

Chapitre 5. Dynamique des systèmes non-linéaires

Les chapitres précédents nous ont familiarisés avec les propriétés des systèmes linéaires : réponse linéaire, découplage des modes, etc. Mais la linéarité d'un système physique n'est le plus souvent qu'une première approximation de sa description. Dans ce chapitre, on va explorer quelques-unes des nouveautés que réserve l'étude des systèmes non-linéaires, c'est-à-dire des systèmes régis par des équations –différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, ou aux différences finies– non linéaires.

Nous avons déjà rencontré des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Une équation aux différences finies est par exemple une équation de la forme $y(t + \Delta t) - y(t) = F(y(t), t)$, où F est une fonction donnée. On peut penser à une telle équation comme une version discrétisée de l'équation différentielle $\dot{y}(t) = F(y(t), t)$. Si F n'est pas de degré 1 en y , l'équation est non-linéaire.

Une équation intégrale est une équation qui relie la fonction inconnue $y(t)$ à une intégrale dépendant de y , par exemple portant sur les valeurs de y aux temps antérieurs à t . Ainsi l'équation intégrale

$y(t) = \int_{-\infty}^t K(t, t')y(t') dt'$ avec un *noyau* $K(t, t')$ donné, est linéaire, tandis que l'équation

$\ddot{y}(t) + \left(a - 2 \int_0^1 y^2(t') dt'\right) y(t) = 0$ est non-linéaire.

L'étude des systèmes non-linéaires est un domaine immense, très actif actuellement –on parle aussi de “systèmes dynamiques”–, qui a des applications dans d'innombrables domaines, des sciences physiques aux sciences du vivant et humaines. Pour citer quelques exemples, la mécanique céleste (instabilité des trajectoires des corps célestes), la chimie (réactions chimiques auto-catalysées¹...), la physique (bien sûr !), les sciences de la Terre (météorologie, climatologie, sismicité...) et les sciences de l'ingénieur (turbulence, instabilités mécaniques ou électromagnétiques...) sont confrontées à des problèmes non-linéaires. Les sciences de la vie (contrôle des gènes, battements du cœur, populations bactériennes, ...), l'économie, la démographie sont aussi concernées. Il est clair que ce cours ne pourra donner que quelques aperçus sur ce vaste et passionnant domaine.

Exemples : Équation du pendule au delà de l'approximation des petites oscillations, $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, oscillateur harmonique modifié par un terme “anharmonique” $\ddot{x} = ax - bx^3$, ou par un terme de friction non linéaire (équation de van der Pol) $\ddot{x} + (1 - \alpha x^2)\dot{x}/\tau + \omega_0^2 x = 0$. Équations du premier ordre non linéaires, telles $\dot{x} = a - bx^2$, $\dot{x} = ax - bx^3$ (Landau), qu'on va discuter plus bas, etc. Autre type d'équations, les équations aux différences finies, telle $N_{n+1} = aN_n - bN_n^2$ avec $b > 0$ décrivant la variation de la population d'une espèce (N_n est l'effectif de la génération n , le terme aN_n décrit sa reproduction, bN_n^2 la limitation due aux ressources alimentaires etc) ...

¹ en particulier la très spectaculaire réaction de Belousov-Zhabotinsky, voir une video sur le site http://www.ac-poitiers.fr/sc-phys/cyberlab/cyberter/fete_chi/BZ/bz.htm

1. Richesse et spécificités des systèmes non-linéaires. Bifurcations

Une des particularités des systèmes non-linéaires est la suivante : une petite variation d'une condition aux limites ou d'un paramètre peut induire un grand effet. L'effet peut être une transition d'un régime stable à un régime instable, un effet irréversible (telle une cassure), un changement de phase avec ou sans changement de symétrie du système, un phénomène de "seuil", etc. Les exemples qui vont suivre vont illustrer quelques-unes de ces possibilités. On appelle *bifurcation* un changement qualitatif de comportement quand un paramètre ou une condition initiale est modifié.

Par exemple, l'analyse qui nous a conduit au chapitre 4 à décrire un système physique simple, mécanique par exemple, à l'aide d'un système *linéaire* a consisté à développer l'équation fondamentale de la dynamique au voisinage d'un minimum du potentiel. Que se passe-t-il quand ce potentiel admet plusieurs minima ? Que se passe-t-il quand le minimum de ce potentiel se change en maximum ? Plus généralement que se passe-t-il si le système considéré admet plusieurs solutions indépendantes du temps ? Se qualifient-elles également comme positions d'équilibre ? On va examiner quelques exemples de ce phénomène.

1.1. Stabilité et instabilité

Soit un système dynamique décrit par une équation différentielle. Cette équation peut être du premier ordre, $\dot{x}(t) = f(x(t))$, ou d'ordre plus élevé, être linéaire ou non-linéaire. Soit x_s une solution statique, c'est-à-dire indépendante du temps ², de cette équation. On dit que cette solution décrit une solution (ou une position) d'*équilibre stable* du système si sous l'effet d'une petite perturbation de cette solution au temps t_0 , le mouvement reste confiné au voisinage de $x = x_s$ à tout temps $t > t_0$, c'est-à-dire $|x(t) - x_s|$ reste borné pour tout t par une quantité qui tend vers 0 avec la perturbation.

On exprime en général cette propriété par la condition suivante : si $x_0 = x(t_0)$ est la condition initiale

$$\forall \epsilon \exists \delta(\epsilon) \text{ tel que } \forall t > t_0 \forall x_0 : |x_0 - x_s| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_s| < \epsilon . \quad (1.1)$$

C'est donc une condition uniforme en t et en x_0 .

Considérons par exemple un système *linéaire* décrit par l'équation

$$\ddot{x}(t) = ax(t) . \quad (1.2)$$

Si $a < 0$, c'est notre bon vieil oscillateur harmonique, avec sa force de rappel proportionnelle au déplacement. La solution statique $x_s = 0$ décrit un équilibre stable, toute

² On dit aussi "solution stationnaire", ou "point fixe" ...

autre solution décrivant des oscillations autour de x_s . Mais si $a > 0$, la situation physique change dramatiquement. L'équation se résout encore aisément, et $x(t)$ est une combinaison linéaire des deux solutions $e^{\pm\sqrt{a}t}$ avec des coefficients constants déterminés par les conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0)$

$$x(t) = x_1 e^{\sqrt{a}t} + x_2 e^{-\sqrt{a}t}$$

avec $x_0 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_0 = \sqrt{a}(x_1 - x_2)$. La fonction $e^{\sqrt{a}t}$ croît rapidement quand $t \rightarrow \infty$, physiquement cette solution n'est pas satisfaisante. Si on ajuste les conditions initiales pour éliminer cette solution, en faisant en sorte que $x_1 = 0$, soit

$$x_0 = -\dot{x}_0 / \sqrt{a} , \quad (1.3)$$

on obtient une solution d'apparence satisfaisante,

$$x(t) = x_0 e^{-\sqrt{a}t} .$$

Cependant, la moindre variation des conditions initiales $(\delta x_0, \delta \dot{x}_0)$ qui ne respecte pas la condition (1.3) va réintroduire la fonction indésirable $e^{\sqrt{a}t}$ et le comportement non physique de $x(t)$.

Montrer qu'une réalisation mécanique de cette situation où $a > 0$ est la suivante : étant donné un potentiel de forme parabolique tournant sa concavité vers le bas, on cherche à envoyer un mobile de position et vitesse initiales $(x_0, \dot{x}_0)$ sur le *sommet* du potentiel (en $x = 0$). Il est clair qu'une telle opération nécessite un ajustement très soigneux de $\dot{x}_0$ en terme de x_0 , (selon (1.3)), et que la moindre erreur conduira à "rater" la cible et donc à "tomber" à gauche ou à droite vers $\pm\infty$.

L'interprétation de cette discussion est qu'on est en présence d'une *instabilité*. Sous l'influence d'une modification, si infime soit elle, des conditions initiales, le système bascule dans un régime où la fonction $x(t)$ croît sans limite (et où l'approximation qui a conduit à l'équation (1.2) est à reconsidérer). La valeur $a = 0$ du paramètre a marque donc la frontière entre un régime $a < 0$ où le système a une position statique autour duquel il peut effectuer des petites oscillations et un régime $a > 0$ où toute solution sous l'effet d'une petite perturbation finit par croître sans limite. Dans le premier cas, on parle d'équilibre stable en $x = 0$, dans le second, $x = 0$ est une position d'équilibre instable, et la valeur $a = 0$ du *paramètre de contrôle* a marque une *bifurcation*.

Cette situation apparaît couramment dans les systèmes non-linéaires. Considérons le cas de l'équation

$$\dot{x} = a - x^2 . \quad (1.4)$$

Ses solutions statiques satisfont $x_s^2 = a$. Pour $a < 0$, il n'existe pas de solution ; si $a > 0$, il y en a deux, $x_s = \pm\sqrt{a}$. Le système a une bifurcation pour la valeur 0 de son paramètre de contrôle a . On discutera plus bas la stabilité des deux solutions statiques $x_s = \pm\sqrt{a}$.

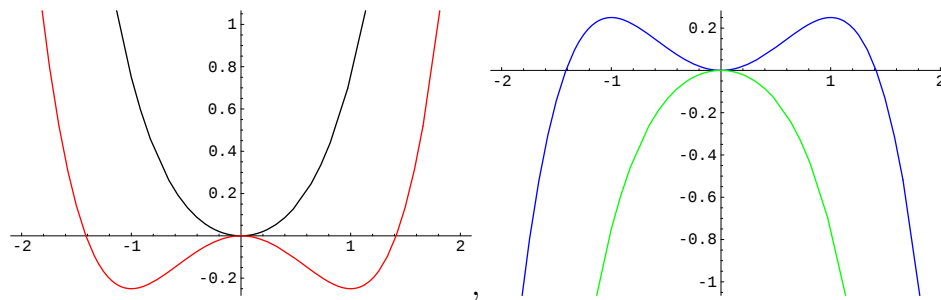


Fig. 1: Le potentiel $U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$ pour $a = \pm 1$, $b = \pm 1$. Compléter la figure en identifiant les signes de a et b pour chaque courbe.

1.2. Brisure de symétrie.

Considérons maintenant l'oscillateur *anharmonique*

$$\ddot{x}(t) = ax - bx^3. \quad (1.5)$$

C'est par exemple un point matériel soumis à une force dérivant d'un potentiel $m\ddot{x} = -dU(x)/dx$, avec $m^{-1}U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$. Une position d'équilibre stable pour la variable x , $x(t) = x_0$ pour tout t , est, comme l'intuition mécanique nous le souffle et comme l'analyse du § 2 le confirmera, un *minimum (local)* de ce potentiel³. Il est donc solution de $-dU(x)/dx = ax - bx^3 = 0$, donc

$$x = 0 \quad \text{ou si } a.b > 0 \quad x = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Si $a < 0$, le point $x = 0$ est bien un minimum du potentiel. C'est le seul, c'est la position d'équilibre stable du système, voir figure 1. Par contre, si $a > 0$, $x = 0$ est instable au sens où on l'a discuté plus haut, tandis que les deux autres solutions $x = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ (on suppose $b > 0$) deviennent des positions d'équilibre stable possibles, comme on le vérifie. Intuitivement, les choses sont claires : le point matériel se place au fond d'un creux (concave) du potentiel, voir la figure 1 de gauche.

La question est maintenant, si $a > 0$, $b > 0$, laquelle des deux positions d'équilibre le point matériel choisit-il ? On est dans un cas de *bistabilité*, où deux minima du potentiel sont également acceptables comme positions d'équilibre. Revenant à l'équation

³ Par *minimum local* d'une fonction $f(x)$, on entend un point x_0 tel que, *au voisinage de* x_0 , $f(x)$ soit supérieure à $f(x_0)$. Le minimum est *global* ou *absolu* si $\forall x, f(x) > f(x_0)$. Vérifier, en en dessinant le graphe, que la fonction $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ admet un minimum local mais pas global en $x = 0$.

(1.5), on voit qu'elle jouit d'une propriété de symétrie par le changement de x en $-x$. Plus précisément, si $x(t)$ est solution, $-x(t)$ en est une autre. L'ensemble des solutions de l'équation est invariant par cette transformation $x \mapsto -x$. Mais rien n'impose à une solution donnée de l'être. En particulier, les solutions d'équilibre, $x = \text{constant}$, peuvent être non invariantes par la symétrie, en l'occurrence, être non nulles. On parle de *brisure spontanée de symétrie*, le mot *spontanée* se référant au fait que le choix de la solution dépend du choix des conditions initiales, ou d'une perturbation extérieure brisant la symétrie.

Dans le cas (1.5) (avec $a, b > 0$) qui nous occupe et dans son interprétation mécanique d'un point matériel initialement en $x_0 = 0$ au sommet du maximum local du potentiel, c'est la vitesse initiale $v_0 = \dot{x}|_{t=0}$ qui, si petite soit-elle, va déterminer si le point matériel va basculer vers le minimum du potentiel de gauche ou de droite. Cela est une illustration simple du phénomène mentionné plus haut d'extrême sensibilité à une condition initiale.

Le phénomène de brisure spontanée de symétrie est d'importance capitale en physique : les théories du ferromagnétisme ou de la superfluidité, les théories modernes de physique des particules, et bien d'autres encore, y font appel.

1.3. Bifurcation de Hopf

On considère le système d'équations différentielles non-linéaires et couplées

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + (a - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} &= x + (a - x^2 - y^2)y\end{aligned}\quad , \quad (1.6)$$

qu'on récrit plus agréablement en termes de la variable complexe $z = x + iy$,

$$\dot{z} = iz + (a - |z|^2)z , \quad (1.7)$$

ou encore en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, sous la forme $\dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta} = (i + a - r^2)re^{i\theta}$. Après simplification par $e^{i\theta}$ et en identifiant parties réelle et imaginaire,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (a - r^2)r \\ r\dot{\theta} &= r\end{aligned}\quad . \quad (1.8)$$

Une solution statique est $r(t) = 0$. Si on écarte cette solution (c'est-à-dire qu'on suppose $r \neq 0$), on peut diviser par r l'équation en $\dot{\theta}$ et le système se réduit à

$$\dot{r} = (a - r^2)r \quad \dot{\theta} = 1 . \quad (1.9)$$

Le mouvement s'effectue à vitesse angulaire constante, $\theta(t) = \theta(0) + t$. L'analyse de l'équation en r ressemble à celle de (1.4). Si $a < 0$, la seule solution statique est $r_s = 0$, si $a > 0$, il y a deux solutions *permanentes*, $r_s = 0$ et $r_s = \sqrt{a}$, cette dernière décrivant une trajectoire circulaire parcourue à vitesse constante. On discutera plus bas la stabilité de ces solutions et on montrera que la solution stable est $r_s = 0$ si $a < 0$ et $r_s = \sqrt{a}$ si $a > 0$. La valeur $a = 0$ marque donc une bifurcation entre ces deux régimes, avec passage d'une solution statique $x = y = 0$ à une solution périodique $r = \text{constante}$.

2. Analyse de stabilité : méthode graphique et linéarisation.

2.1. Flot de $x(t)$. Interprétation graphique du critère $\rho < 0$ de stabilité.

On a vu plus haut qu'une solution statique x_s est dite stable si une solution voisine de x_s au temps t_0 en reste proche à tout temps ultérieur. Pour une équation du premier ordre

$$\dot{x} = f(x, a) \quad (2.1)$$

il existe une méthode graphique simple permettant de discuter la stabilité des solutions statiques, et plus généralement le *flot* de la solution $x(t)$.

Dessignons le graphe de $f(x, a)$ en fonction de x à a fixé. Les points d'intersection de ce graphe avec l'axe des abscisses (l'axe des x) sont les solutions statiques $x_s^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$.

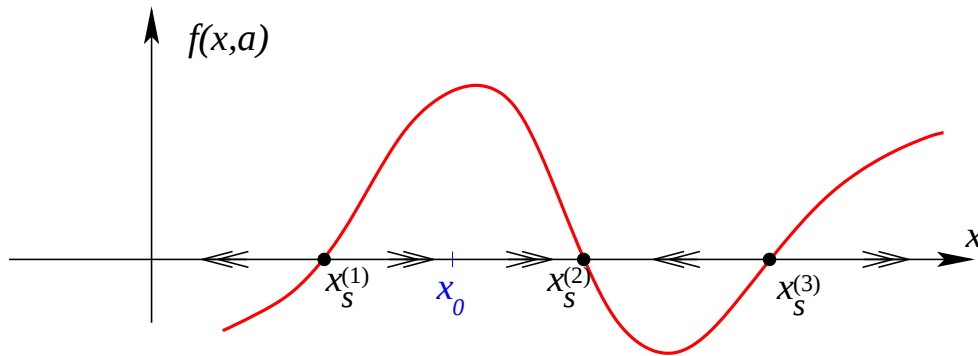


Fig. 2: Flot de $x(t)$ dans l'équation (2.1).

Choisissons un point x_0 et suivons le “flot” de $x(t)$ solution de (2.1), avec la condition initiale $x(0) = x_0$. Si $f(x_0, a) > 0$, $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} > 0$ et $x(t)$ croît au voisinage de $t = 0$. En fait $x(t)$ croît tant que $f(x(t), a) > 0$, c’est-à-dire jusqu’à ce qu’elle atteigne la première valeur $x_s^{(j)}$ supérieure à x_0 , ou bien $x(t) \rightarrow \infty$. Sur la figure, c’est ce qui se passe respectivement pour $x_s^{(1)} < x_0 < x_s^{(2)}$ ou pour $x_0 > x_s^{(3)}$. Inversement, partir d’un point x_0 où $f(x_0, a) < 0$ donne un flot de $x(t)$ décroissant soit vers le $x_s^{(i)}$ le plus proche inférieur à x_0 , soit vers $-\infty$.

Si la dérivée $f'(x, a) \neq 0$ en chacun des points $x_s^{(j)}$, on voit que les points où elle est positive sont répulsifs (c’est-à-dire instables), ceux où elle est négative sont attracteurs (stables).

Discuter graphiquement le flot de $x(t)$ si la fonction f a un zéro double en x_s .

2.2. Linéarisation d’une équation du premier ordre

On va effectuer maintenant une analyse de la condition de stabilité au voisinage d’une solution statique donnée x_s en se basant sur une *approximation linéaire de l’équation dans ce voisinage*. Si (2.1) est l’équation considérée, a un (ou plusieurs) paramètre(s) de contrôle, et x_s une solution statique, c’est-à-dire indépendante du temps, satisfaisant donc $f(x_s, a) = 0$, on cherche une solution de la forme $x(t) = x_s + \xi(t)$, avec $\xi(t)$ supposé petit (à tout temps t). On développe donc (2.1) au premier ordre en ξ pour obtenir

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_s} \xi(t) \quad (2.2)$$

qui s’intègre immédiatement en

$$\xi(t) = \xi(0)e^{\rho t} \quad (2.3)$$

où $\rho := \partial f / \partial x|_{x_s}$ est indépendant de t (mais dépend du paramètre de contrôle a). Selon le signe de ρ , la conclusion est différente. Si $\rho < 0$, la perturbation $\xi(t)$ reste bornée par sa valeur initiale à $t = 0$. La solution x_s est stable ⁴. Si par contre $\rho > 0$, la perturbation $\xi(t)$ augmente exponentiellement avec le temps, et si petite qu’elle ait été au temps $t_0 = 0$, elle finit par devenir arbitrairement grande (et à rendre incorrecte l’approximation linéaire qu’on vient d’effectuer). On conclut à l’instabilité de la solution x_s . Noter qu’on a bien retrouvé la conclusion de l’analyse graphique précédente.

⁴ Il conviendrait de justifier l’approximation de l’équation initiale par sa linéarisation, pour $\xi \ll 1$; il faudrait pour cela démontrer que les termes d’ordre plus élevé en ξ n’affectent pas la conclusion. Ceci peut être effectué dans de nombreux systèmes non-linéaires.

2.3. Exemple : linéarisation de l'équation (1.4)

Revenons à l'équation (1.4), en supposant $a > 0$. La linéarisation au voisinage d'une solution statique $x_s = \pm\sqrt{a}$, c'est-à-dire posant $x = x_s + \xi$ et ne gardant que les termes linéaires en ξ conduit à $\dot{\xi} = -2x_s\xi$, dont la solution $\xi(t) = \xi(0)e^{-2x_s t}$ a un comportement radicalement différent selon qu'on regarde $x_s = +\sqrt{a}$ ou $x_s = -\sqrt{a}$. Pour la première, le comportement de ξ aux grands temps permet de conclure à la stabilité, pour la seconde, à l'instabilité. Si $a = 0$, la solution $x_s = 0$ est juste au bord de la région de stabilité, et il faut aller au delà de l'analyse de stabilité linéaire pour conclure.

Il se trouve que l'équation différentielle (1.4) peut s'intégrer explicitement et exactement, ce qui nous permet de comparer le traitement exact avec la linéarisation. L'équation (1.4) est en effet "à variables séparées", ce qui signifie qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{a - x^2} = dt$$

où le membre de gauche ne dépend que de x , et celui de droite de t . On peut donc l'intégrer en prenant en compte la condition initiale $x(0) = x_0$, et en distinguant les cas $a > 0$, $a = 0$ ou $a < 0$.

Supposons par exemple $a < 0$ et posons $a = -\alpha^2$, avec disons $\alpha = \sqrt{-a}$ la racine positive de $-a$. On écrit alors

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = - \int \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha} \text{Arc tan } \frac{x}{\alpha}$$

et donc en intégrant entre $t = 0$ et t , et $x = x_0$ et x ,

$$t = -\frac{1}{\alpha} \left(\text{Arc tan } \frac{x}{\alpha} - \text{Arc tan } \frac{x_0}{\alpha} \right). \quad (2.4)$$

L'utilisation de la formule d'addition des tangentes

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \quad (2.5)$$

et un peu d'algèbre conduisent alors à l'une des formules ci-dessous. Le cas $a > 0$ se traite de manière analogue, les $\tan$ étant remplacées par leur version hyperbolique. Le cas $a = 0$ est particulièrement simple.

Selon que $a > 0$, $a = 0$ ou $a < 0$, on a donc trois solutions explicites distinctes

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{a} \frac{x_0 + \sqrt{a} \tanh(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a} + x_0 \tanh(\sqrt{a}t)} & \text{si } a > 0 \\ \frac{x_0}{1 + x_0 t} & \text{si } a = 0 \\ \sqrt{-a} \frac{x_0 - \sqrt{-a} \tan(\sqrt{-a}t)}{\sqrt{-a} + x_0 \tan(\sqrt{-a}t)} & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour $a > 0$ et $x_0 > -\sqrt{a}$, la solution tend vers $\sqrt{a}$ exponentiellement vite quand $t \rightarrow \infty$, puisqu'on calcule aisément

$$x(t) - \sqrt{a} = \sqrt{a} \frac{(1 - \tanh(\sqrt{a}t))(x_0 - \sqrt{a})}{\sqrt{a} + x_0 \tanh(\sqrt{a}t)} \approx_{t \rightarrow \infty} \text{const.} (x_0 - \sqrt{a}) e^{-2\sqrt{a}t}.$$

Quelle que soit la valeur initiale $x_0 > -\sqrt{a}$, la solution $x(t)$ converge vers $\sqrt{a}$. Pour $a > 0$ mais $x_0 < -\sqrt{a}$, quand le temps t tend vers t_1 donné par $\sqrt{a}t_1 = \text{Arg tanh} \left(\frac{-\sqrt{a}}{x_0} \right)$ qui est positif, $x(t) \rightarrow -\infty$. Si $x_0 = -\sqrt{a}$, $x(t) = -\sqrt{a} \quad \forall t$, mais il s'agit d'un point fixe instable. La position d'équilibre stable $+\sqrt{a}$ est donc un point "attracteur", tandis que $-\sqrt{a}$ est "répulsif".

Pour $a < 0$, et pour tout x_0 , $x(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow t_1 := \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{Arc tan} \left(\frac{-\sqrt{-a}}{x_0} \right)$ (plus éventuellement π) qui est positif. Donc pour $a < 0$, $x(t)$ diverge vers $-\infty$, quelle que soit la valeur x_0 .

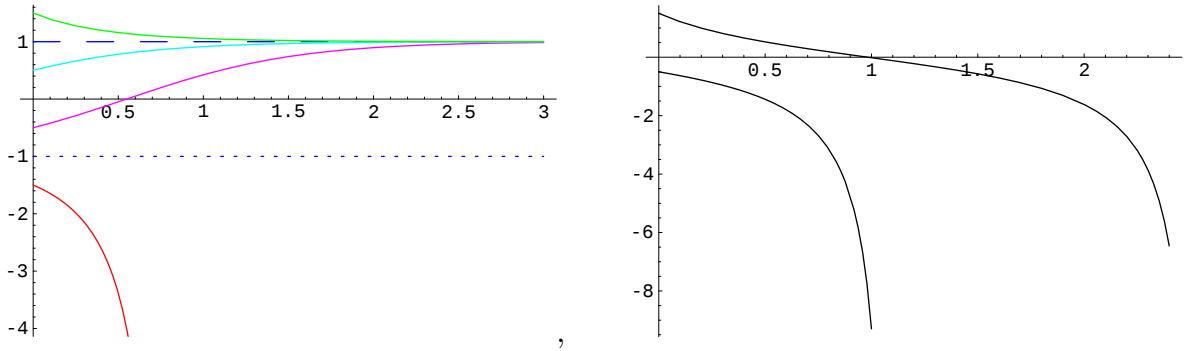


Fig. 3: A gauche : trajectoires $x(t)$ de (1.4) pour $a = 1 > 0$; de haut en bas, $x_0 = 1, 0.5, -0.5, -1.5$; les points $x_s = \sqrt{a} = 1$ stable (attractif) et $x_s = -\sqrt{a} = -1$ instable (répulsif) sont aussi indiqués par des lignes brisées. A droite , trajectoires pour $a = -1 < 0$; de haut en bas, $x_0 = 1.5, -0.5$

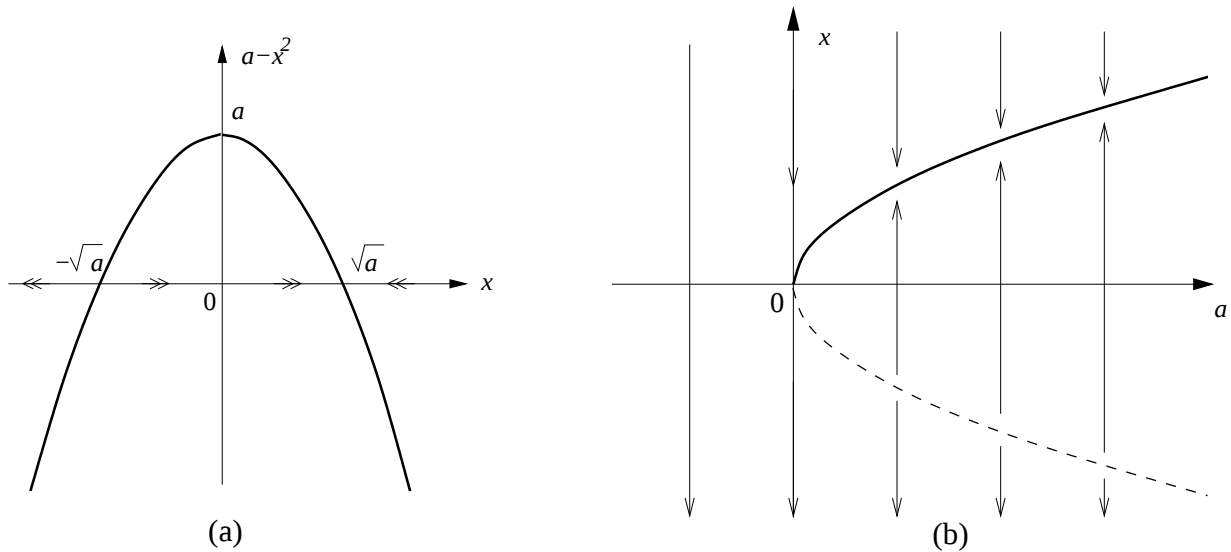


Fig. 4: (a) : Diagramme de flot de (1.4) pour $a > 0$; (b) : diagramme de bifurcation de (1.4).

Pour $a = 0$, $x(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ quel que soit $x_0 \geq 0$, mais vers $-\infty$ quand $t \rightarrow -1/x_0$ si $x_0 < 0$. Noter que dans ce dernier cas, la singularité (la valeur infinie) de x est atteinte en un temps fini. La solution $x_s = 0$ du cas $a = 0$ est donc une position d'équilibre instable.

Exercice : dessiner les diagrammes de flot pour les cas $a < 0$ et $a = 0$.

L'analyse des solutions (2.6) a donc confirmé les conclusions de la linéarisation. On dessine un diagramme de bifurcation résumant ces conclusions, voir figure 4(b).

2.4. Linéarisation d'une équation d'ordre plus élevé : linéarisation au voisinage d'un extrémum du potentiel.

La méthode de linéarisation s'applique aussi à des équations différentielles d'ordre plus élevé, par exemple à l'équation du mouvement d'un point matériel soumis à une force dérivant d'un potentiel,

$$\ddot{x}(t) = -U'(x(t)) \quad (2.7)$$

avec $U'(x) = \frac{d}{dx}U(x)$. Comme on l'a vu plus haut, une solution statique est un point x_s où $U'(x_s) = 0$, et selon la discussion précédente, pour en discuter la stabilité, on développe $U(x)$ et $U'(x)$ au premier ordre non trivial pour $x \approx x_s + \xi$

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_s) + \underbrace{U'(x_s)}_0 \xi + \frac{1}{2}U''(x_s)\xi^2 + \dots \\ U'(x) &= U''(x_s)\xi + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Linéariser l'équation (2.7), c'est ne conserver que le terme linéaire en ξ dans $U'(x)$, donc écrire

$$\ddot{\xi}(t) = -U''(x_s)\xi. \quad (2.9)$$

On est ramené à la discussion de l'équation (1.2). La solution $\xi = 0$, c'est-à-dire $x = x_s$, est stable si $a = -U''(x_s) < 0$, soit $U''(x_s) > 0$. Ceci est en accord avec notre assertion antérieure qu'une solution statique stable correspond à un *minimum* du potentiel.

2.5. Linéarisation du système de Hopf

Revenons maintenant à (1.6), ou plutôt à (1.9), $\dot{r} = (a - r^2)r$, $\dot{\theta} = 1$. Appliquons l'analyse linéaire précédente à l'équation en r : elle a deux solutions statiques $r_s = 0$ et $r_s = \sqrt{a}$,

et on développe en leur voisinage en écrivant $r(t) = r_s + \rho(t)$, où ρ satisfait l'équation linéarisée

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= (a - r_s^2 - 2\rho r_s)(r_s + \rho) + \epsilon(\rho) \\ &= -2\rho r_s^2 + \rho(a - r_s^2) + \epsilon(\rho) = (a - 3r_s^2)\rho \\ &= \begin{cases} \rho a & \text{si } r_s = 0 \\ -2\rho a & \text{si } r_s = \sqrt{a} \end{cases}\end{aligned}\quad (2.10)$$

où on a finalement omis les termes $\epsilon(\rho)$. Si $a < 0$, on est nécessairement dans le premier cas ($r_s = 0$), et on voit que $\rho(t) = \rho(0)e^{at}$ qui tend vers zéro à grand t , le point $r_s = 0$ est donc stable. Si $a > 0$, $r_s = 0$ est instable, tandis que pour $r_s = \sqrt{a}$, $\rho(t) = \rho(0)e^{-2at}$ tend vers zéro, $r_s = \sqrt{a}$ est stable. Enfin on traite séparément le cas $a = 0$, $\dot{r} = -r^3$ qui n'a que la solution $r_s = 0$ et pour laquelle l'analyse de stabilité linéaire ne permet pas de conclure. Dans ce cas l'équation de Hopf radiale est simplement $\dot{r} = -r^3$, soit $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} = 2$, qui s'intègre immédiatement en $r(t) = r_0/\sqrt{1+2r_0^2t}$, décrivant donc un mouvement qui tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$: $r_s = 0$ est donc stable.

L'équation (1.9) peut en fait se résoudre exactement pour tout a en séparant les variables

$$dt = \frac{dr}{r(a - r^2)} = \frac{dr}{a} \left(\frac{r}{a - r^2} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2a} d \ln \frac{r^2}{|a - r^2|}, \quad (2.11)$$

qui s'intègre en

$$e^{2at} = C \frac{r^2}{|a - r^2|}$$

où la constante C est fixée par la valeur initiale $r_0 := r(0)$, soit $1 = C \frac{r_0^2}{|a - r_0^2|}$, et donc

$$\frac{r^2}{a - r^2} = \frac{r_0^2}{a - r_0^2} e^{2at}$$

(car on vérifie que $a - r^2$ reste toujours du même signe que $a - r_0^2$). De cette dernière équation on tire l'expression de r^2 puis finalement, celle de $r(t)$ (qui est > 0 par définition)

$$r(t) = \begin{cases} r_0 \sqrt{\frac{a}{r_0^2 + (a - r_0^2)e^{-2at}}} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2t}} & \text{si } a = 0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

Exercice : vérifier que la limite $a \rightarrow 0$ de la première solution redonne bien la deuxième.

On voit sur ces formules que la limite $t \rightarrow \infty$ est très différente selon que $a > 0$ (où $r(t) \rightarrow \sqrt{a}$), ou $a \leq 0$ (où $r(t) \rightarrow 0$).

Les figures qui suivent illustrent ces différents cas. Dans les cas (a) et (b) où $a > 0$, la trajectoire tend vers $r_s = \sqrt{a}$ qui est donc attractive : on dit que le cercle de rayon $r = r_s =$

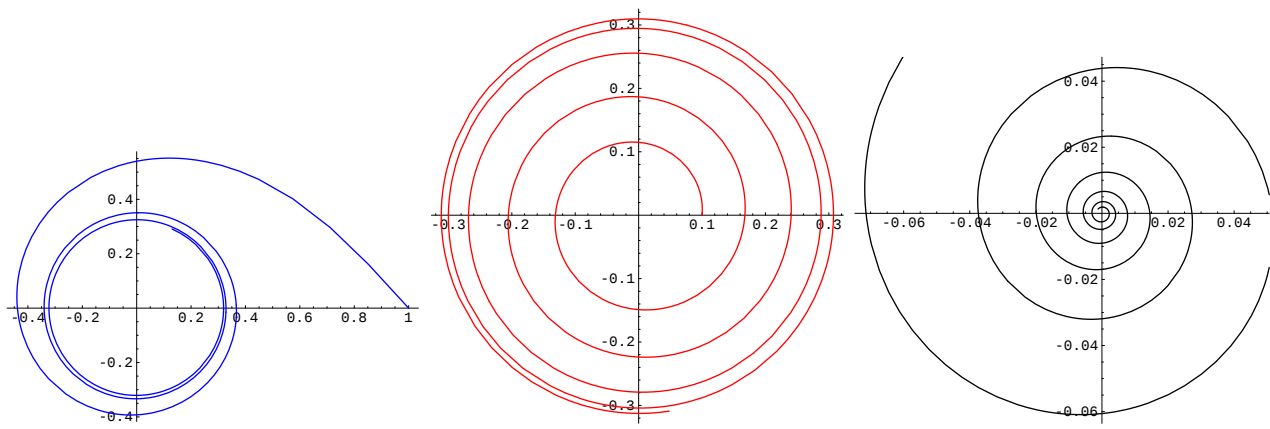


Fig. 5: Trajectoires du système de Hopf pour différentes valeurs du paramètre de contrôle a et de la condition initiale $r(0) = r_0$: (a) $a = 0.1$, $r_0 = 1$; (b) $a = 0.1$, $r_0 = 0.1$; (c) $a = -0.1$, $r_0 = 0.1$.

$\sqrt{a}$, qui constitue la trajectoire asymptotique, parcourue à vitesse angulaire constante, est un *cycle limite*. Dans le cas (c) où $a < 0$, $r(t)$ tend vers zéro exponentiellement vite : $r(t) \sim e^{at}$. Dans le cas où $a = 0$ (non figuré ici), la convergence vers zéro est beaucoup plus lente $r(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}$.

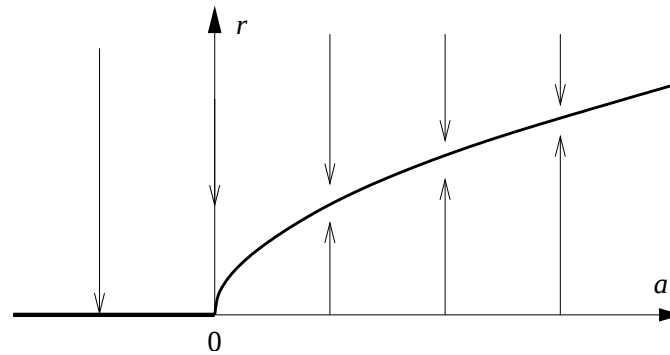


Fig. 6: Diagramme de bifurcation pour le système de Hopf

Le diagramme de bifurcation peut aussi se dessiner dans le plan (a, r) , voir fig. 6.

Exercice. Tracer le diagramme de flot de $r(t)$ en distinguant les cas $a < 0$ et $a > 0$.

3. Portrait de phase

3.1. Espace de phases

Considérons un point dans l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, décrit par trois coordonnées spatiales x_i , $i = 1, 2, 3$. Sa dynamique fait apparaître sa vitesse, de coordonnées v_i , ou de façon

équivalente, son impulsion $p_i = mv_i$. En physique, on appelle *espace des phases* un espace de dimension 6 (dans le cas considéré ici), de coordonnées (x_i, v_i) , $i = 1, 2, 3$. Une loi du mouvement $x_i = f_i(t)$ implique par dérivation la loi de $v_i = \dot{f}_i(t)$, et l'ensemble des points $(x_i = f_i(t), v_i = \dot{f}_i(t))$ définit une courbe (paramétrée par t) dans l'espace des phases, nommée *portrait de phase*. Inversement étant donnée une telle courbe, on peut reconstruire la loi du mouvement : pour plus de simplicité, restreignons-nous à un système à un degré de liberté (c'est-à-dire une seule coordonnée x), dont l'espace des phases (de coordonnées x et v) est donc de dimension 2. Si au voisinage d'un point x_0 on peut décrire la courbe par $v = \phi(x)$, la fonction cherchée $x(t)$ doit être telle que $\dot{x}(t) = \phi(x)$ qui s'intègre en $t - t_0 = \int_{x_0}^x dx' / \phi(x')$ et mène donc à la loi du mouvement $x(t)$, si on appelle t_0 le temps où le système est en x_0 .

Exemple : considérons un oscillateur harmonique libre non amorti, de fréquence propre ω_0 , donc obéissant à l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Si au temps $t = 0$, il est lâché sans vitesse initiale depuis la position x_0 , sa loi du mouvement est $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$, donc $v(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$. La trajectoire dans l'espace de phases est la courbe paramétrée $(x(t), v(t))$, donc une *ellipse* $x^2 + v^2 / \omega_0^2 = x_0^2$. Inversement, étant donnée cette ellipse, on en choisit une “branche”, (soit la partie supérieure, soit la partie inférieure de l'ellipse dans le plan (x, v) , c'est-à-dire qu'on fait un choix de signe pour la racine carrée), par exemple $v = \omega_0 \sqrt{x_0^2 - x^2}$ et on intègre $dx / \sqrt{x_0^2 - x^2} = \omega_0 dt$ d'où $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$. La condition initiale fixe alors $\phi = 0$. (Le choix opposé de signe dans la racine aurait conduit à $x = -x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi')$ avec $\phi' = \phi + \pi$, donc au final, à la même fonction $x(t)$, à une redéfinition de ϕ près.).

Sans même résoudre explicitement l'“équation horaire” (l'équation du mouvement), on peut “lire” beaucoup d'informations concernant le mouvement sur le “portrait de phase” (x, v) . Considérons en effet un point $(x, v = \omega_0 \sqrt{x_0^2 - x^2})$ (en choisissant à nouveau la branche supérieure de l'ellipse). Le fait que $v > 0$ signifie qu'à partir de ce point, le mouvement s'effectue vers la droite sur cette branche, jusqu'à ce que v s'annule et change de signe, c'est-à-dire qu'on passe sur la branche inférieure ; à partir de ce moment, la conclusion est inversée et le mouvement s'effectue vers la gauche sur la branche inférieure jusqu'à ce qu'il recoupe à nouveau l'axe, etc. Le mouvement dans l'espace des phases est donc un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre le long de l'ellipse.

Ces considérations s'étendent à un système à N degrés de liberté, c'est-à-dire décrit par N coordonnées x_i : l'espace de phases est alors de dimension $2N$.

Pour un système donné, obéissant à la loi de la dynamique $m\ddot{x}_i = F_i(\vec{x}, t)$ avec une force donnée, la solution $x_i = f_i(t)$ est unique une fois spécifiées des conditions initiales $x_i(t_0), \dot{x}_i(t_0)$. Cela implique que deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent pas s'intersecter : si c'était le cas, elles auraient des conditions initiales prises en ce point identiques et la suite de leur trajectoire coïnciderait alors. La seule exception à cette règle se produit en un point d'équilibre instable, *du voisinage* duquel plusieurs trajectoires différentes peuvent partir, ou y arriver (au bout d'un temps infini, pourquoi ?).

3.2. Pendule simple, son portrait de phase

On revient au pendule simple, satisfaisant l'équation $\ell\ddot{\theta} = -g \sin \theta$. On a mentionné au chapitre 2 qu'une intégrale première peut être obtenue en multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta = E/m\ell^2 \text{ constante ,}$$

où, comme précédemment, $\omega_0^2 = g/\ell$ et où E est l'énergie totale conservée, fixée par les conditions initiales. Appelons $\phi = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire. L'équation précédente est précisément celle d'une courbe dans l'espace des phases, c'est-à-dire d'un portrait de phase, qui dépend de la constante $E/m\ell^2$. En se rappelant que $\cos \theta \equiv 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, on peut résoudre

$$\phi = \pm 2\omega_0 \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.1)$$

avec $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\phi_0}{2\omega_0}$, où $\phi_0 = \dot{\theta}_0$ est la vitesse angulaire au point où $\theta = 0$ (donc $E/m\ell^2 = \frac{1}{2}\phi_0^2 - \omega_0^2$). Comme précédemment, une remarque simple consiste à observer que le mouvement s'effectue sur une même branche et dans une direction donnée tant que ϕ ne s'annule pas. Si $\phi > 0$ (branche supérieure), θ croît au cours du mouvement, donc le point se déplace vers la droite. Le mouvement ne peut changer de sens que si ϕ vient à s'annuler.

- Pour $\nu \ll 1$, ϕ, θ sont (au plus) d'ordre 1 en ν , et l'équation se simplifie en

$$\phi = \pm 2\omega_0 \nu \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\nu}\right)^2} .$$

C'est l'approximation déjà rencontrée des petites oscillations du pendule par un oscillateur harmonique, et on retrouve comme portrait de phase l'ellipse du paragraphe précédent : il s'agit d'une ellipse de demi-axes $2\nu, 2\omega_0\nu$ dans les variables θ et ϕ .

- Quand ν croît mais reste inférieur à 1, l'ellipse se déforme et grossit, la trajectoire (le portrait) restant une courbe fermée. Le mouvement est encore un mouvement pendulaire

oscillant, entre des angles $\pm\theta_m$, avec $\sin(\theta_m/2) = \nu$. On obtient la période en intégrant l'équation du mouvement, là encore une équation différentielle à variables séparées :

$$dt = \frac{d\theta}{\phi(\theta)} = \pm \frac{d\theta}{2\omega_0 \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} . \quad (3.2)$$

Comme esquissé au chapitre 2, §4, la demi-période correspond au temps nécessaire au pendule pour osciller entre les angles $-\theta_m$ et θ_m , (donc avec une vitesse angulaire $\phi > 0$, d'où le choix du signe + dans (3.2)) soit

$$\frac{T}{2} = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\theta}{2\omega_0 \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (3.3)$$

et le changement de variable d'intégration $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_m}{2} \sin u$ amène à (le vérifier !)

$$T = 4 \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \frac{\theta_m}{2}}} . \quad (3.4)$$

La période est donc donnée en fonction de l'angle maximum θ_m par cette intégrale non triviale, nommée "intégrale elliptique de première espèce"

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \mathbf{K}(\sin^2 \frac{\theta_m}{2}) \stackrel{\text{déf}}{=} 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \frac{\theta_m}{2}}} . \quad (3.5)$$

Toute cette discussion reste valable jusqu'à la valeur critique $\nu = 1$.

- Le cas $\nu = 1$, et donc $\sin^2 \theta_m/2 = 1$, $\theta_m = \pm\pi$, correspond à la situation où la bille du pendule atteint la verticale avec une vitesse nulle. La période T tend vers l'infini quand $\nu \rightarrow 1$.

- Enfin pour $\nu > 1$, le radical dans (3.1) ne s'annule jamais, donc le sens du mouvement sur le portrait de phase ne s'inverse jamais : vers la gauche sur la branche inférieure, vers la droite sur la supérieure.

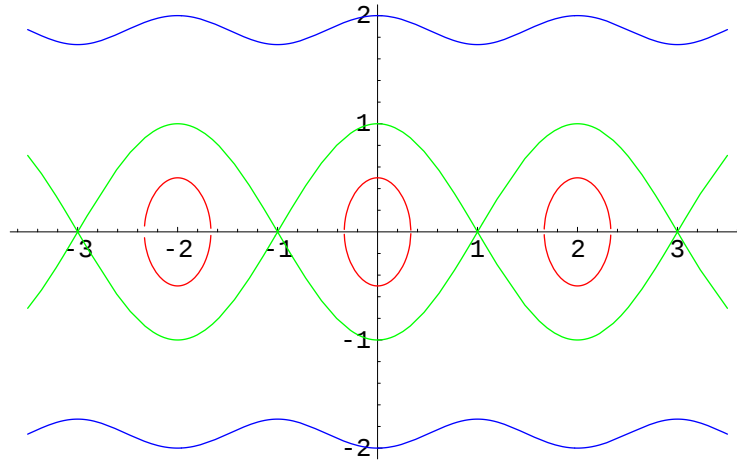


Fig. 7: Portrait de phase du pendule simple : en abscisse θ/π , en ordonnée $\phi/2\omega_0$ pour les trois valeurs de $\nu = \frac{1}{2}, 1, 2$.

Voir le portrait de phase sur la figure 7. Noter que des trajectoires s'intersectent aux points $\theta = (2k + 1)\pi$, qui correspondent à des points d'équilibre instable. Les trajectoires qui passent par ces points séparent les trajectoires fermées, du type elliptique, des trajectoires ouvertes. Pour cette raison, elles sont appelées *séparatrices*.

4. Le modèle proie-prédateur, équation de Lotka-Volterra. (*traité en TD*)

Il s'agit d'un modèle d'interactions entre deux populations, les petits poissons et les gros, les seconds mangeant les premiers ... Il a été initialement proposé par Lotka pour la modélisation de certaines réactions chimiques, puis appliqué par Volterra à l'évolution de populations de poissons dans l'Adriatique. On écrit donc

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \gamma p - apP \\ \frac{dP}{dt} &= -\Gamma P + ApP\end{aligned}\tag{4.1}$$

où les quatre constantes sont positives, homogènes à l'inverse d'un temps. Si les petits poissons étaient seuls, γ serait leur taux de croissance (exponentielle), si les gros étaient sans proies, Γ serait leur taux d'extinction. Les constantes non diagonales décrivent les interactions entre ces populations.

Ce système admet des solutions "triviales"

$$p = P = 0; \quad p = 0, P(t) = P(0) e^{-\Gamma t}; \quad P = 0, p(t) = p(0) e^{\gamma t} .\tag{4.2}$$

On cherche des solutions dans $\mathbb{R}_+^2$. Que sont les points fixes ? Ils sont solutions de

$$\{\gamma p_s = ap_s P_s, \quad \Gamma P_s = Ap_s P_s\} \iff (p_s, P_s) = (0, 0), \quad \left(\frac{\Gamma}{A}, \frac{\gamma}{a}\right)\tag{4.3}$$

La linéarisation autour du point fixe trivial est ...triviale ! puisqu'elle se réduit à $\frac{d\tilde{p}}{dt} = \gamma\tilde{p}$, $\frac{d\tilde{P}}{dt} = -\Gamma\tilde{P}$, donc elle décrit des populations découplées. En ce qui concerne le point fixe non trivial, on note qu'on peut récrire (4.1) sous la forme

$$\dot{p} = -ap(P - P_s), \quad \dot{P} = AP(p - p_s) .\tag{4.4}$$

La linéarisation autour du point fixe non trivial, $p = p_s + \tilde{p}$, $P = P_s + \tilde{P}$, s'en déduit :

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -ap_s\tilde{P} \quad \frac{d\tilde{P}}{dt} = AP_s\tilde{p}\tag{4.5}$$

donc en éliminant $\tilde{P}$

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dt^2} = -aAp_sP_s\tilde{p}$$

(ou la même équation pour $\tilde{P}$), équation du type oscillateur harmonique de fréquence propre donnée par $\omega_0^2 = aAp_sP_s = \gamma\Gamma$. Donc la version linéarisée des équations de Lotka-Volterra a pour solution

$$\begin{aligned} p(t) &= p_s + (p(0) - p_s) \cos \omega_0 t - \sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}} \frac{a}{A} (P(0) - P_s) \sin \omega_0 t \\ P(t) &= P_s + (P(0) - P_s) \cos \omega_0 t + \sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma}} \frac{A}{a} (p(0) - p_s) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (4.6)$$

équations d'une ellipse centrée en (p_s, P_s) , d'équation $\gamma A^2 (p - p_s)^2 + \Gamma a^2 (P - P_s)^2 = \text{constante}$ (constante donnée par les conditions initiales).

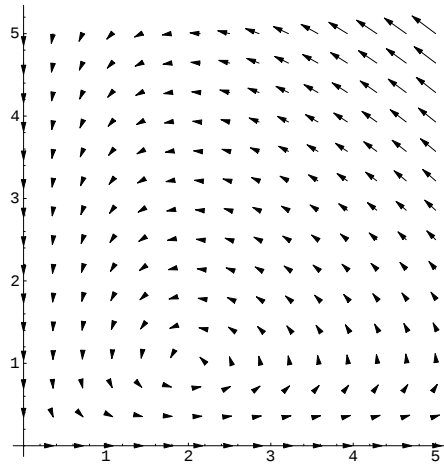


Fig. 8: Champ de vitesse du système de Volterra pour des valeurs $a = A = \gamma = 1$, $\Gamma = 2$.

S'il est difficile de dessiner le portrait de phase (un système de courbes dans un espace de dimension 4 !), on peut le représenter à deux dimensions dans le plan (p, P) en dessinant en chaque point le vecteur vitesse $(\dot{p}, \dot{P})$. Les trajectoires sont des courbes tangentes à ce *champ de vitesse*. Les équations (4.4) impliquent que le champ de vitesse, donc les trajectoires, s'enroulent autour du point fixe non trivial dans le sens positif. On montre en outre que les trajectoires sont fermées, donc périodiques. Voir figure 8.

Un dernier point au sujet de l'équation de Lotka-Volterra. Malgré sa non-linéarité, on peut trouver une quantité conservée. Si on pose $u = \ln p$, $U = \ln P$, les équations (4.1) se mettent sous la forme

$$\frac{du}{dt} = \gamma - ae^U, \quad \frac{dU}{dt} = -\Gamma + Ae^u. \quad (4.7)$$

Si on peut trouver un “hamiltonien” $H(u, U)$ tel que $\dot{u} = \partial_U H$, $\dot{U} = -\partial_u H$, alors cet hamiltonien est une quantité conservée puisque

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial U} \dot{U} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} = 0 .$$

Or il est aisé d’intégrer les deux équations

$$\partial_U H = \gamma - ae^U , \quad \partial_u H = \Gamma - Ae^u$$

en deux étapes, la première équation impliquant $H(u, U) = \gamma U - ae^U + C(u)$, puis la seconde $H(u, U) = \gamma U - ae^U + \Gamma u - Ae^u$, à une constante additive sans importance près. Le “mouvement” s’effectue donc sur la courbe d’équation

$$\gamma \ln P - aP + \Gamma \ln p - Ap = \text{constante} , \quad (4.8)$$

ou encore

$$P^\gamma p^\Gamma = Ce^{aP+Ap} .$$

la constante C étant fixée par les conditions initiales.

5. Applications récursives

Ce paragraphe est consacré au cas de systèmes régis par des équations aux différences finies, pouvant se mettre sous forme d’applications récursives $x_n = f(x_{n-1})$ ou $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2})$, etc

De telles applications peuvent être vues comme des *discrétisations* d’une équation différentielle, respectivement du premier, du deuxième etc ordre. A ce titre, elles peuvent représenter une méthode pratique de résolution numérique de telles équations. Elles peuvent aussi apparaître de plein droit dans l’étude de systèmes dynamiques où on n’a accès qu’à des valeurs de la variable à des temps discrets, par exemple la position d’une comète à son périhélie, la population d’une espèce de tortues marines lors de leur ponte annuelle...

5.1. Points fixes et stabilité linéaire

Considérons une application récursive (ou “itérative”)

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (5.1)$$

où f est une fonction supposée continue et dérivable, et étudions ses points fixes et la stabilité de sa linéarisation au voisinage de ces points fixes. Les points fixes qu’il est traditionnel de dénoter par x^* satisfont

$$x^* = f(x^*) .$$

Géométriquement, ce sont les abscisses des points d’intersection de la courbe $y = f(x)$ avec la première bissectrice.

Linéariser l’itération au voisinage d’un de ses points fixes x^* , c’est définir une nouvelle suite $u_n = x_n - x^*$ et récrire la relation en termes des u_n en développant f au premier ordre en u

$$x_{n+1} = x^* + u_{n+1} = f(x^* + u_n) = f(x^*) + f'(x^*)u_n + O(u_n^2)$$

soit

$$u_{n+1} = f'(x^*)u_n . \quad (5.2)$$

Selon la valeur de $\rho := |f'(x^*)|$, cette suite géométrique a des comportements bien différents. Si $\rho < 1$, la suite u_n converge vers zéro, c’est-à-dire x_n tend vers la limite x^* . Au contraire, si $\rho > 1$, la suite u_n diverge et, selon cette analyse de stabilité linéaire, x_n ne converge pas vers x^* (mais rien n’interdit qu’il converge vers un autre point fixe).

On peut aussi visualiser cette condition sur ρ et la convergence ou non de x_n vers x^* par une méthode graphique. Cette méthode est illustrée sur l’exemple de la suite $x_n = e^{x_{n-1}} - 2$, $x_1 = 1$ sur la figure 9a. Pour un point x_n donné, la nouvelle valeur de $x_{n+1} = f(x_n)$ est obtenue en projetant sur l’axe des abscisses le point de la bissectrice de coordonnées $x_{n+1} = y_{n+1} = f(x_n)$. L’itération conduit alors à la construction d’un escalier ou d’un colimaçon, qui s’éloigne de x^* ou qui s’en approche selon que la tangente à la courbe en x^* est au dessus ou au dessous de la bissectrice, c’est-à-dire si $\rho = |f'(x^*)| > 1$ ou si $\rho < 1$.

Bien que l’équation $x = e^x - 2$ admette une racine positive $x_+^* \approx 1.14619$, comme on le voit sur la figure 9a, cette racine **n’est pas** la limite de cette suite qui en fait converge

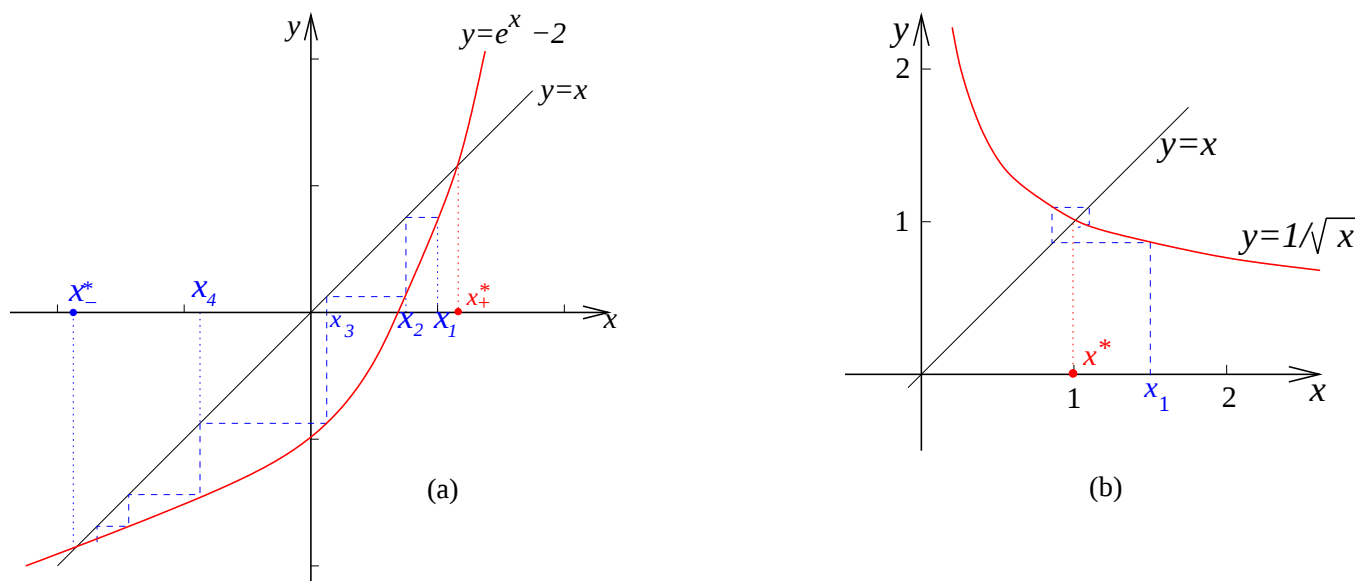


Fig. 9: (a) Convergence ou divergence de la suite $x_n = e^{x_{n-1}} - 2$ selon la valeur initiale de x_1 . On a représenté la suite qui démarre de $x_1 = 1$. Tracer sur le graphe celle qui démarre de $x_1 = 1.5$. (b) Le cas de la suite $x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$.

vers l'autre racine $x_n \rightarrow x_-^* \approx -1.84141$. On dit parfois que x_+^* est un point fixe répulsif, x_-^* un point fixe attractif de l'itération. Noter que la même relation de récurrence avec la valeur initiale $x_1 = 1.5$ conduit à une suite divergente. En trouver la raison graphique sur la figure.

Récapitulons

$$\begin{aligned}
 \rho = |f'(x^*)| < 1 : x^* \text{ est un point fixe attractif } x_n &\rightarrow x^* \\
 \rho = |f'(x^*)| > 1 : x^* \text{ est un point fixe répulsif } x_n &\not\rightarrow x^* \\
 \rho = |f'(x^*)| = 1 : &\text{ on ne peut pas conclure.}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Montrer que la suite $x_{n+1} = \ln(x_n + 2)$ qui admet les mêmes points fixes $x_\pm^*$ (pourquoi ?) voit se renverser leurs rôles. x_+^* est maintenant attractif, et x_-^* répulsif.

Étudier de la même façon la convergence de la suite $x_n = 3(1 - e^{-x_{n-1}})$ vers la racine positive de l'équation $x^* = 3(1 - e^{-x^*})$ rencontrée dans l'étude du corps noir (cf TD 2 et TP). (L'itération converge car la fonction $\phi(x) = 3(1 - e^{-x})$ a une pente $\phi'(x) = 3e^{-x} < 1$ au voisinage de $x = 3$ ($e^{-3} \approx 1/20$).)

5.2. Application logistique

L'application logistique est l'itération définie par

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) =: f(x_n) \tag{5.4}$$

où x est une variable dans l'intervalle $[0, 1]$ et a est un paramètre positif. En dépit de son apparente simplicité, cette application itérative révèle de surprenantes richesses ...

Noter d'abord qu'elle constitue une discrétisation de l'équation dite de Verhulst, $\dot{x} = Ax - Bx^2$, qui, elle, n'exhibe aucun phénomène particulièrement intéressant. Cette équation différentielle peut par changement des variables $x = A\tilde{x}/B$ et $\tilde{t} = At$ se mettre sous la forme canonique

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{x} = \tilde{x}(1 - \tilde{x}) \quad (5.5)$$

puis s'intègre aisément par séparation de variables,

$$d\tilde{t} = \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x} - \tilde{x}^2} = \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{d\tilde{x}}{1 - \tilde{x}} = d \ln \left| \frac{\tilde{x}}{1 - \tilde{x}} \right| ,$$

soit

$$\left| \frac{\tilde{x}(\tilde{t})}{1 - \tilde{x}(\tilde{t})} \right| = \left| \frac{\tilde{x}(0)}{1 - \tilde{x}(0)} \right| e^{\tilde{t}} .$$

On peut en fait se débarrasser des valeurs absolues : l'équation précédente montre que $\tilde{x}(\tilde{t})/(1 - \tilde{x}(\tilde{t}))$ ne s'annule pas au cours du temps, donc est du même signe que $\tilde{x}(0)/(1 - \tilde{x}(0))$. On en tire alors la solution

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = \frac{e^{\tilde{t}}\tilde{x}(0)}{1 + (e^{\tilde{t}} - 1)\tilde{x}(0)}$$

ou encore, dans les variables initiales

$$x(t) = \frac{e^{At}x(0)}{1 + \frac{B}{A}(e^{At} - 1)x(0)}$$

fonction qui tend gentiment vers A/B quand $t \rightarrow \infty$. Le paramètre de contrôle a de l'application logistique peut être considéré comme lié au pas de discrétisation du temps de l'équation de Verhulst par $a = A\Delta t + 1$. Nous allons voir qu'il joue un rôle très important ... et insoupçonné au niveau de l'équation de Verhulst.

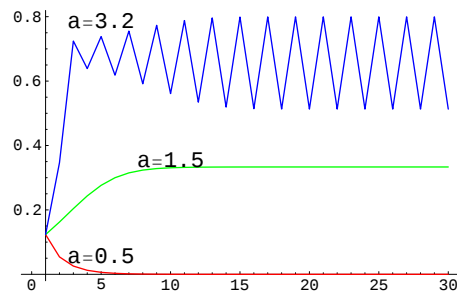


Fig. 10: Itérations $x_n = f_n(x_0)$ de l'application logistique pour une condition initiale quelconque, ici $x_0 = 0.1234567890$, et, de bas en haut $a = 0.5$, $a = 1.5$ et $a = 3.2$. L'axe des abscisses porte la valeur de $n + 1$.

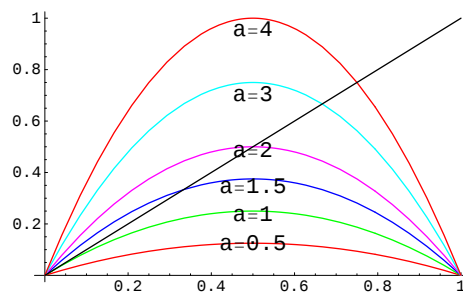


Fig. 11: Les points fixes de l'application logistique pour différentes valeurs du paramètre de contrôle a . Ici on a tracé les courbes pour (de bas en haut) $a = 0.5, 1., 1.5, 2., 3., 4.$

Puisqu'on veut itérer l'application $x_{n+1} = f(x_n)$ et ne considérer f que dans l'intervalle $[0, 1]$, il faut d'abord se demander quelles valeurs de a sont telles que f applique $[0, 1]$ sur lui-même. Un calcul élémentaire montre que f est maximale en $x = \frac{1}{2}$, qu'elle y prend la valeur $a/4$ et que la condition cherchée est donc $a \leq 4$.

Introduisons la notation commode $f_n(x)$ pour la n -ième itérée de la fonction $f(x)$ de (5.4), autrement dit le résultat de n compositions de la même fonction f

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}, \quad (5.6)$$

ou encore $f_n = f \circ f_{n-1}$, $f_1 \equiv f$. Revenons alors à la suite x_n . Comme toujours pour une suite définie par récurrence, il faut aussi se donner une valeur initiale x_0 (l'équivalent de la condition initiale pour une équation différentielle du premier ordre). Avec la notation précédente, on a $x_n = f_n(x_0)$. Il est aisé de calculer numériquement les x_n successifs pour une valeur du paramètre a donnée. Voir figure 10.

Il est beaucoup moins aisé de donner une expression fermée de x_n , en dehors de quelques valeurs particulières de a . Par exemple pour $a = 2$, (5.4) est équivalent à $1 - 2x_{n+1} = (1 - 2x_n)^2$ donc $\ln(1 - 2x_{n+1}) = 2 \ln(1 - 2x_n) = \cdots = 2^{n+1} \ln(1 - 2x_0)$.

Il apparaît sur la figure que la suite (x_n) (la "trajectoire" de x si on pense à n comme une discrétisation du temps) a une limite quand $t \rightarrow \infty$ pour a petit, vers une valeur nulle ou finie, selon a , mais oscille pour a plus grand. Il est aisé de confirmer par l'analyse cette constatation empirique. Les limites possibles de x_n sont les points fixes attractifs (au sens de (5.3)) de l'application. Les points fixes x^* sont solutions de $x^* = ax^*(1 - x^*)$. Ce sont donc

$$x^* = 0 \quad \text{et} \quad x^* = 1 - a^{-1} \quad (5.7)$$

mais la deuxième valeur est en dehors de l'intervalle $[0, 1]$ pour $a < 1$ et doit donc être rejetée. Donc pour $0 \leq a < 1$, le seul point fixe est $x^* = 0$, et il est attractif selon le critère

(5.3) puisque $f'(0) = a$ est bien de module inférieur à 1. Pour $a \geq 1$ un nouveau point fixe apparaît. Il y a donc une première bifurcation en $a = 1$. Examinons la stabilité de ce nouveau point fixe $x^* : f'(x) = a(1 - 2x)$, donc en $x^* = 1 - a^{-1}$, $f'(x^*) = 2 - a$ est de module inférieur à 1 ssi $1 < a < 3$.

Ceci est bien confirmé par l'étude de la figure 11. Si $a < 1$, la courbe $y = f(x)$ ne coupe la bissectrice qu'en 0. Si $a > 1$, un nouveau point fixe apparaît, la pente de la tangente en 0 est supérieure à 1, donc l'origine est instable.

En $a_1 = 3$ se produit donc une nouvelle bifurcation. Le point fixe non trivial devient à son tour instable. Mais comme le montre la figure 10, l'histoire ne s'arrête pas là. En $a = 3.2$, les x_n oscillent entre deux valeurs, ce qui suggère que $f_2 = f \circ f$ a des points fixes non triviaux. Cherchons en effet les points fixes de f_2 . On trouve $f_2(x) = a^2 x(1 - x)(1 - ax(1 - x))$, donc les points fixes non triviaux $x^* \neq 0$ satisfont une équation du 3ème degré $1 = a^2(1 - x^*)(1 - ax^*(1 - x^*))$ dont le point fixe non trivial de f doit être aussi solution (tout point fixe de f est point fixe de f_2 !). Cela permet de ramener l'équation du 3ème degré à une équation du 2ème degré

$$1 - a^2(1 - x^*)(1 - ax^*(1 - x^*)) = (1 - a + ax)(1 + a - a(1 + a)x + a^2x^2) = 0$$

et les racines du facteur de degré 2 sont

$$x_{2\pm}^* = \frac{1}{2} \left(1 + a^{-1} \pm \sqrt{(1 + a^{-1})(1 - 3a^{-1})} \right).$$

Elles sont réelles pour $a \geq 3$, égales à $2/3$ en $a = 3$ et restent dans $[0, 1]$ pour tout $a > 3$.

L'analyse de stabilité linéaire montre que les *deux* solutions sont stables (sous l'action de f_2) pour $3 \leq a < a_2 := 1 + \sqrt{6} = 3.449 \dots$.

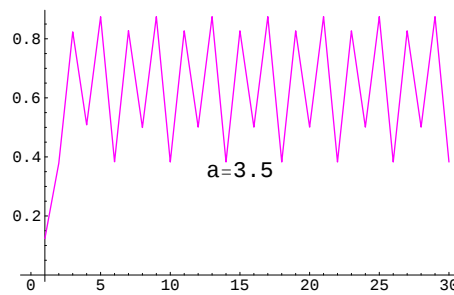


Fig. 12: Itérations $x_n = f_n(x_0)$ de l'application logistique pour $x_0 = 0.1234567890$ (un choix arbitraire !) et $a = 3.5$. L'axe des abscisses porte la valeur de $n + 1$.

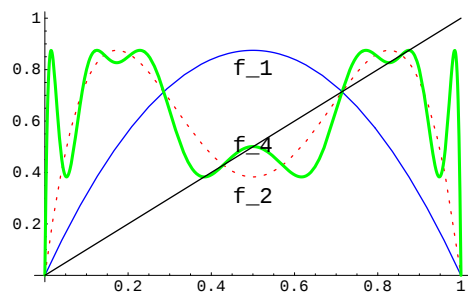


Fig. 13: Itérations $x_n = f_n(x)$ de l'application logistique pour $a = 3.5$. $f = f_1$, f_2 et f_4 sont portées respectivement en trait fin, en pointillé et en trait gras.

Au delà de cette valeur, le même scénario se répète. Comme le montre la figure 12, pour $a = 3.5$, apparaissent des oscillations de $x_n = f_n(x_0)$ entre *quatre* valeurs, ce qui montre que l'on est maintenant en présence de cycles de longueur 4. Il faut donc examiner la fonction f_4 et ses points fixes (fig. 13).

Sur la figure 13, dessinée pour $a = 3.5$, apparaissent les points fixes de f , les deux supplémentaires de f_2 , visibles aux points d'intersection avec la droite $y = x$, mais dotés d'une pente (en valeur absolue) supérieure à 1, donc instables. Seuls les 4 nouveaux points fixes de f_4 sont stables.

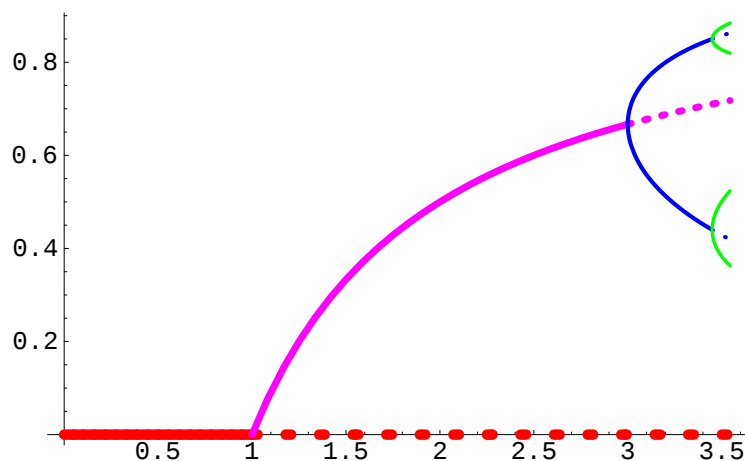


Fig. 14: Le début de la cascade de Feigenbaum : bifurcations successives des points fixes de f_{2^n} en ceux de $f_{2^{n+1}}$. Ici on voit ceux de $f_1 = f$, f_2 et f_4 . Les courbes en tirets signalent des points fixes instables.

Le système itératif a donc subi une nouvelle bifurcation en $a = a_2$, avec apparition de 4 points fixes de f_4 (et des 4-cycles oscillant entre eux), stables ... jusqu'à une valeur $a = a_3 = 3.544$. Au delà se produit un nouveau doublement de période, avec des 8-cycles,

valable dans une plage encore plus étroite de valeurs de a au bout de laquelle une nouvelle bifurcation, et un nouveau doublement de période, se produisent, etc. On peut représenter cette cascade de bifurcations comme sur la figure 14. C'est la *cascade de Feigenbaum*, du nom de son découvreur (1978).

Une étude plus détaillée montre qu'apparaissent successivement des points fixes nouveaux de f_{2^r} , attractifs dans un intervalle $a_r < a < a_{r+1}$ tandis que les points fixes précédents deviennent instables. La suite a_r converge vers $a_\infty = 3.569945 \dots$ et la suite des $\frac{a_r - a_{r-1}}{a_{r+1} - a_r}$ tend elle-même vers une valeur $\delta = 4.669201609102990 \dots$, ou de façon équivalente, on a

$$a_r - a_\infty \sim -A\delta^{-r} . \quad (5.8)$$

Fait très remarquable, cette valeur de δ a des propriétés d'*universalité*, en ce sens qu'elle ne dépend pas du choix de la fonction f pourvu que cette fonction applique l'intervalle $[0, 1]$ sur lui-même et qu'elle ait un maximum quadratique dans cet intervalle (le fait que $f''(x_m) \neq 0$, avec ici $x_m = \frac{1}{2}$, étant donc le fait crucial). Par contre, les valeurs de a_∞ ou de la constante A dans (5.8) ne sont pas universelles, mais dépendent de la nature précise de la fonction f . Ainsi, l'itération $x_{n+1} = \frac{a}{4} \sin(\pi x_n)$ conduit à la même valeur de δ , même si la valeur de a_∞ est différente.⁵

Que se passe-t-il au delà de cette valeur, pour $a_\infty < a < 4$? Tous les points fixes précédents sont instables, il existe par contre pour la plupart des valeurs de a dans cet intervalle une orbite apériodique, dite *attracteur étrange*, faite d'une infinité de points x , et le long de laquelle le comportement des itérés successifs d'un x_0 semble erratique. Il existe aussi des plages étroites de a où des p -cycles nouveaux apparaissent, avec à nouveau des doublements de période et des cascades de Feigenbaum (phénomène d'"intermittence"). Par exemple, pour $1 + \sqrt{8} = 3.8284 < a < 3.8495$, des 3×2^r -cycles stables existent. Ces p -cycles se voient comme des zones claires sur le diagramme des orbites ci-dessous (figure 15). Pour a générique, le système présente un comportement qu'on aime associer au **chaos**, c'est-à-dire une extrême sensibilité aux conditions initiales. Dans ce cas, pour deux valeurs initiales x'_0 et x''_0 proches, l'intervalle $x'_n - x''_n$ croît exponentiellement

$$|x'_n - x''_n| \sim \kappa^n |x'_0 - x''_0| ,$$

⁵ En fait la fonction f doit vérifier plusieurs conditions techniques, qu'elle ait un maximum quadratique unique dans l'intervalle considéré et que sa "dérivée schwarzienne" $f'''/f' - \frac{3}{2}(f''/f')^2$ y soit négative.

avec $\kappa > 1$. Une telle croissance n'est bien sûr compatible avec le fait que x reste dans l'intervalle $[0, 1]$ que pour un nombre fini de valeurs de n , mais l'important est ce phénomène de croissance des écarts. De façon plus précise, pour $a = 4$ par exemple, la relation (5.4) se récrit

$$\begin{aligned} x_n &=: \sin^2 \theta_n \\ a = 4 : \quad x_{n+1} &= \sin^2 \theta_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) = 4\sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n = \sin^2 2\theta_n \quad (5.9) \\ \theta_{n+1} &= 2\theta_n \bmod \pi . \end{aligned}$$

et donc $|\theta'_n - \theta''_n| = 2^n |\theta'_0 - \theta''_0| \bmod \pi$.

L'itération logistique est un des modèles de base pour étudier les phénomènes encore mal compris d'apparition du chaos et de la turbulence. Il existe en effet des situations expérimentales (convexion de Rayleigh-Bénard dans des cellules contenant de l'hélium liquide ou du mercure, expériences d'A. Libchaber et al.) dans lesquelles on observe une cascade de doublements de fréquence avant l'apparition d'un régime turbulent, et dans lesquelles les propriétés universelles des itérations se manifestent. Pour en savoir plus, voir par exemple <http://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00232033/en/> .

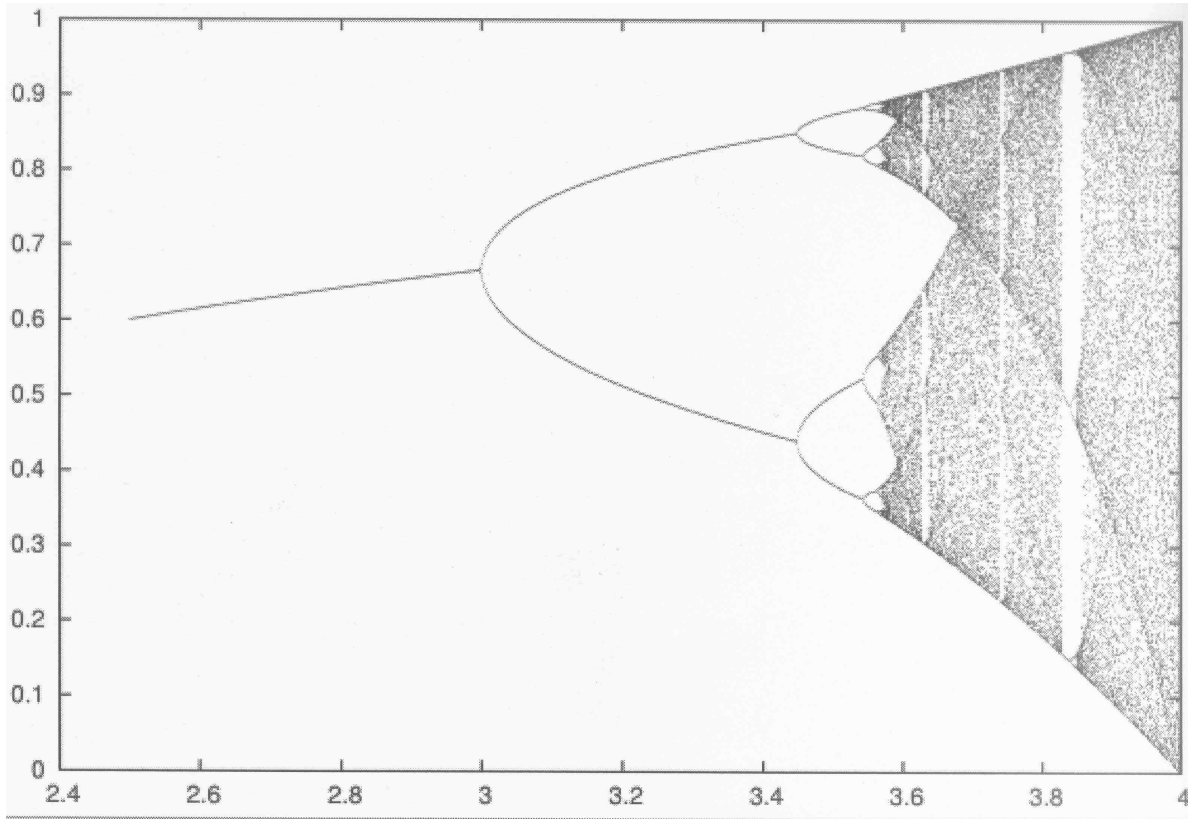


Fig. 15: Orbits de l'application logistique (zoom et prolongement de la figure 14).