Mention Physique - L2 - Année 2012-2013
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°7 : Variables aléatoires. Lois de probabilité

I. Lois de probabilité

1. **Densité et fonction de répartition**
   Considérons la fonction $F(x)$, définie par :

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \qquad (x \in R)$$

   (a) Montrer que F est une fonction de répartition d'une v.a. réelle continue X.
   (b) Quelle est la densité f de X ?
   (c) Montrer que X est une v.a. réelle centrée.
   (d) Donner l'expression de la variance de X (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale).

2. **Densité et fonction de répartition (2)**
   Soit la fonction de variable réelle x définie par $f(x) = 0$ sur $]-\infty, -q] \cup [q, \infty[$, $f(x) = k(x+q)$ sur $]-q, 0]$ et $f(x) = -k(x-q)$ sur $[0, q[$ (k et q sont des constantes positives).

   (a) Tracer le graphe de $f(x)$. Déterminer pour quelle valeur de k cette fonction définit une densité de probabilité pour une variable aléatoire continue X.
   (b) Déterminer la fonction de répartition associée à $f(x)$ et la tracer.
   (c) Calculer l'espérance de X : $\langle X \rangle$.
   (d) Calculer la variance de X : $\mathrm{var}(X)$, puis son écart type σ.
   (e) Calculer la probabilité que X soit supérieur à $\langle X \rangle$ sachant que X est supérieur à $-q/2$. .
   (f) $\star$ Montrer que la limite de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ lorsque q tend vers 0 est $g(0)$ lorsque g est une fonction continue.

3. **Lois exponentielles**
   i) Soit la fonction $f(x) = Ce^{-ax}$ pour $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$, avec $a > 0$. Quelle valeur doit prendre la constante C ? Déterminer les moments qui existent et les calculer.

   ii) Soit la fonction à variable réelle x définie par $f(x) = ke^{-\alpha|x|}$ (k et α sont des constantes positives).

(a) Déterminer pour quelle valeur de k cette fonction définit une densité de probabilité pour une variable aléatoire continue X. Tracer $f(x)$ avec $\alpha = 1$. Même question avec $\alpha = 5$.

(b) Déterminer la fonction de répartition associée à $f(x)$. La tracer pour $\alpha = 1$ puis pour $\alpha = 5$.

(c) Calculer l'espérance (ou moyenne) de X .

(d) Calculer la variance de X : $\mathrm{var}(X)$, puis son écart type σ.

(e) Calculer la probabilité que X soit supérieur à $\alpha^{-1} + \langle X \rangle$ sachant que X est supérieur à $\langle X \rangle$.

(f) $\star$ Montrer que la limite de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ lorsque α tend vers $+\infty$ est $g(0)$ lorsque g est une fonction continue. Interpréter à l'aide des dessins faits au dessus.

4. **Distribution de Lorentz**
Une loi de probabilité importante en physique est la loi de Lorentz (parfois appelée Cauchy-Lorentz) de densité :

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{1}{\gamma^2 + (x - x_0)^2} \right) \tag{1}$$

(a) Montrer que $f(x)$ est bien une densité de probabilité.

(b) Quel est le *mode*, (c'est-à-dire la valeur de x qui donne le maximum), de cette distribution ? Que caractérise le paramètre γ ?

(c) Montrer que la moyenne et la variance ne sont pas définies.

II. Exemples concrets

1. **Durée de vie d'une savonnette**
La durée d'utilisation d'une savonnette mesurée en jours est une variable aléatoire réelle, T, dont la densité de probabilité est :

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0)$$

où λ est un paramètre réel positif.

(a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire T.

(c) On constate que $\langle T \rangle = 20$ j. Déterminer λ et $\sigma(T)$.

(d) Calculer la probabilité qu'une savonnette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

2. **Pile ou face**

On dispose de n pièces identiques. On associe à la i-ème pièce la variable aléatoire X_i qui prend la valeur 1 lorsque cette pièce tombe sur pile et 0 lorsqu'elle tombe sur face. On suppose que la probabilité d'obtenir $X_i = 1$ (pile) est p et celle d'obtenir $X_i = 0$ (face) est $q = 1 - p$. Les variables aléatoires X_i sont toutes indépendantes.

(a) Calculer l'espérance puis la variance de X_i.

(b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$. Interprétation ?

(d) On appelle fonction génératrice associée à la variable aléatoire X la fonction de z définie par $\phi(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k P(X = k)$. Montrer que $\phi(z) = (pz + q)^n$.

(e) Montrer que la moyenne de X, $\langle X \rangle$, est égale à $\phi'(1)$. En déduire $\langle X \rangle$.

(f) En calculant $\phi''(1)$, déterminer la variance de X.

(g) Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins k_0 fois pile : $P(X \geq k_0)$. Faites l'application numérique pour $p = 1/2$, $n = 5$ et $k_0 = 4$.

3. **Durée de vie d'un appareil**

On met en service un appareil à l'instant $t = 0$. Il cesse de fonctionner à l'instant aléatoire T, durée de vie de l'appareil. Soient $F(x)$ la fonction de répartition de T et $f(x)$ sa densité.

(a) Exprimer en fonction de F et f la fonction de répartition $F_{T>t}(x) = P(T < x|T > t)$ et la densité $f_{T>t}(x)$ de la v.a. T conditionnée par $T > t$.

(b) On considère un système dont la densité de probabilité de panne à l'instant t, sachant qu'il fonctionnait jusqu'à l'instant t, est une constante. Déterminer $F(t)$ et $f(t)$ définissant la loi de l'instant de la panne. Interpréter dans ce cas $f_{T>t}(t+x)$.Calculer la durée de vie moyenne (ou espérance de vie) $\langle T \rangle$.

(c) On connecte deux appareils A_1 et A_2, de durées de vie aléatoires T_1 et T_2 indépendantes et de densités f_1 et f_2, pour former un système de durée de vie T. Déterminer les fonctions $F(t)$ et $f(t)$ relatives au temps T dans le cas où A_1 et A_2 sont connectés

- en série (le système fonctionne si A_1 et A_2 fonctionnent).
- en parallèle (le système fonctionne si A_1 ou A_2 fonctionne(nt)).

(d) Calculer l'espérance de vie du système dans les deux cas précédents, si $\alpha_1 = \alpha_2$ (α_i étant l'inverse de la durée de vie moyenne de l'appareil i).

4. **Paradoxe de Bertrand**

Soit un cercle de rayon R. Quelle est la longueur a du côté du triangle équilatéral ABC inscrit dans ce cercle ? On se propose d'étudier l'évènement $\mathcal{E}$ suivant : une corde *tracée au hasard* a une longueur ℓ supérieure à a. Quelle est la probabilité de $\mathcal{E}$? Trois raisonnements différents vont conduire à trois résultats différents !

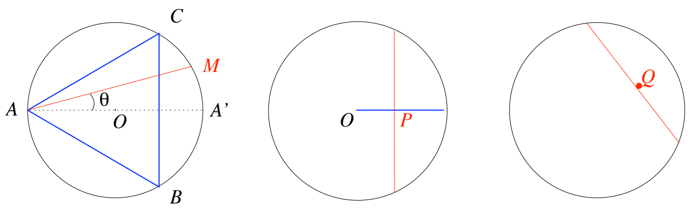

Figure 1: Trois définitions d'une "corde aléatoire"

(a) On fixe une extrémité de la corde en A, l'autre extrémité M a une densité uniforme sur le cercle. Montrer que $\mathcal{E}$ est réalisé sissi M appartient à l'arc BC. En déduire la probabilité p_1 de cet évènement. Montrer que l'angle $\theta = \widehat{OAM}$ a une distribution uniforme et trouver la relation entre ℓ et θ ; en déduire la densité de probabilité de ℓ. Comment retrouve-t-on la probabilité p_1 à partir de cette densité ?

(b) On se donne un rayon quelconque du cercle et un point aléatoire P sur ce rayon avec une densité uniforme. On construit la corde dont ce rayon est la médiatrice. Dans quel intervalle P doit-il varier pour que l'évènement $\mathcal{E}$ soit réalisé ? En déduire la probabilité p_2 de cet évènement et calculer la densité de probabilité de ℓ. Vérifier comme en a) le calcul de p_2.

(c) Soit un point Q choisi de façon aléatoire à l'intérieur du disque, avec une densité uniforme, et **la** corde dont il est le milieu. Comment construit-on géométriquement cette corde ? Chercher à quelle région du disque Q doit appartenir pour que $\mathcal{E}$ soit réalisé. En déduire la probabilité p_3 de cet évènement, puis calculer la densité de probabilité de ℓ. Vérifier comme en a) le calcul de p_3.

Ce paradoxe souligne que le problème de départ est mal posé. Ce que l'on entend par corde "tracée au hasard" n'est pas bien défini !