le couplage du champ électromagnétique à un moment multipolaire d'ordre plus élevé de la distribution de charges est le seul à survivre pour des particules de Majorana, identiques à leur antiparticule.

Bibliographie sommaire

Pour la discussion générale de l'équation de Dirac, les identités sur les matrices γ etc, on a suivi [IZ], qui contient aussi une discussion détaillée de la limite non relativiste, du spectre de l'atome d'hydrogène, etc.

[BDm] est une autre référence très utile.

Pour la version "euclidienne" de l'équation de Dirac et des matrices γ, voir [Z-J].

La démonstration de la proposition et du théorème du § 3.3 peut se trouver dans A. Messiah, [M], t. 2, p 773.

Sur la physique des neutrinos, voir Cecilia Jarlskog, cours à l'École de Gif 92.