

Chapitre 2. Déterminants

On a déjà rencontré le déterminant d'une matrice (ou d'un tableau) 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

On observe que cette expression a des propriétés de linéarité par rapport à chacune de ses colonnes (ou de ses lignes), et d'antisymétrie dans l'échange de ces colonnes (ou lignes). Ce sont ces propriétés que nous allons généraliser pour donner une définition générale d'un déterminant.

1. Rappels sur les permutations de p objets

On considère p objets numérotés de 1 à p : ce peut être p boules, p vecteurs, p fonctions, etc. On s'intéresse à l'ensemble \mathcal{S}_p de leurs *permutations*, c'est-à-dire à toutes les manières de les ordonner. Il y a p choix possibles pour le premier, $(p-1)$ choix possibles pour le deuxième, etc, 1 choix pour le dernier, donc au total " p factoriel" soit $p! = 1.2 \dots (p-1).p$ permutations des p objets. Autrement dit l'ensemble \mathcal{S}_p a $p!$ éléments. Si σ est une permutation de \mathcal{S}_p , il est conventionnel de noter $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(p) \end{pmatrix}$ en plaçant en vis à vis les (indices des) objets initiaux et ceux de leurs images par la permutation ; on peut aussi noter plus simplement $\sigma = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \dots \ \sigma(p))$. Par exemple, si $p = 3$, $(1\ 2\ 3)$ est la permutation identité, $(2\ 3\ 1)$ est la permutation circulaire ou cyclique qui fait correspondre 2 à 1, etc, 1 à 3. Cette notation permet de construire aisément la *composition* $\tau \circ \sigma$ de deux permutations σ et τ de \mathcal{S}_p . (À nouveau l'ordre importe, et la notation $\tau \circ \sigma$ signifie qu'on effectue d'abord σ , puis τ). Il suffit d'écrire les images par τ des images par σ de la permutation initiale. Soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(p) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(p)) \end{pmatrix}$$

Par exemple, toujours avec $p = 3$, si $\sigma = (2\ 3\ 1)$ et $\tau = (3\ 2\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule $\tau \circ \sigma = (2\ 1\ 3)$. Vérifier que $\sigma \circ \tau = (1\ 3\ 2) \neq \tau \circ \sigma$, autrement dit, en général, le produit

de deux permutations n'est pas commutatif. Toute permutation σ a un inverse, qui est la permutation σ^{-1} telle que $\sigma^{-1} \circ \sigma = 1$ la permutation identité. On l'obtient aisément en échangeant les deux lignes de la permutation σ et en réordonnant la première (et son image dans la seconde) par ordre croissant. *Exemple*, $\sigma = (231) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (312)$. On en conclut qu'on a aussi $\sigma \circ \sigma^{-1} = 1$. Dans la suite on abrégera $\tau \circ \sigma$ en $\tau\sigma$.

D'un point de vue mathématique, les permutations forment donc un *groupe*. Il est aisé de vérifier l'associativité du produit.

Parmi les permutations, les plus simples consistent à échanger deux objets, voisins ou non dans l'ordre initial. On parle de *transposition* pour un tel échange. Par exemple $\tau = (321)$ est la transposition de 1 et 3. Un théorème important qui va nous être très utile dans la suite et que nous admettrons est le suivant

Théorème 1 : *Toute permutation σ de \mathcal{S}_p peut s'écrire comme un produit de transpositions. Cela peut être fait de multiples façons, mais le nombre entier de transpositions N_{tr} est pair ou impair indépendamment de la manière dont on procède.*

Que toute permutation σ puisse être obtenue par produit de transpositions est clair : partant de la permutation initiale, on amène 1 à sa position $\sigma(1)$ par une transposition, puis 2 à sa position, etc. Il est moins évident que la parité de ce nombre de transpositions est fixée.

Esquisse de la preuve. On montre d'abord que toute décomposition de la permutation identité 1 en transpositions en compte toujours un nombre pair. Puis pour une permutation quelconque σ écrite de deux façons comme produit de transpositions $\sigma = t_1 \cdots t_r = t'_1 \cdots t'_s$, on a donc $1 = t_1 \cdots t_r t'_s \cdots t'_1$, (car $t_i t_i = 1$), donc $r + s$ est pair et r et s sont de même parité. c.q.f.d.

Définition : On appelle *signature de la permutation* σ et on note ϵ_σ le nombre $(-1)^{N_{tr}}$. Par le théorème précédent, ce nombre est bien défini, indépendant de la décomposition de σ en transpositions. La signature du produit $\tau\sigma$ est le produit des signatures de σ et τ

$$\epsilon_{\tau\sigma} = \epsilon_\sigma \epsilon_\tau \quad (1.1)$$

(en donner une preuve simple) et en particulier

$$\epsilon_{\sigma^{-1}} = \epsilon_\sigma \quad (1.2)$$

puisque leur produit vaut 1, selon (1.1).

On parle de permutation *paire*, resp. *impaire*, pour une permutation de signature +1, resp. -1.

Exemple. $\sigma = (231) = (213)(132)$ mais aussi $= (132)(213)(132)(213)$, $\epsilon_\sigma = +1$, σ est paire.

2. Formes multilinéaires. Formes antisymétriques. Fonction déterminant

On a rencontré au chapitre précédent des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace E' . Si l'espace E' est l'espace des nombres réels (ou complexes, selon le cas), on parle de "forme linéaire". Définissons maintenant une *forme multilinéaire* $F(X_1, X_2, \dots, X_p)$ de p vecteurs de E . Parler d'une "forme" signifie que l'application est de E dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes) : F prend des valeurs réelles (ou complexes). Dire qu'elle est multilinéaire signifie qu'elle est linéaire dans chacun de ses p "arguments" X_1, X_2, \dots, X_p , autrement dit que

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall q = 1, \dots, p \quad & F(X_1, \dots, \lambda X'_q + \mu X''_q, \dots, X_p) \\ &= \lambda F(X_1, X_2, \dots, X'_q, \dots, X_p) + \mu F(X_1, X_2, \dots, X''_q, \dots, X_p). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Exemple : si x_i^j est la j -ième composante du vecteur X_i dans une base donnée, et pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$, $F(X_1, \dots, X_p) = x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} \dots x_p^{\sigma(p)}$ est une forme multilinéaire.

▷ *Formes antisymétriques.*

Définition : Une forme $F(X_1, X_2, \dots, X_p)$ de p vecteurs de l'espace E est (complètement) antisymétrique si elle change de signe pour toute transposition de deux indices i et j

$$F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_p) = -F(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_p) \quad (2.2)$$

Exemple : la composante sur l'axe des z (par exemple) d'un produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V} et \vec{W} de l'espace \mathbb{R}^3 s'écrit $(\vec{V} \wedge \vec{W})_z = V_x W_y - V_y W_x$. Elle est bilinéaire et antisymétrique en \vec{V} et en \vec{W} .

Une conséquence immédiate de l'antisymétrie est que si F a deux arguments identiques, elle s'annule

$$F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_p) = -F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_p) = 0. \quad (2.3)$$

L'expression

$$\det A = \det(\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{p\sigma(p)} \quad (2.4)$$

définit le déterminant d'une matrice A carrée $p \times p$, ou encore le déterminant d'un système de p vecteurs \mathbf{A}^j de \mathbb{R}^p . C'est donc une somme "alternée" (signe ϵ_σ) sur toutes les permutations σ de l'ensemble des permutations \mathcal{S}_p . Cette expression a bien les deux propriétés

précédentes: elle est multilinéaire dans les composantes des $\mathbf{A}^j = \{a_{ij}\}$; elle est antisymétrique car si τ est la transposition de i et j ,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^1, \dots, \underbrace{\mathbf{A}^j}_{i\text{-ième position}}, \dots, \underbrace{\mathbf{A}^i}_{j\text{-ième position}}, \dots, \mathbf{A}^p) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(p)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(p)} \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_{\sigma\tau} a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(p)} \\ &= - \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_p} \epsilon_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(p)} \\ &= - \det(\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^i, \dots, \mathbf{A}^j, \dots, \mathbf{A}^p) \quad (2.5) \end{aligned}$$

où à la troisième ligne on a utilisé le fait que selon (1.1), $\epsilon_{\sigma\tau} = -\epsilon_\sigma$ puisque τ est une transposition et donc $\epsilon_\tau = -1$, et à la quatrième, que sommer sur tous les σ équivaut à sommer sur tous les $\sigma' = \sigma\tau$.

Le fait qu'il soit équivalent de sommer sur les σ ou les $\sigma\tau$, quelle que soit la permutation τ fixée, signifie que quand σ parcourt tout l'ensemble \mathcal{S}_p , $\sigma\tau$ le parcourt aussi, c'est-à-dire "atteint" chaque élément de \mathcal{S}_p une fois et une seule. En effet, si $\sigma \neq \sigma'$, on a aussi $\sigma\tau \neq \sigma'\tau$, sans quoi, si on avait $\sigma\tau = \sigma'\tau$, en multipliant par la droite par l'inverse de τ , on aurait $\sigma = \sigma'$, ce qui est contradictoire. Les $p!$ permutations $\sigma\tau$ sont donc toutes distinctes, donc atteignent bien toutes les permutations de \mathcal{S}_p , cqfd.

L'équation (2.5) a bien établi que $\det A$ est une forme antisymétrique de $\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^p$, c'est-à-dire qu'il change de signe par transposition de deux \mathbf{A}^i et \mathbf{A}^j . L'action d'une permutation quelconque σ des \mathbf{A}^i sur le déterminant s'obtient alors grâce à la décomposition de σ en transpositions

$$\det(\mathbf{A}^{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{A}^{\sigma(p)}) = \epsilon_\sigma \det(\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^p) \quad (2.6)$$

puisque chaque transposition change son signe et que $\epsilon_\sigma = (-1)^{N_{tr}}$.

3. Propriétés du déterminant

Proposition 1 : *Tout déterminant possédant deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.*

Cela découle de l'antisymétrie, cf la propriété (2.3).

Proposition 2 : *$\det A = 0$ si les p vecteurs colonnes \mathbf{A}^j sont linéairement dépendants.*

Preuve. Supposons les p vecteurs colonnes \mathbf{A}^j de A linéairement dépendants. On peut toujours supposer que c'est le dernier, \mathbf{A}^p , qui s'exprime comme combinaison linéaire des précédents

$$\mathbf{A}^p = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \mathbf{A}^j .$$

Grâce à sa multilinéarité le déterminant s'exprime alors comme

$$\det A = \det(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^p) = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \det(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{p-1}, \mathbf{A}^j)$$

mais en raison de l'antisymétrie, chaque terme de la somme s'annule puisqu'il contient deux colonnes identiques \mathbf{A}^j , cf Proposition 1, donc $\det A = 0$, cqfd.

Corollaire 1 : *On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne donnée une combinaison linéaire des autres colonnes.*

Supposons qu'on ajoute à la colonne j une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$\det(\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^j + \sum_{j' \neq j} \lambda_{j'} \mathbf{A}^{j'}, \dots, \mathbf{A}^p) = \det A + \sum_{j' \neq j} \lambda_{j'} \det(\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^{j'}, \dots, \mathbf{A}^p) = \det A$$

d'après la Proposition 1.

Proposition 3 : $\det A^T = \det A$

Preuve :

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^p (A^T)_{i \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma \prod_i a_{\sigma(i) i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma \prod_i a_{i \sigma^{-1}(i)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_{\sigma^{-1}} \prod_i a_{i \sigma^{-1}(i)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_p} \epsilon_{\sigma'} \prod_i a_{i \sigma'(i)} = \det A . \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.2) ainsi que le fait que sommer sur tous les σ équivaut à sommer sur tous les σ^{-1} , par un argument similaire à celui utilisé plus haut pour la sommation sur $\sigma\tau$.

Puisque la transposition échange les vecteurs colonnes et les vecteurs lignes, il découle de la Proposition 3 que partout où nous avons raisonné sur les vecteurs colonnes, nous aurions pu le faire sur les vecteurs lignes. Les deux propositions 1 et 2 et leur corollaire ont donc une version équivalente, portant sur les lignes:

Proposition 1' : *Tout déterminant possédant deux lignes égales ou proportionnelles est nul.*

Proposition 2' : $\det A = 0$ si les p vecteurs lignes \mathbf{A}_i sont linéairement dépendants.

Corollaire 1' : On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne donnée une combinaison linéaire des autres lignes.

Proposition 4 : $\det(A.B) = \det A \det B$

Preuve : Les vecteurs colonnes de $C = A.B$ ont pour composantes $(\mathbf{C}^j)_i = (C)_{ij} = (A.B)_{ij} = \sum_k (\mathbf{A}^k)_i b_{kj}$, ce sont donc des combinaisons multilinéaires des composantes des vecteurs colonnes de A , et on peut écrire

$$\det(A.B) = \det C = \det(\mathbf{C}^1, \dots, \mathbf{C}^p) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p} \det(\mathbf{A}^{k_1} \mathbf{A}^{k_2} \dots \mathbf{A}^{k_p}) b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_p p}$$

mais l'antisymétrie de $\det(\mathbf{A}^{k_1} \mathbf{A}^{k_2} \dots \mathbf{A}^{k_p})$ nous dit que seules les sommes sur des k_i tous distincts contribuent, c'est-à-dire qu'on somme sur toutes les permutations σ de \mathcal{S}_p , $k_i = \sigma(i)$

$$\begin{aligned} \det(A.B) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \dots b_{\sigma(p)p} \det(\mathbf{A}^{\sigma(1)} \mathbf{A}^{\sigma(2)} \dots \mathbf{A}^{\sigma(p)}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \dots b_{\sigma(p)p} \right) \det(\mathbf{A}^1 \mathbf{A}^2 \dots \mathbf{A}^p) \quad \text{par (2.6)} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \epsilon_\sigma b_{1\sigma^{-1}(1)} b_{2\sigma^{-1}(2)} \dots b_{p\sigma^{-1}(p)} \right) \det(\mathbf{A}^1 \mathbf{A}^2 \dots \mathbf{A}^p) \\ &= \det B \det A \end{aligned}$$

où on a utilisé une fois encore l'antisymétrie du déterminant pour remettre au prix d'un signe ϵ_σ les colonnes de A dans l'ordre standard, et où on a alors fait apparaître le déterminant de B . (Exercice : justifier la dernière égalité.)

On a alors deux corollaires

Corollaire 2 : Si la matrice A est inversible, $\det A^{-1} \det A = 1$.

Corollaire 3 : Deux matrices semblables (au sens du Chap.1 (4.4)) ont même déterminant. qui découlent immédiatement de la Proposition 4.

En effet, $\det A^{-1} \det A = \det(A^{-1}.A) = \det \mathbf{I} = 1$ et $\det V^{-1}.A.V = \det V^{-1} \det A \det V = \det A$.

Théorème fondamental : $\det A \neq 0$ si et seulement si A est inversible.

Preuve. On a vu plus haut (Th. 3, § 3.5 du chap 1) qu'une matrice A est non inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes sont linéairement dépendants, mais alors $\det A = 0$ selon la Proposition 2. Donc (en inversant les propositions) si $\det A \neq 0$, A est non singulière (inversible). Réciproquement si A est inversible (ou "régulière"), le Corollaire précédent nous dit que $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, ce qui indique que $\det A \neq 0$. Le théorème est démontré.

★ **Deux erreurs grossières à ne pas faire !**

Attention, il est **faux** d'écrire $\det(\lambda A) \stackrel{?}{=} \lambda \det A$. Le déterminant étant une forme *multilinéaire* de ses vecteurs colonnes (ou lignes) qui sont ici tous multipliés par un même facteur λ , la formule correcte pour un déterminant $p \times p$ est

$$\det(\lambda A) = \lambda^p \det A . \quad (3.1)$$

Par ailleurs, alors que le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, le déterminant d'une somme de matrices n'admet pas de formule simple : en général, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$!

4. Méthodes de calcul

4.1. Calcul direct

La méthode de calcul direct par l'expression (2.4) peut s'utiliser pour les petites valeurs de p .

Exemples. On a rappelé au début de ce chapitre la valeur du déterminant d'une matrice 2×2 . Donnons maintenant celle d'un déterminant 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

où les termes successifs correspondent aux 3 permutations paires (123), (231) et (312), puis aux trois impaires, (132), (321) et (213). Il peut être bon de se rappeler les 6 termes et leur signe sous forme graphique, cf Figure 4.

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 4: Les 6 termes du déterminant 3×3

4.2. Combinaisons linéaires des colonnes ou des lignes

Par les Corollaires des Propositions 2 et 2' ci-dessus, on ne change pas le déterminant en ajoutant à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Dans certains cas, cela permet d'obtenir (presque) sans calcul la valeur du déterminant.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L'_2=L_2-L_1 \\ L'_3=L_3-L_1 \\ L'_4=L_4-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

On a successivement retranché la première ligne aux suivantes, puis un multiple par 2 ou 3 de la seconde aux suivantes, puis 3 fois la troisième à la dernière. Le calcul s'achève alors facilement puisque seule la permutation identité contribue et donne le produit des termes diagonaux, soit 1.

Autres exemples:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\ = (a+b+c)^3$$

où à la première ligne de l'équation on a ajouté les deux dernières lignes de la matrice à sa première ligne, puis à la seconde ligne de l'équation, on a retranché la première colonne des deux suivantes. On a finalement développé le déterminant selon la première ligne (cf ci-dessous § 4.3).

Ou encore

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pourquoi ?

4.3. Développement par rapport à une ligne ou à une colonne. Mineurs

Le déterminant étant une fonction multilinéaire de ses vecteurs lignes ou de ses vecteurs colonnes, c'est-à-dire une fonction *linéaire* de chacun de ses vecteurs lignes ou colonnes, on peut le développer selon les composantes d'une ligne ou d'une colonne. Par exemple le développement par rapport à la i -ème ligne est

$$\det A = \sum_{j=1}^p a_{ij} A^{ij} \quad i \text{ fixé} \tag{4.1}$$

où le *cofacteur* A^{ij} (attention aux notations !) s'exprime lui-même comme un déterminant, mais d'une matrice $(p-1) \times (p-1)$. On a donc gagné en complexité. La règle est la suivante

$$A^{ij} = (-1)^{i+j} \Delta^{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}^{(ij)}) \tag{4.2}$$

où $\tilde{A}^{(ij)}$ est la matrice obtenue en ôtant dans A la i -ième ligne et la j -ième colonne et $\Delta^{ij} = \det(\tilde{A}^{(ij)})$ est le *mineur d'ordre* (i, j) . En combinant ces deux dernières formules, on obtient l'importante relation

$$\det A = \sum_{j=1}^p (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta^{ij} \quad i \text{ fixé}$$

(4.3)

ou aussi, en développant par rapport à la j -ième colonne

$$\det A = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta^{ij} \quad j \text{ fixé} . \tag{4.3}'$$

La preuve de (4.3) ou (4.3)' découle de l'application de la définition (2.4) du déterminant. Le cofacteur A^{ij} de a_{ij} provient des permutations σ où $\sigma(i) = j$, et dans la somme sur les permutations σ' des $p-1$ autres éléments, on vérifie que $\epsilon_{\sigma'} = \epsilon_{\sigma} (-1)^{i+j}$.

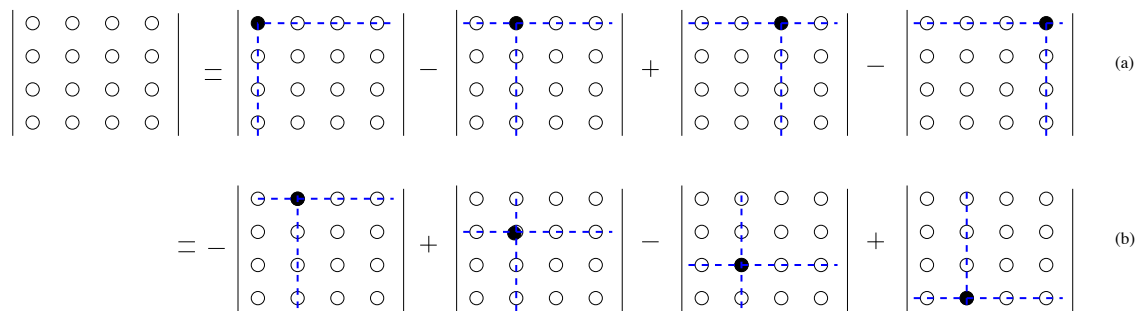


Fig. 5: Développement d'un déterminant 4×4 : (a) selon la première ligne, (b) selon la seconde colonne. Dans chaque cas, la ligne et la colonne détruites sont barrées par une ligne en tirets.

Deux exemples de tels développements sont représentés de façon symbolique sur la figure 5, pour une matrice 4×4 . De façon plus explicite, ils se lisent

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\Delta^{11} - a_{12}\Delta^{12} + a_{13}\Delta^{13} - a_{14}\Delta^{14} \\ &= -a_{12}\Delta^{12} + a_{22}\Delta^{22} - a_{32}\Delta^{32} + a_{42}\Delta^{42} .\end{aligned}$$

On a évidemment tout intérêt à utiliser ce développement par rapport à une ligne (ou à une colonne) qui contient de nombreux zéros.

Exemples

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7(2 \times 6 - 3 \times 5) = -21$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3(4 \times 7 - 5 \times 6) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \\ 10 & 0 & 11 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \\ 10 & 11 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times 7 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 2 \times 7 \times 2 = 28$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 0 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 11 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -4 \times 8 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} + 10 \times 2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} = 72$$

Il y a évidemment des façons variées de calculer ces déterminants.

4.4. Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est une conséquence directe des propriétés du § 4.2. Elle consiste à faire apparaître $n - 1$ zéros sur une colonne (ou une ligne) d'un déterminant d'ordre n par combinaisons linéaires de lignes (ou de colonnes). Le déterminant est alors égal au produit du seul élément restant dans cette colonne (ou ligne), le *pivot*, par son cofacteur. On passe ainsi d'un déterminant d'ordre n à un déterminant d'ordre $n - 1$.

En pratique, on cherche une ligne ou une colonne contenant des nombres simples (pas trop grands, pour simplifier les calculs), de préférence des zéros, et si possible un 1. Supposons par exemple que le déterminant a un élément $a_{ij} = 1$. On ne modifie pas le déterminant en retranchant à la k -ième ligne a_{kj} fois la i -ème, pour tout $k \neq i$: le nouveau déterminant a une j -ième colonne faite de 0 sauf à la i -ème ligne. On peut alors développer selon cette colonne, se ramener à un déterminant d'ordre $n - 1$, puis itérer l'algorithme.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} = 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{1j}a_{i1} & a_{12} - a_{1j}a_{i2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} - a_{1j}a_{in} \\ a_{21} - a_{2j}a_{i1} & a_{22} - a_{2j}a_{i2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} - a_{2j}a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{n1} - a_{nj}a_{i1} & a_{n2} - a_{nj}a_{i2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} - a_{nj}a_{in} \end{vmatrix} \\
 = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} - a_{1j}a_{i1} & a_{12} - a_{1j}a_{i2} & \cdots & a_{1n} - a_{1j}a_{in} \\ a_{21} - a_{2j}a_{i1} & a_{22} - a_{2j}a_{i2} & \cdots & a_{2n} - a_{2j}a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{nj}a_{i1} & a_{n2} - a_{nj}a_{i2} & \cdots & a_{nn} - a_{nj}a_{in} \end{vmatrix}$$

où la i -ème ligne et la j -ème colonne ont été ôtées pour fabriquer le dernier déterminant.

Si le déterminant de départ ne possède aucun élément égal à 1, on choisit un élément non nul a_{ij} , on écrit la j -ième colonne comme $\mathbf{A}^j = a_{ij} \frac{\mathbf{A}^j}{a_{ij}}$, on factorise a_{ij} hors du déterminant, et on est alors ramené au cas précédent, avec une j -ième colonne ayant un 1 à la i -ème ligne.

Bien sûr, partout dans ce qui précède, les mots “ligne” et “colonne” peuvent être intervertis.

Exemple : En utilisant cet algorithme, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

(Réponse : 60)

4.5. Calcul de l'inverse d'une matrice

Dans la formule (4.1), remplaçons au membre de droite a_{ij} par les éléments d'une autre ligne $a_{i'j}$ de A . L'expression obtenue est, toujours selon (4.1), le développement d'un déterminant dans lequel la ligne i' apparaît deux fois, et qui est donc nul (cf Proposition 2'). On a donc $\sum_{j=1}^p a_{i'j} A^{ij} = 0$, et cette relation et (4.1) peuvent être mises sous une forme unique

$$\sum_{j=1}^p a_{i'j} A^{ij} = \delta_{ii'} \det A . \tag{4.5}$$

Si A est inversible, $\det A \neq 0$ et on peut récrire cette identité sous la forme

$$\sum_{j=1}^p a_{i'j} \frac{1}{\det A} A^{ij} = \delta_{ii'}$$

qu'on compare à celle satisfaite par la matrice inverse A^{-1}

$$\sum_{j=1}^p a_{i'j}(A^{-1})_{ji} = \delta_{ii'}$$

L'identité (4.5) nous fournit donc une formule compacte pour la matrice inverse

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Cof } A)^T}, \quad (4.6)$$

où la *comatrice* $\text{Cof } A$ est la matrice d'élément i, j égal au cofacteur A^{ij} , et $(\text{Cof } A)^T$ est sa transposée.

Exemple. Calculons par cette formule la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\det A = -2$. On calcule alors la comatrice $\text{Cof } A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice inverse est donc $A^{-1} = -\frac{1}{2}(\text{Cof } A)^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5. Applications des déterminants

5.1. Critère d'indépendance linéaire

Une application très fréquente et très utile des déterminants découle des propositions 2 et 2' et du Théorème fondamental du § 3 :

Proposition 5 : *Dans un espace de dimension n , un système de n vecteurs est linéairement indépendant ssi le déterminant de leurs n composantes dans une base arbitraire est non nul. Dans un espace de dimension n , un système de $p < n$ vecteurs est linéairement indépendant ssi l'un des déterminants $p \times p$ formés avec p de leurs composantes dans une base arbitraire est non nul.*

Dire que cela constitue une condition nécessaire et suffisante signifie qu'inversement, la nullité du déterminant $n \times n$ dans le premier cas, de tous les déterminants $p \times p$ dans le second, assure que les vecteurs sont linéairement dépendants.

Exemples : Montrer que les vecteurs de composantes $(1, 1, 3)$, $(2, 2, 3)$ et $(0, 0, 1)$ sont linéairement dépendants dans \mathbb{R}^3 . Qu'en est-il des vecteurs $(1, 1, 3)$ et $(2, 2, 3)$?

5.2. Équation d'une droite de \mathbb{R}^2 , d'un plan de \mathbb{R}^3

Comme application du critère précédent, cherchons l'équation d'une droite du plan \mathbb{R}^2 , ou d'un plan de l'espace \mathbb{R}^3 .

Soient M_1 et M_2 deux points du plan, de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans un repère donné (O, \vec{i}, \vec{j}) . Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ s'écrivent respectivement

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Un point M du plan, de coordonnées (x, y) , appartient à la droite M_1M_2 ssi les vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires, c'est-à-dire linéairement dépendants, donc selon le critère de la Proposition 5,

$$\det(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.1)$$

soit $(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$ ou encore, si $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

forme familière de l'équation d'une droite passant par les deux points M_1 et M_2 . Si $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$, par exemple $y_2 = y_1$ (mais $x_2 - x_1 \neq 0$!), l'équation se réduit à $y = y_1$, droite parallèle à l'axe des x .

Le raisonnement se transpose facilement à trois dimensions : soient M_1, M_2 et M_3 trois points de l'espace, de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3$, dans un repère $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan passant par M_1, M_2, M_3 ssi les trois vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont coplanaires, c'est-à-dire linéairement dépendants, donc selon le critère de la Proposition 5,

$$\det(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

soit, en développant selon la première colonne et en modifiant légèrement l'ordre des lignes

$$(x - x_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (y - y_1) \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} + (z - z_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

qui est l'équation du plan passant par les trois points M_1, M_2 et M_3 . Bien noter la structure de cette équation : le coefficient de $(x - x_1)$ est le mineur associé dans le déterminant (5.2),

les deux autres termes s'en déduisant par permutation cyclique $x \mapsto y \mapsto z \mapsto x$. On vérifie aisément, par exemple en soustrayant la deuxième colonne de (5.1) ou de (5.2) à toutes les autres, que cette équation est indépendante du choix du point M_1 plutôt que M_2 ou M_3 , comme il se doit.

Exemple. Soient trois points O , origine des coordonnées, P_1 de coordonnées x_1, y_1 et $P_2 : x_2, y_2$. Le plan passant par O, P_1, P_2 , (on dit aussi "sous-tendu" par les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$), a pour équation $\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$, soit $x(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \text{perm. cycl.} = 0$. Ainsi, dans l'exemple du paragraphe précédent, l'équation du plan sous-tendu par les vecteurs $(1, 1, 3)$ et $(2, 2, 3)$, est $-3(x - y) = 0$. C'est donc un plan passant par l'axe des z , d'équation $x = y$, c'est le plan bissecteur des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

5.3. *Wronskien*

Les déterminants sont utiles aussi pour discuter l'(in)dépendance linéaire de fonctions. Le *wronskien* est le déterminant de n fonctions et de leurs $n - 1$ premières dérivées. Une condition *suffisante* de l'indépendance de ces fonctions est la non-nullité de cette fonction wronskien, voir TD.

5.4. *Interprétation géométrique du déterminant. Jacobien*

Anticipant un peu sur la discussion du Chap. 5, considérons l'espace euclidien \mathbb{R}^n et supposons qu'on y a construit un repère (une base) \vec{e}_i orthonormé, c'est-à-dire constitué de vecteurs deux à deux orthogonaux et normés, ce qu'on résume dans une formule unique

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} . \tag{5.3}$$

Soit $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p)$ un système de p vecteurs avec $p \leq n$. On note x_{ij} leurs composantes dans la base \vec{e}_i

$$\vec{X}_i = \sum_j x_{ij} \vec{e}_j .$$

On définit alors le parallélépipède généralisé, ou *parallélotope*, \mathcal{P} construit sur ces vecteurs, comme l'ensemble des points de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{P} : \quad \vec{\xi} = \sum_{i=1}^p \xi_i \vec{X}_i, \quad 0 \leq \xi_i \leq 1 . \tag{5.4}$$

On démontre (et nous admettrons) que le volume de ce parallélotope est donné par

$$\text{vol}(\mathcal{P}) = |\det(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p)| = |\det(x_{ij})| . \tag{5.5}$$

- Il est nul si les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p$ sont linéairement dépendants. Cela correspond bien à l'image qu'on se fait de cette situation, où (au moins) un des vecteurs \vec{X}_i est combinaison linéaire des autres, et appartient donc au sous-espace qu'engendrent ces derniers : le parallélotope est aplati, donc de volume nul ;
- si on dilate toutes les longueurs des \vec{X}_i par un même facteur réel λ , selon la formule (3.1), le volume est multiplié par λ^p , conformément à l'analyse dimensionnelle.

Si $p = n$, le même déterminant (5.5), mais sans valeur absolue, définit le *volume algébrique* du polytope \mathcal{P} à n dimensions. Son signe est positif ou négatif selon que le système des n vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ forme un repère orienté positivement ou négativement (par rapport au repère initial $\{\vec{e}_i\}$).

Dans le même ordre d'idées, considérons un changement de variables $\vec{x} \mapsto \vec{x}'$ dans une intégrale à n dimensions $I = \int_V d^n x F(\vec{x})$. On démontre que l'élément de volume infinitésimal $d^n x$ est relié à celui $d^n x'$ dans les nouvelles coordonnées par

$$d^n x = \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right) \right| d^n x' =: |J| d^n x' .$$

On appelle *jacobien* le déterminant des gradients du changement de variables. La valeur absolue $|J|$ du jacobien est donc le facteur à insérer dans un changement de variables.