

# Chapitre 6

## Symétries en Mécanique Quantique

### 6.1 Théorème de Wigner

#### 6.1.1 Théorème de Wigner.

Dans un système quantique, les états (purs) sont représentés par les vecteurs  $|\psi\rangle$  normalisés d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , ou plus précisément par ces vecteurs à une phase près,  $|\psi\rangle \sim |\psi\rangle e^{i\alpha}$ , ce qu'on appelle les *rayons*. Les "observables"  $A$  sont des opérateurs auto-adjoints sur  $\mathcal{H}$ ,  $A = A^\dagger$ . Les quantités observables sont les  $|\langle \phi|A|\psi\rangle|$ . Supposons qu'il existe une transformation inversible (une "bijection")  $g$  du système (états *et* observables) qui laissent inchangées ces quantités, c'est-à-dire

$$|\phi\rangle \rightarrow |{}^g\phi\rangle, |\psi\rangle \rightarrow |{}^g\psi\rangle, \quad A \rightarrow {}^gA \quad \text{telle que} \quad |\langle \phi|A|\psi\rangle| = |\langle {}^g\phi|{}^gA|{}^g\psi\rangle|.$$

On démontre alors le théorème suivant

**Théorème de Wigner** *Si une bijection entre les rayons et les opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  préserve les modules des produits scalaires*

$$|\langle \phi|A|\psi\rangle| = |\langle {}^g\phi|{}^gA|{}^g\psi\rangle|, \quad (6.1)$$

*alors cette bijection est réalisée par un opérateur  $U(g)$ , linéaire ou antilinéaire, unitaire sur  $\mathcal{H}$ , et unique à une phase près, c'est-à-dire*

$$|{}^g\psi\rangle = U(g)|\phi\rangle, \quad {}^gA = U(g)AU^\dagger(g); \quad U(g)U^\dagger(g) = U(g)^\dagger U(g) = I. \quad (6.2)$$

Rappelons d'abord ce qu'on entend par opérateur antilinéaire. Un tel opérateur satisfait

$$U(\lambda|\phi\rangle + \mu|\psi\rangle) = \lambda^*U|\phi\rangle + \mu^*U|\psi\rangle \quad (6.3)$$

et son adjoint est défini par

$$\langle \phi|U^\dagger|\psi\rangle = \langle U\phi|\psi\rangle^* = \langle \psi|U\phi\rangle, \quad (6.4)$$

de façon à être compatible avec la linéarité :

$$\langle \lambda\phi|U^\dagger|\psi\rangle = \lambda^*\langle \phi|U^\dagger|\psi\rangle. \quad (6.5)$$

S'il est en outre unitaire, on a

$$\langle \psi|\phi\rangle^* = \langle \phi|\psi\rangle = \langle \phi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle U\phi|U\psi\rangle^*, \quad (6.6)$$

donc  $\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$ .

Nous admettrons ce théorème de Wigner, dont la preuve est un peu laborieuse : voir par exemple [11] tome 2, p. 540.

Une fois déterminée la transformation des états par l'opérateur  $U(g)$ , on connaît celle des observables  ${}^gA = U(g)AU^\dagger(g)$  de façon à avoir

$$\begin{aligned}\langle {}^g\phi|{}^gA|{}^g\psi\rangle &= \langle U\phi|UAU^\dagger|U\psi\rangle \\ &= \langle\phi|U^\daggerUAU^\dagger U|\psi\rangle^\# \\ &= \langle\phi|A|\psi\rangle^\#\end{aligned}\tag{6.7}$$

avec  $\# =$  rien ou  $*$  selon que  $U$  est linéaire ou antilinéaire.

Le cas antilinéaire n'a pas qu'un intérêt académique. Il se rencontre dans l'étude du renversement du sens du temps, voir plus bas, § 6.2.3.

Les transformations d'un système quantique, c'est-à-dire les bijections du théorème de Wigner, forment un groupe  $G$  : si  $g_1$  et  $g_2$  sont de telles bijections, leur composition  $g_1g_2$  en est une aussi, ainsi que  $g_1^{-1}$  etc. Cette transformation  $g_1g_2$  est réalisée sur les états soit par  $U(g_1)U(g_2)$  soit par  $U(g_1g_2)$  et le théorème de Wigner nous dit que ces deux expressions doivent coïncider à une phase près. Les opérateurs  $U(g)$  qu'on va supposer linéaires jusqu'à nouvel ordre satisfont donc

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\zeta(g_1,g_2)}U(g_1g_2)\tag{6.8}$$

et forment ce qu'on appelle une *représentation à une phase près* de  $G$ .

La mécanique quantique nous force donc à élargir un peu le cadre de la théorie des représentations. Le problème n'est pas académique, on montre par exemple que les représentations à une phase près du groupe des rotations  $SO(3)$  se ramènent à des représentations à un signe près : on a d'une part les vraies représentations, avec des représentations irréductibles décrites par un spin  $j$  entier ; et de l'autre les représentations irréductibles à un signe près de spin demi-entier. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

## 6.1.2 Invariance d'un système quantique

Supposons maintenant que sous l'action d'un certain groupe de transformations  $G$ , le système est invariant, en ce sens que sa dynamique, contrôlée par son hamiltonien  $H$ , est inchangée. Supposons aussi pour simplifier que  $H$  est indépendant du temps. On va écrire

$$H = U(g)HU^\dagger(g)\tag{6.9}$$

ou encore

$$[H, U(g)] = 0.\tag{6.10}$$

On définit donc une *invariance* (ou *symétrie*) d'un système quantique sous l'action d'un groupe  $G$  comme l'existence d'une représentation projective unitaire (linéaire ou antilinéaire) de ce groupe dans l'espace des états, qui commute avec l'hamiltonien.

On sait aussi que l'hamiltonien  $H$  est le générateur infinitésimal de l'évolution temporelle. Si à l'instant  $t = 0$  le système est dans un état (pur) décrit par le vecteur  $|\psi_0\rangle$ , il est décrit à tout instant  $t$  par  $|\psi(t)\rangle$  solution de  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$  avec la condition initiale  $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$ , donc, avec l'hypothèse faite que  $H$  ne dépend pas du temps,  $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|\psi_0\rangle$ . L'évolution temporelle des états est donc fournie par l'opérateur unitaire

$$\mathcal{U}(t) = \exp\frac{-i}{\hbar}Ht,\tag{6.11}$$

et l'hypothèse d'invariance (6.10) peut se redire sous la forme

$$[\mathcal{U}(t), U(g)] = 0 . \quad (6.12)$$

L'évolution temporelle commute avec l'action du groupe d'invariance.

- Ce formalisme est très général et couvre des situations très variées : les transformations laissant le système invariant peuvent être de natures très différentes, transformations géométriques –translations, rotations, réflexions, inversion, dilatation, etc–, permutations de composantes du système, “symétries internes” ou de jauge, ...

- L'hypothèse d'invariance implique l'existence de lois de conservation. En effet toute observable  $\mathcal{F}$  fonction des  $U(g)$  commute avec  $H$ , donc est une quantité conservée

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{F}(U(g))}{\partial t} = [\mathcal{F}(U(g)), H] = 0 \quad (6.13)$$

et chacune de ses valeurs propres est un “bon nombre quantique” : si le système appartient à un sous-espace propre de  $\mathcal{F}$  au temps  $t = 0$ , il y demeure lors de son évolution dans le temps. Si  $G$  est un groupe de Lie, pour  $g$  une transformation infinitésimale et si  $T$  désignent les générateurs infinitésimaux dans la représentation considérée,

$$U(g) = I + i \delta \alpha^j T_j$$

(où on choisit les  $T$  auto-adjoints pour avoir  $U$  unitaire), les  $T_j$  sont des observables commutant avec  $H$ , donc des quantités conservées.

**Exemples.** Groupe des translations d'espace ou de temps  $\longrightarrow \vec{P}$ ,  $H$  impulsion et énergie ;

groupe des rotations  $\longrightarrow \vec{J}$  moment cinétique.

sous-groupe des rotations  $\text{SO}(2)$  autour de l'axe  $Oz$   $\longrightarrow$  composante  $J_z$  de  $\vec{J}$ .

Un autre exemple sur lequel nous revenons plus bas concerne l'inversion d'espace et la parité. Considérons l'opération  $P$  d'inversion d'espace,  $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$ . Dans l'espace de Hilbert d'une théorie quantique, elle est représentée par un certain opérateur unitaire  $U(P)$ . Comme  $U(P)^2 = I$ , les valeurs propres de  $U(P)$  sont  $\pm 1$ , et ses vecteurs propres, qui engendrent des représentations de dimension 1, sont indexés par cette valeur propre nommée *parité*. Si l'hamiltonien est invariant par  $P$ , c'est-à-dire commute avec  $U(P)$ , on peut diagonaliser simultanément  $H$  et  $U(P)$ , c'est-à-dire trouver des états stationnaires (états propres de  $H$ ) de parité donnée. Les états propres d'énergie ont donc une parité fixée. Autre manifestation de cette commutation, si le système a été préparé à l'instant  $t = 0$  dans un état de parité donnée, l'évolution temporelle le fera rester dans cette parité. C'est en ce sens que la parité est une quantité conservée, ou “un bon nombre quantique”. Par abus de langage, on donne aussi parfois le nom de parité à la transformation  $P$ .

- Mais l'hypothèse d'invariance (6.10) faite plus haute a une autre conséquence, d'application fréquente et importante. L'espace des états  $\mathcal{H}$  qui “porte une représentation” du groupe  $G$  est décomposé en représentations irréductibles. Si ces représentations  $D^{(\rho)}$  sont supposées de multiplicité 1, dans chaque espace  $E^{(\rho)}$ , l'Hamiltonien est multiple de l'identité en vertu du Corollaire 1 du lemme de Schur, cf §5.1.5. On a donc dans ce cas une information complète sur la nature du spectre : les espaces propres sont les  $E^{(\rho)}$  et les multiplicités des valeurs propres de  $H$  sont égales à  $\dim E^{(\rho)}$ <sup>1</sup>. Si certaines représentations  $D^{(\rho)}$  apparaissent avec une multiplicité  $m_\rho$  supérieure à 1, le lemme de Schur n'interdit pas que  $H$  ait des éléments de matrice entre

---

1. Il peut arriver que la multiplicité d'une valeur propre de  $H$  soit plus élevée, soit à cause de l'existence d'un groupe de symétrie plus grand que  $G$ , soit parce que certaines représentations viennent en paires complexes conjuguées, soit pour une autre raison et on parle alors de “dégénérescence accidentelle”, cf la note 5 du chap. 5.

les espaces  $E^{(\rho,i)}$ ,  $i = 1, \dots, m_\rho$ ; il faut encore diagonaliser  $H$  dans la somme de ces espaces  $\bigoplus_{i=1}^{m_\rho} E^{(\rho,i)}$ , ce qui est tout de même plus simple que le problème de diagonalisation dans l'espace  $\mathcal{H}$  de départ. On verra plus bas que le théorème de Wigner-Eckart permet de réduire encore la complexité de ce dernier calcul. La théorie des groupes va donc nous simplifier considérablement la tâche...

Exemple ([12], p 37). Considérons le problème d'un électron placé dans le champ de trois protons fixés aux trois sommets d'un triangle équilatéral. Le problème admet la symétrie du groupe (de rotations et réflexions) du triangle : il s'agit d'un groupe d'ordre 6, qui a trois représentations inéquivalentes de dimensions 1, 1 et 2 (on a bien  $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$ ), cf discussion au § 5.5.1. Sur la seule base de la théorie des groupes, nous apprenons immédiatement et sans aucun calcul que le spectre d'énergie de l'électron est constitué de niveaux de multiplicité 1 ou 2.

- Levées de dégénérescence. Règles de sélection.

Considérons un système invariant par l'action d'un groupe  $G$ . Ses niveaux d'énergie ont été classés selon les représentations irréductibles de  $G$ . Supposons maintenant qu'une perturbation  $H'$  soit ajoutée à l'hamiltonien, qui a pour effet de briser le groupe  $G$  en un sous-groupe  $G'$ . Quelles levées de dégénérescence, quelles transitions entre états sont rendues possibles par l'introduction de  $H'$  ?

Si le groupe d'invariance est réduit de  $G$  à  $G'$ , les niveaux d'énergie se classent maintenant en représentations irréductibles de  $G'$ , et la première question revient à : comment une représentation irréductible de  $G$  se scinde-t-elle en représentations de  $G'$  ? Pour cette question aussi, les techniques utilisant les caractères que nous avons introduites au chapitre précédent (§ 5.4) s'avèrent utiles.

Un exemple d'intérêt physique est celui où  $G$  est le groupe  $O(3)$  et  $G'$  le groupe ponctuel d'un cristal et où on étudie la levée de dégénérescence (partielle) des niveaux d'énergie d'un atome placé dans un cristal. On appelle *champ cristallin* ce mécanisme. Voir le problème en fin de chapitre 7, §7.6.2. Ou encore, le groupe de symétrie initial  $O(3)$  peut être brisé par l'introduction d'un champ électrique  $\vec{E}$  à symétrie cylindrique, qui va laisser le sous-groupe d'invariance  $C_{\infty v}$ , cf § 2.3.3.

## 6.2 Symétries discrètes en physique quantique : parité, renversement du temps, ...

### 6.2.1 Transformation d'un état quantique sous l'effet de la parité

Intéressons nous d'abord à la transformation d'un état quantique sous l'effet de l'inversion/parité,  $P : \vec{x} \mapsto -\vec{x}$ . Selon le théorème de Wigner, cette transformation est réalisée par un opérateur unitaire  $U(P)$ . Comme la parité est "involutive" (c'est-à-dire de carré égal à la transformation identité), le groupe qu'elle engendre est le groupe  $\mathbb{Z}_2$  (cf chap. 1, §1.2). Ses représentations irréductibles sont de dimension 1 par le lemme de Schur. On s'attend à ce que dans une représentation irréductible  $U(P) = \eta_P$ , avec  $\eta_P = 1$  ou  $= -1$ <sup>2</sup>.

Pour un état à une particule  $|\phi\rangle$  de parité donnée, on écrit

$$|\phi'\rangle = U(P)|\phi\rangle = \eta_P|\phi\rangle \quad (6.14)$$

et sa fonction d'onde

$$\phi(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\phi\rangle = \langle \vec{x}|U^\dagger(P)U(P)|\phi\rangle = \langle -x|\phi'\rangle = \phi'(-\vec{x}) = \eta_P\phi(-\vec{x}), \quad (6.15)$$

2. La possibilité d'avoir des représentations à une phase près élargit les possibilités à des représentations dans lesquelles  $U(P) = e^{i\alpha}$ , mais nous ne considérerons pas cette possibilité ici.

est une fonction paire ou impaire, selon le signe de la *parité intrinsèque*  $\eta_P$  de la particule considérée. Cette parité intrinsèque a un certain arbitraire et peut parfois être redéfinie, voir des exemples ci-dessous.

L'opérateur  $U(P)$  ne commute pas avec l'opérateur impulsion (mais anticommute !) : on ne peut trouver de vecteur propre commun à  $U(P)$  et à  $\vec{p}$ . Agissant sur un état d'impulsion  $\vec{p}$  et de spin  $s_z$  fixés,  $U(P)$  renverse le sens de  $\vec{p}$  mais n'affecte pas  $s_z$  (rappelons que classiquement, le moment cinétique est un *pseudo*-vecteur : il est invariant par inversion/parité). On écrit donc pour la transformation d'un état à une particule d'impulsion  $\vec{p}$  et de spin  $s_z$  donnés

$$U(P)|\vec{p}, s_z\rangle = \eta_P |-\vec{p}, s_z\rangle. \quad (6.16)$$

## Molécule diatomique

D'autres symétries  $\mathbb{Z}_2$  que la parité peuvent être à l'œuvre : considérons ainsi les symétries d'une molécule diatomique. Soit  $Oz$  l'axe de symétrie de la molécule. Le groupe d'invariance est  $C_{\infty v}$ , cf. Chap. 1 et 2. L'invariance par rotation autour de  $Oz$  implique que la composante  $\Lambda = |L_z|$  du moment angulaire est conservée et on note  $\Sigma, \Pi, \Delta$  etc les états correspondant à  $\Lambda = 0, 1, 2, \dots$ . En ce qui concerne l'invariance par réflexion dans tout plan passant par  $\Delta$ , on peut distinguer les états pairs ou impairs dans cette réflexion : cela est noté par un indice supérieur  $\pm$ ; enfin si les deux atomes de la molécule sont identiques, le groupe est  $D_{\infty h}$  et on peut distinguer les états pairs ( $g$ ) ou impairs ( $u$ ) dans l'inversion des coordonnées électroniques. Un état sera finalement noté  $^{2S+1}\Pi_u^+, \Sigma_g^+$  etc. Empiriquement le fondamental de la molécule a la symétrie maximale, c'est un état  $^1\Sigma^+$  ou  $^1\Sigma_g^+$ . Voir [9, 12].

## Règles de sélection relatives à la parité

La conservation de la parité a d'importantes conséquences par exemple en physique atomique, sur les transitions possibles ou interdites entre niveaux, sous l'effet d'un rayonnement électromagnétique, en physique nucléaire, ou en physique des particules, sur les désintégrations possibles, etc. Illustrons cela par quelques exemples en anticipant un peu sur la discussion du chapitre suivant sur le rôle des rotations en physique quantique.

*Règles de sélection en physique atomique. Transitions dipolaires.*

Le moment dipolaire électrique  $\vec{d}$  d'une distribution de charges est défini classiquement par  $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ . C'est un vecteur, donc impair par parité. En mécanique quantique, ce moment dipolaire est promu au statut d'opérateur et il garde son caractère vectoriel,  $U(P)\vec{d}U^\dagger(P) = -\vec{d}$ , avec les règles de sélection qui en découlent. Ainsi, si on évalue sa valeur moyenne entre deux états de parité fixée,  $\langle \psi | \vec{d} | \phi \rangle$  est non nulle seulement si les parités des deux états sont opposées. En effet on écrit

$$\langle \psi | \vec{d} | \phi \rangle = \langle \psi U^\dagger(P) | (U(P)\vec{d}U^\dagger(P)) | U(P)\phi \rangle = -\eta_\psi \eta_\phi \langle \psi | \vec{d} | \phi \rangle \quad (6.17)$$

qui est donc nul si les parités  $\eta_\psi$  et  $\eta_\phi$  des deux états sont identiques. Cela est important quand on étudie l'effet du couplage d'un système de charges à un champ électrique : ce couplage est représenté par un terme  $\vec{d} \cdot \vec{E}$  dans l'hamiltonien. Au premier ordre de la théorie des perturbations, l'amplitude de transition entre deux états est donnée par  $\langle \psi | \vec{d} | \phi \rangle$  et s'annule donc (à cet ordre) pour des états de même parité.

Quand le moment dipolaire s'annule, en raison des symétries de la distribution de charges, ou a une contribution nulle, comme on vient de le voir, on est amené à considérer les *moments multipolaires* d'ordre plus élevé, moment quadrupolaire, etc. Nous y reviendrons au chapitre 7, § 7.5.1.

*Effets Stark et Zeeman*

Effet de la symétrie miroir ou de l'inversion d'espace sur un champ électrique, un champ magnétique, cf chap. 2. Levée de dégénérescence des niveaux. Voir le cours de mécanique quantique.

*Parité des noyaux*

La parité d'un état de moment orbital  $l$  est  $(-1)^l$  comme on sait (et comme on verra au chapitre suivant). Ainsi le deutéron (noyau de deutérium) qui est essentiellement dans l'état  $^3S_1$  (c'est-à-dire  $l = 0$ , spin 1)<sup>3</sup> a une parité +1. En général on peut assigner un spin et une parité donnés à tout noyau. Pour déterminer la parité, on fait appel soit à l'expérience soit à un modèle théorique comme le *modèle en couches* qui attache un moment

3. La notation classique en spectroscopie est  $^{2S+1}L_J$ .

angulaire  $l_i$  bien défini à chaque nucléon. La parité est alors  $(-1)^{\sum_i l_i}$  (par convention, la parité intrinsèque d'un nucléon, proton ou neutron, est +1). Voir une illustration plus bas avec le noyau  $\text{Li}^7$ .

#### Noyaux déformés ellipsoïdaux

Les noyaux peuvent avoir une forme sphérique, auquel cas le spectre est invariant par rotation, les niveaux d'énergie sont indépendants du moment cinétique et on n'observe pas de "spectre de rotation". C'est le cas des noyaux "légers" (jusqu'à  $A \approx 150$ ), mais aussi des noyaux "magiques" possédant des nombres de protons ou de neutrons égaux à 2, 8, 20, 28, 50, 82, et 126, comme le prédit le modèle en couches. Un noyau comme le plomb  $^{208}\text{Pb}$  qui a  $Z = 82$  (et donc  $N = 126$  neutrons) est dit "doublement magique", ce qui explique sa stabilité et sa sphéricité en dépit de sa masse élevée. Les noyaux lourds (actinides...) sont en général déformés, la situation la plus simple étant celle d'un ellipsoïde de révolution, soit allongé en forme de cigare, soit aplati en galette. C'est ce qui se produit pour les noyaux "pair-pair" comme  $^{238}\text{U}$ , qui a  $Z = 92$ . Dans ce cas, on conserve une invariance de rotation autour de l'axe de révolution, et on s'attend dans une image classique à observer un spectre de rotation avec des énergies de la forme  $\tilde{L}^2/2I$  où  $I$  est le moment d'inertie autour d'un axe orthogonal à l'axe de symétrie. Quantiquement cela devient  $\hbar^2 l(l+1)/2I$  et l'état de moment angulaire  $l$  est dégéré  $2l+1$  fois. La forme ellipsoïdale supposée est compatible avec une symétrie par inversion, donc avec la conservation de la parité  $(-1)^l$ . On s'attendrait donc à observer au dessus de l'état fondamental  $0^+$  une suite d'états  $1^-, 2^+, 3^-, \dots$ . On observe bien expérimentalement des énergies de transition  $E_{l+2} - E_l \propto 2l+3$  compatibles avec ce modèle et avec la conservation de la parité, mais pour les seules valeurs de  $l$  pair. On montre en effet que seuls subsistent les états à  $l$  pair, donc la suite d'états pairs  $0^+, 2^+, 4^+, \dots$ . Voir [14] chap. VII.

#### Réactions $\text{Li}^7 + p$ .

Dans la réaction  $\text{Li}^7 + p \rightarrow \text{Be}^8 + \gamma$ , on observe un pic dans la section efficace quand le proton a une énergie de 0,44 MeV : on parle de *résonance* et cela correspond à la formation d'un état excité  $\text{Be}^{8*}$  qui se désintègre ensuite en  $\text{Be}^8 + \gamma$ . Cette résonance ne se manifeste pas dans la réaction  $\text{Li}^7 + p \rightarrow \alpha + \alpha$ . En effet la parité de l'état final est +1, puisqu'elle s'identifie à l'échange des deux particules  $\alpha$ , qui sont des bosons. Mais dans l'état initial, le noyau  $\text{Li}^7$  avec 4 nucléons sur la couche  $l = 0$  et 3 sur la couche  $l = 1$  a une parité  $(-1)^{\sum_i l_i} = -1$ . La réaction de production du  $\text{Be}^{8*}$  a lieu à basse énergie, dans l'onde s, donc la parité de l'état  $\text{Be}^{8*}$  est -1. Cela interdit à la réaction  $\text{Li}^7 + p \rightarrow \text{Be}^{8*} \rightarrow \alpha + \alpha$  de se produire.

#### Mésons pseudoscalaires.

Le pion  $\pi$  est un "méson pseudoscalaire" venant en trois états de charge possibles  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ; méson signifie particule de masse intermédiaire (ici  $M_\pi c^2 \approx 140 \text{ MeV}$ )<sup>4</sup> par opposition aux "baryons", particules lourdes comme le proton ou le neutron ( $M c^2 \approx 1 \text{ GeV}$ ); "pseudoscalaire" signifie qu'il a un spin nul, mais une parité intrinsèque  $\eta_\pi = -1$ . Pour se convaincre de ce dernier fait, on étudie la réaction suivante, voir TD 6

$$\pi^- d \rightarrow n n .$$

Dans les tables du "Particle Data Group" qui collectent toutes les propriétés des particules connues, chaque particule sujette à l'interaction forte vient avec (entre autres) l'indication  $J^P$  qui donne son spin et sa parité.

Bien d'autres exemples pourraient être donnés du rôle de la parité en physique.

## 6.2.2 Brisure de la symétrie de parité en physique des particules

Dans les années 50, des expériences déconcertantes avec d'autres mésons pseudoscalaires, appelés mésons K ( $M_K \approx 495 \text{ MeV}/c^2$ ), ont conduit T.D. Lee et C.N. Yang à remettre en cause le principe de conservation de la parité. Si la parité est bien conservée par les interactions nucléaires, responsables de la cohésion des noyaux et des interactions entre "hadrons"<sup>5</sup>, elle ne l'est pas dans les interactions faibles comme dans la désintégration  $\beta$

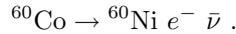
$$n \rightarrow p + e^- + \nu .$$

L'expérience paradoxale de 1956 portait sur deux types de désintégrations des mésons K, soit en 2 pions, soit en 3 pions. Compte tenu de la parité -1 du pion, voir ci-dessus, on semblait obtenir alors deux valeurs opposées pour la parité du K!

4. On rappelle que l'électron-volt, eV, est l'unité d'énergie égale à  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Joule, 1 MeV =  $10^6$  eV, 1 GeV =  $10^9$  eV, 1 TeV (tera-eV) =  $10^{12}$  eV, l'énergie des collisions au LHC du CERN dépasse maintenant les 2 TeV...

5. Par définition, les hadrons sont les particules sensibles aux interactions fortes. Les baryons (proton et neutron) et leurs résonances, les mésons sont des hadrons. Les électrons, neutrinos et autres "leptons" ne le sont pas.

Lee et Yang ont alors fait l'hypothèse que l'interaction faible n'est pas invariante par l'inversion d'espace, et la parité n'est donc pas un bon nombre quantique dans ces interactions. Cette hypothèse considérée comme révolutionnaire à l'époque (la Nature distingue la gauche de la droite !) a été rapidement vérifiée par l'expérience historique de Mme Wu (1957) sur la désintégration  $\beta$  d'un noyau de Co



En utilisant des noyaux de Co polarisés (par un champ magnétique intense, puis maintenus à très basse température pour éviter la dépolarisation par agitation thermique) et en observant l'asymétrie "avant-arrière" de l'électron émis par rapport au plan orthogonal à la polarisation, on vérifie l'hypothèse de Lee et Yang (voir TD 6).

Dans la théorie moderne qui unifie interactions faibles et électromagnétiques, dite théorie de Glashow–Salam–Weinberg, une violation de la parité dans les interactions faibles en induit une dans les phénomènes électromagnétiques, et donc dans certaines expériences de physique atomique. Cet effet très ténu et prédit au milieu des années 70 a été vérifié par des expériences très délicates (précision de l'ordre de  $10^{-13}$  !!) impliquant des transitions entre raies du Césium [M.-A. Bouchiat et C. Bouchiat, au LKB de l'ENS : pour une revue du sujet par ces auteurs, voir Rep. Prog. Phys 60 (1997) 1351.]

### 6.2.3 Renversement du temps

En mécanique classique, l'opération de renversement du temps est simple à comprendre : on imagine qu'un film est tourné d'un processus physique ou naturel. Le processus obtenu par renversement du temps est ce qu'on observe en visualisant le film à l'envers. Pour des processus élémentaires, diffusion de particules, réflexion de lumière, phénomènes électro-magnétiques simples, etc, le processus obtenu par renversement du temps est aussi physiquement vraisemblable et possible que le processus initial. On dira que les lois microscopiques de la mécanique classique, de l'optique, de l'électromagnétisme, etc sont invariantes par renversement du temps. Pour des processus plus complexes, chocs destructifs, croissance de la matière vivante, et autres phénomènes dits irréversibles en thermodynamique par exemple, les choses sont différentes, et l'on entre dans les questions difficiles de la création d'irréversibilité à partir de lois microscopiques réversibles, flèche du temps, démon de Maxwell etc. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces questions.

La question qui nous occupe ici est la formulation du renversement du temps et son invariance dans le contexte de la mécanique quantique. Comme on l'a annoncé plus haut, ce problème offre la situation nouvelle où la transformation  $T$  est réalisée par un opérateur *antilinéaire* plutôt que linéaire.

En effet cette opération  $T$  laisse l'opérateur position  $\vec{x}$  inchangé, mais change le signe des vitesses, donc de l'impulsion  $\vec{p}$

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= U(T)\vec{x}U^\dagger(T) = \vec{x} \\ \vec{p}' &= U(T)\vec{p}U^\dagger(T) = -\vec{p} . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Les relations de commutation canoniques ne sont compatibles avec cette transformation que si  $U(T)$  est antilinéaire

$$\begin{aligned} [x'_j, p'_k] &= -[x_j, p_k] = -i\hbar\delta_{jk} \\ &= U(T)[x_j, p_k]U^\dagger(T) = U(T)i\hbar\delta_{jk}U^\dagger(T) . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Sur les conséquences de l'invariance par renversement du temps, telle la dégénérescence de Kramers voir [11], t 2, p576.

Depuis une quarantaine d'années, on dispose d'une indication indirecte que l'invariance par renversement du temps est brisée au niveau microscopique.

### 6.2.4 Brisure de la symétrie de renversement du temps en physique des particules

Dans le cadre d'une théorie qui unifie relativité restreinte et mécanique quantique, dite *théorie quantique des champs*, on démontre un théorème dit CPT, selon lequel la composition de trois opérations discrètes, la parité  $P$ , le renversement du temps  $T$  et la *conjugaison de charge*  $C$ , opération qui consiste à changer toute particule en son anti-particule, est une symétrie fondamentale des lois de la Nature. (Comme pour tout "théorème" en physique –contrairement aux mathématiques–, la validité de ce théorème repose sur des hypothèses qui pourraient être remises en question un jour...) Or en 1964, l'étude du système des deux particules  $K^0, \bar{K}^0$  conjuguées l'une de l'autre, a révélé une brisure faible mais non nulle de l'invariance par  $CP$ , le produit de deux de ces trois opérations. Si le théorème CPT est bien vrai, le système  $K^0, \bar{K}^0$  fournit donc une preuve indirecte de la violation de l'invariance par renversement du temps.

Le système  $K^0, \bar{K}^0$  : quelques indications.

Considérons l'opération  $C$  de "conjugaison de charge", qui associe à toute particule son antiparticule (de charge opposée, si cette charge est non nulle). Cette opération  $C$  est représentée par un opérateur  $U(C)$  qui est involutif,  $U(C)^2 = I$ , donc de valeurs propres  $\pm 1$ . En fait,  $U(C)$  pas plus que  $U(P)$  n'est une symétrie des interactions faibles. Par exemple, les neutrinos, leptons de masse  $\approx 0$  et de charge électrique nulle, sensibles aux seules interactions faibles, sont observés dans un état d'"hélicité gauche"<sup>6</sup>, tandis que leurs antiparticules, antineutrinos, possèdent l'hélicité droite. L'existence de ces  $\nu$  et  $\bar{\nu}$  est donc une manifestation de la brisure de  $P$  et de  $C$ , mais est compatible avec une symétrie par le produit  $PC$ . On suppose donc dans un premier temps que le produit  $U(CP) := U(C)U(P)$  est une symétrie de toutes les interactions. On peut alors construire des états propres, pairs ou impairs, de  $U(CP)$ . Ainsi pour le système des deux mésons  $K$  neutres,  $K^0, \bar{K}^0$ , de parité  $-1$ , ces états propres sont

$$K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0) \quad K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0) \quad (6.20)$$

avec  $\eta_{CP}$  égal à  $+1$  et  $-1$ , respectivement. Le mode de désintégration le plus fréquent de ces kaons neutres est en deux pions. Mais la désintégration en deux pions n'est possible que pour  $K_1^0$ , l'état à  $CP = +1$ . En effet l'état final  $\pi^0\pi^0$  ou celui  $\pi^+\pi^-$  à  $l = 0$  (par conservation du moment cinétique, les pions et kaons étant de spin nul) et parité  $+1$ , il est pair par  $U(C)$ , donc  $CP = 1$ . Sous l'hypothèse d'invariance par  $CP$ , l'état  $K_2^0$  ne peut se désintégrer en deux pions, mais seulement en 3 pions, ou  $\pi^+e^-\nu_e$ , etc. Or dans une expérience de 1964, J. W. Cronin, V. L. Fitch, (tous deux prix Nobel 1980), J. H. Christenson et R. Turlay ont observé des désintégrations  $K_2^0 \rightarrow 2\pi$ . La conclusion est que  $CP$  n'est pas une symétrie, ni donc non plus  $T$ .

Depuis l'expérience sur les  $K^0, \bar{K}^0$ , d'autres manifestations de la brisure (ou "violation") de  $CP$  en physique des particules ont été découvertes. L'origine de la brisure de  $CP$  demeure un sujet mal compris. Ses implications cosmologiques –pourquoi l'Univers semble-t-il fait de matière plutôt que d'antimatière?– sont aussi l'objet d'intenses spéculations...

## 6.3 Symétries de translation, théorème de Bloch

Revenons au cas d'un électron dans le potentiel périodique créé par les ions d'un cristal, cf chapitre 2, §4. L'hamiltonien est supposé invariant par les translations  $\vec{t}$  du réseau  $\mathcal{R}$ , représentées par des opérateurs unitaires  $U(\vec{t})$ ,

$$U(\vec{t})\psi(x) = \psi(\vec{x} + \vec{t}) . \quad (6.21)$$

Il s'agit d'un groupe abélien, ses représentations irréductibles complexes sont de dimension 1 et de forme exponentielle (Corollaire 2 du lemme de Schur et § 5.2.3). Notons  $\psi_{\vec{k}}(\vec{x})$  une fonction se transformant selon une telle représentation irréductible indexée par  $\vec{k}$ ,

$$\forall \vec{t} \in \mathcal{R} \quad U(\vec{t})\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}}\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) . \quad (6.22)$$

6. ce qui signifie que leur spin  $\frac{1}{2}$  est colinéaire et opposé à leur impulsion

Pour une telle fonction d'onde  $\psi_{\vec{k}}$ , dite *fonction d'onde de Bloch*, on a donc

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x} + \vec{t}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) . \quad (6.23)$$

De façon équivalente, (6.23) implique que le rapport  $u_{\vec{k}}(\vec{x}) := \psi_{\vec{k}}(\vec{x})/e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  est périodique,  $u_{\vec{k}}(\vec{x} + \vec{t}) = u_{\vec{k}}(\vec{x})$ , et le théorème de Bloch affirme donc que l'hamiltonien admet un système complet de fonctions propres satisfaisant

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} u_{\vec{k}}(\vec{x}) \quad (6.24)$$

avec  $u_{\vec{k}}(\vec{x})$  une fonction arbitraire périodique sur le réseau  $\mathcal{R}$ . Selon l'observation faite au chapitre 2, les vecteurs  $\vec{k}$  qui indexent les représentations irréductibles du groupe du réseau et donc les fonctions de Bloch, peuvent être choisis dans la 1ère zone de Brillouin. Nous admettrons que toute fonction d'onde peut se développer sur ces fonctions d'onde de Bloch.

On se reportera pour une discussion des applications de cet important théorème de Bloch au cours de Physique de la matière condensée ou à [1].

## 6.4 Application à la physique moléculaire

Au chapitre précédent nous avons examiné quelles conséquences l'existence d'une symétrie de la molécule a sur les niveaux d'énergie de vibration des noyaux. Examinons maintenant ce qu'il en est sur les niveaux d'énergie électroniques. Dans une molécule polyatomique, les niveaux d'énergie électroniques sont donnés par la solution de l'équation de Schrödinger des électrons dans le potentiel créé par les noyaux (et les autres électrons). Nous supposons à nouveau que la configuration d'équilibre de ces noyaux a une certaine symétrie.

Le traitement du problème utilise plusieurs approximations de nature différente. On néglige le mouvement des noyaux et on ne considère que celui des  $N$  électrons, et on néglige les interactions mutuelles et les spins de ces derniers. On suppose encore que seuls les électrons des couches périphériques participent à la liaison moléculaire, et pour simplifier l'écriture, nous nous bornerons au cas d'un seul électron par noyau. Dans la molécule, chacun de ces électrons est supposé décrit par une fonction d'onde indépendante du temps, et on fait l'hypothèse qu'une bonne approximation de cette fonction d'onde est obtenue par combinaison linéaire des fonctions d'onde supposées connues de l'électron au voisinage du  $i$ -ème noyau. Autrement dit, soit  $v(\vec{r} - \vec{r}_i)$  le potentiel créé par le  $i$ -ème noyau placé en  $\vec{r}_i$  sur un électron en  $\vec{r}$ . (Pour simplifier les notations, on suppose les  $N$  noyaux identiques). Soit  $f_i(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{r}_i)$  une fonction d'onde normalisée d'un électron au voisinage du  $i$ -ème noyau,  $i = 1, \dots, N$ , solution de

$$\left( -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + v(\vec{r} - \vec{r}_i) - e_0 \right) \psi(\vec{r} - \vec{r}_i) = 0 . \quad (6.25)$$

On considère alors l'espace  $E$  des combinaisons linéaires des  $f_i$  :

$$f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(\vec{r}) \quad (6.26)$$

et on cherche une bonne approximation de la fonction d'onde dans cet espace (c'est la méthode LCAO, *linear combination of atomic orbitals*). L'hamiltonien auquel est soumis chaque électron s'écrit

$$H = \left( -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + \sum_i v(\vec{r} - \vec{r}_i) \right) . \quad (6.27)$$

Les coefficients  $c_i$  sont alors déterminés en cherchant les minima de  $\frac{\langle f|H|f \rangle}{\langle f|f \rangle}$ . En négligeant les recouvrements des fonctions d'onde  $f_i$  et  $f_j$  si  $i \neq j$ , on a  $\langle f|f \rangle \approx \sum_i |c_i|^2$  et  $\langle f|H|f \rangle = \sum_{i,j} c_i^* c_j h_{ij}$ , où  $h$  est la matrice  $N \times N$  :  $h_{ij} = \langle f_i|H|f_j \rangle$ . Le problème de minimisation revient à résoudre  $\sum_j h_{ij} c_j = \mathcal{E} c_i$ , c'est-à-dire à diagonaliser la matrice  $h$ . C'est ce problème qui peut être simplifié par la théorie des groupes si la configuration  $\{\vec{r}_i\}$  des noyaux admet des propriétés de symétrie.

Soit  $g$  un élément d'un groupe de symétrie  $G$  fini laissant invariante (à une permutation près) la configuration des noyaux  $\vec{r}_i$ . Le groupe  $G$  est donc un groupe de symétrie de l'hamiltonien. On peut faire agir  $G$  sur les fonctions d'onde de l'espace  $E$  selon

$$D(g)f(\vec{r}) = f(g^{-1}\vec{r}) . \quad (6.28)$$

L'espace  $E$  porte donc une représentation  $D$  de  $G$ ,

$$D(g)|f_i\rangle = \sum_j |f_j\rangle \mathcal{D}_{ji}(g) \quad (6.29)$$

qu'on connaît explicitement une fois connues les fonctions  $f_i$ . L'invariance de l'hamiltonien  $H$  sous l'action de  $G$  se traduit dans l'espace  $E$  par la commutation  $[D, h] = 0$ . On décompose alors  $E$  en sous-espaces invariants se transformant par des représentations irréductibles,  $D = \oplus m_\rho D^{(\rho)}$ . Le lemme de Schur nous dit que  $h$  n'a pas d'élément de matrice entre des états relatifs à des représentations irréductibles non équivalentes et que dans chaque représentation irréductible  $D^{(\rho)}$  de multiplicité  $m_\rho = 1$  et de dimension  $n_\rho$ ,  $h$  est un multiple de l'identité : sa valeur propre, c'est-à-dire le niveau d'énergie dans notre approximation LCAO, est connue sans qu'il soit besoin de procéder à une diagonalisation, c'est simplement  $\langle f_\rho | H | f_\rho \rangle / \langle f_\rho | f_\rho \rangle$ , et elle vient avec une multiplicité (une "dégénérescence") égale à  $n_\rho$ . Par contre, si une représentation irréductible apparaît avec une multiplicité supérieure à 1,  $h$  peut avoir des éléments de matrice entre des composantes relatives aux différentes copies de cette représentation. Dans ce cas, il reste à diagonaliser  $h$  dans ces sous-espaces invariants. On peut utiliser pour ce faire le théorème dit de Wigner-Eckart (cf chap. suivant) ; si l'indice  $i$  désigne les différentes copies de la représentation  $\rho$ ,  $i = 1, \dots, m_\rho$

$$\langle \rho \alpha i | H | \rho \alpha' i' \rangle = \delta_{\alpha \alpha'} \langle \rho i | H | \rho i' \rangle \quad (6.30)$$

et il suffit de diagonaliser la matrice réduite de taille  $m_\rho \times m_\rho$ . Pour résumer, si on a su construire les combinaisons de  $f_i$  se transformant par les représentations irréductibles du groupe  $G$ , on a ramené la détermination des niveaux à la diagonalisation de matrices de dimension  $m_\rho \times m_\rho$ .

Illustrons cette méthode dans le cas simple de la molécule de benzène  $C_6H_6$  dans laquelle les atomes de carbone forment un hexagone régulier. Le groupe de symétrie est donc le groupe noté traditionnellement  $D_{6h}$  d'ordre 24, produit direct du groupe diédral  $D_6$  par le groupe engendré par la réflexion par rapport au plan de la molécule. Il va suffire en fait de discuter les conséquences de l'invariance par  $D_6$ . On ne s'intéresse qu'aux 6 électrons mobiles dits  $\pi$  ; leurs fonctions d'onde atomiques  $\psi$  sont telles que par action du groupe

$$f_i(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{r}_i) \rightarrow D(g)f_i(\vec{r}) = f_i(g^{-1}\vec{r}) = \sum_j f_j(\vec{r}) \mathcal{D}_{ji}(g) = f_{i'}(\vec{r}) \quad (6.31)$$

si  $g\vec{r}_i = \vec{r}_{i'}$ . (En général, il pourrait apparaître une phase entre  $Df_i$  et  $f_{i'}$ , ou s'il y a plusieurs électrons sur la même orbitale autour du  $i$ -ème noyau, une combinaison linéaire de leurs fonctions d'onde). Désignons de 1 à 6 les sommets de l'hexagone ; le groupe  $D_6$  est engendré par la rotation  $R$  d'angle  $\pi/3$  qui permute  $1 \rightarrow 2, \dots, 6 \rightarrow 1$  et la rotation de  $\pi$  autour de l'axe 1-4 :  $1 \rightarrow 1, 2 \leftrightarrow 6, 3 \leftrightarrow 5, 4 \rightarrow 4$ . L'équation (6.31) nous apprend comment ces deux transformations sont représentées sur les fonctions d'onde  $f_i, i = 1, \dots, 6$  :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.32)$$

Le groupe  $D_6$  admet deux représentations de dimension 2 et quatre de dimensions 1 (cf exercice 2 du chap. 5). La représentation portée par l'espace  $E$  des combinaisons linéaires des  $f_i$  se décompose en deux représentations de dimension 1 et deux de dimension 2 : on pourrait utiliser les méthodes générales de calcul de ces décompositions, une fois dressée la table des caractères de  $D_6$  ; en fait il est simple de vérifier que les combinaisons suivantes se

transforment selon de telles représentations

$$\begin{aligned}
 D^{(1)} \quad & F_1 = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6) \\
 D^{(2)} \quad & \begin{cases} F_2 = (2f_1 + f_2 - f_3 - 2f_4 - f_5 + f_6) \\ F_3 = (f_1 + 2f_2 + f_3 - f_4 - 2f_5 - f_6) \end{cases} \\
 D^{(3)} \quad & \begin{cases} F_4 = (2f_1 - f_2 - f_3 + 2f_4 - f_5 - f_6) \\ F_5 = (f_1 - 2f_2 + f_3 + f_4 - 2f_5 + f_6) \end{cases} \\
 D^{(4)} \quad & F_6 = (f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 - f_6)
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Ces représentations étant inéquivalentes fournissent des états propres d'énergie. Pour les calculer supposons comme précédemment que les recouvrements des fonctions  $f_i$  et  $f_j$ ,  $i \neq j$ , sont négligeables, et que les seuls éléments de matrice de  $H$  sont entre fonctions  $f_i$  sur le même atome ou sur des atomes voisins :  $\langle f_i | H | f_i \rangle = \mathcal{E}_0$  et  $\langle f_i | H | f_j \rangle = \delta$  si  $i$  et  $j$  sont voisins. On trouve alors

$$\mathcal{E}^{(1)} : \mathcal{E}^{(2)} : \mathcal{E}^{(3)} : \mathcal{E}^{(4)} = (\mathcal{E}_0 + 2\delta) : (\mathcal{E}_0 + \delta) : (\mathcal{E}_0 - \delta) : (\mathcal{E}_0 - 2\delta) .$$

Comme  $\delta < 0$ , ceci montre que l'énergie croît selon

$$\mathcal{E}^{(1)} < \mathcal{E}^{(2)} < \mathcal{E}^{(3)} < \mathcal{E}^{(4)} .$$

En utilisant le fait que chaque niveau peut accueillir deux électrons de spins opposés, l'état fondamental de la molécule est donc obtenu en plaçant les 6 électrons  $\pi$  sur les niveaux (1) et (2).

## 6.5 Symétries de la physique des particules

Le “modèle standard” (MS) de la physique des particules contemporaine a été élaboré sur une période de 25 ans environ, suite à une série de découvertes expérimentales et de percées théoriques. Il est maintenant très largement confirmé par l'expérience, et la découverte (attendue/espérée?) au LHC du *boson de Higgs* viendrait parachever l'édifice. Ce qui suit est un bref survol de quelques concepts-clés, du point de vue des symétries. Il ne constitue ni une revue historique ni un exposé systématique du “MS”.

Des groupes de symétrie interviennent à trois niveaux et de trois façons différentes dans le MS :

1. les interactions fortes sont sujettes à une symétrie exacte, dite symétrie de couleur, et la théorie qui les décrit, la *chromodynamique quantique*, (QCD), est une théorie de jauge de groupe  $SU(3)$ , le groupe des matrices unitaires  $3 \times 3$ . Les particules sensibles aux interactions fortes, les hadrons, sont des états liés des constituants fondamentaux, les quarks et les gluons. Ces derniers sont associés à des représentations du groupe de jauge  $SU(3)$ . Un fait expérimental mal compris encore par les théoriciens est que les seuls hadrons observés portent la représentation identité de  $SU(3)$ . C'est ce qu'on appelle la *confinement des quarks et des gluons* (ou de la couleur). Pour expliquer ce phénomène, il est fondamental que le groupe de jauge  $SU(3)$  soit une symétrie absolue de la théorie ;
2. les interactions faibles et électromagnétiques sont unifiées au sein d'un “secteur” du MS. Là encore une théorie de jauge est à l'œuvre, basée cette fois sur le groupe  $SU(2) \times U(1)$ . Les particules qui sont soumises aux interactions électro-faibles (quarks, leptons, bosons de jauge mais pas les gluons de la QCD), sont classées dans des représentations du groupe  $SU(2) \times U(1)$ . Au contraire de la QCD, la symétrie de jauge  $SU(2) \times U(1)$  est brisée spontanément selon un mécanisme qui généralise ce qu'on a vu au chap. 3. Cela est fondamental pour assurer que toutes les particules observées (sauf le photon) ont une masse. La manière la plus simple de déclencher le mécanisme de brisure spontanée (en termes simples, de créer dans la théorie un potentiel en chapeau mexicain comme au chap.

THE STANDARD MODEL						
		Fermions			Bosons	
Quarks	$u$ up	$c$ charm	$t$ top	$\gamma$ photon	Force carriers	
	$d$ down	$s$ strange	$b$ bottom	$Z$ Z boson		
Leptons	$\nu_e$ electron neutrino	$\nu_\mu$ muon neutrino	$\nu_\tau$ tau neutrino	$W$ W boson		
	$e$ electron	$\mu$ muon	$\tau$ tau	$g$ gluon		
				$H$ Higgs boson*		

\*Yet to be confirmed

Source: AAAS

FIGURE 6.1 – Petit tableau des particules fondamentales du MS Source AAAS

- 3) est d'introduire une particule de spin 0, dite boson de Higgs. Contrairement à ce qui a été dit au chap. 3, la brisure spontanée d'une symétrie continue *dans une théorie de jauge* n'engendre pas de particules de masse nulle mais au contraire est la cause de la génération de masses. Finalement de la symétrie  $SU(2) \times U(1)$  initiale ne subsiste qu'une symétrie de jauge exacte par un groupe  $U(1)$  (un mélange du groupe  $U(1)$  de  $SU(2) \times U(1)$  et d'un sous-groupe  $U(1)$  de  $SU(2)$ ), qui est le groupe de jauge familier de l'électrodynamique ;
3. les paires de quarks et celles de leptons introduits dans cette construction s'organisent en plusieurs familles ou "générations". On connaît actuellement trois familles et on estime que l'histoire s'arrête là. Les particules de ces familles manifestent des symétries **approchées**. C'est ainsi que si on ne considère que les quarks  $u$  and  $d$  de la première famille et les hadrons qui en sont des états liés (proton, neutron, pions), une symétrie  $SU(2)$  dite d'*isospin* (voir fin du chap. 7) apparaît. Cette symétrie est approximative, elle est brisée par les interactions électromagnétiques. Si on incorpore aussi un ou deux des quarks de la génération suivante ( $s$  et  $c$ ), on trouve des traces d'une symétrie plus sévèrement brisée, respectivement  $SU(3)$  ou  $SU(4)$ . Ces "symétries de saveur" ne doivent pas être confondues avec les précédentes : les groupes  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  etc ne sont **pas** les groupes de jauge rencontrés précédemment.

Au total on voit que les trois manifestations possibles de symétries apparaissent dans le MS : symétrie de jauge exacte (symétries  $SU(3)$  de couleur et  $U(1)$  de l'électrodynamique) ; symétrie  $SU(2) \times U(1)$  brisée spontanément ; symétries de saveur brisées "explicitement" par des termes d'interaction dans le hamiltonien de la théorie. Pour résoudre quelques problèmes résiduels du MS, certains ont proposé des extensions *supersymétriques* du modèle standard. La supersymétrie, une nouvelle forme de symétrie, a la particularité d'introduire des degrés de liberté fermioniques dans le groupe de symétrie, avec des générateurs infinitésimaux satisfaisant maintenant des relations d'*anticommutation*, etc. Mais cela est une autre histoire...