Chapitre 4

Groupes continus. Générateurs infinitésimaux. Lois de conservation

On va s'intéresser maintenant plus particulièrement à des groupes de transformations dotés de propriétés de continuité et de différentiabilité dans les paramètres de la transformation. On va en particulier étudier des transformations infinitésimalement proches de l'identité. Cela va conduire à la notion importante de générateur infinitésimal.

D'un point de vue mathématique, ces générateurs satisfont des relations algébriques (relations de commutation), essentiellement caractéristiques du groupe considéré, et forment une *algèbre de Lie*. Pour le physicien, ces relations sont très familières dans le cadre de la mécanique quantique, cf les générateurs des rotations, égaux à un facteur $\hbar$ près aux composantes du moment angulaire, et leurs relations de commutation. Par ailleurs, chaque symétrie dynamique par l'action d'un groupe continu se traduit par l'existence de *relations de conservation*. Là encore, il s'agit d'un résultat généralisant des choses bien connues : conservation de l'impulsion, respectivement du moment angulaire, associée à l'invariance par translation d'espace, resp. par rotation.

4.1 Transformations continues, générateurs infinitésimaux

4.1.1 Groupes des translations $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$

Considérons le plus simple des groupes continus, celui des translations à une dimension : $t(a) \quad : \quad x \mapsto x' = x + a$, avec x et a des variables réelles $x, a \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction réelle $f(x)$, définissons la nouvelle fonction $f' = t(a)f$ par $f'(x') = f(x)$ ou de façon équivalente, $f'(x) = f(x - a)$. La loi de composition de ces transformations (loi de groupe) est

$$t(b) \circ t(a) = t(a + b) \ . \tag{4.1}$$

La loi est commutative, le groupe est abélien. Ce groupe est en fait $\mathbb{R}$ avec la loi de groupe fournie par l'addition des réels.

Si a est infinitésimal, on peut écrire $f'(x) \approx f(x) - a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ ou encore

$$f'(x) = \left(1 - a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f(x)$$

soit encore, en définissant la variation de la fonction

$$\Delta f(x) = f'(x) - f(x) = -a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f(x) \ .$$

La variation infinitésimale de la fonction est linéaire dans le paramètre a (on travaille au 1er ordre !) et dans la fonction f, et donnée par l'action du *générateur infinitésimal* $T_a = -aT = -a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$.

Noter que la loi de groupe (4.1) et sa propriété de commutativité se traduisent au niveau infinitésimal par la commutativité des générateurs

$$[T_a, T_b] = T_aT_b - T_bT_a = 0\ .$$

Les transformations continues (et différentiables) du groupe impliquent donc l'existence des générateurs infinitésimaux avec des propriétés qui reflètent la loi de groupe. Inversement une fois connu le générateur infinitésimal $T = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, il est possible de reconstruire la transformation finie par *action exponentielle*

$$\begin{aligned}
\exp(-aT)f(x) &= (1 - aT + \frac{1}{2}a^2T^2 + \frac{-a^3}{3!}T^3 + \cdots)f(x) \\
&= \left(1 - a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{(-a)^3}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^3 + \cdots\right)f(x) \\
&= f(x-a)
\end{aligned}$$

qui n'est autre que la série de Taylor, que nous supposons convergente (f analytique réelle).

Ces considérations s'étendent sans difficulté à des translations $t(\vec{a})$ dans l'espace $\mathbb{R}^d$ et à des fonctions f des d variables (coordonnées) $x_1, \cdots, x_d$. La loi de groupe est toujours additive et donc commutative $t(\vec{a}) \circ t(\vec{b}) = t(\vec{a} + \vec{b}) = t(\vec{b}) \circ t(\vec{a})$, le groupe n'est autre que $\mathbb{R}^d$ avec son addition. L'opérateur infinitésimal est maintenant l'opérateur différentiel $T_{\vec{a}} = -\vec{a}.\vec{T}$ avec $\vec{T}$ le vecteur gradient $\vec{T} = \vec{\nabla} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}, \cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_d}\right)$, et la formule de Taylor à d variables s'applique.

4.1.2 Groupe des phases U(1)

Considérons le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, $\zeta_\alpha = \mathrm{e}^{i\alpha}$. Le nombre réel α est défini modulo 2π. La loi de groupe est

$$\mathrm{e}^{i\alpha}\mathrm{e}^{i\beta} = \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}\ . \tag{4.2}$$

Il s'agit donc encore d'un groupe abélien. Sa dénomination mathématique est U(1) (groupe unitaire à 1 dimension). On s'intéresse maintenant à l'action de ce groupe sur les nombres complexes non nuls

$$z \mapsto z' = \mathrm{e}^{i\alpha}z$$

et sur les puissances entières (positives ou négatives) de z

$$z^p \mapsto z'^p = \mathrm{e}^{ip\alpha}z^p\ .$$

Ces puissances entières z^p sont invariantes par l'action de $\zeta_{2\pi} = e^{i(2\pi)}$. (Noter qu'en revanche, pour une puissance r non entière de z, l'action de $e^{i(2\pi)}$ n'est pas l'identité.) Inversement, les théorèmes sur les séries de Fourier nous disent que toute fonction (suffisamment régulière) f de z telle que $f(z) = f(e^{2i\pi}z)$ peut se développer sur les puissances z^p, p entier positif ou négatif, $p \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc d'étudier l'action du groupe sur les z^p.

À nouveau, on peut considérer des transformations infinitésimales, avec $|\alpha| \ll 1$,

$$z \mapsto z' \approx (1 + i\alpha)z \qquad z^p \mapsto z'^p = (1 + ip\alpha)z^p$$

Le générateur infinitésimal s'écrit $T_\alpha = i\alpha z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$. On a encore commutation $[T_\alpha, T_\beta] = T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha = 0$, reflétant la commutativité de la loi de groupe.

4.1.3 Groupe de rotation à deux dimensions SO(2)

Considérons maintenant le groupe des rotations à deux dimensions, noté SO(2). L'élément générique $R(\alpha)$ dépend d'un paramètre continu, l'angle α de rotation défini modulo 2π. La rotation $R(\alpha)$ agit sur les vecteurs $\vec{x}$ du plan par

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R(\alpha)\vec{x}$$

où la notation doit être comprise comme l'action d'un opérateur linéaire sur le vecteur $\vec{x}$, ou encore, dans un repère orthogonal, comme l'action d'une matrice orthogonale sur les composantes x_1, x_2 de $\vec{x}$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

(la matrice est orthogonale par définition de SO(2), ou encore, géométriquement, parce que les transformations considérées préservent la norme $\parallel \vec{x}' \parallel = \parallel \vec{x} \parallel$, or $\vec{x}'.\vec{x}' = x^T(R^T(\alpha).R(\alpha))x = \vec{x}.\vec{x}$ donc $R^T(\alpha).R(\alpha) = \mathbb{1}$). Ces rotations se composent comme on sait bien

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta) = R(\beta)R(\alpha) \tag{4.4}$$

de façon à nouveau additive et commutative. En fait la loi est la même que celle (4.2) du groupe U(1) du § précédent. En effet il s'agit de deux descriptions équivalentes de la même géométrie du plan, la première à l'aide d'une variable complexe z, la seconde à l'aide de vecteurs à deux composantes $\vec{x}$.

Dans ce dernier langage, les générateurs infinitésimaux sont des opérateurs, ou des matrices 2×2. En effet, prenant α infinitésimal et développant au premier ordre, $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, donc

$$\alpha \ll 1 \qquad R(\alpha) = \mathbb{1} - i\alpha J = \mathbb{1} - i\alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

où l'apparition du i peut paraître curieuse dans ce problème réel, mais est utile si on veut considérer le générateur J comme hermitien (plutôt qu'antisymétrique réel donc antihermitien).

Considérons maintenant la loi de groupe (4.4) pour $\beta = \mathrm{d}\alpha$ infinitésimal, en faisant usage de (4.5) :

$$R(\alpha + \mathrm{d}\alpha) = R(\mathrm{d}\alpha)R(\alpha) = (\mathbb{1} - i\mathrm{d}\alpha J)R(\alpha) = R(\alpha) - i\mathrm{d}\alpha JR(\alpha)$$

donc $\mathrm{d}R(\alpha) = -i\mathrm{d}\alpha JR(\alpha)$. On obtient donc l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}R(\alpha) = -iJR(\alpha) \tag{4.6}$$

où J est, rappelons le, une matrice fixe, indépendante de α. Cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et homogène, complétée par la condition initiale $R(0) = \mathbb{1}$, se résout immédiatement en

$$R(\alpha) = \exp -i\alpha J \ . \tag{4.7}$$

Exercice. Pour $J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, vérifier que l'exponentiation de $-i\alpha J$ reproduit bien la matrice de $R(\alpha)$ donnée plus haut. (Indication : calculer les puissances successives $J^2,\ J^3,\ \cdots, J^n$ et construire $\exp i\alpha J$ par son développement en série.)

De la même façon qu'on a dans le sous-paragraphe précédent appliqué les transformations du groupe U(1) à des puissances quelconques (entières) de z, on peut aussi étudier l'application des transformations à des tenseurs à p indices, se transformant donc comme le tenseur de composantes $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p})$. Cela fait apparaître de nouveaux générateurs infinitésimaux, qui sont des matrices $2^p \times 2^p$ agissant sur les composantes des tenseurs. Et à nouveau, l'action pour une transformation finie s'obtient par exponentiation de la transformation infinitésimale. Au chapitre suivant, on parlera de *représentation* du groupe SO(2) pour cette action sur les tenseurs et on analysera les choses de façon plus systématique.

4.1.4 Groupe de rotation à trois dimensions SO(3)

Considérons enfin le groupe des rotations à trois dimensions, noté SO(3), en nous bornant à un mot, avant l'étude plus approfondie du Chapitre 7.

Comme on le sait bien après le cours de Physique Quantique, les rotations infinitésimales du groupe SO(3) font apparaître trois générateurs infinitésimaux indépendants, notés J_i, $i = 1, 2, 3$ et dotés de relations de commutation non triviales

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \ . \tag{4.8}$$

L'exponentiation permettant de reconstruire la transformation finie à partir de ces générateurs infinitésimaux est plus délicate à mettre en œuvre, à cause de ces relations de commutation, mais elle peut encore se démontrer, voir chapitre 7.

4.1.5 Groupe de Lie, algèbre de Lie, et leur dimension

Groupes de Lie

Les groupes $\mathbb{R}^d$, U(1), SO(2) et SO(3) que nous venons d'évoquer sont des exemples de groupes dont les éléments dépendent de façon différentiable de leurs paramètres (ici, des translations ou des angles de rotation). On appelle *groupes de Lie* de tels groupes. D'autres exemples fréquemment rencontrés par le physicien sont le groupe linéaire GL(n) et ses sous-groupes U(n), SU(n), O(n), SO(n).

Rappelons la définition des groupes orthogonaux O(n), SO(n) (cf §1.3.1). Le groupe O(n) est le groupe des matrices $n \times n$ orthogonales réelles, c'est-à-dire satisfaisant $O.O^T = I$ ou de façon équivalente $O^T.O = I$. Le groupe SO(n) est le sous-groupe du groupe O(n) constitué des matrices orthogonales de déterminant 1

$$\mathrm{SO}(n) = \{O : O.O^T = I, \quad \det O = 1\} \ .$$

Le groupe U(n) est le groupe de matrices $n \times n$ complexes et unitaires, $U.U^\dagger = I$ ou de façon équivalente $U^\dagger.U = I$. (On rappelle que $X^\dagger := (X^T)^*$.) Le groupe SU(n) est le sous-groupe du groupe U(n) constitué des matrices unitaires de déterminant 1

$$\mathrm{SU}(n) = \{U : U.U^\dagger = I, \quad \det U = 1\} \ .$$

Transformations infinitésimales, algèbres de Lie

Les transformations d'un groupe de Lie étant différentiables, on peut considérer un élément infinitésimalement proche de l'identité et le développer au voisinage de l'identité. Par exemple, pour une matrice de $\mathrm{O}(n)$ infinitésimalement proche de l'identité, écrivons $O = I + X$, avec X infinitésimal : la relation d'orthogonalité s'écrit alors

$$O.O^T = (I + X).(I + X^T) = I$$

donc au premier ordre en X,

$$\mathrm{o}(n): \qquad X + X^T = 0\ , \tag{4.9}$$

qui exprime que X est une matrice réelle antisymétrique. On notera par $\mathrm{o}(n)$ l'ensemble de ces matrices $n \times n$ antisymétriques. De la même façon, vérifier qu'une matrice unitaire infinitésimalement proche de l'identité est de la forme $U = I + X$ avec X complexe antihermitique, c'est-à-dire satisfaisant

$$\mathrm{u}(n): \qquad X + X^\dagger = 0\ . \tag{4.10}$$

On note $\mathrm{u}(n)$ l'ensemble de ces matrices $n \times n$ antihermitiques. Passant alors de $\mathrm{U}(n)$ à $\mathrm{SU}(n)$ et à sa version infinitésimale, il faut imposer aussi que le déterminant de $U = I + X$ est 1. En utilisant l'identité $\det A = \exp(\mathrm{tr}\,\log A)$ (vraie pour toute matrice diagonalisable), on a

$$\begin{aligned}\det(I + X) &= \exp\mathrm{tr}\,\log(I + X) = \exp\mathrm{tr}\,(X + \cdots) = 1 + \mathrm{tr}\,X + O(X^2)\\ &= 1\ .\end{aligned} \tag{4.11}$$

Au premier ordre, la condition sur les matrices X est donc d'être antihermitiques et de trace nulle. Cela définit un ensemble de matrices que nous noterons $\mathrm{su}(n)$.

$$\mathrm{su}(n): \qquad X + X^\dagger = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\,X = 0. \tag{4.12}$$

Noter que, contrairement au cas unitaire, pour des matrices orthogonales, la condition de déterminant 1 n'apporte pas de nouvelle contrainte à (4.9). Cela est dû au fait que pour toute matrice orthogonale réelle, $O.O^T = I \Longrightarrow (\det O)^2 = 1$, donc $\det O = \pm 1$. Pour une matrice infinitésimalement proche de l'identité, la condition $\det O = +1$ est automatiquement satisfaite par continuité. Autrement dit, les ensembles $\mathrm{o}(n)$ et $\mathrm{so}(n)$ sont identiques.

On note que chacun de ces ensembles $\mathrm{o}(n)$, $\mathrm{u}(n)$ ou $\mathrm{su}(n)$, (4.9), (4.10) ou (4.12), forme un espace vectoriel : toute combinaison linéaire de deux matrices satisfaisant une de ces conditions la satisfait aussi. Plus remarquable, le *commutateur* $[X, Y] = X.Y - Y.X$ de deux matrices X et Y d'un de ces ensembles est aussi dans l'ensemble. Par exemple pour $\mathrm{o}(n)$,

$$X, Y \in \mathrm{o}(n) \quad [X, Y]^T = (X.Y - Y.X)^T = Y^T.X^T - X^T.Y^T = Y.X - X.Y = -[X, Y] \Rightarrow [X, Y] \in \mathrm{o}(n)$$

Vérifier que cela est bien satisfait aussi dans $\mathrm{u}(n)$ ou $\mathrm{su}(n)$. On appelle *algèbre de Lie* un espace vectoriel doté de cette propriété d'être stable par le crochet de commutation.

Cette structure est générale : pour tout groupe de Lie G, les éléments proches de l'identité forment une algèbre de Lie, notée g.

Dimension d'une algèbre de Lie

Il est aisé de compter le nombre de paramètres réels dont dépend une matrice satisfaisant (4.9), (4.10) ou (4.12). Par définition, ce nombre est appelé la *dimension* de l'algèbre de Lie ou du groupe de Lie correspondant.

Ainsi une matrice réelle $n \times n$ dépend de n^2 paramètres, mais les conditions (4.9) imposent $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n(n+1)/2$ conditions indépendantes $X_{ij} = -X_{ji}$, $i \le j$. Il demeure donc $n(n-1)/2$ éléments indépendants, qui est la dimension de l'algèbre de Lie $\mathrm{o}(n)$ ($= \mathrm{so}(n)$) ou des groupes de Lie $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$.

Exercice : vérifier que les dimensions des algèbres de Lie précédentes sont données par le tableau suivant

Groupe de Lie G	Algèbre de Lie g	Dimension d
$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{o}(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\mathrm{SO}(n)$	$\mathrm{so}(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{u}(n)$	n^2
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{su}(n)$	n^2-1
$\mathbb{R}^d$	$\mathbb{R}^d$	d

Puisque les algèbres de Lie sont des espaces vectoriels, on peut y choisir une base. On appelle *système de générateurs infinitésimaux* du groupe de Lie G toute base de son algèbre de Lie. La dimension d'une algèbre de Lie (ou du groupe de Lie correspondant) est donc le nombre maximal de générateurs infinitésimaux indépendants. Par exemple, dans le cas de SO(3), un système de générateurs infinitésimaux, c'est-à-dire une base de matrices antisymétriques 3×3 est donnée par

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.13}$$

Noter que ces formules peuvent s'exprimer de façon compacte sous la forme

$$(T_k)_{ij} = -\epsilon_{ijk} \tag{4.14}$$

à l'aide du tenseur antisymétrique ϵ_{ijk} (cf Chap 2) et que les relations de commutation de ces générateurs sont

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k \ , \tag{4.15}$$

à nouveau en termes de ce même tenseur.

Groupes compacts

Rappelons qu'en mathématiques, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ qui est fermé et borné est dit *compact.* Au contraire, des intervalles de la droite réelle comme $]a, b]$ ou $[a, \infty)$ ne sont pas compacts. On dira d'un groupe de Lie de dimension d qu'il est compact si l'ensemble de ses paramètres varie dans un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d$. Nous admettrons que $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ sont compacts, (on le verra au chap. 7 pour SO(3)), et il est clair que $\mathbb{R}^d$ ne l'est pas, n'étant pas borné.

Exercice : groupe de Lorentz. C'est l'ensemble des changements de coordonnées de la Relativité Restreinte, qui préservent la forme quadratique $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2$. Quelle est sa dimension, quels sont ses générateurs infinitésimaux, est-il compact ?

La morale de ce paragraphe, qu'on va reprendre et développer aux chapitres suivants, est que, dans un groupe continu comme U(1), SO(2) ou SO(3), et en fait de façon générale dans tout groupe de Lie comme on vient de les définir, une étude *locale* du groupe, au voisinage de l'identité, donc une étude des générateurs infinitésimaux, suffit pour reconstruire essentiellement toute la structure du groupe.

Plus précisément, on reconstruit tout élément d'un groupe compact connexe par exponentiation d'un élément de l'algèbre.

4.2 Symétries continues et lois de conservation

On va maintenant supposer qu'un groupe de transformations continues, comme ceux étudiés au § précédent, est un groupe de symétrie d'un système physique. En d'autres termes, la dynamique est invariante sous l'action du groupe. Des exemples sont fournis par des systèmes invariants par translation ou par rotation.

Selon le formalisme utilisé, hamiltonien ou lagrangien, les choses se présentent un peu différemment, mais la conclusion est la même : une invariance par un groupe continu se traduit par l'existence de quantités conservées, comme on va le voir.

4.2.1 Formalisme lagrangien et formalisme hamiltonien

Rappelons d'abord la formulation lagrangienne de la dynamique d'un système entre des temps t_1 et t_2, qui applique un principe variationnel à une *fonctionnelle d'action* dépendant de la trajectoire $q(t)$

$$S[q(\cdot);t_1,t_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t),\dot{q}(t)) \ . \tag{4.16}$$

Ici q désigne l'ensemble des coordonnées des n degrés de liberté, $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$; L est une fonction, dite fonction de Lagrange, de $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ évalués à une certaine valeur de t. Le principe variationnel consiste à dire que dans le mouvement entre les points q_1 au temps t_1 et q_2 au temps t_2, l'action S est stationnaire par rapport à des variations infinitésimales de la trajectoire $q(t)$ sujettes aux conditions aux limites que $q(t_1) = q_1$ et $q(t_2) = q_2$ sont fixés. On écrit donc $q(t) \mapsto q(t) + \delta q(t)$, avec $\dot{q}(t) \mapsto \dot{q}(t) + \dot{\delta q}(t)$, et $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, et on calcule la variation au premier ordre de S : $S \mapsto S + \delta S = S + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\delta q}_i \right)$, soit, après intégration par parties (rendue possible sans termes de bord grâce à l'annulation de δq aux extrémités de l'intervalle (t_1, t_2))

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \delta q_i(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ .$$

Cela ne peut être vrai indépendamment de la fonction $\delta q_i(t)$ que si la parenthèse s'annule pour tout $t \in (t_1, t_2)$, ce qui constitue les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0 \qquad \forall i = 1, \cdots, n \ . \tag{4.17}$$

On définit alors les variables d'impulsion p comme variables conjuguées des q_i en ce sens que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \ , \tag{4.18}$$

et l'équation d'Euler-Lagrange (4.17) nous dit que

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}) \ . \tag{4.19}$$

Le hamiltonien se construit alors par une "transformée de Legendre" de L par rapport aux variables $\dot{q}$, ce qui veut dire que c'est la fonction de q et p donnée par

$$H(p,q) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p,q) - L(q, \dot{q}(p,q)) \tag{4.20}$$

où la fonction $\dot q(p,q)$ est obtenue en résolvant (4.18). La fonctionnelle $H(p,q)$ mesure l'énergie du système. En différentiant (4.20), on a $dH = \sum_i \Big(dp_i\dot q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \big(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\big)d\dot q_i\Big)$. Le dernier terme entre parenthèses s'annule en vertu de (4.18), et on lit alors les deux équations de Hamilton

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{4.21}$$

qui réexpriment donc pour la première la relation (4.18) entre p et $\dot q$ et pour la seconde une équation dynamique, l'équation du mouvement équivalente à (4.17). On peut encore les récrire à l'aide des crochets de Poisson

$$\dot q_i = \{H, q_i\} \qquad \dot p_i = \{H, p_i\} \tag{4.22}$$

où on rappelle que le crochet de Poisson de deux fonctions dans l'espace de phases est défini par

$$\{f(p,q), g(p,q)\} := \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\ . \tag{4.23}$$

Exemple : Pour une particule de coordonnée $q=\vec x$, soumise à un potentiel $V(\vec x)$, le lagrangien est simplement $L=\frac12 m\dot{\vec x}^2 - V(\vec x)$ ce qui conduit à l'équation du mouvement (Euler–Lagrange)

$$m\ddot{\vec x} = -\nabla V(\vec x) =: \vec F\ . \tag{4.24}$$

L'impulsion est $\vec p = m\dot{\vec x}$, l'hamiltonien $H=\frac12\frac{\vec p^2}{m} + V(\vec x)$ et les équations de Hamilton sont simplement $\dot{\vec x} = \frac{\vec p}{m}$, $\dot{\vec p} = -\nabla V(\vec x)$. Pour une particule libre, le membre de droite s'annule, et l'impulsion est conservée $d\vec p/dt = 0$.

4.2.2 Invariances et lois de conservation

En formalisme lagrangien, appelons symétrie une transformation des coordonnées laissant invariante la fonction de Lagrange $L(q(t))$. Pour une transformation infinitésimale, $q_i(t) \mapsto q_i(t) + \delta q_i(t)$, la condition d'invariance est

$$\delta L(t) = \sum_i \left(\delta q_i(t)\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} + \delta\dot q_i(t)\frac{\partial L}{\partial \dot q_i(t)}\right) = 0$$

soit en utilisant les équations (4.18, 4.19),

$$\sum_i (\delta q_i(t)\dot p_i(t) + \delta \dot q_i(t) p_i(t)) = 0 \tag{4.25}$$

qui exprime que la quantité

$$\sum_i \delta q_i(t) p_i(t) = \text{const.} \tag{4.26}$$

est conservée dans le temps. On vient donc de montrer qu'une invariance dynamique par des transformations continues se traduit par une loi de conservation. C'est le premier exemple d'une situation très générale, s'étendant à des systèmes à nombre infini de degrés de liberté (théories de champs) et à la physique quantique et/ou relativiste. (On donne alors le nom de théorème de Noether à ce résultat important.)

Examinons quelques exemples.

Invariance par translation d'espace

Supposons que les $N = 3n$ degrés de liberté q soient les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ de n particules, $\vec{r}_a$, $a = 1, \cdots, n$. La fonction de Lagrange est de la forme usuelle en mécanique, $L = T - V$, avec T l'énergie cinétique et V (attention au signe !) le potentiel dont dérivent les forces. Supposons que ce potentiel ne dépend que des différences $\vec{r}_a - \vec{r}_b$ et donc qu'il est invariant par translation simultanée de tous les $\vec{r}_a$: $\vec{r}_a \mapsto \vec{r}_a + \delta\vec{a}$ avec $\delta\vec{a}$ indépendant du temps et de l'indice a. La loi de conservation précédente (4.26) se réduit à celle de $\delta\vec{a}.\sum_a \vec{p}_a$ et donc à celle de

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^{n} \vec{p}_a \tag{4.27}$$

c'est-à-dire de l'impulsion totale. L'invariance par translation s'est donc traduite par la **loi de conservation de l'impulsion totale**.

Deux remarques

Bien noter que l'hypothèse faite d'invariance par translation d'espace exclut entre autres la présence dans la fonction de Lagrange de champs extérieurs non uniformes.

On sait que le formalisme lagrangien en électrodynamique fait apparaître non pas les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ mais leurs potentiels V et $\vec{A}$. Donc inversement, la loi de conservation nous apprend : nul espoir d'accélérer une particule en lui appliquant un potentiel électrique ou magnétique uniforme. Cela n'est pas tellement pour nous surprendre...

Invariance par rotation

Avec les mêmes notations que précédemment, supposons que le potentiel $V(\vec{r}_a)$ soit invariant par rotation : il ne dépend donc que des invariants $r_a = \parallel \vec{r}_a \parallel$ et $\vec{r}_a.\vec{r}_b$, et peut-être aussi des pseudoscalaires $\det(\vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c)$. Une rotation infinitésimale s'écrivant

$$\vec{r}_a \mapsto \vec{r}_a + \delta\vec{\omega} \wedge \vec{r}_a$$

la quantité conservée se récrit

$$\sum_a \delta\vec{\omega} \wedge \vec{r}_a.\vec{p}_a = \delta\vec{\omega}.\sum_{a=1}^{n} \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a \tag{4.28}$$

et donc, puisque cela est vrai pour tout $\delta\vec{\omega}$, la loi de conservation est celle du moment cinétique

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{n} \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a \ . \tag{4.29}$$

L'invariance par rotation s'est donc traduite par la **loi de conservation du moment cinétique total** ("orbital" à ce niveau classique : pas de spin !).

Invariance par translation du temps

Terminons cette revue des cas classiques par une situation légèrement différente de celles étudiées ci-dessus. On suppose le potentiel indépendant du temps (sans dépendance explicite en t, sa seule dépendance étant par l'intermédiaire des fonctions $q_i(t)$). La fonction de Lagrange est alors invariante par translation du temps

$$q_i(t) \mapsto q'_i(t) = q_i(t + \delta t) \tag{4.30}$$

et pour une transformation infinitésimale (δt infinitésimal), $q_i(t) \mapsto q_i(t) + \delta q_i(t)$, $\delta q_i = \dot{q}_i(t)\delta t$. Cette fois nous n'écrivons pas que la fonction de Lagrange est invariante mais que sa variation, c'est-à-dire δt fois sa dérivée par rapport au temps, est donnée par

$$\delta L(t) = \delta t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(t) = \sum_i \left(\delta t\, \dot{q}_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} + \delta t\, \ddot{q}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) = \delta t \sum_i \left(\dot{q}_i(t) \dot{p}_i(t) + \ddot{q}_i(t) p_i(t) \right)$$

ou encore que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) = 0 \ . \tag{4.31}$$

On reconnaît la conservation de l'hamiltonien, c'est-à-dire de l'énergie totale.

Récapitulons ce que nous avons trouvé à ce stade

Invariance	Loi de conservation	Quantité conservée
Translation d'espace	Impulsion	$\vec{P}$
Rotation d'espace	Moment angulaire	$\vec{L}$
Translation dans le temps	Énergie	$H(p,q)$

mais on verra d'autres exemples dans la suite (conservation de l'isospin et autres "symétries internes", de charges ...). D'une façon générale, l'existence d'une invariance sous l'action d'un groupe continu avec d générateurs infinitésimaux indépendants, donc de dimension d, se traduit par la conservation de d quantités indépendantes. Ainsi $d = 3$ pour les translations et pour les rotations de $\mathbb{R}^3$ avec les 3 composantes de $\vec{P}$ et de $\vec{L}$ respectivement, et $d = 1$ pour l'invariance dans le temps.

Formalisme hamiltonien

Pour finir, mentionnons rapidement comment les choses s'expriment en formalisme hamiltonien. On se rappelle que pour toute fonction $F(p,q)$ sur l'espace des phases sans dépendance explicite par rapport au temps t, l'évolution temporelle est dictée par l'équation

$$\begin{aligned} \dot{F}(p,q) &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \\ &= \{H, F\} \end{aligned} \tag{4.32}$$

où on a utilisé les équations (4.22) et la définition du crochet de Poisson (4.23). (En cas de dépendance explicite de F par rapport à t, il faudrait ajouter un terme supplémentaire $\partial F/\partial t$ au membre de droite.) Au vu de (4.32) on dit que l'hamiltonien est le "générateur au sens du crochet de Poisson" de l'évolution temporelle.

Plus généralement, considérons une transformation des variables de l'espace des phases de la forme $\delta q_i = \{f(p,q), q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $\delta p_i = \{f(p,q), p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$ où f est une fonction indépendante du temps. Pour la fonction $H(p,q)$ (comme pour toute autre fonction sur l'espace de phases), la variation est donnée par le crochet de Poisson avec f

$$\delta H(p,q) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \{f(p,q), H(p,q)\} \ . \tag{4.33}$$

La fonction $f(p,q)$ est le générateur de la transformation au sens du crochet de Poisson, avec la terminologie précédente. Une telle transformation est une invariance si $\delta H(p,q)=0$ et on a alors $\dot{f}=\{H,f\}=0$, selon (4.32). La fonction $f(p,q)$ est donc une quantité conservée.

Exemple des translations : $f(p,q)=\delta a\sum p_i$ de telle sorte que $\delta q_i=\{f,q_i\}=\delta a$, $\delta p_i=0$. Traiter de même l'exemple des rotations. Quel est le générateur de la translation de temps ?

On retrouvera toutes ces notions en mécanique quantique, où le crochet de Poisson $\{f,g\}$ devient (à un facteur $-i\hbar$ près) le commutateur des observables $\hat{f}$ et $\hat{g}$: $[\hat{f},\hat{g}]=-i\hbar\{f,g\}$.

4.3 Invariance de jauge de l'électrodynamique

Nous terminerons cette discussion générale des lois de conservation en discutant rapidement un cas d'invariance un peu différent mais fort intéressant, celui de l'*invariance de jauge* en électrodynamique. En électromagnétisme classique, cela se réfère à l'indépendance des quantités physiques, vecteurs champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, par rapport à la transformation des potentiels dont ils dérivent, cf (2.5)

$$V\mapsto V+\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\qquad \vec{A}\mapsto\vec{A}-\vec{\nabla}f(\vec{x},t)\ . \tag{4.34}$$

En effet, $\vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B}=\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ sont bien invariants sous la transformation (4.34). Mais la transformation prend tout son sens dans un cadre plus général, couplant le champ électromagnétique à des charges, soit en électrodynamique classique, soit en physique quantique. Nous rappelant la description en mécanique quantique d'une particule de charge q couplée à un champ électrique ou magnétique, considérons l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{iq\hbar}{m}\vec{A}.\vec{\nabla}+\frac{iq\hbar}{2m}\mathrm{div}\vec{A}+\frac{q^2}{2m}\vec{A}^2+qV\right]\psi(\vec{x},t) \tag{4.35}$$

ou encore, en utilisant l'identité $\vec{A}.\vec{\nabla}+\vec{\nabla}.\vec{A}=2\vec{A}.\vec{\nabla}+\mathrm{div}\vec{A}$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{2m}\psi+qV(\vec{x},t)\psi \tag{4.36}$$

où $\vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}$. Noter que le champ électromagnétique n'y apparaît que par l'intermédiaire de ses potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$. On peut remettre cette équation sous la forme

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-qV)\psi=\frac{(-i\hbar\vec{\nabla}-q\vec{A})^2}{2m}\psi \tag{4.37}$$

sur laquelle l'invariance sous la transformation de jauge étendue à ψ

$$V\mapsto V+\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\qquad \vec{A}\mapsto\vec{A}-\vec{\nabla}f(\vec{x},t)\qquad \psi(\vec{x},t)\mapsto \mathrm{e}^{-i\frac{q}{\hbar}f(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t) \tag{4.38}$$

est manifeste. (Le vérifier !).

Inversement, la forme du couplage dans (4.36) est dictée par l'invariance (4.38). On parle de *couplage minimal* de la fonction d'onde ψ au champ électromagnétique. Noter encore que si plusieurs particules chargées sont présentes, chacune décrite par une fonction d'onde ψ_a, la transformation (4.38) s'applique encore avec une seule fonction $f(\vec{x},t)$, la transformation de chaque fonction d'onde ψ_a étant dictée uniquement par sa charge q_a : on dit que le couplage minimal est “universel”.

En fait l'invariance par (4.38) est intimement liée à la charge électrique et à sa conservation. Dans le cas particulier où f est indépendante de $\vec{x}$ et de t, (et donc V et $\vec{A}$ invariants), l'invariance de la physique par le groupe U(1) agissant sur la fonction d'onde selon $\psi_a \mapsto \mathrm{e}^{-iq_a f/\hbar}\psi_a$ est reliée à la conservation de la charge totale $Q = \sum_a q_a$.

Ces considérations sur l'invariance de jauge, sur le couplage minimal etc, ont été généralisées par les physiciens C.N. Yang et R. Mills (1954) à des groupes plus généraux que le groupe U(1) et non abéliens (voir Exercice B.2 ci-dessous). Cette généralisation est extraordinairement profonde et fructueuse, puisqu'elle est à la base de toutes les théories modernes de physique des particules. Le "modèle standard" qui décrit trois des quatre interactions fondamentales de la nature (forte, faible et électromagnétique) repose sur ce principe, étendant ainsi la théorie de Maxwell aux interactions nucléaires. La gravitation, qui est la quatrième interaction fondamentale, est elle-même fondée sur des principes d'invariance dans un esprit très proche de l'invariance de jauge (invariance de la Relativité Générale par changements de coordonnées).

4.4 Exercices

A. Théorie classique des champs, Lagrangien, théorème de Noether, etc

On suppose que l'action d'une théorie classique des champs s'écrit

$$S = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi(\vec{x},t), \partial_\mu\phi(\vec{x},t); \vec{x}, t)$$

c'est-à-dire comme l'intégrale d'un *lagrangien* ne dépendant que du champ ϕ et de ses dérivées premières. Dans la suite, $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ désigne les coordonnées de temps et d'espace $(ct, \vec{x})$, même si la théorie considérée n'est pas invariante relativiste, et on note $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Noter qu'à ce stade, on autorise une dépendance explicite de $\mathcal{L}$ en x, par exemple à travers un champ extérieur dépendant de x.

a. Montrer que le principe de stationnarité de l'action S conduit aux équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right) = 0\ . \tag{E – L}$$

b. On suppose maintenant que le lagrangien $\mathcal{L}$ est invariant par l'action d'un groupe de Lie G sur le champ ϕ, et que la transformation infinitésimale du champ s'écrit $\delta\phi(x) = \alpha_s T_s(\phi(x))$. Montrer en utilisant les équations d'E-L que la variation de $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\delta\mathcal{L} = \alpha_s\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi,\partial\phi(x))}{\partial\partial_\mu\phi}\right)T_s(\phi(x))$$

et que son annulation pour tout α_s implique que le *courant de Noether*

$$j_s^\mu(x) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\right)T_s(\phi(x))$$

a une divergence nulle, $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Noter qu'il y a autant de tels courants de Noether qu'il y a de paramètres indépendants dans le groupe, soit $\dim G$.

c. Montrer que cette condition implique la conservation de la charge associée à j^μ : $Q(t) = \int d^3x j^0(\vec{x},t)$, à savoir $\frac{d}{dt}Q(t) = 0$. Par abus de langage, on dit que le courant j^μ est "conservé".

d. On applique cela au cas du lagrangien d'un champ scalaire complexe, $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi -$

$\frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2$. Écrire les équations d'E-L pour ce lagrangien. Montrer que $\mathcal{L}$ est invariant par la transformation $\phi(x) \mapsto e^{-iq\alpha}\phi(x)$, ($\alpha$ indépendant de x !), dont on écrira la version infinitésimale. En déduire l'expression du courant de Noether. Vérifier qu'il est bien de divergence nulle en utilisant les équations d'E-L. Quelle est la charge conservée correspondante ? Quel est le groupe ? Un tel champ complexe est associé à une particule chargée, électriquement par exemple, et la charge de Noether conservée est alors la charge électrique.

B. Invariance de jauge

B.1. Dans le lagrangien précédent du champ complexe (ϕ, ϕ^*), on effectue le remplacement $\partial_\mu \mapsto D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu(x)$, où A_μ est un nouveau champ. Montrer que $\mathcal{L}$ est maintenant invariant par les transformations simultanées de ϕ et de A_μ dépendant d'une fonction $\alpha(x)$

$$\phi(\vec{x}, t) \mapsto e^{-iq\alpha(\vec{x},t)}\phi(\vec{x}, t) \qquad A_\mu(\vec{x}, t) \mapsto A_\mu(\vec{x}, t) + \partial_\mu\alpha(\vec{x}, t) \ . \tag{4.39}$$

Le champ $A_\mu(x)$ s'interprète comme le champ (potentiel quadri-vecteur) électromagnétique. On ajoute à l'action un terme qui décrit sa dynamique sous la forme $\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2$, lui aussi invariant par (4.39). C'est la manifestation de l'invariance de jauge de l'électrodynamique dans ce contexte lagrangien. En outre le lagrangien peut impliquer plusieurs champs chargés (c'est-à-dire complexes) ϕ_1, ϕ_2 ... de charges q_1, $q_2, \cdots$, tous couplés au champ A_μ par leur *dérivée covariante* D_μ : on parle de "couplage minimal" de ces champs au champ A_μ. Ce couplage minimal est "universel" en ce sens qu'il ne dépend que de la charge q du champ ϕ. Le principe d'invariance de jauge a donc dicté la forme de l'interaction matière-champ électromagnétique.

B.2 Lagrangien de Yang-Mills.
Selon l'idée brillante de C.N. Yang et R. Mills (1954), on peut généraliser les considérations précédentes d'invariance de jauge, de couplage minimal etc à d'autres groupes de symétrie que les transformations du groupe U(1) de l'électrodynamique.
On considère un champ $\vec{A}_\mu$ qui est à la fois un vecteur à trois composantes (dans un espace abstrait $\mathcal{E}$ de dimension 3 que nous ne précisons pas ici) et qui porte un indice μ prenant 4 valeurs, comme le champ électromagnétique $A_\mu = (V, A_i)$, cf §4.3. On construit alors le lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} \qquad \text{avec} \qquad \vec{F}_{\mu\nu} = (\partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu - \vec{A}_\mu \wedge \vec{A}_\nu)$$

– Montrer que ce lagrangien est invariant par la transformation infinitésimale

$$\delta\vec{A}_\mu(\vec{x}, t) = \partial_\mu\vec{\alpha}(\vec{x}, t) + \vec{A}_\mu(\vec{x}, t) \wedge \vec{\alpha}(\vec{x}, t)$$

qui généralise le cas "abélien" de l'électrodynamique.
– Montrer que pour α indépendant de x, la transformation précédente est une rotation infinitésimale des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{F}$ dans l'espace abstrait $\mathcal{E}$.
Ce champ de Yang-Mills peut alors être couplé à des champs de matière, "chargés" comme l'est le champ ϕ du cas précédent, c'est-à-dire se transformant d'une façon définie sous l'action de ces rotations. Cette idée, étendue à d'autres groupes, est à la base de la construction du modèle standard de la physique des particules, cf chap. 6.

C. $\star$ Conservation du tenseur énergie-impulsion. Transformations conformes

On démontre que dans une théorie lagrangienne (classique) des champs, les invariances par changement de coordonnées –translations, rotations, dilatations,...– sont associées à la conservation de courants construits à partir du tenseur énergie-impulsion $\Theta_{\mu\nu}$. Plus précisément, nous admettrons que si le lagrangien n'a pas de dépendance explicite en x (pas de champ extérieur), la théorie est invariante par translation, $\Theta_{\mu\nu}$ est "conservé" : $\partial^\mu\Theta_{\mu\nu} = 0$, comme conséquence

des équations d'E-L, et l'invariance par un changement de coordonnées infinitésimal arbitraire $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta\alpha^\mu(x)$ se traduit par $\delta S = \int d^dx(\partial_\mu \alpha_\nu(x))\Theta^{\mu\nu}(x)$.
a) Montrer que l'invariance par rotation (de l'espace-temps) découle de la symétrie du tenseur $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$.
b) Montrer que l'invariance par dilatation découle de $\Theta^\mu_\mu = 0$ (trace nulle).
c) Dans la suite on se place dans une théorie euclidienne (et non pas dotée de la métrique minkovskienne). On considère alors la transformation géométrique suivante, composée d'une "inversion" par rapport à l'origine (attention, inversion en un sens différent de celui de parité utilisé ailleurs dans le cours !) $x^\mu \mapsto \frac{x^\mu}{x^2}$, d'une translation par a^μ et d'une nouvelle inversion. Montrer que la forme infinitésimale d'une telle transformation est $\delta\alpha^\mu(x) := \delta x^\mu = x^2\delta a^\mu - 2(\delta\alpha.x)x^\mu$.
d) Montrer alors que si Θ satisfait les propriétés précédentes de symétrie et de trace nulle, l'action est automatiquement invariante par les transformations infinitésimales $\delta\alpha^\mu$.
e) Ces dernières transformations, ainsi que les rotations et dilatations, sont des *transformations conformes*, qui conservent les angles. On démontre qu'en dimension d supérieure ou égale à 3, toutes les transformations conformes sont des composées des transformations précédentes, translations, rotations, dilatation et les "transformations conformes spéciales" de la question c). Calculer la dimension de ce groupe conforme en dimension d.

On vient donc de démontrer le résultat suivant : dans une théorie (lagrangienne) des champs classique, l'invariance par translation, rotation et dilatation implique nécessairement celle par toutes les transformations conformes. C'est en fait ce qui se passe dans une théorie des champs décrivant un point critique, cf chap. 3. Le résultat s'étend à $d = 2$ où il est infiniment plus contraignant, puisque les transformations conformes infinitésimales forment alors une algèbre de dimension infinie, pourquoi ?