Chapitre 2. Équations différentielles

1. Généralités sur les équations différentielles

1.1. Définitions et exemples

On appelle *équation différentielle d'ordre n* une équation reliant une fonction inconnue $y(x)$ et les n premières de ses dérivées, avec éventuellement une dépendance explicite dans la variable x, donc de la forme générale

$$F(y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}; x) = 0\,. \tag{1.1}$$

Une *solution* de cette équation est une fonction $y(x)$ telle que (1.1) soit satisfaite pour tout x (dans un ensemble de définition donné). Le problème consiste à trouver *la* ou *les* solutions d'une telle équation, éventuellement complétée par des informations supplémentaires, comme on va voir.

Un cas particulier de la forme (1.1) est celui qui s'écrit

$$y^{(n)} = f(y, y', \cdots, y^{(n-1)}; x)\ , \tag{1.2}$$

c'est-à-dire où $y^{(n)}$ a été explicitement exprimée en fonction de y et de ses $n-1$ premières dérivées. La forme (1.2), bien que moins générale, facilite souvent la discussion de l'existence des solutions et leur construction.

Exemples d'équations d'ordre 1 :

$y'^2 + \omega^2 y^2 = C$: oscillateur mécanique ou électrique non amorti, non excité, cf Chap. 4 ;

$\frac{1}{2}y'^2 - \omega^2 \cos y = C$: équation du pendule simple ;

$y' + Ay = B$: chute d'un corps pesant freiné par une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse, (cf TD3 et Chapitre 4), décharge d'un condensateur dans une résistance, désintégration d'un isotope (Chap. 6), etc ;

$y' + Ay = By^2$: équation d'évolution de populations (biologiques, chimiques, etc), cf chapitres 5 et 6 ;

$y' + y^2 = x$: équation de Riccati ;

$y' - y^2 = C$: équation décrivant par exemple la chute d'un corps freiné par une force quadratique dans la vitesse, etc

Équations d'ordre 2 :

$y'' + Ay' + ky = \sin \omega x$: oscillateur harmonique amorti et excité, (Chap. 4)

$y'' + k^2 y = 0$: cordes vibrantes, cf TD 5 et ci-dessous ;

$y'' = xy$: équation d'Airy, qui intervient en optique, en mécanique quantique...

etc, etc.

Comme l'indiquent les commentaires en regard des équations, on rencontre très fréquemment de telles équations en physique et plusieurs des exemples ci-dessus interviennent effectivement dans des problèmes simples que nous retrouverons plus loin dans le cours ou les TD...

Ces exemples montrent aussi que la nature de la fonction inconnue et celle de la variable peuvent changer d'un problème à l'autre : x peut représenter la variable de temps, c'est le cas dans les équations dynamiques, (telle l'équation du mouvement), où l'équation régit la variation temporelle d'une variable dynamique y, position, température, pression, courant ou charge électrique, nombre de particules, etc. Mais x peut aussi représenter une variable spatiale. C'est par exemple le cas des ondes stationnaires dans une corde vibrante : si y désigne le déplacement transverse d'une corde tendue entre deux points d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, et vibrant dans le mode de longueur d'onde λ, $y(x)$ obéit à l'équation $y'' + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y = 0$ pour $0 \leq x \leq L$. D'autres exemples seront étudiés en TD (équation barométrique, onde thermique, ...).

1.2. Systèmes d'équations différentielles

Plutôt qu'une équation différentielle sur une fonction inconnue, on peut aussi avoir à traiter des équations différentielles couplées, formant un *système d'équations différentielles*. C'est par exemple le cas pour

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n; x) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n; x) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(y_1, y_2, \cdots, y_n; x) \ , \end{aligned} \tag{1.3}$$

qui est un système de n équations du premier ordre.

Il est bon d'observer que toute équation différentielle du n-ième ordre de la forme (1.2) peut se mettre sous la forme d'un système de n équations du premier ordre. Il suffit de définir $y_1 := y,\ y_2 := y',\ \cdots, y_n := y^{(n-1)}$. On vérifie aisément (par récurrence par exemple) que $y_1' = y_2\,,\ y_2' = y_3\,,\ \cdots,\ y_{n-1}' = y_n\,,\ y_n' = f(y_1, y_2, \cdots, y_n; x)$, qui est bien un système de la forme (1.3).

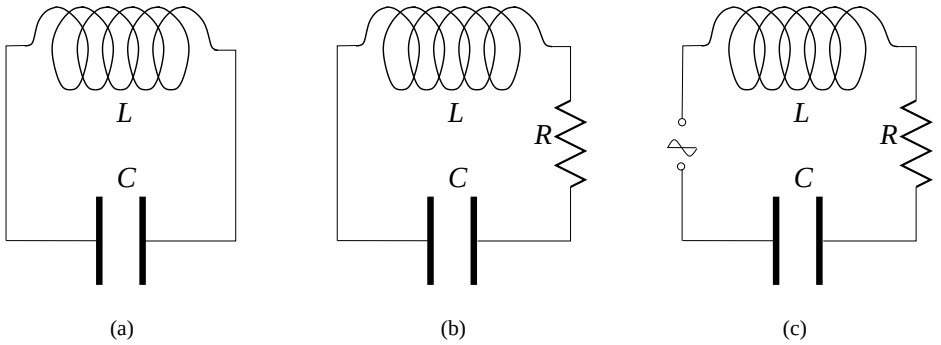


Fig. 1: Circuits LC et LRC, isolés ou couplés à une tension extérieure.

Un exemple familier qui conduit à un système d'équations différentielles couplées est fourni par le circuit électrique LC constitué d'une bobine dotée d'une inductance L et d'un condensateur de capacité C (figure 1(a)). Rappelons brièvement l'analyse de ce système. La tension aux bornes du condensateur portant une charge Q est $V_C = \frac{Q}{C}$ tandis que celle aux bornes de la bobine est $V_L = -L\frac{dI}{dt}$, où $I = -\frac{dQ}{dt}$ est le courant de décharge du condensateur. En écrivant que $V_C + V_L = 0$, on trouve le système différentiel

$$\begin{aligned} -L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \\ I + \frac{dQ}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

et en "éliminant" I entre ces deux équations, on a pour Q une équation du second ordre :

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{1.5}$$

Quelle équation obtient-on en éliminant Q dans (1.5) ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ? Quelle équation décrit la situation de la figure 1(b) où la bobine a aussi une résistance interne, ou celle de la figure 1(c), où le circuit est couplé à une tension extérieure V_e ?

2. Conditions initiales. Théorème de Cauchy. Conditions aux limites

2.1. Existence et unicité des solutions

Considérons un problème de mécanique élémentaire, celui du mouvement d'un point matériel soumis à la seule gravité. Sa coordonnée $z(t)$ verticale le long d'un axe orienté vers le haut satisfait donc l'équation

$$\ddot{z} = -g \ , \tag{2.1}$$

comme conséquence du principe fondamental de la dynamique. Cette équation différentielle se résout par deux *quadratures* (c'est-à-dire deux intégrations) successives ; on a d'abord

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -g\int_0^t dt \Longrightarrow \dot{z}(t) = -gt + v_0$$

où $v_0 := \dot{z}(0)$ est la vitesse à l'instant $t = 0$. Puis une nouvelle quadrature fournit

$$z(t) - z(0) = \int_0^t dt(-gt + v_0) \Longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \tag{2.2}$$

où $z_0 := z(0)$ est la position à l'instant $t = 0$. On trouve donc que la solution est complètement déterminée, à la donnée de deux constantes z_0 et v_0 près. Ou encore, la donnée de ces deux *conditions initiales* (au temps $t = 0$) détermine complètement et uniquement la solution $z(t)$. Bien sûr, plutôt que le temps $t = 0$, on aurait pu choisir des conditions initiales à n'importe quel temps donné.

Ce principe que la solution d'une équation différentielle **existe et est unique** si on se donne des conditions initiales appropriées est en fait très général. Pour une large classe d'équations du type (1.2), on peut montrer que la donnée de la valeur en un point x_0 de y et de ses $n-1$ premières dérivées, $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, détermine une et une seule solution, pourvu que la fonction f apparaissant au second membre soit une fonction suffisamment régulière de ses n arguments ; autrement dit que $f(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}; x)$ soit suffisamment régulière en $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, x$ dans un intervalle contenant le point $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, x_0)$. C'est le théorème de Cauchy, et les valeurs des $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0)$ sont appelées *conditions de Cauchy* (ou conditions initiales). Nous ne préciserons pas ici les conditions exactes de ce théorème. Dans tous les exemples rencontrés dans ce cours, ces conditions seront supposées satisfaites, et moyennant la donnée des conditions initiales, la solution existera donc et sera unique.

Cette propriété n'a rien d'évident et on peut construire des exemples d'équations dont la solution n'est pas unique, à conditions initiales fixées. Considérons ainsi l'équation

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \ ,$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$. On vérifie immédiatement qu'elle admet *deux* solutions, $y(x) = 0$ et $y(x) = x^3$. C'est la singularité de la fonction $y^{\frac{2}{3}}$ (sa non-dérivabilité par rapport à y en $y = 0$) qui est responsable de cette non-unicité.

Noter que ce théorème d'existence et d'unicité ne nous donne pas d'information sur la solution, ni sur la méthode pour la déterminer ! De fait, la résolution effective d'une équation différentielle est en général un problème difficile, qui n'admet que rarement une solution explicite en termes de "fonctions simples". Il faut bien souvent recourir à des approximations numériques ou analytiques (développement en approximations successives). Dans la suite, nous allons nous borner à considérer des cas suffisamment simples pour être complètement solubles et en même temps suffisamment intéressants pour la physique.

2.2. Conditions initiales et conditions aux bords

Dans les exemples précédents, on a supposé donnée(s) une ou des condition(s) initiale(s) sur la fonction cherchée $y(x)$ pour une valeur x_0 donnée. En physique, c'est typiquement le type de données dont on dispose dans un problème de dynamique : par exemple la vitesse et le position du mobile, (deux vecteurs à 3 dimensions s'il s'agit d'un point matériel dans l'espace ordinaire), sont connues à l'"instant initial" ; ou encore, la charge portée par le condensateur et l'intensité circulant dans un circuit LRC sont connues au temps 0, etc. Mais il existe d'autres types de problèmes où la fonction cherchée est contrainte pour deux valeurs différentes de la variable x.

Exemples

Reprenons l'étude du point matériel soumis à la gravité et obéissant à (2.1). Quelle est sa trajectoire passant par l'origine $z_0 = 0$ au temps $t_0 = 0$ et par la position z_1 au temps t_1 ? Réponse : la loi du mouvement (2.2) dépend des deux constantes v_0 et z_0 qui sont déterminées par les deux conditions ci-dessus : $z_0 = 0$ et v_0 solution de $-\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 = z_1$. La résolution de cette dernière équation nous indique avec quelle vitesse initiale v_0 le corps doit être mis en mouvement à l'instant $t = 0$ pour atteindre le point z_1 à l'instant requis. La connaissance de z_0 et v_0 détermine complètement la solution. La donnée des *conditions aux limites* $z(0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$ a donc suffi à déterminer de façon unique la solution de l'équation différentielle.

Il faut noter toutefois que la donnée de conditions aux limites ne conduit pas toujours à un problème bien posé, admettant une solution et une seule. Examinons par exemple le cas de la corde vibrante obéissant à $y'' + k^2 y = 0$. La corde étant supposée attachée à ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = l$, son déplacement transverse s'annule à ces deux points. On cherche donc des solutions de l'équation différentielle satisfaisant $y(0) = y(l) = 0$. Puisque la solution la plus générale de l'équation s'écrit

$$y(x) = A\cos kx + B\sin kx \ ,$$

(comme on sait bien et comme on va le revoir plus bas), les deux conditions aux limites imposent

$$y(0) = 0 \implies A = 0 \quad ; \quad y(l) = B\sin kl = 0 \ .$$

Si on écarte la solution triviale $B = 0$ où la corde reste au repos, la deuxième condition impose donc que $kl = n\pi$, ce qui contraint un coefficient de l'équation différentielle, mais ne détermine pas le coefficient arbitraire restant B ! Physiquement, le "mode" dans lequel

la corde peut vibrer (la longueur d'onde de ses oscillations) n'est pas arbitraire, elle est (partiellement) déterminée par la géométrie (la longueur de la corde). Dans ce cas, la donnée de deux conditions aux bords ne suffit pas à déterminer uniquement la solution mais a plutôt pour effet de restreindre les paramètres de l'équation pour qu'elle admette une solution satisfaisant aux conditions requises. Donc ici, le problème n'est bien déterminé qu'avec la donnée d'une condition supplémentaire, par exemple, l'amplitude maximale de la corde, qui fixe le coefficient B.

Dans une autre classe de problèmes physiques, les conditions aux limites sont remplacées par des *conditions asymptotiques*. C'est le cas de l'équation

$$y'' = k^2 y$$

dont la solution la plus générale, comme on va le revoir plus bas, est

$$y(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \ .$$

Supposons qu'on s'intéresse au comportement à grand $x > 0$ de $y(x)$ et que telle ou telle contrainte physique (ou tout simplement le bon sens !) impose à y de rester borné (c'est-à-dire de ne pas tendre vers l'infini) quand x croît. (Nous rencontrerons cette situation dans l'étude de la propagation de la chaleur, cf TD 5.) Cette condition asymptotique implique que $A = 0$ et la solution est donc de la forme $y(x) = Be^{-kx}$, ce qu'on peut encore récrire $y(x) = y_0 e^{-kx}$ où y_0 est la valeur en $x = 0$. Dans ce cas, la condition asymptotique plus la condition initiale ou au bord $y(0) = y_0$ détermine complètement et uniquement la solution.

3. Équations différentielles linéaires

3.1. Propriétés générales

Nous allons nous intéresser tout spécialement à des équations différentielles du n-ième ordre du type suivant

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) y^{(k)}(x) = \phi(x) \ , \tag{3.1}$$

ce que nous récrivons encore sous la forme

$$\mathcal{L}(y(x)) := \left(\sum_{k=0}^{n} C_k(x) \frac{d^k}{d\,x^k} \right) y(x) = \phi(x) \tag{3.2}$$

où $\phi(x)$ est une fonction donnée, les $C_k(x)$ sont des fonctions données de x, et on cherche à déterminer la fonction inconnue $y(x)$, sujette à n conditions initiales, à $x = 0$ par exemple. La fonction ϕ représente la "source" (une action extérieure), qui "excite" le système représenté par y, et on cherche à calculer la "réponse" y à ϕ.

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus a la propriété fondamentale d'être *linéaire* en y : y ou ses dérivées n'y apparaît qu'à la puissance 1. C'est ce que nous avons souligné par la notation $\mathcal{L}$ pour l'*opérateur différentiel* apparaissant au membre de gauche. La propriété de linéarité exprime que pour toute paire de fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$ et pour tous coefficients réels λ_1 et λ_2 (constants, indépendants de x)

$$\mathcal{L}(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) = \lambda_1 \mathcal{L}(y_1(x)) + \lambda_2 \mathcal{L}(y_2(x)) \ . \tag{3.3}$$

Cela a pour conséquence que si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de (3.2) respectivement pour deux "sources" $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$, c'est-à-dire $\mathcal{L}y_1 = \phi_1$, $\mathcal{L}y_2 = \phi_2$, alors, quelles que soient les *constantes* λ_1 et λ_2, $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ est solution de l'équation pour la source $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$, autrement dit $\mathcal{L}(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) = \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x)$. Nous utiliserons ce principe dans la résolution d'équations par décomposition en modes de Fourier, au chapitre 3.

Avant d'aller plus loin, il convient de dire que les *systèmes linéaires*, c'est-à-dire régis par des équations différentielles linéaires jouent un rôle fondamental en physique et dans toutes les sciences exactes. Nous leur consacrerons le chapitre 4 de ce cours.

3.2. Équations linéaires homogènes, équations linéaires inhomogènes.

On appelle équation différentielle linéaire *homogène* une équation du type (3.2) dans laquelle $\phi(x) = 0$

$$\textbf{équation homogène} \qquad \mathcal{L}(y(x)) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_k(x) \frac{d^k}{d\,x^k} \right) y(x) = 0 \ . \tag{3.4}$$

Inversement, on appelle équation différentielle linéaire *inhomogène*, ou *avec second membre*, une équation du type (3.2) dans laquelle $\phi(x) \neq 0$.

Indépendance linéaire de n fonctions

La propriété de linéarité implique qu'étant données deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation homogène, une combinaison linéaire $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ à coefficients constants est aussi solution. Bien sûr, choisir y_2 proportionnelle à y_1 est possible mais n'apporte aucune information nouvelle. Pour se prémunir contre cela, on dira que les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont *linéairement dépendantes* si on peut trouver deux constantes λ_1 et λ_2 non toutes deux nulles telles que, **pour tout** x, on ait $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$. Si cette condition est réalisée, avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on a

$$\forall x \qquad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_2(x) \tag{3.5}$$

et y_1 et y_2 sont proportionnelles. Inversement on dit que deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont *linéairement indépendantes* si la condition $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ est impossible à réaliser avec deux constantes λ_1 et λ_2 non nulles. Plus généralement, on dira que n fonctions $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ sont linéairement indépendantes si on ne peut pas trouver n constantes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non toutes nulles telles que $\forall x\,,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x) = 0$. Autrement dit,

$$\text{Si } y_i(x) \text{ linéairement indépendantes,} \quad \forall x \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\,. \tag{3.6}$$

(Montrer que dans le cas contraire, on pourrait toujours exprimer l'une de ces fonctions comme combinaison linéaire des $n-1$ autres.) Par exemple, on démontre que les fonctions $\cos \omega_i x$ et $\sin \omega_i x$, pour tout ensemble de n nombres positifs ω_i distincts, sont linéairement indépendantes. Ou encore, les fonctions $\exp(k_i x)$, pour tout ensemble de n nombres k_i réels ou complexes distincts, sont linéairement indépendantes.

Exercices : (1) en appliquant le critère ci-dessus, démontrer que les fonctions e^{kx} et xe^{kx} sont linéairement indépendantes. Les fonctions e^{ikx}, $\cos kx$ et $\sin kx$ sont-elles indépendantes ? (Ici on admet dans (3.6) des coefficients λ_i complexes.) (2) Montrer que deux fonctions dérivables y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si leur *wronskien* $W(y_1, y_2) := y_1' y_2 - y_2' y_1$ n'est pas identiquement nul.

(3) Plus généralement, on définit le wronskien de n fonctions $y_i(x)$, $i = 1, \cdots n$ supposées $(n-1)$ fois dérivables comme le *déterminant* (cf. cours d'Algèbre)

$$W(x) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}\,. \tag{3.7}$$

Si les fonctions y_i sont linéairement dépendantes, il existe n constantes non toutes nulles λ_i telles que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(x) = 0$, et cette relation est aussi vérifiée par les dérivées successives des y_i, donc $\forall p = 0, \cdots n-1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^{(p)}(x) = 0$. Les n colonnes du déterminant sont donc linéairement dépendantes et le déterminant $W(x)$ est nul pour tout x. Inversement, il suffit que le wronskien $W(x)$ soit non nul en un point x_0 pour qu'on puisse conclure que les fonctions y_i sont linéairement **in**dépendantes. L'étude du wronskien offre donc un moyen pratique d'étudier l'indépendance linéaire de n fonctions.

Ces définitions étant acquises, on peut démontrer deux théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles linéaires.

Théorème 1 (équations homogènes). *Si les fonctions C_k, $(k = 0, \cdots, n)$, sont continues dans un même intervalle I, avec $C_n(x)$ ne s'annulant pas dans cet intervalle, il existe n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène (3.4) dans I, et la solution la plus générale est une combinaison à coefficients constants arbitraires de ces n fonctions. En outre, il existe une unique solution de (3.4) satisfaisant à des conditions initiales $y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, avec $x_0 \in I$.*

Théorème 2 (équations inhomogènes). *Avec les mêmes hypothèses sur les fonctions C_k qu'au Théorème 1, et ϕ étant supposée en outre continue dans I, la solution générale dans I de l'équation inhomogène (3.2) est la somme d'une solution particulière de (3.2) et de la solution générale de l'équation homogène (3.4). Il existe une unique solution de (3.2) satisfaisant à des conditions initiales $y(x_0) = a_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, avec $x_0 \in I$.*

En d'autres termes, ces théorèmes nous affirment l'existence de familles de solutions dépendant de n paramètres. Pour l'équation homogène, c'est la combinaison linéaire à coefficients constants $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(x)$ annoncée par le Th. 1. Pour l'équation inhomogène, cette même combinaison linéaire est la "solution générale de l'équation homogène" mentionnée au Th. 2. Dans l'un et l'autre cas, les constantes arbitraires λ_i sont déterminées de façon unique par la donnée des conditions initiales.

L'existence de n solutions indépendantes de (3.4) selon le Théorème 1 n'est pas aisée à démontrer et nous l'admettrons en général, mais nous la démontrerons pour des coefficients constants au paragraphe suivant. Le Théorème 2, lui, se démontre aisément : supposons qu'on connaisse une solution particulière $\tilde{y}(x)$ de (3.2). Alors pour toute autre solution $y(x)$ de (3.2), en soustrayant membre à membre les deux équations différentielles satisfaites par $y(x)$ et par $\tilde{y}(x)$, on trouve que la différence $y(x) - \tilde{y}(x)$ est une solution de l'équation *homogène* : en invoquant alors le Théorème 1, ceci montre bien que la solution générale y de (3.2) est la somme d'une solution particulière $\tilde{y}(x)$ et d'une solution quelconque ("générale") de (3.4). La réciproque est évidente : on obtient bien une solution de (3.2)

en ajoutant à $\tilde{y}(x)$ (= une solution particulière) une solution quelconque de l'équation homogène. Noter que là encore, ces théorèmes énoncent l'existence et l'unicité de solutions sans nous dire comment les construire...

3.3. Quelques cas solubles d'équations linéaires

Bornons à quelques indications sur quelques cas où la solution de l'équation linéaire peut être obtenue explicitement.

Pour toute équation linéaire homogène du premier ordre, écrite comme

$$y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{3.8}$$

la solution générale s'obtient facilement par une quadrature, c'est-à-dire à l'aide d'un calcul de primitive de $q(x)$:

$$y(x) = A \exp\left(- \int^x q(x')dx' \right) . \tag{3.9}$$

La définition à une constante additive près de la primitive de $q(x)$ introduit-elle un nouvel arbitraire ?

Dans certains cas, une équation linéaire à coefficients non constants peut se ramener à une équation à coefficients constants, qu'on sait résoudre assez aisément, voir le paragraphe suivant. C'est par exemple le cas des équations dites d'Euler, $\sum C_k x^k y^{(k)}(x) = 0$, étudiée pour $x > 0$, avec les C_k constants. Montrer que le changement de *variable* $x \mapsto t = \ln x$ permet de se ramener à une équation différentielle en t, linéaire et à coefficients constants.

3.4. Équations linéaires à coefficients constants

• *Résolution de l'équation homogène*

Considérons maintenant un cas particulièrement important d'équations différentielles linéaires homogènes, celui où les coefficients C_k de l'équation sont des constantes

$$\sum_{k=0}^{n} C_k y^{(k)}(x) = 0 . \tag{3.10}$$

Cherchons des solutions sous la forme exponentielle $y(x) \stackrel{?}{=} e^{\alpha x}$, où α peut être *a priori* réel ou complexe. Une telle fonction est effectivement solution à condition que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_k \alpha^k \right) e^{\alpha x} = 0 ,$$

et donc que α satisfasse l'équation polynomiale, dite *équation caractéristique*

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \alpha^k = 0 . \tag{3.11}$$

Or le théorème fondamental de l'algèbre énonce que tout polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k$ de degré n admet n *racines*, réelles ou complexes, qui sont les n solutions de l'équation $P(z) = 0$. Si nous supposons d'abord que ces n racines α_i, $i = 1, \cdots, n$, sont distinctes, nous

avons trouvé n solutions $\exp(\alpha_i x)$, et ces n fonctions sont bien linéairement indépendantes, selon une remarque faite plus haut. Donc dans ce cas, nous savons construire explicitement un système (on dit une *base*) de n solutions indépendantes, dont toute autre solution est une combinaison linéaire. Dans le cas où une racine est multiple, par exemple α_1 racine double, on vérifie aisément que $\exp(\alpha_1 x)$ et $x\,\exp(\alpha_1 x)$ sont deux solutions indépendantes.

Indication : se rappeler que si α_1 est racine double d'un polynôme $P(\alpha)$, alors $P(\alpha) = (\alpha-\alpha_1)^2 Q(\alpha)$, et donc $P'(\alpha_1) = 0$.

Finalement on a bien n solutions indépendantes, la solution générale est selon le Théorème 1 une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i x}$ de ces fonctions, et les constantes A_i sont déterminées par les n conditions initiales.

• *Équation du second ordre à coefficients constants*

Examinons plus en détail le cas de l'équation du second ordre, que nous retrouverons au Chapitre 4 dans différents contextes physiques. Nous la récrivons sous la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \tag{3.12}$$

avec a, b, c et y réels, $a \neq 0$. Son équation caractéristique est donc simplement

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \ . \tag{3.13}$$

La solution de (3.13) est familière, elle dépend du signe de $\Delta := b^2 - 4ac$:

◦ Si $\Delta > 0$, les racines sont

$$\alpha_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et les deux fonctions $e^{\alpha_\pm x}$ forment une base de solutions, ce qui veut dire que la solution générale de (3.12) est

$$y(x) = A_+ e^{\alpha_+ x} + A_- e^{\alpha_- x} \ , \tag{3.14}$$

avec deux constantes arbitraires $A_\pm$ fixées par les conditions initiales.

◦ Si $\Delta < 0$, les racines sont complexes

$$\alpha_\pm = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \ .$$

Comme base de solutions, on peut choisir soit les deux exponentielles oscillantes $e^{\alpha_\pm x}$, soit encore

$$\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) e^{-\frac{bx}{2a}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) e^{-\frac{bx}{2a}} \ .$$

La solution générale de l'équation (3.12) peut donc s'écrire sous différentes formes équivalentes

$$\begin{aligned} y(x) &= B_+ e^{\alpha_+ x} + B_- e^{\alpha_- x} \qquad\qquad \alpha_+ \text{ et } \alpha_- \text{ complexes conjugués} \\ \text{ou encore} \quad &= \left(A_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x + A_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x \right) e^{-\frac{bx}{2a}} \\ \text{ou encore} \quad &= A \cos \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x + \varphi \right) e^{-\frac{bx}{2a}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec des paires de constantes B_+ et B_-, A_1 et A_2, ou A et φ. Sous la première forme, $B_\pm$ sont complexes, et en fait complexes conjugués pour assurer que $y(x)$ est réel, $B_+ = B_-^*$. Les constantes A_1 et A_2, ou A et φ sont, elles, réelles.

◦ Si $\Delta = 0$, la racine $\alpha_0 = -\frac{b}{2a}$ est double et on vérifie immédiatement que

$$e^{\alpha_0 x} \quad \text{et} \quad x e^{\alpha_0 x}$$

sont deux solutions, donc que la solution générale de l'équation (3.12) s'écrit

$$y(x) = (Ax + B) e^{\alpha_0 x} \tag{3.16}$$

avec deux constantes A et B.

Dans tous les cas, on a trouvé une solution générale dépendant de *deux* constantes réelles, $A_\pm$, ou $B_+ = B_-^*$, ou A_1 et A_2, ou A et φ, ou A et B. Ces deux constantes sont déterminées de façon unique par *deux* conditions initiales, par exemple la donnée de $y(x_0)$ et $y'(x_0)$.

• *Équation linéaire inhomogène à coefficients constants*

Pour une équation linéaire à coefficients constants, on sait donc de façon générale construire les n solutions indépendantes du Théorème 1, et résoudre complètement l'équation homogène. En ce qui concerne l'équation inhomogène à coefficients constants, sa solution repose sur la connaissance d'*une* solution particulière, selon le Théorème 2.

Dans le cas d'une équation du premier ordre, il existe une méthode générale pour construire une solution particulière de l'équation inhomogène, c'est la *méthode de variation de la constante*. Considérons une équation de la forme

$$C_1 y'(x) + C_0 y(x) = \phi(x) \ . \tag{3.17}$$

L'équation homogène admet selon la discussion précédente la solution générale $y(x) = A\exp(\alpha x)$, où α est solution de $C_1\alpha + C_0 = 0$. Il est suggéré de chercher une solution de (3.17) de la forme $y \stackrel{?}{=} A(x)\exp(\alpha x)$, avec une fonction $A(x)$ à déterminer. En reportant dans (3.17), on trouve

$$\left(C_1(A'(x) + \alpha A(x)) + C_0 A(x)\right) e^{\alpha x} = \phi(x)$$

qui se simplifie, en vertu de la condition satisfaite par α, en

$$C_1 A'(x) = \phi(x)e^{-\alpha x}$$

et le problème de trouver une solution particulière est donc réduit à une "quadrature", trouver une primitive de la fonction $\phi(x)e^{-\alpha x}$:

$$A(x) = C_1^{-1}\int^x \phi(x')e^{-\alpha x'}dx' \ .$$

3.5. Systèmes d'équations différentielles linéaires

Comme on l'a déjà fait remarquer, les équations différentielles peuvent venir sous forme de systèmes d'équations différentielles couplées portant sur différentes fonctions $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p$. Le cas de systèmes d'équations linéaires couplées est particulièrement intéressant.

Considérons par exemple le système linéaire de deux équations du premier ordre

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + by_2 \\ y_2' &= cy_1 + dy_2 \end{aligned} \ . \tag{3.18}$$

1) En dérivant la première équation par rapport à x et en y reportant l'expression de y_2' donnée par la seconde, (c'est-à-dire en *éliminant* y_2' entre ces deux équations), on obtient la paire d'équations

$$\begin{aligned} y_1'' &= ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \\ y_1' &= ay_1 + by_2 \end{aligned} \ . \tag{3.19}$$

Entre ces deux équations, on peut cette fois éliminer y_2, ce qui conduit à

$$y_1'' = (a+d)y_1' + (bc - ad)y_1 \ . \tag{3.20}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, qui tombe donc sous le coup de l'analyse menée plus haut : la solution générale en $y_1(x)$ (et de même en $y_2(x)$) est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $e^{\alpha_1 x}$ et $e^{\alpha_2 x}$, où α_1 et α_2 sont solutions de l'équation

$$\alpha^2 - (a+d)\alpha + (ad - bc) = 0 \ . \tag{3.21}$$

En résumé, le système de deux équations linéaires du premier ordre à coefficients constants (3.18) est donc équivalent à une équation linéaire du second ordre.

2) Discutons maintenant une autre méthode : en effectuant des combinaisons linéaires des deux équations de (3.18) avec des coefficients λ et μ quelconques, on trouve que

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' = (a\lambda + c\mu)y_1 + (b\lambda + d\mu)y_2 \ . \tag{3.22}$$

Supposons qu'on sache trouver λ et μ tels que

$$\begin{array}{l} a\lambda + c\mu = \alpha\lambda \\ b\lambda + d\mu = \alpha\mu \end{array} \ , \tag{3.23}$$

pour un certain nombre α. Alors, en reportant (3.23) dans (3.22), on voit que l'équation (3.22) est une équation différentielle linéaire du premier ordre particulièrement simple pour la fonction $y := \lambda y_1 + \mu y_2$

$$y' = \alpha y \ , \tag{3.24}$$

ce qui s'intègre immédiatement en $y = Ce^{\alpha x}$. Or le système (3.23), qui est un système d'équations algébriques du premier degré à deux variables, se résout aisément. En éliminant par exemple μ entre les deux équations, on trouve que

$$c\mu = (\alpha - a)\lambda \ , \qquad ((d-\alpha)(a-\alpha) - bc)\lambda = 0 \tag{3.25}$$

qui n'admet de solution non nulle en λ que si α satisfait l'équation du second degré

$$(d-\alpha)(a-\alpha) - bc = 0 \tag{3.26}$$

qui admet elle-même deux solutions, réelles ou complexes, distinctes ou confondues. Supposons les distinctes, il existe donc deux valeurs de α, donc aussi deux paires de (λ, μ) (à un facteur global près) remplissant les conditions ci-dessus, c'est-à-dire conduisant à une équation du type (3.24) pour la combinaison linéaire correspondante. Chacune de ces deux

combinaisons linéaires est appelée un *mode propre* du système initial (3.18). Par les combinaisons algébriques que nous avons effectuées, nous avons donc réduit le système initial, équivalent à une équation du second ordre selon la discussion du point 1) ci-dessus, à la solution de deux équations du premier ordre découplées. On note que les deux approches ont en commun de faire jouer un rôle central à l'équation "caractéristique" (3.21)-(3.26).

3) On peut se demander si ceci se généralise à des systèmes impliquant plus de fonctions ou des équations d'ordres plus élevés. La réponse est oui, et les méthodes de l'algèbre linéaire, matrices et déterminants, sont celles qui sont le mieux adaptées à cette discussion. Récrivons le système linéaire (3.18) sous une forme matricielle

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

ou en définissant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{d}{dx}Y = AY . \tag{3.28}$$

Supposons maintenant que la matrice A puisse se diagonaliser par un changement de base $A = W^{-1}\tilde{A}W$, $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 indépendante de x, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ une matrice "diagonale", où α_1 et α_2 sont les *valeurs propres* de A. Redéfinissant le vecteur colonne $\tilde{Y} = WY = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2 \\ \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2 \end{pmatrix}$, on a en multipliant les deux membres de l'équation matricielle (3.28) par W

$$\frac{d}{dx}\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{Y}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1' \\ \tilde{y}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

c'est-à-dire deux équations découplées

$$\tilde{y}_1' = \alpha_1\tilde{y}_1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}_2' = \alpha_2\tilde{y}_2 . \tag{3.30}$$

La démarche reproduit celle suivie au point 2). Les valeurs propres α_1 et α_2 sont les racines de l'équation (3.26) ; la diagonalisation de la matrice, c'est-à-dire l'existence d'une matrice W, est assurée par l'hypothèse que ces deux racines sont distinctes ; et les combinaisons $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ sont les deux "modes propres" définis en 2).

L'avantage de cette méthode matricielle est sa puissance et sa généralité. Elle s'étend sans difficulté à des systèmes d'équations différentielles de dimension et/ou d'ordre plus élevés.

4. Autres classes d'équations différentielles simples. Autres méthodes

4.1. Intégrales premières

Il existe des situations où on peut réduire l'ordre de l'équation différentielle en effectuant explicitement une intégration. C'est ce qui se produit par exemple dans l'étude du pendule.

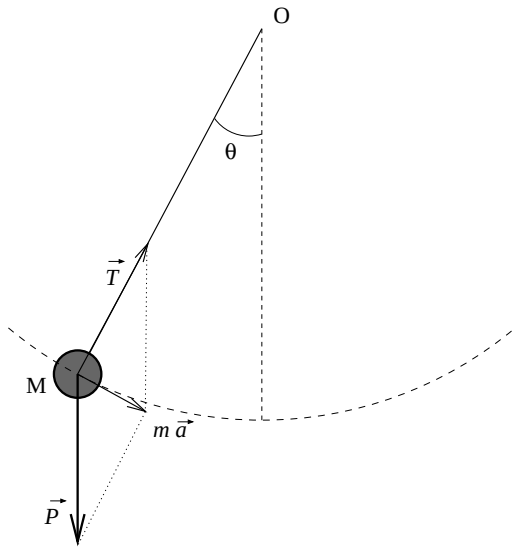


Fig. 2: Pendule simple.

Considérons un pendule simple, constitué d'une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable de longueur ℓ. Le pendule oscille dans un plan vertical. Il effectue son mouvement sous la seule action de la gravité (son poids $\vec{P} = -mg\hat{z}$, où $\hat{z}$ désigne un vecteur unité dirigé selon l'axe vertical vers le haut) et de la tension du fil $\vec{T}$, et selon l'équation fondamentale de la dynamique, $m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} - mg\hat{z}$. On se débarrasse de la tension inconnue $\vec{T}$ par projection de l'équation sur une direction tangente à sa trajectoire circulaire et on a alors

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \ . \tag{4.1}$$

Multiplions cette équation par $\dot{\theta}$ et reconnaissons dans $\ddot{\theta}\dot{\theta}$ la dérivée de $\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2$ et dans $-\dot{\theta}\sin\theta$ celle de $\cos\theta$. L'équation (4.1) s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ell m\dot{\theta}^2 - gm\cos\theta\right) = 0 \tag{4.2}$$

qui s'intègre en

$$\frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2 = mg(\cos\theta - \cos\theta_m) \ , \tag{4.3}$$

où θ_m est une constante d'intégration. Pour $\theta = \pm\theta_m$, le membre de droite s'annule, donc celui de gauche aussi : la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ s'annule quand $\theta = \pm\theta_m$ et l'interprétation de $|\theta_m|$ est donc que c'est l'amplitude maximale d'oscillation du pendule.

Récrivons l'équation précédente (multipliée par ℓ) sous la forme

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_m =: E \ , \tag{4.4}$$

avec E indépendante du temps. Sur le plan mathématique, nous avons réduit notre équation de départ du second ordre (4.1) à une équation du premier ordre, ce qui est un progrès substantiel. Sur le plan physique, ce que cette "constante du mouvement" (ou "intégrale première") de l'équation initiale exprime est bien sûr la loi de conservation de l'énergie du système isolé. La somme de l'énergie cinétique (le premier terme du membre de gauche) et de l'énergie potentielle de la masse du pendule (le second) est constante dans le temps et vaut E, énergie totale, déterminée par les conditions initiales

$$E = -mg\ell\cos\theta_m \tag{4.5}$$

si à l'instant initial on a lâché le pendule avec une vitesse nulle et une amplitude angulaire de $-\theta_m \leq 0$ (le choix du signe devant $-\theta_m$ est pour la commodité de la suite).

4.2. Équations à variables séparées

En général, on appelle *équation à variables séparées*, une équation différentielle du premier ordre $F(y, y', x) = 0$ qui peut se mettre sous la forme $f(y)dy = g(x)dx$ et donc s'intégrer en

$$\int^y f(y')dy' = \int^x g(x')dx' + \text{constante}\ . \tag{4.6}$$

Exemples

1. On rencontrera au chapitre 5, dans l'étude de systèmes dynamiques l'équation $\dot{x} = -\alpha^2 - x^2$. Montrer qu'elle est à variables séparées. En chercher les solutions.

2. Autre exemple : on suppose qu'un corps en chute libre est freiné par une force proportionnelle au carré de sa vitesse (parachute). Montrer que son équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{z} = k\dot{z}^2 - g$$

et que l'équation différentielle satisfaite par $\dot{z}$ ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent (cf TD3).

3. Examinons l'équation du pendule simple que nous avons obtenue au paragraphe précédent

$$\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 = g(\cos\theta - \cos\theta_m)\ . \tag{4.7}$$

Puisque $|\theta_m|$ désigne l'angle maximal atteint par le pendule (position où sa vitesse s'annule), $|\theta| < \theta_m$ et le signe du membre de droite est bien positif. Cette équation se récrit

$$\frac{|d\theta|}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}dt$$

où toute la dépendance dans la variable θ a été mise au membre de gauche, toute celle en t (ici triviale) au membre de droite. Comme au paragraphe précédent, supposons le pendule lâché à l'instant $t = 0$ avec une vitesse nulle et une amplitude angulaire $-\theta_m \leq 0$. Dans la première demi-oscillation du pendule, tant que θ croît, c'est-à-dire que $\mathrm{d}\theta \geq 0$, (ou $\dot{\theta}$ ne change pas de signe), on peut intégrer l'équation en calculant une primitive de chaque membre

$$\int_{-\theta_m}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}t \ . \tag{4.8}$$

Il reste à calculer effectivement l'intégrale du membre de gauche et à en extraire la fonction cherchée $\theta(t)$. Cette intégration mène à des fonctions non élémentaires, dites fonctions elliptiques, et nous ne la poursuivrons pas ici.

4.3. Changement de la fonction inconnue

Il existe de nombreux cas où un changement judicieux de la fonction inconnue, solution cherchée de l'équation différentielle, simplifie considérablement la discussion. Il s'agit donc, étant donnée une équation différentielle satisfaite par une fonction $y(x)$, d'écrire et d'étudier l'équation différentielle qui en résulte pour la nouvelle fonction $z(x) = F(y(x))$.

C'est le cas par exemple de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0 \ . \tag{4.9}$$

Supposons qu'on connaisse une solution $y_0(x)$ et posons

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$$

avec une nouvelle fonction inconnue $z(x)$. En reportant cette expression dans (4.9) et en utilisant le fait que $y_0(x)$ satisfait elle-même (4.9), on obtient

$$-\frac{z'}{z^2} + a(2\frac{y_0}{z} + \frac{1}{z^2}) + \frac{b}{z} = 0$$

(toutes les dépendances en x sont sous-entendues), soit l'équation *linéaire*

$$-z' + a(2y_0z + 1) + bz = 0 \ , \tag{4.10}$$

à laquelle on applique les théorèmes et méthodes du § 3.

Un autre exemple, celui de l'équation de Bernoulli, sera étudié en TD.

4.4. Résolution d'une équation différentielle par une série entière

Considérons, à titre d'exemple, le cas de l'équation d'Airy

$$f''(x) = xf(x) \tag{4.11}$$

et cherchons-en une solution sous forme d'une série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

En dérivant terme à terme et en insérant dans (4.11), on trouve

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1}\right] x^n = 0 \ ,$$

soit, en identifiant à zéro le coefficient de chaque terme x^n,

$$a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \text{ pour } n \geq 1 \ .$$

Cela fournit une relation de récurrence entre les a_n, qui, complétée par la donnée de $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$, deux conditions initiales indispensables à la résolution de l'équation du second ordre (4.11), permettent de déterminer tous les a_n. Comme a_n se comporte comme $1/(n!)^{2/3}$, le rayon de convergence de la série (cf chap.1, § 4.5) est infini : la série converge pour tout x.

Les deux solutions de base notées $\mathrm{Ai}(x)$ et $\mathrm{Bi}(x)$ sont distinguées par leur comportement à l'infini : $\mathrm{Ai}(x) \to 0$ et $\mathrm{Bi}(x) \to \infty$.

La fonction d'Airy intervient dans des problèmes de physique telle la description quantitative de l'arc-en-ciel ...

Inversement, connaître l'équation différentielle satisfaite par la somme d'une série entière permet parfois de calculer cette somme. Considérons par exemple la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \ . \tag{4.12}$$

On démontre aisément qu'elle est convergente (le vérifier !). Pour calculer sa somme, construisons la série entière

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^8}{16}\right)^k \left(\frac{4x}{8k+1} - \frac{2x^4}{8k+4} - \frac{x^5}{8k+5} - \frac{x^6}{8k+6}\right) \ . \tag{4.13}$$

Vérifier que

a) la série converge pour $|x| < \sqrt{2}$;
b) la fonction $S(x)$ satisfait $S'(x) = (4 - 2x^3 - x^4 - x^5)/(1 - x^8/16)$ et $S(0) = 0$;
c) la fonction $\varphi(x) := -4\mathrm{Arc}\tan(1-x) + 2\ln(2-x^2) - 2\ln(x^2 - 2x + 2)$ satisfait la même équation différentielle et $\varphi(0) = -\pi$.

En conclure que $S(x) = \varphi(x) + \pi$, donc la somme (4.12) cherchée est $S(1) = \varphi(1) + \pi = \pi$. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel comme Maple pour vérifier le point c).

⋆ ⋆

⋆

Ce chapitre n'a fait qu'effleurer le très vaste sujet des équations différentielles, d'importance immense pour le physicien ou l'ingénieur. Nous y reviendrons au Chapitre

4, où des "systèmes linéaires", c'est-à-dire régis par des équations dynamiques linéaires, seront étudiés plus en détail. Nous y reviendrons à nouveau au Chapitre 5, où le monde des équations *non-linéaires* sera brièvement évoqué et illustré sur quelques exemples.

Ce cours ne dira rien des "équations aux dérivées partielles", une classe d'équations portant sur des fonctions de plusieurs variables. Des exemples que nous rencontrerons en TD sont ceux des équations des ondes ou l'équation de la chaleur... D'autres équations d'importance capitale en physique, telles les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, ou les équations de Navier-Stokes de l'hydrodynamique, sont des équations aux dérivées partielles.