

Chapitre 6

Séries entières. Fonctions analytiques

Ce chapitre est le premier d'une série qui va porter sur différents aspects des fonctions d'une variable complexe. On va s'intéresser d'abord à des séries $\sum_k a_k z^k$ d'une variable complexe z . Sauf mention du contraire, ces sommes seront supposées commencer à $k = 0$.

6.1 Séries entières

6.1.1 Séries formelles

En préambule, mentionnons d'abord que l'on peut s'intéresser aux objets algébriques $S(X) = \sum_n a_n X^n$ et aux opérations que l'on peut effectuer sur eux, sans se soucier de la nature de la variable X ni de la convergence de la somme. C'est ce qu'on appelle une *série formelle*. Ces séries (avec les coefficients a_n appartenant à un corps $\mathbb{K}$ de nombres, typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) forment une algèbre notée $\mathbb{K}[[X]]$: on peut les ajouter, les multiplier par un nombre de $\mathbb{K}$, les multiplier entre elles selon les règles familières. On peut aussi prendre l'inverse de toute série ayant $a_0 \neq 0$: l'inverse de $S(X) = \sum_n a_n X^n$ ($a_0 \neq 0$) est la série formelle $T(X) = \sum_n b_n X^n$ t.q. $S(X).T(X) = 1$. On peut *composer* deux séries $S(X) = \sum_n a_n X^n$ et $T(Y) = \sum_n b_n Y^n$ en considérant que $Y = S(X)$, à condition que $a_0 = 0$: on obtient une nouvelle série formelle $T \circ S(X)$. Sous les hypothèses $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ sur S , on peut aussi définir la *série réciproque* T de S (c'est-à-dire inverse pour la composition) : $T \circ S = 1$.

L'intérêt de ces séries formelles est qu'elles dissocient les questions de convergence de ces manipulations algébriques. C'est par exemple intéressant dans des applications à des problèmes de combinatoire, où on définit des "fonctions génératrices". Si on a une collection de nombres a_n indexés par un entier n , il est souvent utile de considérer la fonction génératrice des a_n , définie comme la série formelle $\sum_n a_n X^n$.

Exemple. Le nombre de partitions P_n d'un entier n est le nombre de façons de l'écrire comme somme non ordonnée $n = p_1.1 + p_2.2 + \dots + p_n.n$, $p_i \geq 0$. Par exemple $P_5 = 7$ (vérifier). Montrer que la fonction génératrice des P_n est donnée par la formule d'Euler

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n X^n = \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - X^m)}. \quad (6.1)$$

Or on peut montrer (Hardy et Ramanujan, voir aussi plus bas la méthode du col) qu'asymptotiquement $P_n \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$, une croissance beaucoup trop rapide pour que la série converge, pour quelque valeur de X que ce soit. On dira dans la suite que la série a un rayon de convergence nul. La série est et reste une série formelle. Mais telles quelles, ces fonctions génératrices séries formelles sont très utiles.

Exemple : En factorisant le produit $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - X^m)$ en deux produits sur les m pairs et impairs, démontrer l'identité entre séries formelles (en fait produits formels ...) $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - X^{2m-1}) \prod_{m=1}^{\infty} (1 + X^m) = 1$. En déduire, en écrivant leurs fonctions génératrices, que les nombres de partitions d'un entier en nombres impairs ou en nombres distincts sont égaux. Par exemple pour $n = 5$, $P_{\text{distincts}}(5) = 3 : \{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2, 1\}$ et $P_{\text{impairs}}(5) = 3 : \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{3, 1, 1\}, \{5\}$. Pour le physicien, les nombres de partitions en nombres distincts sont reliées au comptage d'états fermioniques d'énergie donnée, dans un potentiel harmonique...

6.1.2 Rayon de convergence

On considère la série entière $\sum_k a_k z^k$ où les $a_k \in \mathbb{C}$.

Définition 6.1 : Le rayon de convergence de la série $\sum_k a_k z^k$ est le nombre R réel positif ou nul, (éventuellement infini), défini par

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \sum_n |a_n| t^n \text{ est borné}\}. \quad (6.2)$$

(L'ensemble de ces t n'est pas vide puisqu'il contient au moins 0, donc son sup est bien défini dans $\overline{\mathbb{R}}$.) Par exemple, si la suite $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ a une limite ℓ , alors $R = \ell^{-1}$.

Mais plus généralement, on va montrer que (formule d'Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (6.3)$$

où la limite supérieure d'une suite a été définie à l'Appendice 1.3.5,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq k} u_n).$$

La preuve de (6.3) repose sur la "règle de Cauchy" (comparaison avec une série géométrique) : soit une suite $b_n > 0$; si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^{\frac{1}{n}} < 1$, $\sum_n b_n < +\infty$, et si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^{\frac{1}{n}} > 1$, $\sum_n b_n = +\infty$ (vérifier en utilisant (A.6)). On applique cela à $b_n = |a_n| r^n$ et on en conclut que $\sum |a_n| r^n$ converge pour $r^{-1} > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, et diverge si $r^{-1} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ ce qui, compte tenu de la définition (6.2) établit (6.3).

On appellera *disque de convergence* le domaine ouvert $|z| < R$, appellation justifiée par le théorème fondamental

Théorème 6.1 : *La série entière $\sum_k a_k z^k$ converge normalement et uniformément dans tout disque $|z| \leq r$ intérieur au disque de convergence ($0 < r < R$) ; elle converge absolument pour tout z dans le disque de convergence $|z| < R$ et diverge pour tout z hors de ce disque, $|z| > R$; sur le bord du disque, $|z| = R$, la série peut être convergente ou divergente.*

(Pour les définitions des différents types de convergence, se reporter à la Définition 1.7.) Si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$. Si $R = \infty$, elle converge dans tout le plan.

La convergence normale est claire : pour la norme du sup, si $|z| \leq r < R$, $\sum \|a_k z^k\| = \sum |a_k| r^k < \infty$ par définition du rayon de convergence ; et les CVU et CVA découlent du Théorème 1.8. Bien noter que la convergence normale et la convergence uniforme ne sont établies que dans tout disque plus petit que le disque de convergence.

Exemples.

- 1. La série $\frac{z^n}{n!}$ est convergente dans tout le plan, puisque $\ell = 0$, donc $R = \infty$.
Rappelons l'argument : pour m un entier supérieur à $|z|$, on a $|z^n/n!| = \frac{1}{m!} \frac{|z|^n}{(m+1)\cdots n} < \frac{m^m}{m!} \frac{|z|^n}{m^n}$ dès que $n > m$ d'où $|z^n/n!|^{\frac{1}{n}} < \frac{|z|}{m} \left(\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{1}{n}}$ qui tend vers $|z|/m < 1$. qed
- 2. A l'inverse, $z^n n!$ est telle que $\ell = \infty$, $R = 0$, donc la série ne converge qu'en 0.
- 3. $\left(\frac{z}{r}\right)^n$, $r \neq 0$. On a $\ell = 1/r$, donc un rayon de convergence $R = r$. Sur le cercle de convergence, pour $|z| = r$, la série ne converge en aucun point (puisque le terme d'ordre n ne s'annule pas).
- 4. $\frac{z^n}{n}$, $R = 1$, la série converge pour tout z , $|z| < 1$, elle diverge pour $|z| > 1$; pour $z = 1$ elle est divergente ; pour $z = -1$, elle est semi-convergente (convergente mais pas absolument convergente) en tant que série alternée, et plus généralement elle converge (mais pas absolument) sur tout le bord du disque sauf en $z = 1$. On reconnaît la série de $-\log(1 - z)$.
- 5. $\frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$. Sur tout le bord du disque de convergence, y compris $z = \pm 1$, convergence absolue.
- 6. nz^n , $R = 1$, la série diverge sur tout le bord du disque.

Il ressort de cette série d'exemples que le comportement sur le bord du disque est une question délicate à étudier avec soin.

On peut additionner, multiplier ou inverser des séries entières de rayon de convergence non nul et on obtient une autre série entière de rayon de convergence non nul. (Pour l'inverse de $\sum a_n z^n$ il faut supposer que $a_0 \neq 0$.) On peut aussi composer la série $T(\zeta) = \sum_{n=0} b_n \zeta^n$ par $S(z) = \sum_{k=1} a_k z^k$,¹ c'est-à-dire construire $T(S(z))$ qui est de rayon de convergence non nul si S et T le sont. En particulier si $a_1 \neq 0$ la série réciproque U de la série $S(z)$, telle que $U(S(z)) = z$, existe et a un rayon de convergence non nul.

1. bien noter que la sommation sur k démarre à 1 !

6.1.3 Continuité, intégrabilité et dérivabilité de la somme

Une série entière convergeant uniformément dans tout disque fermé contenu dans son disque de convergence, on peut lui appliquer les théorèmes de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité énoncés au chapitre 1, en se restreignant d'abord à une variable réelle : pour x réel et $r < R$, (inégalité stricte!), sur le segment $-r \leq x \leq r$, la somme $S(x)$ de la série $\sum a_n x^n$ est continue. En intégrant terme à terme la série $\sum a_n x^n$, la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ converge pour $|x| < R$ vers l'intégrale $\int_0^x S(x') dx'$. Enfin la série dérivée terme à terme, $\sum n a_n x^{n-1}$, est convergente pour $|x| < R$ et a pour somme $S'(x)$. En fait on démontre que ces séries dérivée et intégrée ont le même rayon de convergence que la série initiale.

Exemple. En intégrant terme à terme entre 0 et x la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ qui converge vers $1/(1+x)$ pour $x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (6.4)$$

qui converge pour $|x| < 1$. Pour $x = 1$, la série converge encore, et on a $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$.

On peut en fait étendre cette dérivation à la série de la variable complexe z . On y reviendra au chapitre suivant. Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série de rayon R , la dérivée de S par rapport à la variable z

$$S'(z) = \lim_{\substack{h \in \mathbb{C}, \\ h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$$

existe² et est donnée par la série dérivée

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (6.5)$$

qui converge dans le même disque de rayon R . (Preuve, voir [4], chap. I.)

Coefficients de la série entière

On peut donc dériver terme à terme une série entière à l'intérieur de son disque de convergence, puis dériver à nouveau, etc. La somme de la série $S(z) = \sum a_n z^n$ est donc indéfiniment dérivable et ses dérivées successives en $z = 0$ sont données par $S^{(n)}(0) = n! a_n$, soit $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. Pour $|z| < R$, la série entière $S(z) = \sum a_n z^n$ s'identifie au développement de Taylor(-Maclaurin) de $S(z)$

$$S(z) = S(0) + zS'(0) + \frac{z^2}{2} S''(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} S^{(n)}(0) + \dots \quad (6.6)$$

2. Bien noter que h est un complexe quelconque tendant vers 0.

6.1.4 Vitesse de convergence

Étant donnée une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ connu, un problème pratique est celui de la *vitesse de convergence* de cette série. Intuitivement, cette vitesse peut s'évaluer à nouveau par comparaison de séries, et nous nous attendons à ce qu'une série dont le terme général a_n se comporte par exemple comme $a_n \sim n^{-\alpha}$ converge d'autant plus vite que α est plus grand. Peut-on aller au delà de cette simple observation ? Combien de termes de la série faut-il garder pour avoir une approximation d'ordre donné de la somme ? Y-a-t-il des moyens d'accélérer cette convergence par des procédés de resommation ? Toutes ces questions sont d'un grand intérêt pour le physicien ... mais nous ne pourrions pas nous y arrêter.

6.2 Les fonctions exp et log

Comme on l'a vu plus haut, la série

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence infini. D'après (6.5)

$$S'(z) = S(z)$$

et on retrouve l'équation différentielle satisfaite par la fonction exponentielle.

On vérifie aussi aisément que

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}, \quad e^z e^{-z} = e^0 = 1.$$

ce qui implique que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0. \quad (6.7)$$

On peut restreindre la variable z à des valeurs réelles, retrouver les propriétés et inégalités familières (positivité, convexité, ...) de la fonction exponentielle réelle, définir la fonction réciproque log sur $\mathbb{R}^+$ etc etc.

On peut aussi la restreindre à des valeurs purement imaginaires, $\mathbb{R} \ni y \mapsto e^{iy}$ ce qui fournit un *homomorphisme*³ du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $U(1)$ des nombres complexes de module 1 (que l'on peut voir aussi comme le cercle unité) :

$$e^{iy} e^{iy'} = e^{i(y+y')}.$$

3. Rappelons qu'un homomorphisme d'un groupe G dans un groupe H est une application ρ de G dans H qui est compatible avec les deux structures de groupe : $\forall g, g' \quad \rho(g * g') = \rho(g) \cdot \rho(g')$.

Le noyau de cet homomorphisme, c'est-à-dire les y qui sont appliqués sur l'élément 1 sont les multiples de 2π : $y = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit à tout nombre u de module 1 (à tout point du cercle unité) correspond une famille de y définis modulo 2π tels que $u = e^{iy}$: ce sont les différentes déterminations de l'*argument* de u .

$$y = \arg u \mod 2\pi.$$

On étend alors la fonction argument à tout le plan "pointé" à l'origine $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$w \neq 0 \quad \arg w = \arg(w/|w|).$$

Logarithme complexe

Finalement intéressons-nous à la fonction réciproque de l'exponentielle (complexe). Étant donné $w \in \mathbb{C}$, on cherche z tel que $e^z = w$. Il est clair par (6.7) que z n'existe que si $w \neq 0$ et que si z est solution, tout $z + 2\pi ik$ l'est aussi. Si on note $z = \log w$, z n'est défini que modulo $2\pi i$. En identifiant les modules et arguments on a

$$e^z = e^{x+iy} = w = |w|e^{i \arg w} \Rightarrow x = \log |w|, y = \arg w \mod 2\pi$$

donc

$$z = \log w = |\log w| + i \arg w \quad (6.8)$$

Attention : on a utilisé la même notation $\log$ pour la fonction déjà bien définie sur les réels et pour le logarithme complexe. De plus, il faut garder à l'esprit que la partie imaginaire de ce $\log w$ est défini à l'addition près d'un multiple entier de $2\pi i$.

Ainsi il faut prendre garde que les identités familières du logarithme peuvent être affectées par ces déterminations multiples, telle

$$\log ww' = \log w + \log w' \mod 2\pi i.$$

Le logarithme complexe ainsi défini est un exemple de *fonction multivaluée*. Dans un domaine ouvert connexe du plan complexe, ne contenant pas 0 et "simplement connexe" (heuristiquement, domaine "sans trou", on verra plus précisément au chapitre suivant ce qu'il faut entendre par là), le logarithme admet une *détermination* qui est une fonction continue de la variable w . Et toute autre détermination en diffère par un multiple entier de $2\pi i$.

Par exemple, dans le domaine ouvert $D : |w| > r > 0, |\arg w| < \pi - \alpha$ (r et α petits : plan "coupé" le long de l'axe réel négatif), (6.8) fournit la *détermination principale* du logarithme $\log w$.

Développement en série du logarithme

La série entière

$$T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$$

a pour rayon de convergence 1 (cf supra). Elle donne la détermination principale de $\log(1+u)$.

En effet, comme on le sait bien, cette série est la série réciproque de celle de l'exponentielle ; donc $e^{T(u)} = 1+u$; c'est bien la détermination principale : si $|u| < 1$, $w = 1+u$ a une partie réelle > 0 donc appartient au domaine D ci-dessus, et en $u = 0$, $T(u)$ s'annule, tout comme la détermination principale.

6.3 Séries de Taylor. Fonctions analytiques

6.3.1 Séries de Taylor

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur Ω , et $z_0 \in \Omega$.

Définition 6.2 : La fonction f est développable en série entière centrée en z_0 s'il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ contenant z_0 et une suite $a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \Omega' \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (6.9)$$

Restreignons-nous (pour le moment) au cas réel. Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f une fonction de I dans $\mathbb{C}$ développable en série entière centrée en x_0 , $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, de rayon de convergence R . Comme on l'a vu plus haut en (6.6), la fonction est de classe C^∞ (infiniment dérivable) dans l'ouvert $]x_0 - R, x_0 + R[$, avec

$$\forall k \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k} \quad (6.10)$$

et donc $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. On appelle la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ série de Taylor (–MacLaurin) de f en x_0 .

6.3.2 Fonctions analytiques

Soit une fonction f d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 6.3 : La fonction f est analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, elle admet un développement en série entière centré en z_0 .

D'après ce qui précède, si f est analytique dans Ω , elle y est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives y sont analytiques ; $1/f$ est analytique dans Ω privé des points z_0 où $f(z_0) = 0$; si f admet une primitive dans Ω connexe (définie à une constante additive près), cette primitive est aussi analytique.

Exemples : les polynômes de z sont analytiques dans $\mathbb{C}$; les fractions rationnelles de z sont analytiques dans le plan privé des zéros du dénominateur. On va voir que la classe des fonctions analytiques est bien plus vaste :

Théorème 6.2 : *La somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est analytique en tout point z_0 du disque ouvert de convergence.*

Autrement dit, si $\sum_n a_n z^n$ est convergente dans le disque ouvert $|z| < R$, la fonction $f(z) = \sum_n a_n z^n$ est analytique en tout point z_0 de ce disque, donc tel que $|z_0| < R$. Cela est non trivial : l'existence du développement en série entière centré en 0 n'implique pas évidemment la même propriété en tout point du disque !

Exemple. Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Elle converge dans le disque de rayon 1 vers la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour tout x_0 , $-1 < x_0 < 1$, on peut écrire $f(x) = \frac{1}{1-x_0-(x-x_0)}$ et développer $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}$. Quel est le domaine de convergence de ce nouveau développement ?

Preuve. Montrons que la série $\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) u^n$ a un rayon de convergence $R' \geq R - |z_0|$ et que

$$f(z) = \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad \text{pour } |z - z_0| < R - |z_0|. \quad (6.11)$$

En effet si $r_0 = |z_0|$, $\alpha_n = |a_n|$, on a

$$\begin{aligned} f^{(m)}(z_0) &= \sum_p \frac{(m+p)!}{p!} a_{m+p} z_0^p \\ |f^{(m)}(z_0)| &\leq \sum_p \frac{(m+p)!}{p!} \alpha_{m+p} r_0^p \end{aligned}$$

Si $r_0 \leq r \leq R$,

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{1}{m!} |f^{(m)}(z_0)| (r - r_0)^m &\leq \sum_{m,p} \frac{(m+p)!}{m!p!} \alpha_{m+p} r_0^p (r - r_0)^m \\ &\leq \sum_n \alpha_n \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{n!}{m!(n-m)!} r_0^{n-m} (r - r_0)^m = \sum_n \alpha_n r^n < \infty, \end{aligned}$$

(où on a utilisé la convergence absolue pour modifier les sommations de la série double), ce qui prouve que la série (6.11) a un rayon de convergence $R' \geq r - r_0$, et puisque r peut être arbitrairement près de R , $R' \geq R - r_0$. On considère maintenant z tel que $|z - z_0| < R - r_0$. La série double $\sum_{m,p} \frac{(m+p)!}{m!p!} a_{m+p} z_0^p (z - z_0)^m$ est absolument convergente d'après ce qui précède, on peut la resommer de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} \sum_{m,p} \frac{(m+p)!}{m!p!} a_{m+p} z_0^p (z - z_0)^m &= \sum_n a_n \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{n!}{m!(n-m)!} z_0^{n-m} (z - z_0)^m = \sum_n a_n z^n = f(z) \\ &= \sum_m \frac{(z - z_0)^m}{m!} \sum_p \frac{(m+p)!}{p!} a_{m+p} z_0^p = \sum_m \frac{(z - z_0)^m}{m!} f^{(m)}(z_0) \end{aligned}$$

d'où $f(z) = \sum_m \frac{(z-z_0)^m}{m!} f^{(m)}(z_0)$ q.e.d.

Remarques.

1. Le rayon R' de convergence de la série (6.11) peut être plus grand que $R - r_0$. Exemple, considérer la série $f(z) = \sum_n (iz)^n = \frac{1}{1-iz}$ de rayon $R = 1$ et en étudier le développement en un point réel $x_0 < 1$. Montrer que le nouveau rayon de convergence est $R' = \sqrt{1+x_0^2} > 1 - |x_0|$.
2. Pour une fonction de variable réelle, l'hypothèse d'analyticité est plus forte que celle de différentiabilité C^∞ . Ainsi, soit la fonction $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$. La fonction est C^∞ , toutes ses dérivées s'annulent en 0, et la série de Taylor est donc convergente, mais sa somme est nulle donc ne converge pas vers f : la fonction n'est pas analytique ! L'origine du problème est que, au voisinage de 0, (dans les directions imaginaires) la fonction et ses dérivées croissent très vite (comme $e^{1/|x|^2}$)... Il existe des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) d'analyticité d'une fonction f de classe C^∞ , typiquement des conditions majorant la croissance des dérivées $f^{(n)}$ au *voisinage* du point considéré ([4], chap. 1).

6.3.3 Prolongement analytique

Problème : *Étant donnée une fonction f analytique dans Ω , ouvert connexe, et $\Omega' \supset \Omega$ un ouvert connexe contenant Ω , existe-t-il une fonction g analytique sur Ω' telle que $g = f$ sur Ω ?*

Si c'est le cas, on dit que g est un *prolongement analytique* de f à Ω' . Exemple : la fonction $f(z) = \sum_n z^n = (1-z)^{-1}$ est analytique dans $|z| < 1$. Elle admet donc un développement en série autour de tout point du disque $\Omega : |z| < 1$, par exemple $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{3i}{4}$ (voir figure 6.1) et ce développement a un rayon donné par la distance de z_0 au point 1, soit $r_0 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$: soit D le disque de centre z_0 et de rayon r_0 . La fonction est analytique en tout point de $\Omega' = \Omega \cup D$. Ce nouveau domaine Ω' déborde largement les limites de Ω : on a donc bien prolongé f au delà du disque initial. On pourrait itérer cette opération et de proche en proche, prolonger analytiquement f au plan privé du point 1.

Un théorème nous garantit l'unicité de ce prolongement, s'il existe :

Théorème 6.3 : *Soit f une fonction analytique dans un ouvert connexe Ω et soit $z_0 \in \Omega$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes*

1. $\forall n \geq 0 \quad f^{(n)}(z_0) = 0$;
2. $f \equiv 0$ dans un voisinage de z_0 ;
3. $f \equiv 0$ dans Ω .

Preuve (esquisse). Il est clair que 3. $\Rightarrow$ 1. Par ailleurs 1. $\Rightarrow$ 2. selon (6.11). Enfin pour 2. $\Rightarrow$ 3., on montre que l'ensemble Ω' des points z' de Ω au voisinage desquels $f \equiv 0$ est non vide (par 2.), ouvert (par définition) et fermé (par continuité des $f^{(n)}$, cf [4], p. 40) ; Ω étant connexe, on a $\Omega' = \Omega$ q.e.d.

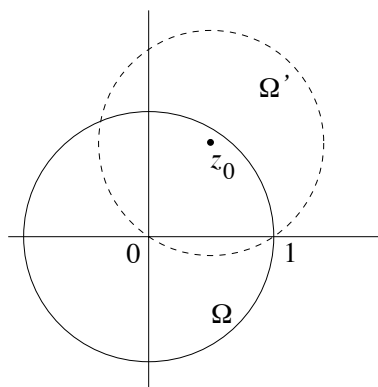


FIGURE 6.1 – Prolongement analytique de la somme de la série $\sum_n z^n$ au delà de son disque de convergence.

Corollaire : Si deux fonctions f et g analytiques dans un ouvert connexe Ω coïncident au voisinage d'un point de Ω , elles sont identiques sur Ω .

Exemples et contre-exemple de prolongement analytique

Considérons la série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, convergente et analytique pour $|z| < 1$ et la fonction $g(z) = \frac{1}{1-z}$ définie et analytique dans le plan pointé $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Elles coïncident dans le disque $|z| < 1$ et g définit donc le prolongement analytique de f au plan pointé.

Considérons ensuite le développement en série de la fonction logarithme. On peut effectuer ce développement autour du point 1, $f_0(z) = \log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^n / n$, qui converge dans le disque $D_0 = |z-1| < 1$, ou autour du point $e^{i\pi/4}$ $f_1(z) = \frac{i\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-in\pi/4} (z - e^{i\pi/4})^n / n$ qui converge dans le disque $D_1 = |z - e^{i\pi/4}| < 1$, etc. Ces deux fonctions coïncident au voisinage de $z_0 = \frac{i\pi}{8}$ (vérifier !) donc dans tout $D_0 \cap D_1$ selon la Proposition précédente. f_1 est donc l'unique prolongement de $\log z$ au domaine D_1 . On pourrait itérer et définir de proche en proche les prolongements f_k dans les disques $D_k : |z - e^{ik\pi/4}| < 1$. Mais **attention !** rien ne nous dit que le prolongement au domaine D_8 autour de $e^{i2\pi} = 1$ coïncide avec la fonction $f_0 = \log$ de départ. En fait comme on sait f_8 définit une autre détermination de la fonction $\log$, différant de f_0 par $2\pi i$.

À l'inverse, le prolongement analytique d'une fonction somme d'une série entière n'est pas toujours possible. Considérons par exemple la fonction $f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$. Elle converge pour $|z| < 1$, diverge pour tout z , $|z| > 1$ et aussi pour $z = 1$, point où elle a une "singularité"⁴. En fait on démontre aisément (cf Exercice) qu'elle a une singularité pour toute racine 2^p -ième de l'unité. Ces racines étant denses sur le cercle unité $|z| = 1$, ce cercle constitue une *frontière essentielle* de la fonction, au delà de laquelle un prolongement analytique est impossible. On conçoit qu'en général, un prolongement analytique n'est possible que s'il est possible de "se glisser entre les singularités"...

4. On donnera au chapitre 7 un sens précis à ce terme. Contentons-nous pour le moment de la définition suivante : une singularité d'une fonction définie par une série $\sum a_k z^k$ est un point où la série diverge.

Applications physiques

A côté des applications mathématiques, le prolongement analytique d'une fonction peut aussi être utile en physique.

Exemple : les notions d'impédance Z et de son inverse Y , l'admittance, qui décrivent la réponse d'un circuit électrique à une excitation, sont familières : il s'agit de fonctions (complexes) de la variable réelle de fréquence (ou plus précisément de pulsation) ω . Il se trouve que le prolongement de $Z(\omega)$ et de $Y(\omega)$ à des valeurs complexes de ω est possible, en faisant appel à la *causalité*, et qu'il contient une information utile. On verra au chapitre 8 d'autres exemples de ce cas (relations de dispersion).

D'autres exemples concernent le prolongement de quantités physiques définies pour une variable entière à des valeurs réelles ou complexes arbitraires : c'est le cas du moment cinétique J qui en mécanique quantique prend des valeurs quantifiées, multiples entières ou demi-entières de $\hbar$, mais qui sous des hypothèses adéquates sur le potentiel de diffusion, peut être prolongé dans le plan complexe (Regge) ; là encore, les propriétés d'analyticité dans la variable J peuvent être riches d'informations ... C'est encore le cas avec d'autres nombres au départ entiers –nombre Q d'états dans le modèle de Potts de la mécanique statistique ; dimension d'espace-temps prolongée à partir de $d = 4$ en mécanique statistique et théorie des champs, etc.

6.4 Lacunes de ce chapitre...

6.4.1 Séries divergentes. Séries asymptotiques

Il conviendrait de discuter aussi le cas des “séries asymptotiques”, qui sont divergentes et qui apparaissent par exemple en mécanique céleste, ou dans les développements “perturbatifs” de mécanique quantique ou de théorie quantique des champs. On se bornera à dire ici qu'une série de rayon de convergence nul peut néanmoins contenir une information utile ... et utilisable avec des outils de “resommation” adéquats et mathématiquement justifiés.

6.4.2 Produits infinis

Il conviendrait aussi d'étudier comment on peut donner un sens aux produits infinis $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z}{a_n})$. Parmi toutes les belles formules que l'on peut démontrer, n'en citons qu'une

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (6.12)$$

Exercices

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ analytique dans I . Montrer qu'on peut la prolonger en une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant I .

2. Soit $f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$.

Montrer qu'elle converge dans le disque $|z| < 1$ et qu'elle a une singularité en $z = 1$.

Montrer que f satisfait les relations fonctionnelles $f(z) = z^2 + f(z^2)$, et plus généralement $f(z) = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^p} + f(z^{2^p})$ pour tout p entier. En déduire que f a aussi des singularités en toute racine 2^p -ième de l'unité.