Mention Physique - L2 - Année 2011-2012
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°1 : Indépendance linéaire. Bases. Matrices

I. Espaces vectoriels. Indépendance linéaire. Bases, dimension

A)

a) On considère les suites de p nombres réels $X = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$. On définit la somme et la multiplication par un nombre réel par

$$(x_1, x_2, \cdots, x_p) + (y_1, y_2, \cdots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_p + y_p) \quad (1)$$
$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_p) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p) \; . \quad (2)$$

Montrer que ces suites forment un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Donnez-en une base. On l'appelle $\mathbb{R}^p$, pourquoi ?

Rép. : *Toute combinaison lin.* $\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_p) + \mu(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ *est encore une suite, ainsi que la suite zéro* $(0, 0, \cdots, 0)$ *et la suite inverse* $(-x_1, -x_2, \cdots, -x_p)$.

b) Soit α et β deux nombres réels fixés. On considère les suites $(u_1, u_2, ..., u_n, ...)$ définies par la relation de récurrence $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$ et par la donnée de u_1 et u_2. Montrer qu'elles forment un espace vectoriel E. Montrer que u_n est une fonction linéaire de u_1 et u_2. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de l'espace E.

Rép. : *Si deux suites* u_n *et* v_n *satisfont la relation de récurrence, il en est de même de toute comb. lin.* $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ *: ces suites forment un e.v.* E*. Une suite est complètement définie par la donnée de* u_1 *et* u_2*, et* u_n *est une fonction linéaire de* u_1 *et* u_2*, c'est-à-dire* $u_n = A_n u_1 + B_n u_2$ *avec* A_n *et* B_n *indépendants de* u_1 *et* u_2 *(par récurrence). Donc espace de dimension 2. Base de cet espace : par exemple les deux suites* $u_n^{(1)}$ *et* $u_n^{(2)}$ *définies par la rel. de réc. et respectivement :* $u_1^{(1)} = 1$, $u_2^{(1)} = 0$, *et* $u_1^{(2)} = 0$, $u_2^{(2)} = 1$.

B)

a) Rappeler quelle est la relation entre l'intensité ou la charge et la tension aux bornes des 3 éléments de circuit de la figure 1.a.

Rép. : $V_1 - V_2 = Q/C$, $V_1 - V_2 = RI$, $V_1 - V_2 = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

b) Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge du condensateur dans le circuit des figures 1.b, c et d.

Rép. : *(b)* $L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{C} = 0$; *(c)* $L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0$; *(d)* $L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = V$

c) Les solutions de chaque cas forment-elles un espace vectoriel ? De quelle dimension ? Qu'est-ce qui fixe la solution physique ?

Rép. : *(b) et (c) : oui, équation homogène du 2ème ordre, 2 solutions indépendantes, dimension 2, la solution physique est fixée par les 2 conditions initiales ; (d) equ. non homogène, pas un espace vect. : si* Q_1 *et* Q_2 *sont solutions,* $Q_1 + Q_2$ *ne l'est pas ; ou plus simple* $Q = 0$ *n'est pas solution.*

C) Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

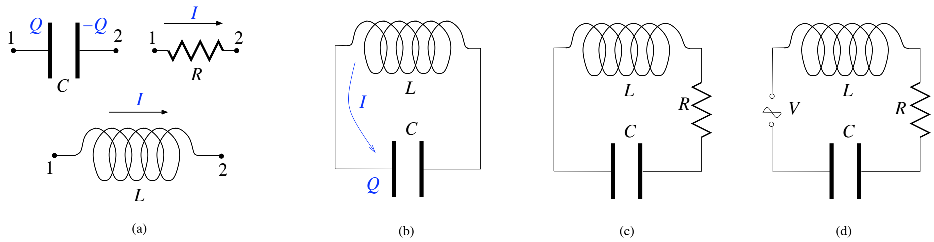

Figure 1: Circuits électriques

$\vec{a} = (1,0)$	$\vec{b} = (0,1)$	$\vec{c} = (1,1)$	**Rép.** :	*non :* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$
$\vec{a} = (1,0,0)$	$\vec{b} = (0,1,0)$	$\vec{c} = (0,0,1)$	**Rép.** :	*oui*
$\vec{a}' = (1,1,0)$	$\vec{b}' = (0,1,1)$	$\vec{c}' = (1,0,1)$	**Rép.** :	*oui : résoudre l'équ.* $x\vec{a}'+y\vec{b}'+z\vec{c}'=0$
$\vec{a}'' = (1,1,0)$	$\vec{b}'' = (0,1,1)$	$\vec{c}'' = (1,0,-1)$	**Rép.** :	*non :* $\vec{a}''-\vec{b}''=\vec{c}''$

D) Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner la dimension de l'espace des solutions puis une base de solutions réelles

$$\text{(a)} \qquad \ddot{x}+4\dot{x}+3x=0$$

$$\text{(b)} \qquad \ddot{x}+4x=0$$

$$\text{(c)} \qquad \ddot{x}+\sqrt{3}\dot{x}+x=0$$

Rép. : *Pour chacune de ces équ.homogènes du 2ème ordre, e.v. des sols de dim=2, solutions de la forme* $e^{\alpha t}$ *avec* $\alpha^2+a\alpha+b=0$*, donc respectivement (a)* $\alpha=-1,\ -3$ *; (b)* $\alpha=\pm 2i$ *; (c)* $\alpha=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\pm i)=e^{\pm\frac{5\pi i}{6}}$ *. Une base réelle du (a) est* (e^{-t},e^{-3t})*, du (b)* $(\cos 2t,\ \sin 2t)$ *; et du (c),* $(\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2})e^{\frac{-\sqrt{3}t}{2}}$.

E) Quel est le rang du système de vecteurs suivant ?

$\vec{a} = (1,1,0)$	$\vec{b} = (0,1,1)$	$\vec{c} = (1,0,1)$	**Rép.** :	*3*
$\vec{a}' = (1,1,0)$	$\vec{b}' = (0,1,1)$	$\vec{c}' = (1,1,1)$	**Rép.** :	*3*
$\vec{a}'' = (1,1,0)$	$\vec{b}'' = (0,1,1)$	$\vec{c}'' = (1,0,-1)$	**Rép.** :	*2*
$P_1(x)=\cos x$	$P_2(x)=\sin x$	$P_3(x)=\sin 2x$	**Rép.** :	*3 car lin. indép. même si* $P_3=2P_1P_2$
$Q_1(x)=\cos^2 x$	$Q_2(x)=\sin^2 x$	$Q_3(x)=\cos 2x$	**Rép.** :	*2 puisque* $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

II. Matrices

A) Quelle est la matrice du changement de base suivant

$$(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2) \longrightarrow (\vec{e}_1,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2)$$

$$(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2) \longrightarrow (\vec{e}_2,\ \vec{e}_1)$$

Écrire comment se transforment les composantes d'un vecteur quand on passe d'une base dans l'autre.

Rép. : *$\vec f_j = \sum_i \vec e_i A_{ij}$ donc $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Les composantes d'un vecteur $\vec X$ sont (x_1, x_2) dans la base des $\vec e_i$, et (y_1, y_2) dans celle des $\vec f_j$, avec $x_i = \sum_j A_{ij} y_j$ (cf cours, ou calcul direct), donc ici $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_2$ dans le premier cas, et bien sûr, $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$ dans le second. Pourquoi bien sûr, au fait ?*

B) Calculer les produits de matrices suivants

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Rép. : $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}c & d\\ a & b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b & a\\ d & c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}d & c\\ b & a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

C) En mécanique quantique, on rencontre les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ . \tag{3}$$

(a) Montrer qu'elles sont de trace nulle.
(b) Calculer les produits $\sigma_i \cdot \sigma_j$ pour toutes les paires (i, j).
(c) Pour $j = 1$ par exemple, que valent $\sigma_j^2,\ \sigma_j^3, \cdots, \sigma_j^n$?
(d) Comment calculer $e^{i\alpha\sigma_1}$?
(e) Écrire les matrices $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)$ et $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$. Calculer σ_+^2, σ_-^2, $\sigma_+\sigma_-$, $\sigma_-\sigma_+$.

Rép. : *$\sigma_1^2 = I$, donc $\sigma_1^{2n} = I$, $\sigma_1^{2n+1} = \sigma_1$, $\exp i\alpha\sigma_1 = \sum \frac{(i\alpha\sigma_1)^n}{n!} = \cos\alpha\, I + i \sin\alpha\, \sigma_1$. $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$, etc.*

D) Calculer les combinaisons $J_i J_j - J_j J_i$ pour les matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et pour les matrices

$$J_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad J_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \qquad J_3' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Rép. : *$J_1 J_2 - J_2 J_1 = i J_3$ et perm. cycl. , même chose pour les J'*

E) $\star$ Soient les matrices $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Calculer T^2, T^3 et T^n pour n entier quelconque.

En écrivant $A = I + T$, calculer A^n pour n entier quelconque.
Calculer l'inverse de la matrice A.
Calculer l'exponentielle e^A par son développement en série.

Rép. : *$U = T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^n = 0$ pour $n \geq 3$ donc $A^n = (I+T)^n = I + nT + \frac{n(n-1)}{2}U$, $A^{-1} = (I+T)^{-1} = I - T + T^2 - \cdots = I - T + U$, $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(I + nT + \frac{n(n-1)}{2}U) = e(I + T + \frac{1}{2}U)$.*

III. Transformations géométriques ; applications linéaires

A) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les transformations suivantes sur le vecteur $\vec{X} = \overrightarrow{OM}$ sont-elles des transformations linéaires

1. rotation d'angle α autour d'un axe passant par le point O ? **Rép.** : *oui, puisque si $\vec{X}_1 = \overrightarrow{OM_1} \mapsto \vec{X}_1'$ et $\vec{X}_2 = \overrightarrow{OM_2} \mapsto \vec{X}_2'$ par la rotation, alors $\lambda\vec{X}_1 \mapsto \lambda\vec{X}_1'$ (rotation d'un vecteur colinéaire à $\vec{X}_1$) et $\vec{X}_1 + \vec{X}_2 \mapsto \vec{X}_1' + \vec{X}_2'$ (rotation du parallélogramme construit sur $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$). Donc $\lambda_1\vec{X}_1 + \lambda_2\vec{X}_2 \mapsto \lambda_1\vec{X}_1' + \lambda_2\vec{X}_2'$, transfo. lin. On écrit $\vec{X}' = \mathcal{R}(\alpha)\vec{X}$.*

2. homothétie de centre O et de facteur f ? **Rép.** : *oui, $\vec{X}' = f\vec{X}$*

3. translation par un vecteur $\vec{V}$, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{V}$? **Rép.** : *non lin. !*

4. réflexion par rapport à un plan passant par O ? **Rép.** : *oui, par ex. réflex. par rapport au plan xOz : $(x', y', z') = (x, -y, z)$*

B) Soit la rotation $\mathcal{R}(\alpha)$ d'angle α dans le plan autour de l'origine. Écrire la transformation par cette rotation des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ d'un repère orthonormé. Écrire la matrice de rotation $R(\alpha)$.

Rép. : *$\mathcal{R}(\vec{e}_1) = \cos\alpha\vec{e}_1 + \sin\alpha\vec{e}_2$, $\mathcal{R}(\vec{e}_2) = -\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_2$ donc $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$*

Par un raisonnement géométrique, donner l'expression de $R(\alpha)R(\beta)$ et de $R^{-1}(\alpha)$, puis vérifier par le calcul matriciel. Que vaut la transposée $R(\alpha)^T$?

Rép. : *$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ et $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha)$ par la géométrie ou la trigo.*

Rép. : *$R(\alpha)^T = R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha)$ (matrice orthogonale).*

C) a) Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ doté d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, quelle est la matrice de la réflexion par rapport à la droite passant par O et colinéaire à $\vec{e}_1$?

Rép. : *$\vec{e}_1 \mapsto \mathcal{A}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \mapsto \mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$ et $\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \sum_j \vec{e}_j A_{ji}$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Que devient cette matrice dans la base $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ obtenue à partir de la précédente par rotation de $\pi/4$?

Rép. : *$\vec{f}_1 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$, $\vec{f}_2 = (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$, puis 2 méthodes : ou bien on calcule $\mathcal{A}(\vec{f}_1) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)/\sqrt{2} = -\vec{f}_2$, $\mathcal{A}(\vec{f}_2) = (-\vec{e}_1 - \vec{e}_2)/\sqrt{2} = -\vec{f}_1$ (et un petit dessin pour s'en assurer est recommandé !), donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; ou bien on écrit $A' = R^{-1}AR$ où $R = R(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de changt de base.*

b) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ doté d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, quelle est la matrice de la réflexion par rapport au plan passant par O et engendré par les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$? Même question pour la

projection orthogonale sur ce plan.
Rép. : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D)
1. Quel est le noyau, quelle est l'image des 3 applications linéaires du A) ? des 2 du C) ?
Rép. : *noyaux : A1), 3) et 4), C1) : 0. Images* $\mathbb{R}^3$. *Les matrices de ces applications sont inversibles, cf les calculs précédents. Pour C2) (projection), noyau* $\lambda \vec{e}_3$*, image engendrée par* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

2. Dans l'espace des polynômes en x de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application $D \, : \, P(x) \mapsto Q(x) = P'(x)$. Est-ce un opérateur linéaire ? Quelle est sa matrice dans la base $\{1, x, x^2, x^3\}$? Quel est le noyau, quelle est l'image de D ?

Rép. : *La dérivation est linéaire. Base* $(1, x, x^2, x^3) \mapsto (0, 1, 2x, 3x^2)$. *Matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Noyau = polynômes constants, image = pol. de degré ≤ 2.

E) Soit le vecteur $\vec{\omega} = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire qui à un vecteur quelconque $\vec{r} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe $\vec{r}' = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$.
L'application est-elle linéaire ? Pourquoi ? **Rép.** : *oui, appliquer la déf. de la lin.*
Quelle est la matrice de cette application ? **Rép.** : $x' = \beta z - \gamma y$*, et perm. cycl. donc* $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et l'image de l'application.
Rép. : *noyau : vecteurs colinéaires à* $\vec{\omega}$*, image : vecteurs orthogonaux à* $\vec{\omega}$.

IV. Application aux quadripôles électriques

Matrices de transfert (ou transmission), d'impédance et d'admittance d'un quadrupôle (ou quadripôle) électrique

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Quelle relation y-a-t-il entre les matrices d'impédance Z et d'admittance Y?
Rép. : $ZY = YZ = I$
Exemple d'un transformateur, avec des bobinages de self-inductance L_1 et L_2 et d'inductance mutuelle M, supposés de résistances négligeables. Écrire l'expression de V_1 et V_2 en fonction de i_1 et i_2, puis la matrice d'impédance pour des courants et intensités de fréquence ω.
Rép. : $V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$*, et* $V_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$*; donc* $Z = j\omega \begin{pmatrix} L_1 & -M \\ M & -L_2 \end{pmatrix}$ *avec* $j = \sqrt{-1}$*, le "i" des électriciens ...*

Lois de composition pour des quadripôles en série, en parallèle, en cascade (figure 2). Quelle est la matrice Z, T ou Y qui se prête le mieux au calcul de cette composition, dans chaque cas ?
Rép. : *Soient* i'_1, i''_1 *et* V'_1, V''_1 *les intensités et les tension d'entrée dans les deux quadripôles,* i'_2, i''_2 *et* V'_2, V''_2 *celles de sortie,. Pour le montage en série* $V_1 = V'_1 + V''_1$ *et* $i_1 = i'_1 = i''_1$,

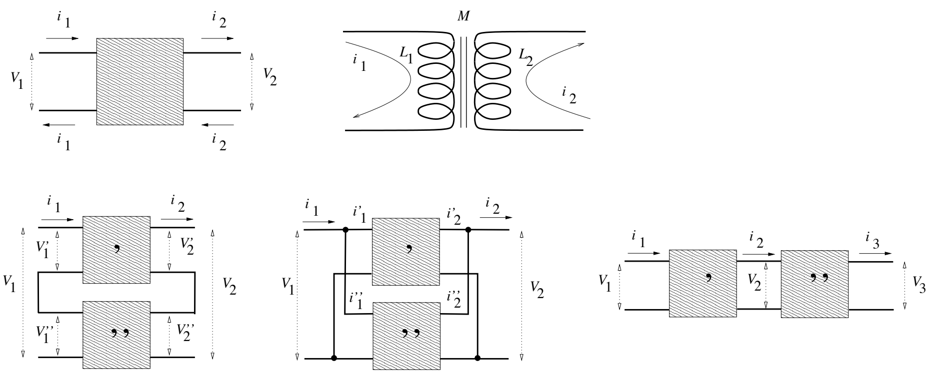

Figure 2: Circuit quadripolaire. Transformateur. Quadripôles en série, en parallèle, en cascade

et de même pour les tensions et intensités de sortie, $\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = Z' \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{pmatrix} = Z'' \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$, *donc* $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{pmatrix} = (Z' + Z'') \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ *et* $Z_{serie} = Z' + Z''$. *Parallèle* $i_1 = i'_1 + i''_1$ *et* $V'_1 = V''_1 = V_1$, *même raisonnement avec les matrices d'admittance, donc* $Y_\parallel = Y' + Y''$. *Cascade* $T = T''.T'$ *avec le produit matriciel.*

Mention Physique - L2 - Année 2011-2012
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°2 : Déterminants, matrices inverses

I. Calculs de déterminants

A) Calcul direct

Calculer les déterminants suivants en les développant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Rép. : -1; 0 ; 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Rép. : $79,\ 11,\ 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & -6x & 4 \\ x & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

Rép. : $6(-6-4x+5x^2)$, $(-3+x)(-2+x)x$

Dans la dernière ligne, on factorisera au mieux le polynôme en x ; comment peut-on savoir à l'avance son degré ? Commenter la forme factorisée du dernier, pouvait-on s'y attendre ? **Rép.** : *factorisation de x et zéros en $x = 2, 3$ manifestes.*

B) Combinaison de lignes et des colonnes et développement par rapport à une ligne ou une colonne. Méthode du pivot de Gauss.

(i) Calculer le plus simplement possible

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rép. : *D_1 : on ajoute 3 fois la 2ème colonne à la 3ème, puis on développe selon cette 3ème : $D_1 = -10$. $D_2 = 60$. D_3 : on développe selon la 3ème colonne $D_3 = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, on factorise 3 et on ajoute la première ligne à la seconde : $D_3 = -6\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6(1+12) = -78$.*

(ii) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$ est divisible par $(x-1)^3$. **Rép.** : *En soustrayant la première colonne aux autres, on développe selon la seconde ligne, on peut factoriser $(x-1)$, et on recommence, d'où $= 2(1-x)^3$.*

(iii) Calculer en le factorisant au mieux $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$ **Rép.** : *On soustrait la 1ère colonne aux 3 autres, on factorise $(a^2-b^2)(a-b)^2$, on ajoute toutes les lignes à la dernière, on développe selon la dernière ligne, etc : $(a^2-b^2)^4$*

(iv) $\star$ En combinant lignes et colonnes de $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$ montrer que $D = (x+y+z)(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y)$.
Quel est l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées (x,y,z) satisfont $D=0$?
Rép. : *$D=0$ décrit l'union des points satisfaisant $x+y+z=0$ ou $\ldots$ ou $z-x-y=0$, donc 4 plans passant par l'origine.*

(v) Calculer le déterminant de taille $n \times n$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

Rép. : *En retranchant la dernière ligne de toutes les autres, on trouve une matrice triangulaire inférieure avec $1-n, 2-n, \cdots -1, n$ sur la diagonale, d'où $D = (-1)^{n-1} n!$.*

C) Récurrence

a) On se propose de calculer le déterminant de taille $n \times n$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} = \det(J - xI)$$

où J est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.
(i) Pourquoi $D_n(x)$ s'annule-t-il en $x=0$, si $n \geq 2$?
(ii) En simplifiant de façon adéquate l'expression de D_n, démontrer la relation de récurrence $D_n(x) = -xD_{n-1}(x) + (-x)^{n-1}$.
(iii) Calculer explicitement les expressions de D_1, D_2 et D_3 et montrer que cela suggère une expression possible de $D_n(x)$; démontrer que cette expression satisfait bien la relation de récurrence, ce qui fournit la réponse.
Rép. : *(i) Bien sûr, $\det J = 0$ puisque toutes les lignes sont égales; (ii) en soustrayant la dernière colonne de toutes les autres, puis en développant selon la première ligne, on trouve $D_n = -xD_{n-1} + (-1)^{n-1} p(x)$ où $p(x)$ est un déterminant $(n-1) \times (n-1)$ qu'on peut à son*

tour développer selon la première colonne et qui se calcule alors aisément $p(x) = x^{n-1}$. (iii) $D_1 = -(x-1)$, $D_2 = x(x-2)$, $D_3 = -x^2(x-3)$. Cela suggère $D_n(x) = (-x)^{n-1}(n-x)$ qui vérifie bien la relation de récurrence et est donc **la** *solution.*

b) $\star$ Soit le déterminant D_n qui n'a que trois diagonales non nulles

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & -a & 1 & -a \\ 0 & 0 & & \cdots & -a & 1 \end{vmatrix}$$

– Calculer D_1 et D_2.
– Montrer que D_n satisfait une relation de récurrence de la forme $D_n = AD_{n-1} + BD_{n-2}$ avec A et B deux constantes indépendantes de n qu'on déterminera. Quelle valeur de D_0 est compatible avec cette relation ?
– Résoudre cette récurrence en fonction des "conditions initiales" D_0 et D_1 et en tirer l'expression de D_n.
Rép. : *En développant par rapport à la 1ère colonne, on a $D_n = D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$ où le second terme vient d'un deuxième dévt par rapport à la nouvelle 1ère colonne. On cherche les racines $\lambda_\pm$ de $\lambda^2 - \lambda + a^2 = 0$, on écrit $D_n = C\lambda_+^n + D\lambda_-^n$, on calcule C et D en termes de D_0 et D_1 et on trouve au final $D_n = (\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1})/(\lambda_+ - \lambda_-)$ (en utilisant que $\lambda_+ + \lambda_- = 1$ et $\lambda_+\lambda_- = 1$).*

c) $\star$ Calcul du déterminant de Vandermonde.
On considère le déterminant

$$D_n(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(i) Quel est le degré du polynôme $D_n(x_1, \cdots, x_n)$?
(ii) Calculer et factoriser D_2 et D_3.
(iii) Montrer que D_n s'annule chaque fois deux x coïncident, $x_i = x_j$.
(iv) Que peut-on en conclure sur les facteurs de D_n, et finalement sur l'expression de D_n ?
Rép. : *(i) degré $=1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$; (iii-iv) par antisymétrie D_n s'annule pour $x_i = x_j$ donc se factorise $D_n = \pm \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ à un signe près qu'on détermine en regardant le terme $x_1^0 x_2^1 \cdots x_n^{n-1}$ qui vaut 1 dans le déterminant initial, et donc $D_n = \prod_{i>j}(x_i - x_j) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.*

D) Freestyle ! Calculer et factoriser les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 1 & \cos y & \cos 2y \\ 1 & \cos z & \cos 2z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

En quoi l'exercice C c) précédent permet-il de simplifier le 3ème de ces déterminants ? **Rép.** : *$2abc$, $(a+b+c)^3$, $2(\cos x - \cos y)(\cos y - \cos z)(\cos z - \cos x)$, c'est le Vandermonde des cos!, $-a(a-b)(b-c)(c-d)$ l'annulation en $a = b$ etc est claire et donc la factorisation aussi, reste le coefficient.*

II. Indépendance de vecteurs

A) Les vecteurs suivants sont-ils indépendants ? Comparez avec le même exercice du TD 1.

$\vec{a} = (1,1,0)$ $\vec{b} = (0,1,1)$ $\vec{c} = (1,0,1)$ **Rép.** : det $= 2$, *indép.*
$\vec{a}' = (1,1,0)$ $\vec{b}' = (0,1,1)$ $\vec{c}' = (1,1,1)$ **Rép.** : det $= 1$, *indép.*
$\vec{a}'' = (1,1,0)$ $\vec{b}'' = (0,1,1)$ $\vec{c}'' = (1,0,-1)$ **Rép.** : det $= 0$, *non indép.*

B) Pour quelles valeurs de x les vecteurs $(1, x, x^2), (2x, 3, 4x), (5, 6x, 7)$ sont-ils linéairement dépendants ? **Rép.** : *Le déterminant de ces trois vecteurs est $D = 21 - 33x^2 + 12x^4$ qui s'annule en $x = 1$, donc se factorise en $3(x-1)(x+1)(4x^2-7)$. Il y a* **non**-*indépendance en $x = \pm 1$ et $x = \pm\sqrt{7}/2$.*

C) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, écrire l'équation du plan passant par les trois points M_1, M_2, M_3 de coordonnées suivantes, puis le dessiner sommairement

(a) $M_1 : (1,1,0)$ $M_2 : (0,1,1)$ $M_3 : (1,0,1)$ (b) $M_1 : (1,1,0)$ $M_2 : (0,1,1)$ $M_3 : (1,1,1)$

Rép. : *On écrit que les 3 vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont non indépendants, soit* $\det(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$, *donc (a) :* $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = x+y+z-2 = 0$ *; (b) :* $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = y-1 = 0$, *qui est un plan parallèle au plan xOz.*

D) $\star$ Wronskien

a) Soient deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ supposées dérivables. On définit leur *wronskien* $W(f_1, f_2) = f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)$. Montrer que si ces deux fonctions sont linéairement dépendantes, alors W est identiquement nul, c'est-à-dire nul pour **tout** x. Réciproquement que peut-on dire si $W(f_1, f_2) = 0$?

b) Plus généralement, on définit le wronskien de n fonctions $f_i(x)$, $i = 1, \cdots n$, supposées $(n-1)$ fois dérivables comme le déterminant

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Montrer que si les fonctions f_i sont linéairement dépendantes, W est nul pour tout x.

c) Montrer qu'inversement il suffit que le wronskien $W(x)$ soit non nul en un point x_0 pour qu'on puisse conclure que les fonctions f_i sont linéairement **in**dépendantes. **Rép.** : *a) Si $f_2(x) = \lambda f_1(x)$ pour tout x, il est clair que $W(x) = 0$ pour tout x. b) En général, si les fonctions f_i sont linéairement dépendantes, il existe n constantes non toutes nulles λ_i telles que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$, et cette relation est aussi vérifiée par les dérivées successives des f_i, donc $\forall p = 0, \cdots n-1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{(p)}(x) = 0$. Les n colonnes du déterminant sont donc linéairement dépendantes et le déterminant $W(x)$ est nul pour tout x. c) Inversement, il suffit que le wronskien $W(x)$ soit non nul en un point x_0 pour qu'on puisse conclure que les fonctions f_i sont linéairement* **in**_dépendantes. L'étude du wronskien offre donc un moyen pratique d'étudier l'indépendance linéaire de n fonctions. Attention à la réciproque : $W = 0$ n'implique pas que_ *les fonctions sont lint dép. Exemple, $n = 2$, en résolvant $W(f_1, f_2) = 0$, on trouve* $\log \frac{|f_2|}{|f_1|} =$ *const., donc $|f_2| = C|f_1|$ mais pas nécessairement $f_2 = Cf_1$. Ainsi $f_1 = x^2$, $f_2 = x|x|$.*

III. Mineurs, cofacteurs. Inverses de matrices

A) Soit A une matrice $n \times n$ antisymétrique, $A^T = -A$.
a) Montrer que si n est impair, $\det A = 0$. **Rép.** : $A = -A^T$, $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A = 0$.
b) Calculer $\det A$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme d'un carré $P(a, b, \cdots, f)^2$ d'un polynôme en $a, \cdots, f$. **Rép.** : *On développe selon la première ligne : les coefficients de a, b, c sont des déterminants 3×3 qui ont deux zéros et l'expression de chacun se réduit à trois termes ; la somme est un carré parfait* $\det A = P^2 = (cd - be + af)^2$.
c) En général, on peut démontrer (et nous admettrons) que le déterminant de toute matrice antisymétrique de taille paire $n = 2m$ est le carré d'un polynôme des éléments de la matrice A, appelé *pfaffien*. Quel doit être le degré de ce polynôme pfaffien ? **Rép.** : $n/2 = m$

B) Soit A une matrice $p \times p$, $\operatorname{Cof} A$ sa comatrice. Montrer que $\det \operatorname{Cof} A = (\det A)^q$, avec une puissance q qu'on déterminera. **Rép.** : *De* $A^{-1} = \operatorname{Cof} A/\det A$ *on tire* $(\det A)^{-1} = (\det A^{-1}) = \det \operatorname{Cof} A/(\det A)^p$, *donc* $\det \operatorname{Cof} A = (\det A)^q$ *avec* $q = p - 1$.

C) $\star$ Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$, $B = \operatorname{Cof} A = (A_{ij})$ sa comatrice. On rappelle que $A.\operatorname{Cof} A^T = (\det A)I$. Montrer que
(i) si A est de rang n, $\operatorname{Cof} A$ est aussi de rang n ;
(ii) si A est de rang $n - 1$, $\operatorname{Cof} A$ est de rang 1 ;
(iii) si A est de rang inférieur ou égal à $n - 2$, $\operatorname{Cof} A$ est nulle. (On étudiera le noyau de $\operatorname{Cof} A$.)
Rép. : *(i) Si rang(A) $= n$, A^{-1} existe et est proportionnelle à $\operatorname{Cof} A^T$ qui est donc aussi inversible, donc de rang n. Si rang(A) $\leq n - 1$, $\det A = 0$, et $A.B = 0$: l'image de B est contenue dans le noyau de A. (ii) Si le rang de A est $n - 1$, son noyau est de dim. 1, l'image de B est au plus de dimension 1. Elle est exactement 1 car tous les cofacteurs A_{ij} ne sont pas nuls, sans quoi A ne serait pas de rang $n - 1$. Le rang de B (= dim de son image) est donc 1. (iii) Si le rang de A est $\leq n - 2$, tous les cofacteurs A_{ij} sont nuls et $B = \operatorname{Cof} A = 0$.*

D) Calculer les inverses A^{-1} des matrices A suivantes, *s'ils existent*, et vérifier en calculant $A \cdot A^{-1}$.
$A_1 = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t - \frac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{pmatrix}$
$A_5 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\star$ $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.
Rép. : $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$, *$A_2$ singulière,* $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$, $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} -\sinh t & \cosh t \\ \cosh t & -\sinh t \end{pmatrix}$
$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 3/4 & 1 & -1/4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -i/(2\sqrt{2}) & -1/4 \\ 1/4 & i/(2\sqrt{2}) & -1/4 \end{pmatrix}$, $\det A_7 = -10$,
$A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 3/10 \\ -1 & 1/5 & 7/10 \\ 0 & 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}$, $\det A_8 = (a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)$ *(cf I.B.iv),*

$$(\det A_8)A_8^{-1} = \begin{pmatrix} 2abc & a(a^2-b^2-c^2) & b(-a^2+b^2-c^2) & c(-a^2-b^2+c^2) \\ a(a^2-b^2-c^2) & 2abc & c(-a^2-b^2+c^2) & b(-a^2+b^2-c^2) \\ b(-a^2+b^2-c^2) & c(-a^2-b^2+c^2) & 2abc & a(a^2-b^2-c^2) \\ c(-a^2-b^2+c^2) & b(-a^2+b^2-c^2) & a(a^2-b^2-c^2) & 2abc \end{pmatrix}.$$

IV. Jacobiens, orientation

A) On rappelle que le jacobien d'un changement de coordonnées $\vec{y} \to \vec{x}$ est $J = \det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$, noté aussi $J = \frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$, si bien que

$$d^n y = |J| d^n x$$

Rappeler l'expression des coordonnées sphériques et cylindriques à trois dimensions. **Rép.** : *On lit sur la figure (sphér.)* $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ *et (cylindr.)*

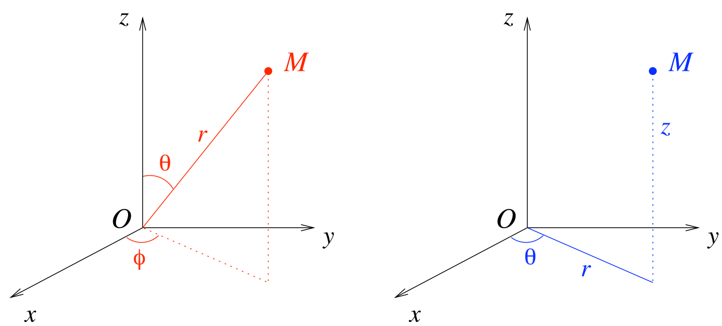

Figure 1: Coordonnées sphériques à gauche, cylindriques à droite

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z.$

Calculer le jacobien dans les deux changements de coordonnées suivants
– coordonnées cylindriques : $\vec{x} \to (z, r, \theta)$ **Rép.** : $J = r$, *donc* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$,
– coordonnées sphériques : $\vec{x} \to (r, \theta, \phi)$ **Rép.** : $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta$, *donc* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\mathrm{d}r\ \sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

B) Orientation d'un trièdre.

Soit un système de trois vecteurs indépendants dans l'espace $\mathbb{R}^3$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, appelé trièdre. Le déterminant de ces trois vecteurs est défini par $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(i) Soit T la matrice de vecteurs colonnes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Montrer que $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det T$. **Rép.** : *C'est la définition : déterminant de la matrice = déterminant du système des vecteurs colonnes (ou lignes).*

(ii) Une application linéaire A transforme les trois vecteurs du trièdre en $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = (A\vec{a}, A\vec{b}, A\vec{c})$. Montrer que $\det(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = \det A \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. **Rép.** : *Si* T' *est la matrice* $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$, *on a* $T' = A.T$ *donc* $\det T' = \det(A.T) = \det A \det T$ *cqfd.*

(iii) On définit l'orientation d'un trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ comme le signe du déterminant $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
– Déduire de la question précédente que les applications qui préservent l'orientation des repères sont celles qui ont $\det A > 0$.
– Que se passe-t-il si $\det A = 0$?
– Donner un exemple de chaque cas $\det A > 0$, $\det A < 0$ et $\det A = 0$.**Rép.** : *matrice*

de rotation comme étudié au TD 1 : $\det R = 1$*; matrice de réflexion /plan* xOy *à 3 d :* $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det S < 0$ *; matrice de projection sur le plan* xOy *:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det P = 0$ *: transfo singulière, le trièdre* $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ *est "dégénéré" (aplati).*

Mention Physique - L2 - Année 2011-2012
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°3 : Systèmes linéaires d'équations du premier degré

I. Systèmes d'équations

A) Résolution des systèmes suivants, par élimination, puis par utilisation des formules de Cramer, si c'est possible. Discuter les cas qui ne sont pas de Cramer.

$$(a)\begin{cases} 2x+y &= 5\\ -3x+2y &= 3\end{cases} \qquad (b)\begin{cases} 3x-y+z &= 5\\ x+y-z &= -2\\ -x+2y+z &= 3\end{cases} \qquad (c)\begin{cases} 2x-y+z &= 4\\ -x+3y-5z &= 1\\ 8x-9y+13z &= 2\end{cases}$$

Rép. : *Les solutions sont* (a) : $x=1, y=3$; (b) : $x=\frac{3}{4}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{37}{12}$; (c) : $\emptyset$. *Dans le dernier cas, le déterminant du système est nul, le rang est 2 et le déterminant caractéristique* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & +4\\ -1 & 3 & 1\\ 8 & -9 & 2\end{vmatrix} = -40$ *n'est pas nul : le vecteur du membre de droite n'appartient pas à l'espace de dim 2 : pas de solution.*

B) Discussion et résolution des systèmes suivants selon la valeur de m

$$1)\begin{cases} 2x+y-z &= a\\ x+my+z &= b\\ 3x+y-mz &= c\end{cases}$$

$$2)\begin{cases} (1-m)x+(2m+1)y+(2m+2)z &= m\\ mx+my &= 2m+2\\ 2x+(m+1)y+(m-1)z &= m^2-2m+9\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x+my+z &= 1\\ mx+y+(m-1)z &= m\\ x+y+z &= m+1\end{cases}$$

Rép. : *1) : déterminant* $=2m(2-m)$. *Pour* $m\neq 0,\ 2$, *le système est de Cramer, on calcule* $x=-\frac{-am^2-a+bm-b+cm+c}{2(m-2)m}$, $y=-\frac{am+3a-2bm+3b-3c}{2(m-2)m}$, $z=-\frac{-3am+a+b+2cm-c}{2(m-2)m}$. *Pour* $m=0$, *resp.* 2, *il est de rang 2, le déterminant caractéristique* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & a\\ 1 & m & b\\ 3 & 1 & c\end{vmatrix}$ *vaut* $a+b-c$, *resp.* $-5a+b+3c$, *son annulation est la cns pour qu'une solution existe. Pour* $m=0$ *et* $c=a+b$, *on choisit par exemple* x *et* y *comme inconnues principales et on résout les deux premières équations avec* z *comme paramètre :* $x=b-z,\ y=a-2b+3z$. *NB . la limite de la solution de Cramer quand* $m\to 0$ *(et* $c=a+b$*) est un point particulier de cette famille de solutions :* $x=\frac{1}{4}(a+2b),\ y=\frac{1}{4}(a-2b),\ z=\frac{1}{4}(2b-a)$. *Pour* $m=2$ *et* $b=5a-3c$, *de même,* $x=(2a-b+3z)/3,\ y=-(a-2b+3z)/3$.

2) : déterminant $= -2m+3m^2-m^3 = -m(m-1)(m-2)$. *Pour* $m \neq 0,\ 1,\ 2$, *le système est de Cramer et* $x = -\frac{-2m^3+m^2-4m-6}{(m-2)m}$, $y = -\frac{2m^3-3m^2+6m+10}{(m-2)m}$, $z = -\frac{-3m^3+6m^2-12m-2}{(m-2)m}$. *Pour* $m = 0, 1, 2$, *système de rang 2. Le déterminant caractéristique* $\begin{vmatrix} (1-m) & 2m+1 & m \\ m & m & 2m+2 \\ 2 & (m+1) & m^2-2m+9 \end{vmatrix}$ *vaut resp. 2, 0 et -26. Donc pas de solution pour* $m = 0$ *et 2. Une famille de solutions paramétrée (par exemple) par* y : $x = 4-y$, $z = (1-3y)/4$.

3) : déterminant $= 1-m$. *Pour* $m \neq 1$, *syst. de Cramer et* $x = -\frac{m^3-m^2-2m+1}{m-1}$, $y = -\frac{m}{m-1}$, $z = m(m+1)$. *Pour* $m = 1$, *le det. caractéristique* $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}$ *(attention d'en prendre un "bon", construit à partir d'un mineur principal ayant ses deux premières colonnes indépendantes !) est non nul, pas de sol.*

II. Application électrique. Pont de Wheatstone

On considère le montage de la figure 1.1. L'ampèremètre figuré par I est supposé de résistance négligeable.
Écrire le système d'équations reliant les trois intensités $i_1,\ i_2,\ i_3$ à la tension V du générateur. Montrer qu'en imposant que le courant traversant l'ampèremètre est nul, on obtient une relation entre $R_1, \cdots, R_4$, d'où la possibilité de mesurer la résistance de l'une d'elles si les trois autres sont connues et ajustables.

Rép. : *La condition que l'ampèremètre est de résistance négligeable signifie que la différence de potentiel entre ses bornes peut être considérée comme nulle, d'où les trois équations du système*
$$\begin{pmatrix} R_1+R_4 & 0 & R_4 \\ 0 & R_2+R_3 & R_3 \\ R_4 & R_3 & R_3+R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix},$$
$D = \det A = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$, $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \frac{V}{D} \begin{pmatrix} -R_4(R_2+R_3) \\ -R_3(R_1+R_4) \\ (R_1+R_4)(R_2+R_3) \end{pmatrix}$ *et la condition que* $i_1 = i_2$ *donne* $R_2R_4 = R_1R_3$. *Autre méthode n'utilisant pas les formules de Cramer : si* $i_1 = i_2$, *le système d'équations se réduit à* $\begin{pmatrix} R_1+R_4 & R_4 \\ R_2+R_3 & R_3 \\ R_3+R_4 & R_3+R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$ *qui n'admet de solution que si le déterminant caractéristique* $\begin{vmatrix} R_1+R_4 & R_4 & 0 \\ R_2+R_3 & R_3 & 0 \\ R_3+R_4 & R_3+R_4 & V \end{vmatrix} = V(R_1R_3 - R_2R_4)$ *s'annule, on retrouve la condition précédente. Si* R_1 *et* R_2 *sont connues et* R_3 *est ajustable, l'annulation du courant dans l'ampèremètre permet de déterminer* R_4.

III. Application mécanique. Équilibre d'une échelle

On considère une échelle AB de longueur L, appuyée sur le sol et sur un mur vertical et faisant un angle θ avec le sol horizontal (voir Fig. 1.2). Le poids total $\vec{P}$ de l'échelle et de la personne sur l'échelle s'applique en un point H, à la distance ℓ du bas A de l'échelle. On suppose que les contacts avec le sol et le mur se font avec le même coefficient de frottement

$k = \tan\phi$. Autrement dit, les composantes tangentielle T et normale N de la réaction en A et B doivent satisfaire $|T|/|N| \le \tan\phi$. On se donne $\vec{P}$, ℓ, L et θ.

On rappelle que l'équilibre statique d'un solide indéformable soumis à différentes forces statiques $\vec{F}_{\mathrm{ext},i}$ s'appliquant en des points M_i est conditionné par deux relations vectorielles

$$\sum_i \vec{F}_{\mathrm{ext},i} = 0 \qquad \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{ext},i} = 0 \ , \tag{1}$$

où O est un point arbitraire.

1) Écrire selon ce principe les conditions d'équilibre de l'échelle. **Rép.** :

$$\begin{cases} -T_A + N_B &= 0 \\ N_A + T_B &= P \\ \ell P\cos\theta - LT_B\cos\theta - LN_B\sin\theta &= 0 \end{cases}$$

(on a calculé le moment des forces extérieures par rapport à A).

2) Peut-on déterminer les valeurs des forces de réaction en A et B ? **Rép.** : *Les trois forces étant coplanaires, il n'y a que trois équations pour 4 inconnues N_A, T_A, N_B, T_B : le système est clairement "sous-déterminé", et trois des quantités recherchées dépendent de la donnée de la quatrième. Ou encore, il y a $n = 4$ inconnues, le système est de rang $r = 3$, la solution dépend de $n - r = 1$ paramètre.*

3) On examine dans quelle situation limite l'équilibre cesse d'être possible. Au point limite, les deux forces de réaction en A et B satisfont $|T|/|N| = \tan\phi$ et l'échelle commence à glisser. Écrire et discuter le système dans ces conditions. **Rép.** : *Le système précédent est maintenant surdéterminé,*

$$\begin{cases} -T_A + N_B &= 0 \\ N_A + T_B &= P \\ \ell P\cos\theta - LT_B\cos\theta - LN_B\sin\theta &= 0 \\ T_A &= N_A\tan\phi \\ T_B &= N_B\tan\phi \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il n'admet de solution que si le déterminant caractéristique (qui est 5×5) s'annule. En pratique, il est préférable d'éliminer les variables T_A et T_B et d'écrire que le système de 3 équations sur les deux inconnues N_A et N_B a un déterminant caratéristique (3×3) nul.

4) Montrer qu'après élimination de $T_A = N_A\tan\phi$ et $T_B = N_B\tan\phi$, le système peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \tan\phi & -1 \\ 1 & \tan\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (1-\frac{\ell}{L})\cos\theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

et le discuter. **Rép.** : *Il y a un seul déterminant caractéristique formé avec la matrice et le vecteur colonne du membre de droite, qui doit donc s'annuler :*

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (1-\frac{\ell}{L})\cos\theta \\ \tan\phi & -1 & 0 \\ 1 & \tan\phi & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Montrer que la condition qui rend ce système soluble, dite *condition de glissement*, est que

$$(1-\frac{\ell}{L})\cos\theta = \cos(\theta+\phi)\cos\phi \ , \tag{2}$$

ou de façon équivalente,

$$\frac{\ell}{L}\cos\theta = \sin(\theta+\phi)\sin\phi \ . \tag{3}$$

Rép. : *Le développement du déterminant caractéristique donne (2) et un peu de trigonométrie donne alors (3).*

5) Cette condition peut-elle être satisfaite pour un $\ell < L$? Montrer que si $\theta > \frac{1}{2}\pi - \phi$, cela est impossible et l'échelle ne glisse jamais. Que se passe-t-il pour $\theta < \frac{1}{2}\pi - \phi$?
Rép. : *Le membre de gauche de (2) est positif puisque $\ell < L$. Si l'angle $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \theta$ de l'échelle avec la verticale satisfait $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \theta < \phi$, alors $\theta + \phi > \pi/2$ donc $\cos(\theta + \phi) < 0$, le second membre de (2) est négatif, ce qui veut dire que la condition de glissement n'est jamais atteinte. Où que soit la personne sur l'échelle, l'échelle reste stable. En revanche si $\alpha > \phi$, donc $\phi < \pi/2 - \theta$, $\sin\phi < \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$, $\rho := \frac{\sin\phi}{\cos\theta}\sin(\theta + \phi) \le 1$ et il existe un point H, défini par $AH = \ell = \rho L$ au delà duquel l'échelle se mettra à glisser. Enfin, même si l'échelle ne supporte pas de "passager" et si elle est bien équilibrée, avec son poids P_0 appliqué au centre de gravité G, $AG = \frac{1}{2}L$, pour $\alpha > 2\phi$, elle se met à glisser (le vérifier).*

Moralité : placez votre échelle selon une inclinaison assez proche de la verticale, et dans le doute, évitez de monter trop haut ! **Rép.** : *Et si vous n'êtes pas encore convaincu(e), allez voir la video du Pr. Lewin du MIT qui en fait la démonstration !*
http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/video-lectures/lecture-25/

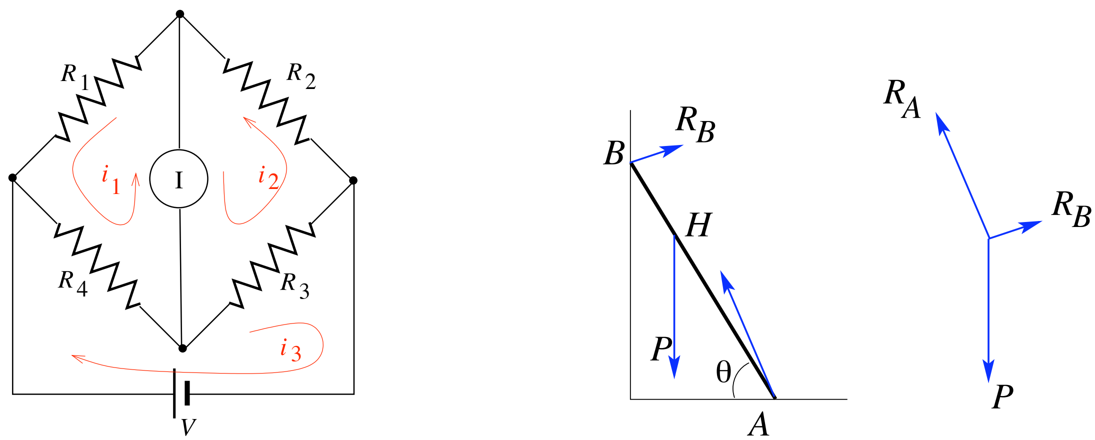

Figure 1: 1. Pont de Wheatstone. 2. Stabilité de l'échelle. On a $AB = L$, $AH = \ell$.

Mention Physique - L2 - Année 2011-2012
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°4 : Valeurs et vecteurs propres. Diagonalisation

I. Valeurs propres, vecteurs propres. Diagonalisation

A) Pour chacune des matrices suivantes :

a) Rechercher ses valeurs propres et vecteurs propres dans $\mathbb{C}$.

b) Quand la matrice est diagonalisable, trouver une base de vecteurs propres et écrire la matrice de diagonalisation V et son inverse V^{-1}. Calculer $V^{-1}AV$ pour vérifier vos calculs.

c) Quand la matrice n'est pas diagonalisable trouver une base de vecteurs dans laquelle elle s'écrit sous forme triangulaire supérieure.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Rép. : *A : val.pr. $= 2, 1, 0$, mat. diagonalisable. , vect.pr. $(2,1,0), (-4,0,1), (-4,3,2)$,*
B : val.pr. $= 3+\sqrt{19}, 3-\sqrt{19}, 1$, vect.pr. $(5+\sqrt{19}, -1+\sqrt{19}, 6), (5-\sqrt{19}, -1-\sqrt{19}, 6), (-2,2,1)$,
C : val pr. $6, 3, 3$, vect. pr. $(1,1,1), (-1,0,1), (-1,1,0)$,
D : val.pr. $3, -1, -1$, mais 2 vect. pr. indep. seulement $(1,2,2), (1,2,1)$, mat. pas diag !
E : val. pr. $2, 2, 2$, mais 2 vect. pr. indep. seult : $(3,0,1), (-2,1,0)$, mat.pas diag.

$$V_A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, V_B = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{19} & 5-\sqrt{19} & -2 \\ -1+\sqrt{19} & -1-\sqrt{19} & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}, V_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et on prend par exemple avec un bon choix du 3ème vecteur : $V_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$V_D^{-1}.D.V_D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{et} \quad V_E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & * \\ 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}, V_E^{-1}.E.V_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B) $\star$ 1. Déterminer dans quels cas les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} \quad a^2 \neq 0; \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Rép. : *B_1 : val. pr $= (2,-1,-1)$, avec 3 vect. pr. $(a^2, a, 1), (-a^2, 0, 1), (-a, 1, 0)$ lint. indep. car leur dét vaut $-3a^2 \neq 0$, donc mat. toujours diag. $\forall a^2 \neq 0$:* $V_1 = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$V_1^{-1} \cdot B_1 \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *(Ou encore, on vérifie que* $(B_1 - 2I)(B_1 + I) = 0$, B_1 *diagonalisable.*
B_2 a pour val.pr. $1, 1, c$. Si $c = 1$, jamais diagonalisable. Si $c \neq 1$, on écrit que $(B_2 - I) = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$ *est de rang 1 $\Leftrightarrow$ son noyau est de dim 2 ; ou encore on écrit que $(B_2 - I)(B_2 - cI) = 0$; l'une ou l'autre méthode conduit aux conditions $a(c-1) = 0$, $ab = 0$, donc $a = 0$, b quelconque.*

2. Montrer que les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables et trouver une matrice de passage. **Rép.** : *Val pr $-1, -1, -1$, $B + I$ de rang 1, donc deux vect. pr. indép. $V^1 = (0, 1, 0)$ et $V^2 = (2, 0, -1)$. On cherche $V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \alpha \\ 1 & \delta & \beta \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$ t.q. $BV = VT$. On trouve deux conditions $2\alpha + 4\gamma = 1$, et $\delta = 3/2$, par ex. $\gamma = 1$, $\alpha = -3/2$, (modulo V^1, V^2). Donc au final $V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$*

II. Calcul des puissances d'une matrice

1. Calculez la puissance $n^{ième}$ des trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Rép. : *Par récurrence* $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, $B^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, $C^n = \begin{pmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$

2. Calculez la puissance $n^{ième}$ des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La première a déjà été rencontrée au IA). Pour la seconde, on essaiera de la mettre sous la forme la plus simple possible, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

et on utilisera la question précédente.

Rép. : *On a vu au I :* $A = V_A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_A^{-1}$, *donc* $A^n = V_A \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_A^{-1} = \cdots$

B val pr $-2,1,1$, mais deux vect. pr. indep. Mais avec $V = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $V^{-1}.B.V = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta$ *donc* $B = V.\Delta.V^{-1}$, $B^n = V.\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.V^{-1}$.

III. Applications aux équations différentielles

A) Résoudre les systèmes différentiels suivants

1.
$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - 2y + z \\ \dot{y} &= -2x + y - 2z \\ \dot{z} &= x - 2y - 2z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$. **Rép.** : *A : val.pr. $= -3, -3, 3$, mat. diagonalisable. , vect.pr. $(-1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, -2, 1)$,* $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X(t) = V\mathrm{diag}\,(e^{-3t}, e^{-3t}, e^{3t})V^{-1}X(0)$ *soit* $x(t) = z(t) = \frac{1}{3}(2e^{-3t} + e^{3t})$, $y(t) = \frac{2}{3}(e^{-3t} - e^{3t})$.

2.
$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x + y + z \\ \dot{y} &= x + 4y + z \\ \dot{z} &= x + y + 4z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$. **Rép.** : *A : val.pr. $= 6, 3, 3$, mat. diagonalisable. , vect.pr. $(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)$,* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X(t) = V\mathrm{diag}\,(e^{6t}, e^{3t}, e^{3t})V^{-1}X(0)$ *soit* $x(t) = \frac{1}{3}(2e^{6t}+e^{3t})$, $y(t) = \frac{1}{3}(2e^{6t}+e^{3t})$, $z(t) = \frac{2}{3}(e^{6t}-e^{3t})$.

3.
$$\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y + 3z \\ \dot{y} &= y + 2z \\ \dot{z} &= z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$. **Rép.** : *A matrice triangulaire* **non** *diagonalisable. On résout de proche en proche $z(t) = e^t z(0) = e^t$, puis $y(t) =$ sol de $\dot{y} = y + 2e^t$ donc $= Ae^t$ (sol de l'equ hom) plus une sol particulière de l'équ inhom, de la forme $(t + B)e^t$ et on fixe $A + B$ par la cond initiale, $y(t) = 2te^t$, de même $x(t) = (3t + 2t^2)e^t$. Méthode matricielle $X(t) = e^{At}X(0)$ et on calcule $A = I + U$, $U^2 = \cdots$,* $e^{At} = (I + tU + \frac{1}{2}t^2U^2)e^t = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 + 3t \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *cf exercices du TD 1.*

4.
$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + y \\ \dot{y} &= -4x - y \\ \dot{z} &= 4x - 8y - 2z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ **Rép.** : *A : v.p $= -2, 1, 1$, mais l'espace propre de 1 est de dim 1 (mat $A - I$ de rang 2) donc matrice* **non** *diagonalisable,*

mais "trigonalisable" par la matrice $V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -6 & \beta \\ 1 & 20 & \gamma \end{pmatrix}$ *: les deux premières colonnes sont les vect. pr. pour* -2 *et* 1*, et on cherche* α, β, γ *pour que* $AV^3 = 1.V^3 + \kappa V^2$ *avec par ex.* $\kappa = 1$*,* $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -8$*. Donc* $V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 20 & -8 \end{pmatrix}$, $\det V = 9$ *et* $V^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 28 & 44 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$*. Alors* $V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$ *et on calcule* $e^{Tt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$.
Finalement $x(t) = te^t,\ y(t) = (1-2t)e^t,\ z(t) = \frac{1}{9}(53e^{-2t} + e^t(60t - 44))$.

B) Oscillateur amorti

Soit un oscillateur amorti décrit par $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{dx}{dt} - \omega_0^2 x$ avec $\tau > 0$.

1. Montrer que cette équation peut être réécrite comme une équation différentielle du premier ordre :
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$
avec v la vitesse de l'oscillateur et A une matrice 2×2 que l'on déterminera. **Rép.** : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$

2. Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice A ? **Rép.** : $\lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2}$, *vect. pr.* $V_\pm = (\lambda_\mp/\omega_0^2, 1)$.

   Dans quels cas la matrice A est-elle diagonalisable ? **Rép.** : *sissi* $\lambda_- \neq \lambda_+$ *donc* $4\tau^2\omega_0^2 \neq 1$.

3. On suppose ici que la matrice A est diagonalisable. **Rép.** : *La matrice de diagonalisation est* $V = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_-}{\omega_0^2} & \frac{\lambda_+}{\omega_0^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *donc* $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda_+}{\omega_0^2} \\ -1 & \frac{\lambda_-}{\omega_0^2} \end{pmatrix}$

   On veut déterminer l'évolution de l'oscillateur à partir de conditions initiales quelconques :
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad .$$
   Exprimer $x(t)$ et $v(t)$ en fonction de x_0, v_0 et des valeurs propres λ_1 et λ_2 de A. **Rép.** : $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \cdots$

4. Montrer que, lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe un vecteur ϕ_2 satisfaisant $A\phi_2 = \lambda\phi_2 + \phi_1$ avec λ l'unique valeur propre de A et ϕ_1 un vecteur propre de A. **Rép.** : $\omega_0 = 1/(2\tau)$, $\lambda = -\omega_0$, $\phi_1 = (-1/\omega_0, 1)$. *On cherche* $\phi_2 = (x, 1)$, *on trouve* $x = -(1+\omega_0)/\omega_0^2$.

   Montrer que les vecteurs ϕ_1 et ϕ_2 constituent une base de l'espace vectoriel des matrices 2×1. **Rép.** : $\det(\phi_1, \phi_2) = \omega_0^{-2}$, *vect. indép.*

   Déterminer alors l'évolution de l'oscillateur à partir de conditions initiales quelconques. **Rép.** : $A = V \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} V^{-1}$ *où* $V = \begin{pmatrix} -\omega_0^{-1} & -\omega_0^{-1} - \omega_0^{-2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\exp At = V \begin{pmatrix} e^{-\omega_0 t} & te^{-\omega_0 t} \\ 0 & e^{-\omega_0 t} \end{pmatrix} V^{-1}$, *et* $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \exp At \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$, $x(t) = e^{-\omega_0 t}(tv(0) + x(0)(1 + t\omega_0))$, $v(t) = e^{-\omega_0 t}(-tx(0)\omega_0^2 + v(0)(1 - t\omega_0))$.

IV. Oscillateurs mécaniques couplés

A) 1) Montrer que les oscillateurs couplés de la figure 1 vérifient un système d'équations de la forme :

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 \\ m\ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -kM \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où les composantes de la matrice M sont à déterminer (k est le coefficient d'élasticité, le même pour les ressorts R_1 et R_2). **Rép.** : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

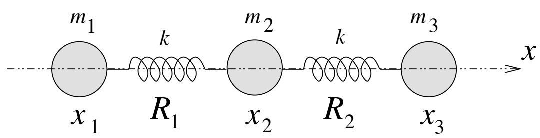

Figure 1: 2 ressorts couplés : on suppose que $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et que les ressorts R_1 et R_2 sont identiques, de coefficient d'élasticité k. On admet que les masses glissent sans friction le long de l'axe horizontal.

2) Vérifier que les valeurs propres de la matrice M ci-dessus sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Trouver les vecteurs propres de M. En utilisant ces résultats, interpréter les modes propres du système d'oscillateurs de la figure 1. **Rép.** : *Matrice de diagonalisation* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *modes propres* $Y = V^{-1}X$, $y_1 = (x_1 - 2x_2 + x_3)/6$, $y_2 = (-x_1 + x_3)/2$, $y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)/3$, *de fréquences propres resp.* $\sqrt{3}\omega$, ω *et* 0, *avec* $\omega^2 = k/m$. *Le mode de fréquence nulle est le mode de translation globale des 3 masses.*

B) Chaîne de 3 oscillateurs en boucle, de N oscillateurs

1. On considère une chaîne de 3 oscillateurs couplés : les masses oscillent et les ressorts glissent sans friction le long d'un fil circulaire. On note x_i, $i = 1, 2, 3$ l'écart à sa position d'équilibre de la i-ième masse.

– Écrire le système d'équations couplées **Rép.** : $m_i\ddot{x}_i + k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i+1})$

– Dans le cas où toutes les masses sont égales et les ressorts de même raideur, écrire la matrice de couplage A. **Rép.** : $\ddot{\vec{x}} + \frac{k}{m}A\vec{x} = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

– Montrer que $\det A = 0$. Écrire le polynôme caractéristique de A et en chercher les racines. **Rép.** : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$, $\lambda = 0$ *et* 3 *racine double.*

– Que sont les fréquences propres du système ? À quoi correspond la valeur propre nulle ? **Rép.** : $\omega = 0$ *et* $\sqrt{3k/m}$ *double ;* $\omega = 0$ *: mouvement de translation d'ensemble des 3 masses.*

– Calculer les modes propres en diagonalisant la matrice de couplage. **Rép.** : $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *et* *par exemple* $\vec{x}_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

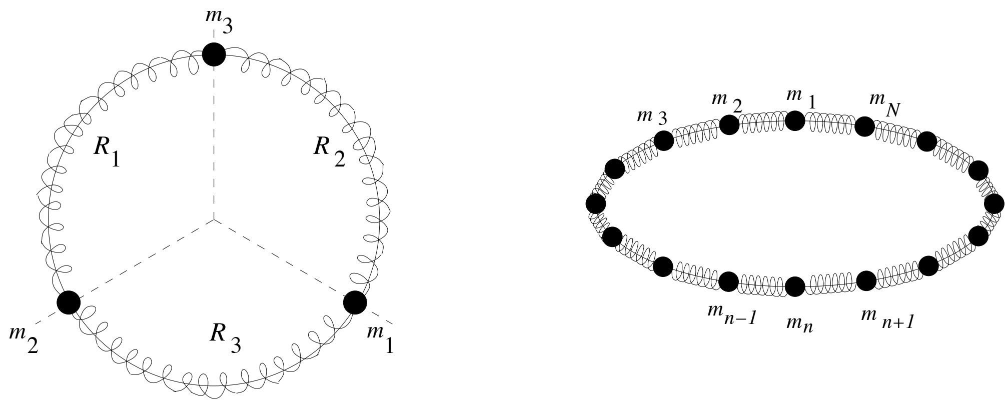

Figure 2: 3 ou N ressorts couplés

2. Généraliser au cas d'une chaîne de N masses et ressorts, voir figure 2.
–Écrire la matrice de couplage dans le cas symétrique (mêmes masses, mêmes raideurs) et montrer à nouveau qu'elle admet 0 comme valeur propre.

Rép. : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -1 & 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *; à nouveau, une v.p.=0 pour la même raison.*

– Pour trouver les autres valeurs propres et modes propres, chercher des solutions du système d'équations différentielles couplées sous la forme d'"ondes planes", $x_n^{(s)} = ae^{i(\omega_s t + k_s n)}$. Commenter la raison de ce choix de solutions. **Rép.** : *Ce choix prend bien en compte l'invariance par translation discrète* $n \mapsto n+1$.

– Quelles valeurs peut *a priori* prendre k_s ? Écrire la relation reliant ω_s et k_s. Quelle est la fréquence propre la plus élevée ? Est-elle simple ou "dégénérée" ? Pourquoi ? **Rép.** : $k_s = 2\pi s/N$, $s = 0, \cdots, N-1$ *pour assurer les conditions aux limites périodiques. Les équations différentielles se réduisent à* $-\omega_s^2 + \frac{k}{m}(2 - 2\cos k_s) = 0$, *soit* $\omega_s^2 = 4\frac{k}{m}\sin^2\frac{s\pi}{N}$. *On a* $\omega_{max} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ *si* N *pair,* $s = N/2$, *v.p. simple;* $\omega_{max} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\frac{\pi}{2N}$ *si* N *impair,* $s = (N \pm 1)/2$, *v.p. double, cf le cas* $N = 3$.

V. Oscillateurs électriques couplés

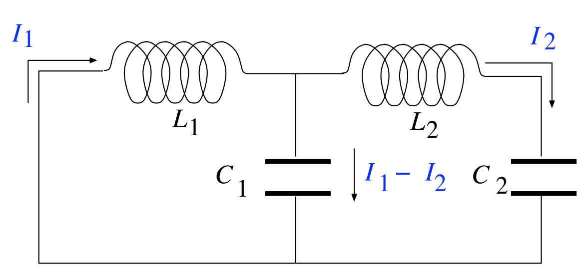

Figure 3: 2 oscillateurs électriques couplés

On rappelle que les tensions aux bornes et les courants traversant une bobine d'induction d'inductance L, resp. un condensateur de capacité C, satisfont

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} \qquad I_C = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}\ .$$

Pour le circuit de la figure 3, écrire les deux équations différentielles qui relient U_{C_1} et U_{C_2}. Montrer l'analogie avec les deux ressorts couplés étudiés plus haut.
Étudier les modes propres de ce circuit, en prenant $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1} = 1,\ \omega_2 = 1/\sqrt{L_2C_2} = 2$.

Rép. : *Dans le circuit de la figure 3, on a*

$$\begin{aligned} U_{L_1} + U_{C_1} &= 0 \\ U_{L_2} + U_{C_2} - U_{C_1} &= 0 \end{aligned}$$

et après élimination des I_i *et des* U_{L_i}*, on trouve le système d'équations couplées pour les* $U_i \equiv U_{C_i}$

$$\begin{aligned} L_1\left(C_1\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}t^2} + C_2\frac{\mathrm{d}^2U_2}{\mathrm{d}t^2}\right) + U_1 &= 0 \\ L_2C_2\frac{\mathrm{d}^2U_2}{\mathrm{d}t^2} + U_2 - U_1 &= 0 \end{aligned}$$

Si $L_1 = L_2$ *on peut reporter la seconde dans la première et obtenir*

$$\begin{aligned} L_1C_1\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}t^2} + 2U_1 - U_2 &= 0 \\ L_2C_2\frac{\mathrm{d}^2U_2}{\mathrm{d}t^2} + U_2 - U_1 &= 0 \end{aligned}$$

soit encore $\ddot{U}_1 + \omega_1^2(2U_1 - U_2) = 0,\ \ddot{U}_2 + \omega_2^2(U_2 - U_1) = 0$. *Forme matricielle* $\ddot{U} + MU = 0$, *avec* $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2\omega_1^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$. *Pour* $\omega = 1,\ \omega = 2$, *val. pr.* $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5},\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$, *matrice de diag.* $V = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{5})/4 & (1+\sqrt{5})/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}$. *Les modes propres sont (cf cours)* $\tilde{U} = V^{-1}U$, *soit* $\tilde{U}_1 = \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)U_2 - \frac{2U_1}{\sqrt{5}}$ *et* $\tilde{U}_2 = \frac{2U_1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)U_2$ *de fréquences propres respectives* $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$.

Mention Physique - L2 - Année 2011-2012
Licence de Sciences et Technologies

LP 207: Mathématiques pour physiciens 2

TD N°5 : Formes quadratiques. Matrices symétriques

I. Formes quadratiques

A) Les formes quadratiques suivantes sont-elles définies, semi-définies, ou indéfinies ? (On cherchera soit à discuter le signe directement, soit à écrire Q_3 et Q_4 comme somme de carrés avec des coefficients à déterminer.)

1. $Q_1 = x^2 - 2xy + 2xz$
2. $Q_2 = xy + yz + zx$
3. $Q_3 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$
4. $Q_4 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4zx$

Rép. : $Q_1(x,0,0) > 0,\ Q_1(x,x,0) < 0$ *indéfinie (ou encore* $Q_1 = (x-y+z)^2 - (y-z)^2)$ *;* $Q_2(x,x,0) > 0,\ Q_2(x,-x) < 0$ *indéfinie ;* $Q_3 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$*, définie positive ;* $Q_4 = (x-2z)^2 + 3y^2$ *semi-définie positive puisque* $Q_4 \geq 0$ *mais* $Q_4(2z,0,z) = 0$

B) Soit la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \qquad (1)$$

a) Ecrire la forme bilinéaire associée et sa matrice B. **Rép.** : *Forme bilinéaire associée* $f(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{2}(Q(\vec{x}+\vec{x}') - Q(\vec{x}) - Q(\vec{x}')) = xx' + yy' + zz' - (yz' + zy') - (zx' + xz') - (xy' + yx')$*, d'où* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Ecrire l'expression de la forme dans la base $(1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1)$. **Rép.** : *Soit* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice de changement de base,* $X = VX'$ *les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.* $Q = X^TBX = X'^TV^TBVX' = X'^TB'X'$ *donc* $B' = V^TBV = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

II. Orthogonalisation de Schmidt

À partir de chaque système de vecteurs X_i suivants de $\mathbb{R}^3$, construire un système de vecteurs V_i orthonormés pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

a) $X_1 = (1,0,0)\,;\ X_2 = (1,1,0)\,;\ X_3 = (1,1,1)$

b) $X_1 = (1, 1, 1)$; $X_2 = (-1, 1, 1)$; $X_3 = (1, -1, 1)$

Rép. : *a) On prend* $V_1 = X_1$*, puis* $V_2 \propto (\alpha V_1 + X_2)$ *orthogonal à* V_1*, donc* $\alpha + 1 = 0$*,* $\alpha = -1$*, et* $V_2 = (0, 1, 0)$ *est bien normalisé. De même* $V_3 = X_3 - V_1 - V_2 = (0, 0, 1)$*.*

b) On norme X_1 *donc* $V_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *; puis on cherche* α *tel que* $\alpha V_1 + X_2$ *soit orthogonal à* V_1 *:* $\alpha = -V_1.X_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$*, et on norme ce vecteur en* $V_2 = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ *; puis on cherche* β *et* γ *tels que* $\beta V_1 + \gamma V_2 + X_3$ *soit orthogonal à* V_1 *et* V_2*, soit* $\beta = -V_1.X_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$*,* $\gamma = -X_3.V_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ *et on norme le vecteur en* $V_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$*.*

III. Matrices symétriques. Diagonalisation

A) 1. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Sont-elles *simultanément* diagonalisables ?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rép. : *1) Les matrices* A *et* B*, symétriques, sont diagonalisables, mais ne commutent pas et ne sont donc pas simultanément diagonalisables.*
2) C *et* D *symétriques et commutantes, donc simultanément diagonalisables par un changement de base de matrice orthogonale* $V_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $V_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $V_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$*.*

2. Démontrer que le déterminant de toute matrice orthogonale vaut ± 1.
Pour des matrices orthogonales 3×3, quelles transformations géométriques de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ les matrices de déterminant 1 décrivent-elles ? celles de déterminant -1 ? **Rép.** : *En prenant le déterminant de la relation* $OO^T = I$*, on obtient* $\det O \det O^T = (\det O)^2 = 1$*. Dans* $\mathbb{R}^3$*, déterminant* $+1$ *: rotations, déterminant* -1 *: produit d'une rotation par une réflexion dans un plan ou par l'"inversion", symétrie par rapport à l'origine.*

B) Forme réduite
Pour chacune des formes quadratiques de l'exercice A, diagonaliser la matrice de la forme dans une base orthonormée et en déduire sa *forme réduite* comme somme de carrés avec des coefficients à déterminer.

Rép. : $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_1 \,\mathrm{diag}\,(2, -1, 0)\, O_1^T$, $O_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$*, d'où* $Q_1 = \frac{1}{3}(2x - y + z)^2 - \frac{1}{3}(x + y - z)^2$

$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \,\mathrm{diag}\,(2, -1, -1)\, O_2^T$ $O_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$*, d'où* $Q_2 = \frac{2}{3}(x + y + z)^2 - \frac{1}{2}(x - z)^2 - \frac{1}{6}(x - 2y + z)^2$;

$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = O_3 \,\mathrm{diag}\,(4, 1, 1)\, O_3^T$, $O_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}; \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $Q_3 = \frac{4}{3}(x+y+z)^2 + \frac{1}{2}(x-z)^2 +$

$\frac{1}{6}(x-2y+z)^2$;
$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = O_4 \,\mathrm{diag}\,(5,3,0)\, O_4^T$, $O_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, *d'où* $Q_4 = (x-2z)^2 + 3y^2$.

IV. Application physique. Oscillations au voisinage d'un minimum de potentiel

Un point matériel de coordonnées (x,y) est soumis à un potentiel $V(x,y) = \frac{x^4}{4} + 2x^3y + 6x^2y^2 + 8xy^3 - xy + 4y^4 - \frac{3y^2}{2}$.

1. Trouver les positions (x_0,y_0) des extrema du potentiel. **Rép.** : *Les extrema, solutions du système* $\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0} = \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0} = 0$, *sont au nombre de trois :* $(x_0,y_0) = (0,0)$, $(\pm 1, \mp 1)$.

2. Pour décider si ces extrema correspondent ou non à des positions d'équilibre stable, on effectue un développement au second ordre de V au voisinage de chaque (x_0,y_0).
Les termes d'ordre 1 sont nuls, pourquoi ?
Rép. : *à cause des équations de stationnarité du 1.*
Les termes d'ordre 2 forment une forme quadratique en $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$. Écrire cette forme quadratique Q pour chacun des (x_0,y_0). **Rép.** : *En général, on écrit*

$$V(x,y) = V(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{x_0,y_0} + \xi\eta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\Big|_{x_0,y_0} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Big|_{x_0,y_0} + \cdots$$

Pour $(x_0,y_0) = (0,0)$, $V = -\xi\eta - \frac{3}{2}\eta^2$, *et pour* $(x_0,y_0) = (1,-1)$ *ou* $(-1,1)$, $V = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\xi^2 + 5\xi\eta + \frac{9}{2}\eta^2$.

3. Une forme définie positive correspond-elle
– à un minimum ou un maximum local du potentiel ?
– à une position d'équilibre stable ou instable ?
Rép. : *Une forme définie positive correspond à un minimum (local) du potentiel, donc à une position d'équilibre stable.*
Qu'en est-il d'une forme définie négative ? indéfinie ?
Rép. : *Une forme définie négative correspond à un maximum (local) du potentiel, donc à une position d'équilibre instable. Une forme indéfinie correspond également à une position d'équilibre instable (instabilité dans la direction du vecteur propre de valeur propre négative.)*
Discuter le cas de chacun des (x_0,y_0) du potentiel précédent et conclure. **Rép.** : *Pour* $(x_0,y_0) = (0,0)$, *les valeurs propres de la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ *sont* $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13})$ *de signes opposés, forme indéfinie, position instable. Pour* $(x_0,y_0) = \pm(1,-1)$, *les valeurs propres de la matrice* $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ *sont* $6 \pm \sqrt{34}$, *toutes deux* > 0, *forme définie positive, position d'équilibre stable.*

4. Montrer que l'on retrouve facilement ce résultat si on effectue le changement de variables $u = x + 2y$, $v = x + y$. **Rép.** : *Le changement de variables donne* $V(u,v) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}v^2$, *avec des extrema en* $(0,0)$ *et* $(\pm 1, 0)$, *cf la figure sur laquelle on voit bien que* $(0,0)$ *est instable (col entre les deux vallées) et* $(\pm 1, 0)$ *stable (creux au fond de la vallée).*

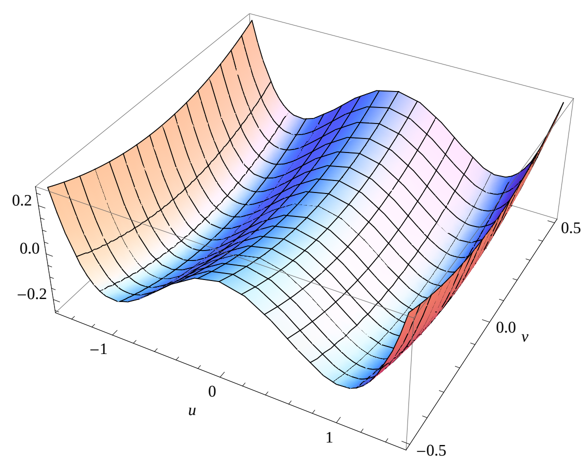

Figure 1: Potentiel en double vallée