Chapitre 7

Fonctions holomorphes. Théorème de Cauchy

On va voir dans ce chapitre que la condition qu'une fonction de variable complexe est *dérivable* est très contraignante. Les fonctions dérivables ou *holomorphes* possèdent des propriétés remarquables que nous allons explorer.

7.1 Fonctions holomorphes

7.1.1 Rappel : fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et soit une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire notée $\mathrm{d}f_a$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{o}(\|h\|)\,, \tag{7.1}$$

où $\mathrm{o}(\|h\|)/\|h\| \to 0$ quand $h \to 0$. $\mathrm{d}f_a$ est appelée la *différentielle* (ou l'application linéaire tangente) de f en a. Si on note x_i, $i = 1, \cdots, n$, des coordonnées dans (une base de) $\mathbb{R}^n$, et si $h = (h_1, \cdots, h_n)$ dans cette base, l'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ s'écrit

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_a \tag{7.2}$$

et les $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_a$ s'identifient aux *dérivées partielles* en a comme définies usuellement. La différentiabilité en a implique donc l'existence des dérivées partielles en a ; l'inverse n'est pas vrai, voir ci-dessous. (Remarque : $h = (h_i)$ est ce que l'on appellera plus tard un *vecteur tangent*.)

On peut aussi introduire les (formes) différentielles $\mathrm{d}x_i$, telles que $\mathrm{d}x_i(h) = h_i$. (Ce sont des "formes" (linéaires) car elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et elles agissent sur les vecteurs tangents, ici h). On récrit alors (7.2) sous la forme

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_a \mathrm{d}x_i\,. \tag{7.3}$$

Si f est différentiable en tout point de Ω et que l'application $a \mapsto \mathrm{d}f_a$ est continue, on dit que f est continûment différentiable (ou de classe C^1). Si $n = 1$ (fonction d'une variable réelle), la notion de différentiabilité s'identifie à celle de dérivabilité, définie par l'existence de la dérivée. Si $n > 1$, cependant, cela n'est plus toujours vrai : f peut avoir des dérivées partielles en a sans être différentiable. Considérons par exemple la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Elle est continue en $(0,0)$, y admet des dérivées partielles ... mais n'est pas différentiable ! En effet $\partial_x f(0,0) = 0,\ \partial_y f(0,0) = 1$, mais $(f(h,k) - 0 - k)/\|(h,k)\| = -kh^2/(h^2+k^2)^{3/2}$ ne tend pas vers 0 indépendamment de la direction suivie.

Dans la suite de ce chapitre, on va s'intéresser à $n = 2$, $p = 1$ ou 2 (fonctions réelles ou complexes d'une variable complexe).

7.1.2 Holomorphie. Conditions de Cauchy–Riemann

Dans la suite de ce chapitre, Ω désigne un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction (à valeurs complexes) de $z \in \Omega$.

Définition 7.1 : *La fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est* dérivable *ou* holomorphe *en $z_0 \in \Omega$ si*

$$f'(z_0) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, c'est-à-dire s'il existe un nombre complexe noté $f'(z_0)$ tel que

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = \mathrm{o}(|z - z_0|)\,. \tag{7.4}$$

f est holomorphe sur Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω.

Bien voir que l'hypothèse est que la limite existe et est indépendante de la façon dont z approche z_0. Si on écrit $z = x + iy$ et que l'on considère f comme une fonction $\tilde{f}$ des deux variables réelles x et y, $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$, on va voir que cette condition de dérivabilité de f est plus forte (plus contraignante) que celle de différentiabilité de $\tilde{f}$.

Théorème 7.1 (conditions de Cauchy–Riemann 1) : *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et si $\tilde{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est la fonction de x et y correspondante, alors f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ ssi*

$$\tilde{f} \text{ est différentiable dans } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)\,, \tag{7.5}$$

et alors, $f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Preuve. Supposons f dérivable et notons $z - z_0 = h + ik$ et $c = f'(z_0)$: (7.4) se réexprime en termes de $\tilde{f}$ selon

$$\tilde{f}(x_0 + h, y_0 + k) - \tilde{f}(x_0, y_0) - c(h + ik) = \mathrm{o}(\sqrt{h^2 + k^2}) \tag{7.6}$$

ce qui prouve que $\tilde{f}$ est différentiable, qui identifie $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = c$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = ic$, et qui établit (7.5). Réciproquement si $\tilde{f}$ satisfait (7.5), alors on a bien (7.6) avec $c = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et la fonction $f(z)$ est donc dérivable en z_0 avec $f'(z_0) = c$.

Dans la suite on ne distinguera plus f et $\tilde{f}$. Il est souvent commode d'écrire

$$f = P + iQ \text{ avec } P = \Re e\, f\,,\; Q = \Im m\, f\,.$$

Les conditions de Cauchy–Riemann se récrivent alors sous la forme

Théorème 7.2 (conditions de Cauchy–Riemann 2) : *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in \Omega$, et $f = P + iQ$ avec $P = \Re e\, f$, $Q = \Im m\, f$, alors*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)} \tag{7.7}$$

Interprétation géométrique : les deux courbes $\Re e\, f(z) = \text{const.}$ et $\Im m\, f(z) = \text{const.}$ sont orthogonales au point z_0.
Preuve (de cette interprétation) : voir TD.

Notons finalement que par les formules de Cauchy–Riemann, nous avons plusieurs expressions équivalentes pour la dérivée d'une fonction holomorphe :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{7.8}$$

Exemples, contre-exemples. Tout polynôme $R(z)$ (à coefficients dans $\mathbb{C}$) est dérivable donc holomorphe en tout point z de $\mathbb{C}$. Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$ etc sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. La fonction $f : z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^* \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{C}\backslash\{0\}$. En revanche la fonction $f : z \mapsto \bar{z}$ **n'est pas** dérivable/holomorphe. En effet pour tout z_0, examinons la limite $\zeta = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$ quand $|z - z_0| \to 0$. Posant $z - z_0 = \rho(z)e^{i\theta(z)}$, on voit que $\zeta = e^{-2i\theta(z)}$ qui peut prendre toute valeur selon la façon dont z approche z_0. Le rapport ζ n'a pas de limite bien définie et la fonction n'est pas dérivable. Pour la même raison, les fonctions $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \Re e\, z$, $z \mapsto \Im m\, z$, ne sont pas non plus holomorphes.

De façon heuristique, sont holomorphes les fonctions (suffisamment régulières) "de z seulement". On voit apparaître une idée intéressante : les variables z et $\bar{z}$ peuvent être considérées comme indépendantes, une idée que l'on retrouvera dans la suite.

7.1.3 Dérivations ∂, $\bar{\partial}$

Comme on l'a rappelé plus haut en (7.3), pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différentiable au point (x_0, y_0), on peut écrire la différentielle en (x_0, y_0) comme

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \mathrm{d}y\,. \tag{7.9}$$

Appliquons cela à des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ d'une variable $z = x + iy$. Pour les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$ on a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$, soit encore $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z})$ et $\mathrm{d}y = \frac{1}{2i}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z})$. L'expression (7.9) conduit alors à

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\bar{z}\,.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Il est donc naturel de noter

$$\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{7.11}$$

et ces opérateurs différentiels seront notés aussi ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$, ou plus simplement ∂ et $\bar{\partial}$ chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

On a donc finalement pour la différentielle de f l'expression compacte

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$$

à nouveau en accord avec la remarque ci-dessus : les variables z et $\bar{z}$ peuvent être considérées comme indépendantes.

Ce qui a précédé n'a fait usage que de la différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction f. Supposons maintenant la fonction f dérivable dans $\mathbb{C}$ (holomorphe) :

Théorème 7.3 (conditions de Cauchy–Riemann 3) : *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in \Omega$, alors*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0}\,, \tag{7.12}$$

puisque compte tenu de (7.10) et (7.5), $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'(z_0)$, (Théorème 7.1), tandis que $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = 0$, cette dernière relation exprimant à nouveau l'"indépendance de f par rapport à $\bar z$".

Exercice. Vérifier à l'aide de cette nouvelle forme des conditions de Cauchy–Riemann que la fonction $z \mapsto |z|$ n'est pas holomorphe.

Application. Utilisons ce qui précède pour établir la

Proposition 7.4 : *Soit f holomorphe dans un ouvert* connexe Ω *; si $\Re e\, f$ est constante, alors f est constante.*

Preuve. Comme $\Re e\, f = \frac{1}{2}(f+\bar f)$, on a $\mathrm{d}(f+\bar f) = 0$, ce qui compte tenu de l'holomorphie $\partial_{\bar z} f = 0$ et (par conjugaison) $\partial_z \bar f = 0$, conduit à $\partial_z f\,\mathrm{d}z + \partial_{\bar z}\bar f\,\mathrm{d}\bar z = 0$. Mais cela n'est possible que si séparément $\partial_z f = 0$ et $\partial_{\bar z}\bar f = 0$. Donc $\mathrm{d}f = 0$ et f est constante.

On démontre de même (voir TD) que sous la même hypothèse f holomorphe dans Ω connexe, $\Im m\, f = \text{const.} \Longrightarrow f = \text{const.}$, $|f| = \text{const.} \Longrightarrow f = \text{const.}$; si $f \neq 0$ dans Ω, $\log|f| = \text{const.} \Longrightarrow f = \text{const.}$, $\arg f = \text{const.} \Longrightarrow f = \text{const.}$

7.2 Intégrales sur des chemins

7.2.1 Chemins et lacets

On appelle *chemin différentiable* γ dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ une application continûment différentiable d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) dans Ω. (On peut penser au paramètre $t \in [a,b]$ comme à une variable de temps quand on parcourt le chemin...) Par abus de notation, γ désigne à la fois la fonction et son image dans le plan $\mathbb{C}$. Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés l'*origine* et l'*extrémité* de γ. Le chemin est *fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (on parle aussi de *lacet*). Il est *simple* s'il ne se recoupe pas (l'application γ est injective), sauf en a et b s'il est fermé.

On est souvent amené à effectuer un changement de paramétrisation : si $t \in [a,b]$ et $t = \varphi(u)$, $u \in [a_1,b_1]$ avec $\varphi : [a_1,b_1] \to [a,b]$, fonction continue, différentiable et strictement croissante, les deux paramétrisations $t \mapsto \gamma(t)$ et $u \mapsto (\gamma\circ\varphi)(u)$ décrivent des *chemins équivalents*. Par exemple les fonctions $t \mapsto e^{2i\pi t}$ de $[0,1] \to \mathbb{C}$ et $u \mapsto e^{-2i\pi \cos u}$ de $[0, \frac{1}{2}\pi] \to \mathbb{C}$ définissent deux chemins équivalents, c'est-à-dire de même image γ (ici le cercle unité) parcourue dans le même sens.

Pour décrire des chemins ayant un nombre fini de points anguleux, tel le bord d'un rectangle, on doit un peu généraliser les définitions qui précèdent et considérer des chemins *différentiables par morceaux* : l'intervalle $[a,b]$ peut être subdivisé en un nombre fini p d'intervalles adjacents $[a_i, a_{i+1}]$, $a_0 = a$, $a_p = b$, tels que γ soit continue sur $[a,b]$ et continûment différentiable sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Cela sera implicite dans la suite quand on parlera de chemin.

Chemins homotopes dans Ω

Définition 7.2 : *On dit que deux chemins* $\gamma_0 : [0,1] \to \Omega$ *et* $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ *de mêmes extrémités* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ *et* $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ *sont* homotopes *dans* Ω *s'il existe une déformation continue de* γ_0 *en* γ_1*, c'est-à-dire une fonction* $\zeta : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ *telle que*

$$\forall t \in [0,1] \qquad \zeta(t,0) = \gamma_0(t) \quad \zeta(t,1) = \gamma_1(t) \tag{7.13}$$

$$\forall u \in [0,1] \qquad \zeta(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad \zeta(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \tag{7.14}$$

Autrement dit dans $\zeta(t,u)$, u est le paramètre de déformation, et tous les chemins $\gamma(\cdot,u)$ interpolant entre γ_0 et γ_1 ont mêmes extrémités. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence entre chemins, qu'on notera simplement $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Définition 7.3 : *Un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$ *est dit* simplement connexe *si tout chemin fermé est homotope à un point.*

Heuristiquement, dire que Ω est simplement connexe signifie qu'il n'"a pas de trou", contrairement au cas représenté sur la Fig. 7.1. Noter que le "trou" peut être réduit à un point : le plan complexe pointé $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. Remarque : les notions de chemins, d'homotopie et de simple connexité s'étendent à tout espace topologique E.

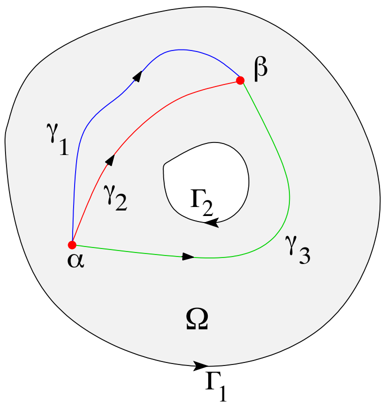


FIGURE 7.1 – Le chemin γ_1 est homotope à γ_2 dans Ω, mais pas à γ_3. Le domaine Ω n'est pas simplement connexe ; il a pour bord orienté $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Bord d'un domaine compact

Soit B un domaine compact du plan. On dit qu'il a pour *bord orienté* $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$, où chaque chemin Γ_i est simple et différentiable par morceaux, et où les images des différents Γ_i sont disjointes, si Γ est la frontière de B (c'est-à-dire $\Gamma = \bar{B} - \overset{\circ}{B}$, cf Chap. 1) et (orientation) si quand on parcourt chaque Γ_i dans le sens des t croissants, on a localement à sa gauche des points de B et à sa droite des points de son complémentaire. Cette définition qui peut être formalisée davantage (cf [4] p. 65-66) recouvre un fait assez intuitif, illustré sur la figure 7.1 où le bord de Ω est constitué de $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. En général, il est commode de noter ∂B le bord orienté de B.

7.2.2 Intégrales de formes sur des chemins.

Considérons maintenant une *forme différentielle* dans l'ouvert Ω, c'est-à-dire une expression

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

où P et Q sont à valeurs réelles ou complexes. Par définition l'intégrale de la forme ω sur un chemin différentiable $\gamma : t \in [a, b] \mapsto (x(t), y(t))$ est

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \gamma^*(\omega) \tag{7.15}$$

où la forme $\gamma^*(\omega)$ est donnée par

$$\gamma^*(\omega) = \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)\,\mathrm{d}t\,. \tag{7.16}$$

On note qu'un changement de paramétrisation de la courbe ne modifie pas cette intégrale : si $t = \varphi(u)$, $\gamma^*(\omega) = \big(P(x(\varphi(u)), y(\varphi(u)))x'(t)\varphi'(u) + Q(x(\varphi(u)), y(\varphi(u)))y'(t)\varphi'(u)\big)\,\mathrm{d}u = (P(\tilde{x}(u), \tilde{y}(u))\tilde{x}'(u) + Q(\tilde{x}(u), \tilde{y}(u))\tilde{y}'(u))\mathrm{d}u$. Ces considérations s'étendent à des chemins différentiables par morceaux : l'intégrale de ω est la somme des intégrales sur les morceaux différentiables successifs de la courbe, $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^p \int_{\gamma_i} \omega$.

Si $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ est un chemin d'origine α et d'extrémité β, on note $-\gamma$ le chemin parcouru en sens inverse $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$; il a pour origine β et pour extrémité α. On a bien sûr $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$. Dans le même ordre d'idées, si le chemin γ_2 a pour origine l'extrémité du chemin γ_1, on peut *composer* les deux chemins en un chemin $\gamma_1 + \gamma_2$ [1] d'origine $\gamma_1(0)$ et d'extrémité $\gamma_2(1)$. Enfin, si γ_1 et γ_2 ont même origine α et même extrémité β, le chemin $\gamma_1 - \gamma_2$ est un chemin fermé de α à α.

Bien comprendre qu'une **intégrale sur un chemin d'extrémités α et β données dépend en général de ce chemin**. C'est une question qui va nous occuper maintenant de trouver quelles conditions doivent être satisfaites pour que l'intégrale ne dépende pas du chemin, et qu'on puisse *déformer le chemin (ou contour) d'intégration.*

1. une notation pas très heureuse, puisqu'on ne peut pas en général définir $\gamma_2 + \gamma_1 \ldots$

Formes exactes, formes fermées, primitives

Supposons que ω est une *forme exacte* dans l'ouvert Ω, c'est-à-dire qu'elle y est la différentielle d'une fonction $f : \omega = \mathrm{d}f$, continûment différentiable, appelée la *primitive de la forme* ω ; alors pour un chemin γ (différentiable par morceaux)

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,. \tag{7.17}$$

En particulier, pour un chemin fermé (complètement contenu dans Ω), on voit que $\int_\gamma \mathrm{d}f = 0$.

Attention que la définition de la primitive f de la forme exacte ω impose que f est définie dans tout Ω. Une condition plus faible serait que *localement*, c'est-à-dire dans un voisinage de tout point, il existe une fonction f telle que $\omega = \mathrm{d}f$. Une telle forme ω peut être appelée *fermée*[2]. Évidemment toute forme exacte est fermée, la réciproque n'étant en général pas vraie. Exemple, dans $\Omega = \mathbb{C}^*$ (plan "pointé" à l'origine), $\omega = \mathrm{d}z/z$ est fermée, puisque localement $\omega = \mathrm{d}\log z$, mais pas exacte. En effet comme on vérifie aisément, $\int_\gamma \omega = 2\pi i n$ où n est le nombre algébrique de fois où le chemin γ tourne autour de l'origine, voir ci-dessous (7.23).

Proposition 7.5 : *Si $\omega = \mathrm{d}f$ est exacte dans Ω, son intégrale le long du chemin γ est la même pour tous les chemins homotopes à γ.*

La preuve est simple : si $\gamma_0 \sim \gamma_1$, $\int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega$ peut être considérée comme l'intégrale le long du chemin fermé $\gamma_0 - \gamma_1$ obtenu en composant γ_0 et $-\gamma_1$, c'est-à-dire le chemin γ_1 parcouru en sens inverse. Il découle de la remarque suivant (7.17) que $\int_{\gamma_0-\gamma_1} \mathrm{d}f = 0$. cqfd.

Proposition 7.6 : *Pour qu'une forme différentielle ω admette une primitive dans Ω, il faut et il suffit que $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin fermé γ différentiable par morceaux et contenu dans Ω.*

Preuve. On vient de voir que la condition est nécessaire. Qu'elle est suffisante résulte de la construction suivante : soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une forme satisfaisant la condition du Théorème ; on se donne un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ quelconque dans Ω et on définit $f(x,y) = \int_\gamma \omega$ où γ est un chemin différentiable dans Ω d'origine (x_0, y_0) et d'extrémité (x, y). Sous l'hypothèse de la Proposition, $f(x,y)$ ne dépend pas du choix de γ, puisque pour un autre chemin γ_1 de (x_0,y_0) à (x,y), $\int_\gamma \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma-\gamma_1} \omega$ et que $\gamma - \gamma_1$ est un chemin fermé. On vérifie alors aisément que f est continûment différentiable dans Ω et que $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$. (Idée : calculer ces dérivées partielles en intégrant ω le long de *segments de droite* entre x et $x + \mathrm{d}x$ etc.) f est bien la primitive de ω, cqfd.

Remarque. La condition précédente, qui porte sur *tout* chemin fermé γ, semble d'application difficile. En fait il suffit d'assurer une condition moins forte :

Proposition 7.7 : *Soit D un* disque *ouvert. Si $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin γ qui est le bord d'un rectangle* complètement contenu *dans D, alors ω a une primitive dans D (elle est exacte).*

2. Par la suite on donnera une définition différente : ω est fermée si sa différentielle que nous ne définirons pas ici s'annule : $\mathrm{d}\omega = 0$, une condition qu'on montre être équivalente à "ω est localement exacte".

Par “rectangle complètement contenu ... ”, on veut dire que l'intérieur **et** la frontière du rectangle sont contenus dans D, voir Fig. 7.2(a).

La preuve est instructive : Soit (x_0, y_0) le centre du disque. Tout point (x, y) de D définit avec (x_0, y_0) un rectangle complètement contenu dans D, voir Fig. 7.2(a). Les deux intégrales de (x_0, y_0) à tout $(x, y) \in \Omega$ le long des deux contours $(x_0, y_0) \to (x, y_0) \to (x, y)$ ou $(x_0, y_0) \to (x_0, y) \to (x, y)$ sont égales puisque $\int_\gamma \omega = 0$ et définissent une primitive $F(x, y)$ de ω (même calcul que dans la Prop. 7.6).

Si au lieu d'un disque on prend un ouvert Ω quelconque, on peut appliquer un raisonnement du même genre, en prenant un point de base $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que le rectangle de sommets (x_0, y_0) et (x, y) soit complètement contenu dans Ω, ce qui est toujours possible pour tout point (x, y) de l'ouvert Ω. Mais la construction sera locale, et la fonction f ainsi construite ne sera pas nécessairement une primitive définie dans tout Ω. Donc

Proposition 7.8 : *Soit Ω un ouvert. La forme ω est fermée si et seulement si $\int_\gamma \omega = 0$ chaque fois que γ est le bord d'un petit rectangle contenu dans l'ouvert Ω.*

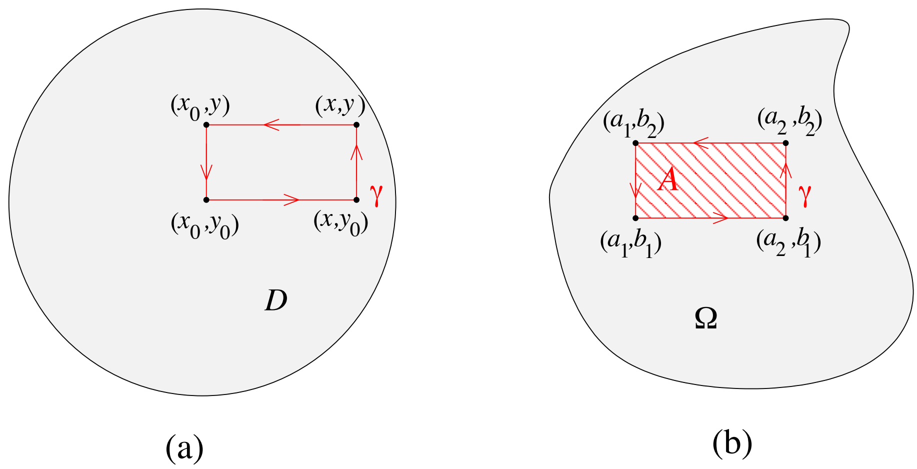


FIGURE 7.2 – (a) Contour rectangulaire γ partant du centre (x_0, y_0) du disque D ; (b) Rectangle A contenu dans l'ouvert Ω.

Formule de Green–Riemann

Théorème 7.9 (Green–Riemann) : *Soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une forme différentielle définie dans un ouvert Ω, avec $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continues dans Ω. Soit K un domaine compact contenu dans Ω, $\gamma = \partial K$ son bord orienté supposé simple (ne se recoupant pas). Alors*

$$\int_\gamma (P\mathrm{d}x + Q\, dy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{7.18}$$

Ce théorème qu'on a déjà rencontré à travers ses applications physiques (la circulation d'un vecteur le long d'un chemin fermé γ égale le flux de son rotationnel à travers la surface dont γ est le bord orienté...) est un cas particulier d'une classe de résultats auxquels on donne le nom de théorème de Stokes, de la forme générale $\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega}\omega$ pour des domaines Ω et des formes différentielles ω de dimension plus élevée, cf le théorème de Gauss-Ostrogradsky rencontré en électromagnétisme : le flux d'un vecteur à travers une surface fermée égale l'intégrale de sa divergence dans le volume limité par la surface, etc. Nous n'aurons malheureusement pas le temps d'aborder ces questions.

Preuve de la formule de Green–Riemann. On ne donnera la preuve que dans le cas d'un rectangle de côtés parallèles aux axes des x et des y, voir Fig. 7.2(b). Soient $a_1 < a_2$ les abscisses des sommets du rectangle, $b_1 < b_2$ leurs ordonnées. Le chemin fermé γ est fait de 4 segments orientés : $[(a_1, b_1) \to (a_2, b_1)]$, $[(a_2, b_1) \to (a_2, b_2)]$, $[(a_2, b_2) \to (a_1, b_2)]$, $[(a_1, b_2) \to (a_1, b_1)]$. On a

$$\iint_A \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{a_2}\mathrm{d}x\int_{b_1}^{b_2}\mathrm{d}y\frac{\partial P}{\partial y} = \int_{a_1}^{a_2}P(x,b_2)\mathrm{d}x - \int_{a_1}^{a_2}P(x,b_1)\mathrm{d}x' = -\int_\gamma P\mathrm{d}x$$

et une expression analogue pour $\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En remettant tout ensemble, on a bien (7.18).

Nous ferons par la suite usage de la Proposition suivante :

Proposition 7.10 : *Soit une forme différentielle $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ définie dans un ouvert* connexe Ω, *telle que $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sont continues dans Ω. Alors*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{7.19}$$

est une condition nécessaire pour que $\omega = \mathrm{d}f$ dans Ω. Elle est suffisante localement (forme fermée) ; elle est suffisante globalement dans tout Ω (forme exacte) si Ω est un disque ouvert.

Preuve : Dire que $\omega = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ équivaut à dire que $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, un système de deux équations aux dérivées partielles dont la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité (locale) est $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, cf Appendice D. Ou encore, autre méthode, si (7.19) est satisfaite, alors le théorème de Green–Riemann nous dit que $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin rectangulaire γ et la Proposition 7.8 nous dit que ω admet localement une primitive (elle est fermée). La condition (7.19) est nécessaire : si ω est fermée, la Proposition 7.8 et le théorème de G-R nous disent que $\iint_A(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 0$ pour tout petit rectangle $A \subset \Omega$, ce qui implique (par l'absurde) que $(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 0$ en tout point (x, y) de Ω. Si le domaine est un disque, (7.19) est une condition suffisante pour que ω soit exacte, car on applique la Proposition 7.7. Comme on va le voir ci-dessous, c'est aussi une condition suffisante pour un domaine Ω simplement connexe.

Exemple : la forme $\omega = \mathrm{d}z/z$ satisfait bien (7.19) dans $\mathbb{C}^*$, elle est fermée (localement exacte) $\omega = \mathrm{d}\log z$, mais pas exacte dans tout $\mathbb{C}^*$, en raison une fois encore des déterminations multiples du log, ou du fait que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

Nous avons finalement le théorème suivant

Théorème 7.11 : *Soit ω une forme différentielle fermée dans un ouvert connexe Ω. Alors*
(i) pour deux chemins homotopes γ_1 et γ_2 (de mêmes extrémités), $\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$; ou de façon équivalente, pour tout chemin fermé γ homotope à un point, $\int_\gamma \omega = 0$;
(ii) si Ω est simplement connexe, ω y est exacte (elle admet une primitive dans Ω).

Éléments de preuve : (i) La forme est fermée, donc (Proposition 7.10 et Théorème de Green–Riemann), $\int_\gamma \omega = 0$ le long de tout chemin fermé simple complètement contenu dans Ω. Cela s'applique au chemin fermé $\gamma_1 - \gamma_2$ qu'on supposera simple (quitte à le décomposer en un nombre fini de lacets simples s'il a des points multiples). Donc $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$, cqfd. Pour le point (ii), on observe que si Ω est simplement connexe, tout chemin fermé γ y est homotope à un point, donc $\int_\gamma \omega = 0$, et on applique alors la Proposition 7.6. Pour une démonstration plus soigneuse, se reporter à [4], p. 60-61.

7.2.3 Intégration sur des chemins dans $\mathbb{C}$

Examinons maintenant comment ces formules se transcrivent en variables complexes.

Définition 7.4 : *Soit $\omega = \omega_1 \mathrm{d}z + \omega_2 \mathrm{d}\bar{z}$ une forme définie sur Ω, et γ un chemin dans Ω. L'intégrale de ω sur le chemin γ est définie par*

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b (\omega_1(\gamma(t))\,\gamma'(t) + \omega_2(\gamma(t))\,\bar{\gamma}'(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{7.20}$$

Le chemin γ est appelé contour d'intégration *dans le plan complexe.*

En particulier, si $\omega = f\mathrm{d}z$, (f pas nécessairement holomorphe), $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$. Si $\omega = \mathrm{d}f$, $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ comme en (7.17).

Cette définition est l'équivalent des formules (7.15, 7.16) et en découle via les formules exprimant $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ en termes de $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}\bar{z}$. Elle est également insensible à un reparamétrage du chemin γ, grâce aux formules de changements de variable dans une intégrale (Vérifier !).

Avec cette notation, on a le résultat important

Théorème 7.12 : *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin dans Ω. Alors*

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z)\mathrm{d}z\,. \tag{7.21}$$

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème, l'intégrale de contour ne dépend pas du contour γ mais seulement de ses extrémités.
Preuve : La relation (7.17) s'applique à $\mathrm{d}f$, mais f étant holomorphe, $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\mathrm{d}z$.

Attention : cette formule n'est valable que pour f holomorphe.

Exemple d'intégrale de contour : soit γ le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon R, qu'on paramétrise par exemple par $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \gamma(\theta) = a + Re^{i\theta}$. Si f est une fonction (holomorphe ou non) définie dans un ouvert Ω contenant γ, alors (7.20) appliqué à $\omega = f(z)\mathrm{d}z$ donne

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

Cas particulier : intégrons $f(z) = 1/z$ sur le cercle γ de centre O et de rayon R, (ici $\Omega = \mathbb{C}^*$) :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = 1\,, \tag{7.22}$$

puisque $z = Re^{i\theta}$. On note que le résultat ne dépend pas de R.

Proposition 7.13 : *Pour tout chemin fermé γ ne passant pas par l'origine, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ est un entier.*

Preuve : la forme $\mathrm{d}z/z$ n'est pas exacte, mais localement elle admet comme primitive $\log z$. On se rappelle (chap. 6) que la fonction log admet plusieurs déterminations. L'intégrale de contour $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ est donc égale à la différence de deux déterminations du logarithme divisée par $2\pi i$, soit un entier.

Corollaire : *Pour tout chemin γ ne passant pas par l'origine, $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ est un entier.*

Preuve : calculer la différentielle de $\Im m \log z = \arg z = \mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$.

Indice d'un chemin fermé par rapport à un point

Théorème 7.14 : *Soit γ un chemin fermé et soit U le complémentaire de γ dans le plan complexe. Soit z un point n'appartenant pas à γ (donc $z \in U$). L'*indice de γ par rapport à z, *défini par*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \tag{7.23}$$

est un nombre entier, constant dans chaque composante connexe de U, nulle sur la composante connexe non bornée de U et variant de ± 1 à chaque traversée du chemin γ en dehors des points multiples.

Heuristiquement l'indice mesure le nombre algébrique de tours qu'effectue le chemin γ autour du point z.

Preuve du Théorème. Que ce soit un entier découle de la proposition 7.13. À l'intérieur de chaque composante connexe de U, la détermination du logarithme est la même. En effet c'est une fonction continue de z pour $z \notin U$, et sa valeur est un entier, donc une constante. Ou inversement, c'est une fonction qui ne varie pas quand γ est déformé sans passer par z. Si z appartient à la composante connexe non bornée de U, γ peut être déformé en un point sans croiser z, donc l'indice est nul. Enfin la traversée par z de γ en dehors d'un point multiple équivaut à modifier γ en $\gamma + \gamma_1$, avec γ_1 déformable en un cercle parcouru une fois dans le sens positif ou négatif, voir Figure 7.3 droite. On a fait ici appel à des déformations de contour d'intégration, une méthode très utilisée dans la suite. Pour une autre démonstration, voir [1], Annexe D.

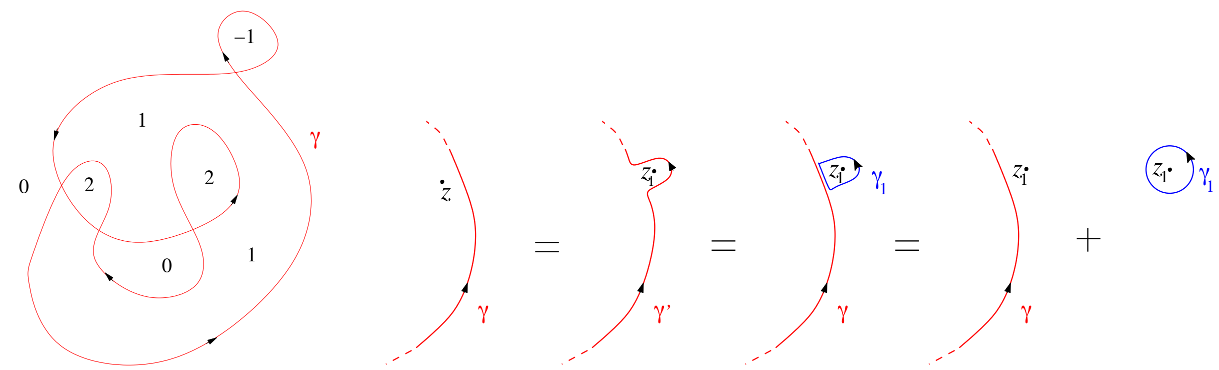


FIGURE 7.3 – À gauche : L'indice du chemin γ par rapport à un point est constant dans chaque composante connexe du complémentaire U de γ. À droite : La traversée par z du contour γ équivaut à ajouter la contribution du lacet γ_1 : $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma'}(z_1) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + 1$.

7.3 Théorème de Cauchy et conséquences

7.3.1 Théorème de Cauchy

Proposition 7.15 : *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, γ un chemin fermé dans Ω, alors $\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = 0$.*

En effet cela est une conséquence du Théorème 7.12, $\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$ puisque le chemin est fermé. En revanche, si f n'est pas holomorphe, $\oint \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$ n'a aucune raison de s'annuler. (Remarquer la notation $\oint$ qui signale que l'on intègre sur un chemin fermé.) Exemple : $f = z\bar{z}$, l'intégrale de $\frac{\partial f}{\partial z} = \bar{z}$ le long du cercle de centre O et de rayon R est (on paramétrise $z = Re^{i\theta}$ comme ci-dessus) $\int_0^{2\pi} iR^2\mathrm{d}\theta = 2\pi i R^2$. Noter que sur le cercle, $\bar{z} = R^2/z$, et on vient juste de répéter le calcul de (7.22) !
Corollaire : *Pour tout chemin fermé γ et tout entier $n \neq -1$, on a $\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = 0$. (Pour $n < 0$ on suppose que γ ne passe pas par 0.)*
La preuve est claire : pour $n \neq -1$, z^n a pour primitive $z^{n+1}/n+1$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}^*$ si $n < -1$) et la proposition précédente s'applique.

Théorème 7.16 (Cauchy) : *Si f est une fonction holomorphe sur Ω, la forme $f(z)\mathrm{d}z$ est fermée dans Ω : localement elle admet une primitive $f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{d}F(z)$.*

Il s'agit là d'un théorème fondamental dont vont découler beaucoup de conséquences et d'applications. Démontrons-le en faisant l'hypothèse supplémentaire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans Ω. (On verra plus bas que cette propriété est en fait toujours satisfaite par une fonction holomorphe. Mais on peut aussi établir directement, avec un peu plus d'effort, le théorème de

Cauchy sous la seule hypothèse d'holomorphie, voir [4], p. 70–71.) Il suffit alors d'écrire la forme $f(z)\mathrm{d}z = f(z)\mathrm{d}x + if(z)\mathrm{d}y$, soit dans les notations de la Prop. 7.10, $P = f(z)$, $Q = if(z)$. Les conditions d'holomorphie de Cauchy–Riemann $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ et la Proposition 7.10 nous assurent alors que $f\mathrm{d}z$ est fermée.

Corollaire : *Si f est holomorphe dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout chemin fermé homotope à un point dans Ω. De façon équivalente, pour deux chemins γ_1 et γ_2 de mêmes extrémités et homotopes, $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$.*

C'est la transcription en variables complexes du Théorème 7.11, et c'est sous cette forme, ou sous l'une des formes équivalentes ci-dessous, que le théorème de Cauchy va nous être le plus utile. La deuxième formulation de ce corollaire implique que l'on peut *déformer continûment le contour d'intégration* d'une fonction holomorphe, à extrémités fixes, ce qui généralise ce que l'on a vu au Théorème 7.12. Une forme plus faible de ce corollaire (elle aussi découlant du Théorème 7.11) consiste à dire

Corollaire : *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω simplement connexe, on a $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout chemin fermé dans Ω.*

7.3.2 Intégrale de Cauchy

Théorème 7.17 : *Soit f holomorphe dans Ω, $a \in \Omega$, et γ un chemin fermé dans Ω ne passant pas par a et homotope à un point dans Ω. Alors*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\, f(a)\,.} \tag{7.24}$$

Voilà un résultat qui va nous être extrêmement utile ! Donnons-en la preuve.
Soit $g(z)$ la fonction définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a\,, \end{cases} \tag{7.25}$$

elle est définie et continue pour tout $z \in \Omega$, et holomorphe pour $z \neq a$. Un théorème de Riemann (voir plus bas Théorème 7.23) assure alors qu'elle est holomorphe sur tout Ω. On a donc par le corollaire du théorème de Cauchy :

$$0 = \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a} - \int_\gamma \frac{f(a)\mathrm{d}z}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a} - 2\pi i\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) f(a)$$

ce qui établit (7.24).

Nous verrons au chapitre suivant des applications concrètes de cette formule au calcul d'intégrales. Dans le reste de ce chapitre nous en discutons quelques conséquences fondamentales.

Théorème 7.18 (théorème de la moyenne) : *Si f est holomorphe sur Ω, pour tout $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que le disque fermé de centre a et de rayon r soit contenu dans Ω, on a*

$$f(a) = \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} . \tag{7.26}$$

Autrement dit la valeur de f en tout point a est égale à sa moyenne sur un cercle centré en a. La preuve découle simplement de l'intégrale de Cauchy : si γ est le bord du disque orienté dans le sens positif

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(a+re^{i\theta})ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} .$$

7.4 Autres propriétés des fonctions holomorphes

7.4.1 Fonctions holomorphes et fonctions analytiques

Théorème 7.19 : *Une fonction est holomorphe dans un ouvert Ω ssi elle est analytique sur Ω.*

Résultat remarquable : deux conditions sur les fonctions de variable complexe –dérivabilité et analyticité– ont finalement abouti à la même classe de fonctions ! !

Preuve : Soit f une fonction holomorphe dans Ω. Soit $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert de centre z_0 et de rayon R contenu dans Ω. Prenons γ un cercle de centre z_0 et de rayon $r < R$. Pour $z : |z - z_0| < r$ et $\zeta \in \gamma$, $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \left|\frac{z-z_0}{r}\right| < 1$, donc la série géométrique $\sum_{n=0}^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ converge et a pour somme $(\zeta - z)^{-1}$. Selon (7.24),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

et la convergence uniforme de la série fait qu'on peut l'intégrer terme à terme (c'est-à-dire permuter intégration et sommation)

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-z_0)^n$$

ce qui établit bien que f est développable en série entière en z_0, avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta .$$

Cela étant vrai en tout point $z_0 \in \Omega$, f est bien analytique dans Ω. Selon la formule (6.6), on a de plus

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta . \tag{7.27}$$

Réciproquement si f est analytique dans Ω, on sait qu'elle est indéfiniment dérivable en tout point de Ω, donc holomorphe.

Complément : Principe de symétrie de Schwarz. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe réel. Soit Ω', resp. Ω'', l'intersection de Ω avec le demi-plan supérieur $y \geq 0$, resp. inférieur $y \leq 0$. Soit une fonction f continue dans Ω', holomorphe aux points de Ω' tels que $y > 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel. On va montrer que f peut être prolongée de façon unique en une fonction holomorphe sur Ω. Sur Ω'' on définit $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Elle est continue dans Ω'' et on vérifie qu'elle est holomorphe en tout point non réel de Ω''. La fonction $h(z)$ égale à $f(z)$ sur Ω' et à $g(z)$ sur Ω'' est continue dans Ω et holomorphe sur $\Omega \backslash \mathbb{R}$. Une réciproque (théorème de Morera) du théorème de Cauchy affirme alors qu'elle est aussi holomorphe en tout point de Ω. Elle prend des valeurs complexes conjuguées en des points symétriques par rapport à l'axe réel. Elle est unique (prolongement analytique).

7.4.2 Fonctions entières. Principe du maximum

Définition 7.5 : *On appelle* fonction entière *une fonction holomorphe dans le plan $\mathbb{C}$ tout entier.*

Exemple : la fonction e^z qui est analytique avec un rayon de convergence infini est holomorphe dans tout $\mathbb{C}$ donc entière.

Théorème 7.20 (Liouville) : *Une fonction entière bornée est constante.*

Autrement dit, une fonction entière non constante doit tendre vers l'infini dans certaines directions du plan complexe. Voir l'exemple de $\exp z$ qui tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$ avec $\Re e\, z > 0$. Inversement ce théorème de Liouville est utile pour établir des identités entre fonctions analytiques : si on peut montrer qu'une combinaison de fonctions analytiques n'a pas de singularité et demeure bornée, c'est une constante. (Exemple, voir TD.)

Preuve. Soit f entière et bornée, $|f(z)| < M$. Calculons $f'(z)$ par Cauchy, ou plutôt par (7.27) : $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$ le long d'un cercle de rayon R autour de z. Donc $|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - z|^2} R \mathrm{d}\theta \leq \frac{M}{R}$. Comme R peut être pris arbitrairement grand, $|f'(z)| = 0$ et f est une constante.

Application : théorème de d'Alembert. Montrons que le théorème fondamental de l'algèbre, *tout polynôme P à coefficients complexes et non constant possède au moins une racine complexe*, découle de ce théorème de Liouville. Raisonnons par l'absurde et supposons que P ne s'annule pas. Alors $1/P(z)$ serait holomorphe dans $\mathbb{C}$ et borné. En effet $P(z) = z^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}) \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, donc il existe un disque compact à l'extérieur duquel $1/P(z)$ est borné (puisque $|P| \to \infty$ à l'infini) et à l'intérieur duquel il est également borné en tant que fonction continue. Donc (Liouville) P serait constant ce qui est contraire à l'hypothèse. q.e.d.

Théorème 7.21 (Principe du maximum) : *Soit f continue dans Ω et satisfaisant la propriété de moyenne, (par exemple f holomorphe dans Ω). Si $|f|$ a un maximum local en un point $a \in \Omega$, c'est-à-dire $|f(z)| \le |f(a)|$ au voisinage de a, alors f est constante dans ce voisinage.*

Esquisse de preuve. On peut toujours supposer $f(a)$ réel > 0, quitte à multiplier la fonction par $\exp -i\arg(f(a))$. Pour $r \ge 0$ assez petit, $M(r) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_\theta |f(a+re^{i\theta})| \le f(a)$ par l'hypothèse de maximum. Mais la propriété de moyenne donne $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = [\cdots] \le M(r)$. Donc $f(a) = M(r)$. La fonction $g(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \Re e\,(f(a) - f(z))$ est donc ≥ 0 pour $|z-a| = r$ assez petit $[\dots]$; de plus $[\dots]$ $g(z) = 0$ ssi $f(z) = f(a)$. Mais $g(z)$, qui est ≥ 0 et continue, ayant une valeur moyenne nulle sur le cercle de centre a et de rayon r est identiquement nulle sur ce cercle. Donc $f(z) = f(a)$ q.e.d. (Exercice : compléter les $[\dots]$ de cette preuve.)

Ce théorème s'applique aussi aux fonctions harmoniques, de grand intérêt par exemple en électrostatique (potentiel), voir Chap. 8.

7.5 Zéros et singularités des fonctions de variable complexe

7.5.1 Zéros d'une fonction holomorphe

Soit f holomorphe dans Ω connexe, et soit $Z(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f dans Ω. Cet ensemble peut être vide, cf la fonction exponentielle. Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 7.22 : *(i) Si $Z(f)$ possède un point d'accumulation dans Ω, $f = 0$ sur Ω.*
(ii) Si $Z(f)$ ne possède aucun point d'accumulation, $Z(f)$ est fini ou dénombrable. En chaque zéro $a \in Z(f)$, on peut écrire

$$f(z) = g(z)(z-a)^{m(a)}$$

où g est holomorphe dans Ω et ne s'annule pas au voisinage de a, et l'entier $m(a) \ge 1$ est l'ordre du zéro a.

La partie (i) nous dit que les zéros de f sont "isolés" : tout zéro a a un voisinage sans autre zéro. Exemple, la fonction $f(z) = \sin z$ a des zéros isolés en $z_k = k\pi$. Contre-exemple : la fonction $f(z) = 1+\exp\frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et a des zéros en $z_k = -i((2n+1)\pi)^{-1}$ qui s'accumulent en 0, mais $0 \notin \Omega$.

Application au problème de prolongement : si on connaît une fonction f, supposée holomorphe dans Ω connexe, sur un ensemble E non dénombrable, par exemple $\mathbb{R}\cap\Omega$, elle est (en principe) déterminée dans tout Ω.

Autrement dit son prolongement de E à Ω est unique. En effet si on avait deux fonctions f_1 et f_2 la prolongeant de E dans Ω, leur différence $g = f_1 - f_2$ serait holomorphe dans Ω et y posséderait un ensemble non dénombrable de zéros, donc par le Théorème précédent serait nulle.

Exemple : la fonction $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ est entière ; elle s'annule sur $\mathbb{R}$, elle s'annule donc partout. L'identité $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ est donc vraie sur tout $\mathbb{C}$.

En revanche, si la fonction f n'est connue que sur les entiers de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$), son prolongement à $\mathbb{C}$ n'est pas unique, on peut par exemple la multiplier par $e^{2\pi i z}$.

7.5.2 Pôles, singularités essentielles

Supposons qu'une fonction f est holomorphe dans un ouvert privé d'un point a : on parle de *singularité isolée* en a. (On verra plus bas qu'une singularité peut ne pas être isolée : il n'existe pas de disque ouvert pointé $0 < |z - a| < r$ dans lequel la fonction est holomorphe ; c'est le cas des "points de branchement" des fonctions multi-valuées, voir § 8.2 [3].) Dans le cas d'une singularité isolée, des théorèmes dus à Riemann, Weierstrass, Picard, ... permettent d'affirmer que trois cas sont possibles.

Théorème 7.23 : *Soit f holomorphe dans $\Omega \backslash \{a\}$:*

1. *ou bien f reste bornée au voisinage de a ; alors elle admet une limite en a et on peut la prolonger en une fonction holomorphe sur Ω : on parle de* singularité apparente [4] *;*
2. *ou bien $\lim_{z\to a} |f(z)|$ existe (dans $\overline{\mathbb{R}}$) et vaut $+\infty$: on parle de* pôle *en a ;*
3. *ou bien, si $\lim_{z\to a} |f(z)|$ n'existe pas, l'image par f de tout disque ouvert pointé $0 < |z - a| < r$ contenu dans Ω est dense dans $\mathbb{C}$ (Weierstrass). En fait (Picard) cette image est le plan $\mathbb{C}$ tout entier ou le plan $\mathbb{C}$ privé d'un point. On parle de* singularité essentielle.

Nous nous contenterons d'indications et d'exemples. Un exemple de singularité apparente est fourni par la fonction $f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$ si $z \neq a$, avec g holomorphe dans Ω. Il est clair que la fonction prolongée par $f(a) = g'(a)$ est holomorphe dans tout Ω, cf § 7.3.2.

Un exemple de singularité essentielle est donné par la fonction $f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \exp \frac{1}{z}$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Exercice : montrer que toute valeur $w \neq 0$ est atteinte (une infinité de fois) par $f(z)$.

On rencontre cette situation en physique dans des problèmes aussi variés que les singularités en température de grandeurs thermodynamiques au voisinage de certaines transitions de phase (modèle XY de rotateurs à deux dimensions, énergie de marche dans la "transition rugueuse", ... ; ou que les propriétés d'analyticité de certains développements "perturbatifs" en mécanique quantique ou théorie quantique des champs.

3. C'est le cas aussi pour une fonction telle que $(1 + \exp \frac{1}{z})^{-1}$ dont les pôles en $z_k = -i((2n+1)\pi)^{-1}$ s'accumulent en 0.

4. ou *artificielle*, ou *effaçable*, ...

Définition 7.6 : *Une fonction définie dans Ω qui n'y a que des pôles comme singularités est dite* méromorphe *sur Ω.*

Le cas des pôles des fonctions méromorphes est celui qui va le plus nous occuper dans la suite. Pour ne donner qu'un exemple, toute fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$ est une fonction méromorphe, ses pôles sont les zéros (racines) du dénominateur.

7.5.3 Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Résidus

Définition 7.7 : *On appelle* série de Laurent *une expression de la forme*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \tag{7.28}$$

Quand on discute la convergence d'une telle expression, il faut bien comprendre qu'elle doit être considérée comme la somme de deux séries, l'une portant sur les indices ≥ 0, l'autre sur les négatifs, et que la convergence de (7.28) signifie la convergence de chacune de ces deux sous-séries. Supposons que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_1 et que $\sum_{n<0} a_n \zeta^{-n}$ a pour rayon $1/R_2$ en ζ, donc que $\sum_{n<0} a_n z^n$ converge pour $|z| > R_2$. Supposons aussi que $R_2 < R_1$. Alors (7.28) converge (uniformément et absolument) dans la *couronne* $R_2 < |z| < R_1$. Noter que l'on peut avoir $R_2 = 0$ et/ou $R_1 = \infty$.

Théorème 7.24 : *Toute fonction f holomorphe dans la couronne $R_2 < |z| < R_1$ y est développable en série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \,, \tag{7.29}$$

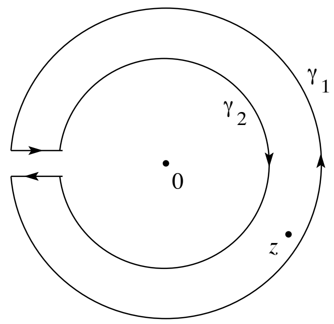
avec des coefficients

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \,, \tag{7.30}$$

le long d'un contour entourant (une fois dans le sens positif) l'origine mais contenu dans la couronne.

Nous avons centré la couronne en 0, mais rien n'interdit de la centrer en un autre point z_0, avec un développement de Laurent en puissances de $(z - z_0)$, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

La preuve de ce théorème est instructive. On considère le contour d'intégration γ représenté sur la figure, complètement contenu dans la couronne d'holomorphie, donc avec des rayons intérieur et extérieur respectivement $r_1 < R_1$ et $r_2 > R_2$, et parcouru dans le sens positif. Les deux petits segments parallèles, choisis dans une direction différente de celle de z, sont distants de ϵ, que l'on fait tendre vers zéro. Dans cette limite, leurs contributions se compensent et seules demeurent celles des deux cercles γ_1 et γ_2 de rayon r_1 et r_2.



La formule de Cauchy nous donne (dans la limite où $\epsilon \to 0$)

$$2\pi i f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Pour $\zeta \in \gamma_1$, $|\zeta/z| > 1$ et on développe $(\zeta - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$, et sur γ_2 de même, $(\zeta - z)^{-1} = -z^{-1}(1-\zeta/z)^{-1} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$, ce qui établit le théorème, y compris l'expression de a_n comme intégrale sur le contour $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ou tout autre contour homotope contenu dans la couronne.

Les différents cas du Théorème 7.23 se lisent maintenant sur le développement de Laurent :
– si le développement de Laurent en z_0 n'a que des termes d'indice ≥ 0, z_0 n'est pas une singularité, f est holomorphe en z_0 ;
– s'il n'a qu'un nombre fini de termes d'indice < 0, et que le plus petit de ces indices vaut m, f a un pôle d'ordre m en z_0 ; si $m = 1$, on parle de *pôle simple* ;
– enfin s'il a un nombre infini de termes d'indice < 0, f a une singularité essentielle en z_0.

2 exemples de développement de Laurent

1. Fraction rationnelle $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ avec par exemple $|a| < |b|$, dont on cherche le développement de Laurent dans la couronne $|a| < |z| < |b|$. On peut soit utiliser directement (7.30), nous y reviendrons plus bas (Exercice 3), soit "décomposer en éléments simples"

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

et se ramener au développement de Laurent d'un pôle simple $\frac{1}{z-b} = -\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{b^{n+1}}$ pour $|z| < |b|$, ou $\frac{1}{z-a} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n<0} \frac{z^n}{a^{n+1}}$ pour $|z| > |a|$. Au total $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ avec

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{b^{n+1}(a-b)} & \text{si } n \geq 0 \\ \frac{1}{a^{n+1}(a-b)} & \text{si } n < 0 \end{cases} . \tag{7.31}$$

2. Fonction génératrice des fonctions de Bessel J_n : $f(z) = e^{\frac{t}{2}(z-\frac{1}{z})}$, $\quad t \in \mathbb{C}$, admet un développement de Laurent dans le plan pointé $\mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire $R_2 = 0, R_1 = \infty$)

$$e^{\frac{t}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(t) z^n \tag{7.32}$$

avec des coefficients $J_n(t)$ fonctions de t appelés fonctions de Bessel. Selon (7.30),

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 \frac{e^{\frac{t}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

sur un contour arbitraire entourant (une fois) l'origine, par exemple le cercle unité paramétrisé par $\zeta = e^{i\theta}$, d'où

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}e^{it\sin\theta}\mathrm{d}\theta \qquad\qquad n\in\mathbb{Z}\,, \tag{7.33}$$

qui est souvent pris comme définition des fonctions de Bessel d'indice entier J_n. Prenant $z = e^{i\alpha}$ dans (7.32) on voit que l'on a obtenu le développement de Fourier de

$$e^{it\sin\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(t)e^{in\alpha}\,.$$

Résidus

Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $R_2 < |z| < R_1$ centrée à l'origine.

Définition 7.8 : *On appelle résidu de f à l'origine le coefficient a_{-1} de (7.29), soit*

$$\mathrm{Res}\,(f,0) \overset{\text{déf}}{=} a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\,. \tag{7.34}$$

Plus généralement le résidu en une (éventuelle) singularité z_0 est $\mathrm{Res}\,(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{z_0}\mathrm{d}\zeta f(\zeta)$ avec un contour entourant le point z_0 une seule fois et dans le sens positif.

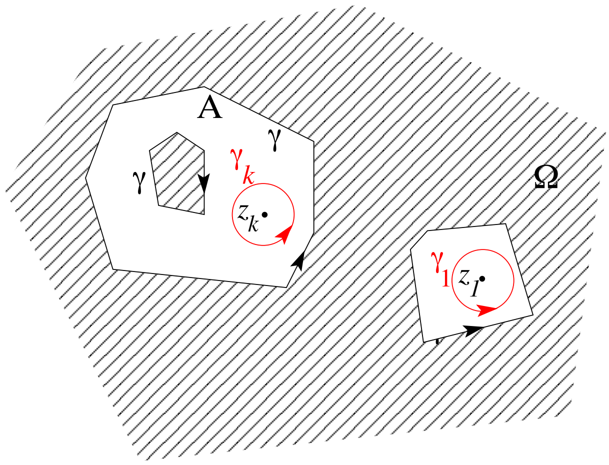


FIGURE 7.4 – La partie hachurée est le complémentaire de A dans Ω. L'intégrale sur le bord orienté γ de A est la somme des intégrales sur les γ_i entourant des singularités.

Théorème 7.25 (théorème des résidus) : *Soit f une fonction holomorphe sur Ω, sauf peut-être en des singularités isolées z_k. Soit γ le bord orienté d'un compact A contenu dans Ω, ne passant par aucun des z_k. Alors les z_k contenus dans A sont en nombre fini et*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ z_k \in A}} \mathrm{Res}\,(f, z_k)\,. \tag{7.35}$$

La preuve repose une fois encore sur la déformation du contour γ : avec les hypothèses faites, l'intégrale sur γ est une somme d'intégrales sur des contours $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ encerclant les points $z_1, \cdots, z_k$, voir figure 7.4. Chacun de ces intégrales donne lieu au résidu correspondant.

Ce théorème est très utile pour calculer des intégrales comme sommes de résidus, ou inversement des sommes, considérées comme sommes de résidus, comme des intégrales. Cela va être amplement illustré au Chap. 8 et en TD.

Sphère de Riemann. Résidu à l'infini

Il est souvent utile de considérer le plan complexe complété par le point à l'infini : comme la limite $|z| \to \infty$ ne doit pas dépendre de $\arg z$, ce point est unique ! Cela revient à "compactifier" le plan $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ en une sphère, la *sphère de Riemann* $\overline{\mathbb{C}} \simeq S^2$.

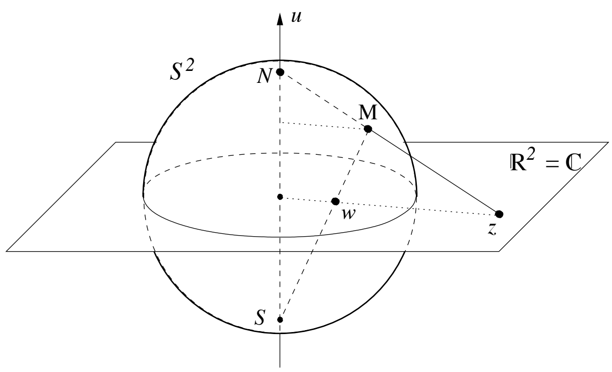


FIGURE 7.5 – Projections stéréographiques d'un point M depuis les pôles Nord N et Sud S.

Ceci peut être vu très explicitement par la projection stéréographique, voir Fig 7.5. Un point M de la sphère unité S^2 de coordonnées (x, y, u), $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, est projeté depuis le pôle Nord N en un point du plan (complexe) d'affixe z. Vérifier que $z = \frac{x+iy}{1-u}$. Le pôle Nord a pour image le point à l'infini dans le plan. La projection depuis le pôle Sud S donne de même $w = \frac{x-iy}{1+u}$, et on a pour un même point M la relation $z.w = 1$. Le pôle Nord a cette fois pour image 0, tandis que S est appliqué à l'infini. Dans le langage de la géométrie différentielle, on dit que l'on a besoin de deux *cartes* $M \mapsto z$ et $M \mapsto w$ pour décrire la sphère. Quand on s'intéresse au voisinage du point z infini, on utilise la coordonnée $w = 1/z$.

On définit sur cette sphère $\overline{\mathbb{C}} = S^2$ les notions d'ouvert, de chemin différentiable, de chemin fermé, de bord orienté d'un compact, etc : à distance finie, ce sont les notions déjà rencontrées, et au voisinage de l'infini, on utilise la variable $w = 1/z$.

On dit alors qu'une fonction $f(z)$ est holomorphe (resp. est méromorphe, a une singularité essentielle) à l'infini si $g(w) \overset{\text{déf}}{=} -\frac{1}{w^2} f(z = 1/w)$ est holomorphe (resp. est méromorphe, a une singularité essentielle) au voisinage de $w = 0$. Pour une fonction $f(z)$ méromorphe à l'infini, le résidu à l'infini se définit par

$$\mathrm{Res}\,(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_0 \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \mathrm{d}w = \mathrm{Res}\,(g(w), 0) \tag{7.36}$$

avec un contour autour de l'origine, ou encore, si $\sum_n a_n z^n$ est le développement de Laurent de $f(z)$ *au voisinage de l'infini*, $\mathrm{Res}\,(f, \infty) = -a_{-1}$. Attention au signe ! ! Ce signe, qui provient du changement de variable dans $f(z)\mathrm{d}z = g(w)\mathrm{d}w$, peut aussi être vu comme lié au changement d'orientation d'un contour positif dans le plan complexe quand il est repoussé autour du point à l'infini : il entoure alors ce point à l'infini dans le sens *négatif* (faites l'expérience avec un élastique sur une orange !).

Par exemple, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ a un pôle simple à l'infini de résidu -1. En effet $g(w) = -\frac{1}{w}$, donc (7.36) donne $\mathrm{Res}\,(f, \infty) = \mathrm{Res}\,(g(w), 0) = -1$.

Théorème des résidus généralisé

Le théorème des résidus admet une généralisation au cas où le contour est dessiné sur la sphère de Riemann. Il s'énonce essentiellement comme le théorème 7.25 :

Théorème 7.26 (théorème des résidus généralisé) : *Soit Ω un ouvert de la sphère de Riemann et f une fonction holomorphe sur Ω, sauf peut-être en des singularités isolées z_k. Soit γ le bord orienté d'un compact A de S^2 contenu dans Ω, ne passant par aucun des z_k ni par le point à l'infini. Alors les z_k contenus dans A sont en nombre fini et*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ z_k \in A}} \mathrm{Res}\,(f, z_k) \tag{7.37}$$

où la somme court sur tous les points singuliers $z_k \in A$, y compris éventuellement le point à l'infini.

Preuve : Si $\infty \notin A$, on est dans le cadre du Théorème 7.25. Si $\infty \in A$, soit Γ un contour fermé homotope à un cercle, orienté positivement, contenu dans A, ne passant pas par ∞ et englobant le bord γ de A. On suppose que ∞ est à l'extérieur de ce Γ (au sens de $\mathbb{C}$) et que toutes les singularités autres que ∞ sont à l'intérieur de Γ, (par exemple, on peut prendre pour Γ un cercle $|z| = R$ suffisamment grand pour entourer toutes les singularités à distance finie, tout en étant dans A.) Voir Fig. 7.6. On peut alors appliquer le théorème des résidus au contour $\gamma \cup \Gamma$. L'intégrale $\oint_{\gamma\cup\Gamma} f\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \in A \\ z_k \neq \infty}} \mathrm{Res}\,(f, z_k)$, tandis que $\oint_\Gamma f\mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{Res}\,(f, \infty)$.

On a donc $\oint_\gamma f\mathrm{d}z = \sum_k 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, z_k)$, y compris l'éventuel z_k à l'infini, q.e.d.
Plus simplement, on peut aussi arguer qu'il existe toujours un changement de variable $z \mapsto w$ qui ramène à distance finie toutes les singularités contenues dans le compact A (en nombre fini !), voir Exercice 4. On se ramène donc au théorème des résidus ordinaire.

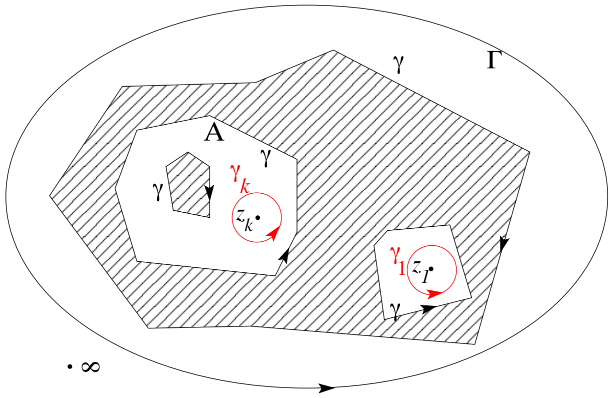


FIGURE 7.6 – La partie hachurée est le complémentaire de A.

Exemple : reprenons la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ et calculons $I = \oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ le long d'un contour positif n'entourant ni 0 ni ∞. Le théorème des résidus ordinaire nous dit que $I = 0$ (pas de pôle à l'intérieur de γ) ; le théorème des résidus généralisé après déformation du contour en deux contours entourant 0 et ∞ dans le même sens négatif nous dit $I = -2\pi i(\mathrm{Res}\,(f, 0) + \mathrm{Res}\,(f, \infty)) = -2\pi i(-1 + 1)$ d'après le calcul ci-dessus. On a bien $I = 0$. En général, par le même argument, montrer que la somme des résidus (y compris à l'infini) d'une fraction rationnelle s'annule.

Lectures complémentaires

Dans ce chapitre, je me suis largement inspiré de [4] et de [1], deux excellentes références qui l'une et l'autre contiennent beaucoup d'informations supplémentaires.

Exercices

1. Justifier par un argument de déformation de contour le calcul de la transformation de Fourier de la fonction gaussienne effectué aux chap.4 et 5.
2. f holomorphe dans Ω, soit $F(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{f(z)}$. Montrer que F est méromorphe dans Ω.
3. Armé(e) du théorème des résidus, reprendre le calcul de (7.31) par (7.30). Montrer que selon que $n < 0$ ou $n \geq 0$, on peut refermer le contour soit autour a soit autour de b (et l'infini ?).

4. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω avec un nombre fini de singularités en z_k (y compris peut-être à l'infini). Montrer qu'il existe un changement de variable $z = \varphi(w)$ [] qui applique tous les z_k sur des w_k à distance finie. Soit $\tilde{f} \stackrel{\text{déf}}{=} f \circ \varphi$; comparer les résidus $\mathrm{Res}\,(f, z_k)$ et $\mathrm{Res}\,(\tilde{f}.\varphi', w_k)$ et les théorèmes des résidus pour les fonctions f et $\tilde{f}\varphi'$. Montrer que le théorème des résidus généralisé découle alors du théorème usuel.

Appendix D. Système différentiel

Soit une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) satisfaisant le système de deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)\,, \tag{D.1}$$

où P et Q sont des fonctions données de classe C^1. Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le système admette (au moins) une solution locale est que

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial Y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,, \tag{D.2}$$

la *condition d'intégrabilité* du système.

Il est clair que la condition est nécessaire, puisque $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$. Montrons qu'elle est suffisante. Intégrons la première équation (D.1) en $f(x,y) = \int^x P(x',y)\mathrm{d}x' + \varphi(y)$ où φ est une fonction de y seulement, de classe C^1. Avec les hypothèses, on peut dériver sous le signe somme et la deuxième équation (D.1) donne $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \int^x \frac{\partial P(x',y)}{\partial y}\mathrm{d}x' + \varphi'(y) = Q(x,y)$, qui est bien cohérente car $\psi(x,y) := Q(x,y) - \int^x \frac{\partial P(x',y)}{\partial y}\mathrm{d}x'$ ne dépend pas de x : $\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial Y} = 0$ par (D.2). On peut donc déterminer $\varphi(y) = \int^y \left(Q(x,y') - \int^x \frac{\partial P(x',y')}{\partial y}\mathrm{d}x'\right)\mathrm{d}y' + \text{const.}$ et finalement

$$f(x,y) = \int^x P(x',y)\mathrm{d}x' + \int^y \left(Q(x,y') - \int^x \frac{\partial P(x',y')}{\partial y}\mathrm{d}x'\right)\mathrm{d}y' + \text{const.} \tag{D.3}$$

qui satisfait bien (D.1).

Remarque. Cette construction est une construction *locale*, puisqu'implicitement, on a intégré P ou ψ le long de segments à y ou x constants à partir d'un point de base donné, et que tout point de Ω ne peut pas toujours être atteint ainsi à partir du même point de base. La construction est globale, en revanche, si Ω est un disque ouvert ou un "pavé" $]a,b[\times]c,d[$, pourquoi ?

On a retrouvé le résultat de la Proposition 7.10 : la forme $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ est fermée ssi (D.2) ; de plus elle est exacte si le domaine est un disque ou un pavé ouvert.