Chapitre 3

Distributions

3.1 Introduction

Le physicien rencontre fréquemment des situations où les fonctions régulières –continues, une fois, deux fois ... différentiables– de l'analyse classique s'avèrent insuffisantes. Ce sont en général des limites singulières de problèmes bien définis, voir ci-dessous des exemples, et le physicien a donc à sa disposition une "régularisation" naturelle de la singularité, fournie par le problème étudié avant d'en prendre la limite. Cette régularisation n'est pas toujours évidente dans une formulation mathématique générale. Cela va nous amener à introduire des objets mathématiques nouveaux, les *fonctions généralisées* ou *distributions*.

Ces concepts ont été intuités par le physicien P.A.M. Dirac et développés par les mathématiciens Sergei Sobolev et Laurent Schwartz, dans les années 1935-1945.

Commençons par présenter quelques problèmes physiques où se rencontrent ces problèmes. Il s'agit en général d'idéalisations de situations bien définies : limite de charge électrique ponctuelle, de réseau diffuseur infiniment étendu, de choc infiniment bref avec changement instantané de la vitesse, etc.

3.1.1 Distributions de charges électriques.

On considère le potentiel créé en $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ par une charge électrique q isolée et localisée en $\mathbf{r}_0$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \tag{3.1}$$

et on le compare au potentiel créé par une distribution continue de charges, de densité $\rho(\mathbf{r})$, i.e. telle que la charge contenue dans un petit volume $d^3\mathbf{r}$ autour de $\mathbf{r}$ est $\rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \,. \tag{3.2}$$

Comment passer de (3.2) à (3.1) quand la charge est localisée en le seul point $\mathbf{r}_0$? Il faut imaginer que la fonction $\rho(\mathbf{r})$ a un *support* de plus en plus restreint quand un paramètre ϵ, par exemple le diamètre de ce support, tend vers zéro, et est telle que $\lim_{\epsilon\to 0}\int d^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\varphi(\mathbf{r}') = q\varphi(\mathbf{r}_0)$ pour toute fonction φ "pas trop singulière" comme 1 ou comme $1/\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|$. A la limite, ρ devrait donc être nulle presque partout. On voit qu'au sens de l'intégrale de Lebesgue du chapitre 2, son intégrale devrait alors être nulle, alors qu'on attend que cette intégrale vaille q. Cette limite de ρ ne peut donc pas s'assimiler à une fonction. On écrira $\lim_{\epsilon\to 0}\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)$, et δ, la distribution delta de Dirac, nulle p.p. et d'intégrale égale à 1, nous offre un premier exemple de distribution.

3.1.2 Diffusion cohérente par un réseau. Peigne de Dirac

Notre deuxième exemple concerne la diffusion d'une onde électromagnétique, supposée monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et de pulsation $\omega = 2\pi\nu$, (avec $|k| = \omega/c$), incidente selon un angle α sur un réseau supposé ici unidimensionnel et constitué de $2L+1$ centres diffuseurs, espacés d'une longueur a. Un calcul classique montre que l'onde diffusée dans la direction β a une amplitude multipliée par

$$\sum_{\ell=-L}^{L} e^{i\ell k\Delta} = \frac{e^{i(L+1)k\Delta} - e^{-iLk\Delta}}{e^{ik\Delta}-1} = \frac{\sin(2L+1)k\frac{\Delta}{2}}{\sin k\frac{\Delta}{2}} \tag{3.3}$$

où $\Delta = a(\sin\alpha - \sin\beta)$ est la différence de chemins optiques entre deux rayons lumineux incidents sur des centres adjacents, voir Fig. 3.1.

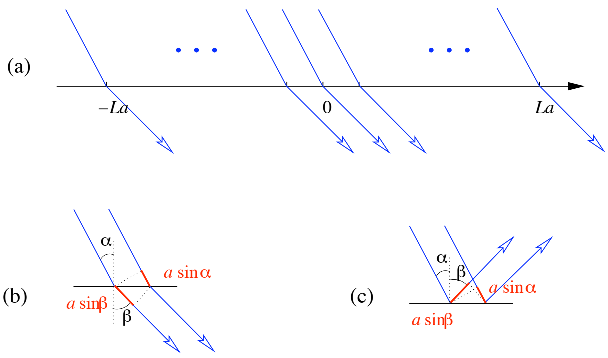

FIGURE 3.1 – (a) Diffusion par un réseau fini fait de $2L+1$ centres diffuseurs. (b-c) Différence de chemin optique entre deux rayons lumineux adjacents observés en transmission (b) ou en réflexion (c).

Dans la limite où le nombre $2L+1$ de diffuseurs tend vers l'infini, le facteur (3.3) apparaissant dans l'amplitude devient de plus en plus "piqué" et grand au voisinage de toute valeur $2\pi K$ de x, cf Fig 3.2. La limite (dans un sens qui devra être précisé) est donc infinie en tout point $2\pi K$, nulle ailleurs. On notera $2\pi\delta_P(x)$ cette limite, où l'indice "P" rappelle sa nature périodique, de période 2π,

$$\delta_P(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,.$$

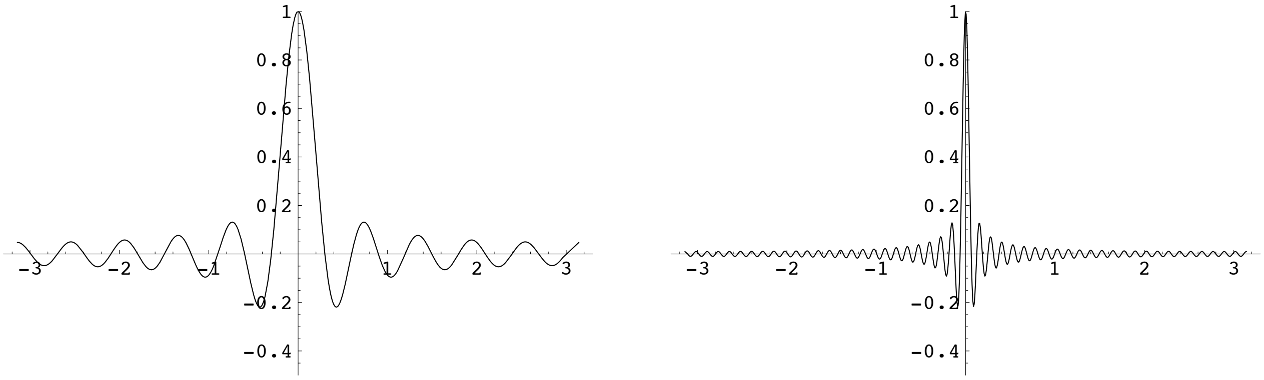

FIGURE 3.2 – La fonction $\sin(2L+1)\frac{x}{2}/[(2L+1)\sin\frac{x}{2}]$ entre $-\pi$ et π pour deux valeurs de $L=10$ et $L=50$. On voit que la fonction n'est d'ordre 1 que dans un intervalle $|\Delta x| \approx O(\frac{1}{L})$ autour de chaque multiple de 2π.

Noter que son intégrale vaut 1 sur tout intervalle de longueur 2π

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{k0} = 1\ , \tag{3.4}$$

et on peut donc écrire –toujours de façon très heuristique– δ_P comme une superposition linéaire de distributions de Dirac localisées aux multiples de 2π

$$\delta_P(x) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi K)\,.$$

On donne pour cela à cette fonction généralisée dont a tenté de dessiner le graphe à la figure 3.3 le nom de "peigne de Dirac", et on remplace souvent la notation δ_P par celle, plus suggestive, de Ш (la lettre cyrillique "cha"). On y reviendra plus bas, équ. (3.7).

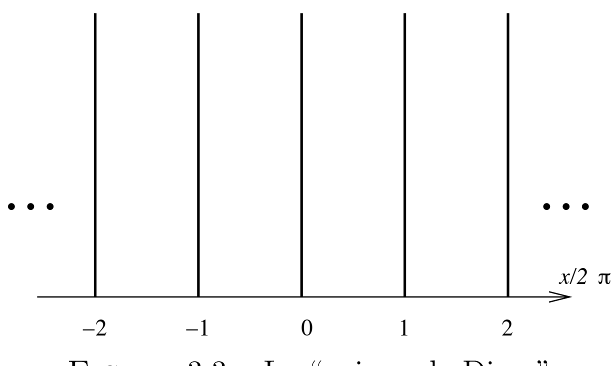

FIGURE 3.3 – Le "peigne de Dirac"

3.1.3 Choc élastique

Une balle rebondit élastiquement sur un obstacle. Sa vitesse avant le choc est $\mathbf{v}_0$, elle est $-\mathbf{v}_0$ après (hypothèse de choc *élastique*, sans perte d'énergie cinétique). Supposons pour simplifier que le profil de vitesse pendant l'intervalle Δt du choc est linéaire, voir figure 3.4. Par la loi de Newton, la force à laquelle la balle est soumise est $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\Delta\mathbf{v}/\Delta t$, donc $\mathbf{F} = -2m\mathbf{v}_0/\Delta t$. La variation de la quantité de mouvement, $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t = -2m\mathbf{v}_0$ est bien définie, indépendante de Δt. Dans le cas limite où $\Delta t \to 0$, la force $\mathbf{F}$ est mal définie, mais son intégrale sur tout intervalle de temps $[t_1, t_2]$ qui mesure la variation de la *quantité de mouvement* $\Delta_{21}\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathbf{F}(t)$ est, elle, bien définie. En particulier, pour tout $\epsilon \neq 0$, $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{d}t\, \mathbf{F}(t) = -2m\mathbf{v}_0$. À nouveau l'analyse usuelle faisant appel à des fonctions ordinaires ne peut rendre compte de ce $\mathbf{F}(t)$.

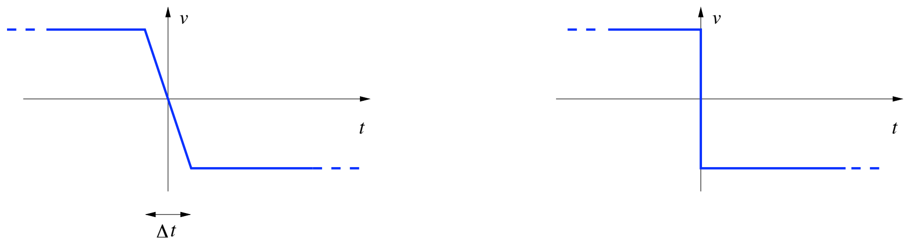

FIGURE 3.4 – Profil de vitesse lors d'un choc élastique. (a) ; (b) limite d'un choc instantané

3.1.4 Autres exemples

On rencontrera d'autres exemples en mécanique quantique, en physique statistique, puis par la suite, en théorie quantique des champs.

3.2 Définitions et premières propriétés

L'idée est de définir des objets dont l'*intégrale* avec des fonctions suffisamment régulières est bien définie. Plutôt que de définir une fonction f par sa valeur en chaque point, on veut en donner la moyenne locale obtenue par intégration avec une "fonction-test" de support suffisamment concentré. Ainsi dans les exemples précédents, la densité de charge peut être un objet singulier à la limite ponctuelle, mais la charge totale est bien définie ; la force dans un choc instantané est mal définie, mais son intégrale sur le temps de la collision, c'est-à-dire la variation de quantité de mouvement, est bien définie, etc. Pour donner un sens plus précis à cette idée, il faut dire avec quelles fonctions f, quelles "fonctions-tests", on va travailler.

Remarque : L'intégration d'une fonction est une opération linéaire : si φ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ d'une classe $\mathcal{D}$ à préciser, et f une fonction telle que $f(x)\varphi(x)$ soit intégrable, (fonction "localement intégrable", voir plus bas), l'application $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x)\varphi(x)$ est une *forme linéaire*, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. On va exploiter cette remarque pour définir les distributions comme formes linéaires sur des espaces de fonctions bien choisis.

3.2.1 Espace des fonctions-tests. Définition des distributions.

Définition 3.1 : *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (en général on écrira plus simplement $\mathcal{D}$) est l'espace des fonctions* lisses, *c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ (infiniment différentiables), et de support* borné.

Un exemple standard sur $\mathbb{R}$ est fourni par la fonction de support (a, b) :

$$f(x) = \begin{cases} c \exp \frac{1}{(x-a)(x-b)} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon}\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

voir figure 3.5.

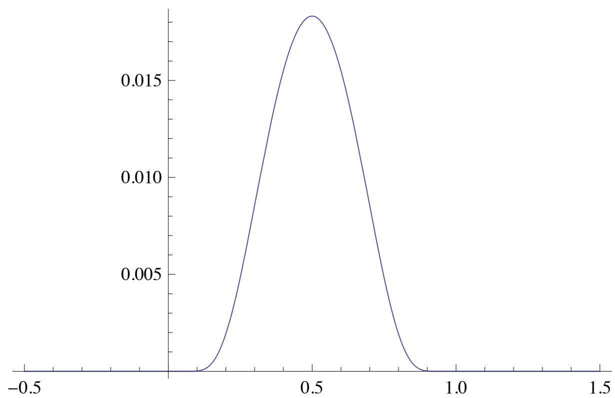

FIGURE 3.5 – La fonction (3.5) pour $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$

Définition 3.2 : *Une distribution est une forme linéaire* continue *sur $\mathcal{D}$. L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'$, c'est le dual de $\mathcal{D}$.*

Si $T \in \mathcal{D}'$ est une distribution, on notera $\langle T, \varphi \rangle$ la forme linéaire $T(\varphi)$.

Mais qu'entend-on par forme linéaire (ou fonctionnelle) *continue* ?

Définition 3.3 : *Une suite de fonctions-tests $\varphi_n \in \mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers $\varphi \in \mathcal{D}$ si les supports des φ_n sont contenus dans un même ensemble borné indépendant de n et si toutes les dérivées partielles des φ_n convergent uniformément vers celles de φ, $\partial^{(p)}\varphi_n \overset{\text{CVU}}{\longrightarrow} \partial^{(p)}\varphi$.*

Définition 3.4 : *Une forme linéaire (ou fonctionnelle) sur $\mathcal{D}$ est* continue *ssi pour toute suite de fonctions-tests $\varphi_n \in \mathcal{D}$ convergeant dans $\mathcal{D}$ vers $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$.*

Ce point complète la définition des distributions. Retenir qu'une distribution doit être une fonctionnelle linéaire **et** continue. Ce dernier point est souvent le plus délicat à vérifier.

Commentaire sur le choix de l'espace $\mathcal{D}$. Pourquoi ce choix, qui semble assez restrictif ? Noter que plus on restreint la classe des fonctions-tests, plus grand sera l'espace des distributions définies sur ces fonctions [1]. Le fait que les fonctions-tests soient de classe C^∞ n'est pas très restrictif, toute fonction continue à support borné étant limite uniforme de telles fonctions [2] ; le fait qu'elles soient de support borné sera levé plus tard : on considérera au Chap. 4 l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions-tests *lisses*, c'est-à-dire de classe C^∞, et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées ($\mathcal{S}$ pour Schwartz).

• Distributions régulières

Définition 3.5 : *Une fonction mesurable f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ est* localement intégrable *si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, la fonction $f \cdot \chi_K$ est intégrable, autrement dit $\int_K f(x)\mathrm{d}x$ existe. On note $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$.*

Si la propriété d'intégrabilité est vraie sur tout $\mathbb{R}^n$, la fonction est *intégrable.* Par exemple la fonction $1/\sqrt{x}$, ou la fonction constante 1, sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$ mais pas intégrables. La fonction $1/x$ n'est pas localement intégrable. Toute fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, est localement intégrable.

Toute fonction localement intégrable définit une distribution par intégration :

Théorème 3.1 : *Si f est localement intégrable, elle définit une distribution, notée également f, par*

$$\langle\, f, \varphi\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Cette distribution est appelée la distribution régulière *associée à la fonction localement intégrable f.*

Preuve : Il est clair que l'intégrale existe, puisque restreinte à un intervalle compact, le support de φ. La fonctionnelle est bien linéaire. Elle est continue car si la suite $\varphi_n \in \mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$, avec des supports contenus dans un compact K, $|\int f(\varphi_n - \varphi)| \leq \int |f|\,|\varphi_n - \varphi| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \int |f| = M\|\varphi_n - \varphi\|_\infty$, où $M = \int_K |f|$ existe puisque f est localement intégrable. Mais par hypothèse, $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$ donc $\langle\, f, \varphi_n\,\rangle \to \langle\, f, \varphi\,\rangle$. □

Ces distributions régulières expliquent en quoi les distributions sont des "fonctions généralisées". Elles vont nous guider dans la définition des opérations de dérivation, etc, des distributions.

1. au contraire du cas d'un espace vectoriel E de dimension finie, pour lequel $\dim E' = \dim E$, cf App. B
2. c'est le théorème de Stone–Weierstrass, une généralisation du théorème de Weierstrass cité à l'App. A.4 du Chap. 1.

Noter que deux fonctions localement intégrables égales p.p. définissent la même distribution régulière.

• Distributions singulières

Ce sont les distributions que l'on ne peut pas associer à des fonctions localement intégrables. Exemples :

1. Distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$. C'est la distribution notée δ_{x_0} ou encore $\delta(x - x_0)$ définie par

$$\langle\, \delta_{x_0}, \varphi \,\rangle = \varphi(x_0) \tag{3.6}$$

comme anticipé plus haut dans les exemples physiques...

2. Distribution de Dirac sur $\mathbb{R}^n$: *ibidem*, définie par $\langle\, \delta_{\mathbf{r}_0}, \varphi \,\rangle = \varphi(\mathbf{r}_0)$.

3. Peigne de Dirac, cf § 3.1.2. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, c'est la distribution définie par

$$\langle\, Ш, \varphi \,\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)\,. \tag{3.7}$$

On peut donc écrire $Ш = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$.

Exercice : calculer la somme $\Sigma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}$ en la testant sur une fonction φ périodique de période 1 donnée par son développement en série de Fourier : on n'intégrera d'abord que sur une période puis on rétablira la périodicité ; vérifier que $\Sigma(x)$ est égal à $Ш(x)$. Comparer avec la discussion du § 3.1.2.

4. Partie principale de Cauchy de $1/x$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On définit la distribution PP $\frac{1}{x}$, *partie principale de Cauchy*, (certains auteurs parlent de "valeur principale"), par

$$\langle\, \mathrm{PP}\frac{1}{x}, \varphi \,\rangle = \mathrm{PP} \int \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x\,. \tag{3.8}$$

(On note aussi l'intégrale de partie principale $⨍ \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$.) Bien noter que l'intégrale est calculée de façon symétrique en $x = 0$. On définit par extension la PP $\frac{1}{x-a}$ en tout point a.

• Support d'une distribution

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(O)$ l'espace des fonctions lisses de support contenu dans O et $T \in \mathcal{D}'(O)$ une distribution. On dit que T est nulle sur un ouvert $U \subset O$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(O)$ de support contenu dans U, on a $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Définition 3.6 : *On appelle* support d'une distribution T *sur* O *le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel* T *est nulle.*

Remarque : Le support est bien défini, car si une distribution est nulle sur chacun des ouverts d'une famille, elle est nulle sur leur réunion ; son support est donc le complémentaire de la réunion de tous les ouverts sur lesquels elle est nulle.

Exemples : Si T est une distribution régulière associée à une fonction continue, alors le support qu'on vient de définir s'identifie au support défini précédemment pour les fonctions continues. Si T est une distribution δ ou n'importe laquelle de ses dérivées, son support se réduit au point 0.

3.3 Opérations sur les distributions

On se propose de définir sur les distributions un certain nombre d'opérations : translation, réflexion, dilatation de la variable, dérivation, changement de variable, ... La méthode est d'écrire d'abord ces opérations sur des distributions régulières en les exprimant dans le langage des distributions, puis de les étendre comme définitions dans les cas non réguliers.

3.3.1 Translation, dilatation

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit l'action sur f d'une translation de la variable $x \to x' = x + a$ par $f_a(x') = f(x)$, soit $f_a(x) = f(x - a)$. Pour une fonction f localement intégrable et $\varphi \in \mathcal{D}$, on a donc $\langle f_a, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\varphi(x+a)\mathrm{d}x = \langle f, \varphi_{-a} \rangle$. En général, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'$, on définit sa translatée T_a par

$$\langle T_a, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \varphi_{-a} \rangle \tag{3.9}$$

qui est bien une fonctionnelle linéaire et continue.

Exemple : la partie principale PP $\frac{1}{x-a}$ est la translatée de PP $\frac{1}{x}$.

Cette opération de translation s'étend bien évidemment à $\mathbb{R}^n$.

Pour le changement de variable par dilatation, $x \mapsto x' = x/k$, on procède de même. On définit d'abord la transformation de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{(k)}(x') = f(x)$, donc $f_{(k)}(x) = f(kx)$, puis $\langle f_{(k)}, \varphi \rangle = \int_R f(kx)\varphi(x)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{|k|}\langle f, \varphi_{(k^{-1})} \rangle$, qu'on généralise à une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}'$ en posant par définition

$$\langle T_{(k)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|k|}\langle T, \varphi_{(k^{-1})} \rangle\,, \tag{3.10}$$

ou encore

$$\langle T(kx), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|k|}\left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{k}\right)\right\rangle\,. \tag{3.11}$$

Ainsi par exemple, pour la distribution δ de Dirac, on écrira

$$\delta\,(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)\,. \tag{3.12}$$

À nouveau, l'extension à $\mathbb{R}^n$ est aisée, mais attention, le jacobien est maintenant $\frac{1}{|k|^n}$!

$$\text{dans } \mathbb{R}^n \qquad \langle\, T_{(k)}, \varphi \,\rangle = \frac{1}{|k|^n} \langle\, T, \varphi^{(k^{-1})} \,\rangle \,. \tag{3.13}$$

3.3.2 Dérivation d'une distribution

On part d'une fonction f localement intégrable ainsi que sa dérivée : $f, f' \in L^{1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On écrit alors pour la distribution régulière associée à f'

$$\langle\, f', \varphi \,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\langle\, f, \varphi' \,\rangle \,, \tag{3.14}$$

où on a utilisé une intégration par parties, sans terme de bord puisque φ est à support borné. Cela suggère la

Définition 3.7 : *La dérivée d'une distribution T de $\mathcal{D}'$ est définie par*

$$\boxed{\langle\, T', \varphi \,\rangle \overset{\text{déf}}{=} -\langle\, T, \varphi' \,\rangle} \tag{3.15}$$

(Elle est appelée d-dérivée dans les TD)

Cette définition, que nous allons beaucoup utiliser, s'étend très naturellement aux dérivées d'ordre supérieur, mais aussi aux dérivées partielles pour des distributions sur $\mathbb{R}^n$, etc. Nous nous intéresserons plus bas au laplacien de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi \in \mathcal{D} \quad : \qquad \langle\, \Delta T, \varphi \,\rangle = \langle\, T, \Delta\varphi \,\rangle \,.$$

On voit que la dérivabilité des distributions ne pose pas de problème. En fait même si une fonction (localement intégrable) n'est pas dérivable comme fonction, elle est toujours dérivable en tant que distribution ! Exemple : la fonction “saut” de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

est une fonction localement intégrable ; elle est discontinue en 0 et n'est donc pas dérivable en ce point. Sa dérivation en tant que distribution, cependant, ne pose pas de problème :

$$\langle\, H', \varphi \,\rangle = -\langle\, H, \varphi' \,\rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = [-\varphi]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle\, \delta, \varphi \,\rangle$$

donc

$$\boxed{H' = \delta} \tag{3.17}$$

La dérivée de H est la distribution de Dirac !

3.4 Distribution delta et distributions reliées

3.4.1 Fonction de Heaviside, fonction signe

On vient de rencontrer la distribution de Heaviside $H(x)$ ou fonction saut, notée aussi souvent $\theta(x)$ par les physiciens. Une fonction ou distribution reliée est la *fonction signe*

$$\epsilon(x) \equiv \mathrm{sgn}(x) = -1 + 2H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

C'est au signe près et à une dilatation verticale près la fonction qui décrit la discontinuité de vitesse dans l'exemple du choc du § 3.1.3.

Par le même calcul que plus haut, on a $\epsilon' = 2\delta$.

Les dérivées successives de la distribution δ de Dirac se définissent de même et peuvent être rencontrées en physique.

3.4.2 Relations fonctionnelles

• Anticipant un peu sur la suite, on peut définir le produit de toute distribution T par une fonction ψ de classe C^∞ : $\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle$, voir ci-dessous § 3.5. L'opération est particulièrement simple pour la distribution δ : $\delta(x)\psi(x) = \psi(0)\delta(x)$. En particulier on a $x\delta = 0$; réciproquement, il est naturel de se demander : quelles distributions $T \in \mathcal{D}'$ sont telles que $xT = 0$? ou telles que $x^n T = 0$? Voir TD.

• Composition d'une distribution avec une fonction f

Rappelons d'abord la formule de changement de variable dans une intégrale de fonctions ordinaires (cf Chap. 2). Soient g une fonction localement intégrable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et monotone, donc inversible au sens des fonctions (f^{-1} existe). On supposera aussi que f' ne s'annule pas. La composée $g \circ f$ est localement intégrable et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle g \circ f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g\left(f(x)\right) \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(y) \varphi\left(f^{-1}(y)\right) \frac{\mathrm{d}y}{|f'\left(f^{-1}(y)\right)|} = \left\langle \frac{g}{|f' \circ f^{-1}|}, \varphi \circ f^{-1} \right\rangle$$

où le dénominateur vient du jacobien dans le changement de variable $x \mapsto y = f(x)$

$$J = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| = |f'(x)| = |f'\left(f^{-1}(y)\right)| \,.$$

De la même façon, pour une distribution $T \in \mathcal{D}'$, on définit

$$\langle T \circ f, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \left\langle \frac{T}{|f' \circ f^{-1}|}, \varphi \circ f^{-1} \right\rangle \,. \tag{3.19}$$

C'est en particulier le cas pour la distribution δ

$$\langle\, \delta \circ f, \varphi\, \rangle = \left\langle \frac{\delta}{|f' \circ f^{-1}|}, \varphi \circ f^{-1} \right\rangle = \frac{\varphi\,(f^{-1}(0))}{|f'\,(f^{-1}(0))\,|}\,, \tag{3.20}$$

ou encore

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0) \tag{3.21}$$

avec x_0 l'*unique* zéro de la fonction (supposée monotone) f. (Si f ne couvre pas tout $\mathbb{R}$ et n'a pas de zéro, l'intégrale est nulle). Noter qu'on a besoin de l'hypothèse que f' ne s'annule pas au zéro x_0 de f : $f'(x_0) \neq 0$. Ainsi $f(x) = x^3$ est exclue.

On peut généraliser au cas d'une fonction f n'ayant que des zéros isolés $x_i \in \mathbb{R}$ où sa dérivée ne s'annule pas. Il suffit de couper le domaine d'intégration en sous-domaines où f est monotone, et la formule (3.21) donne alors

$$\delta(f(x)) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{x_i \\ f(x_i)=0}} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)\,. \tag{3.22}$$

Cette identité est *très* utile au physicien, on la rencontrera chaque fois qu'on imposera une contrainte par l'intermédiaire d'une distribution δ, voir ci-dessous § 3.4.3 des exemples d'application.

On peut retrouver la relation (3.22) par un argument qualitatif ("heuristique") : la distribution $\delta \circ f$ localise l'intégration dans $\langle\, \delta \circ f, \varphi\, \rangle$ au voisinage des zéros x_i de f. Au voisinage de chacun de ces zéros, on développe au premier ordre non nul $f(x) \approx f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \cdots = (x - x_i)f'(x_i) + \cdots$ puisque $f(x_i) = 0$ et qu'on suppose $f'(x_i) \neq 0$; on conçoit que l'on puisse écrire $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(f'(x_i)(x - x_i)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ (par (3.12)), qui n'est autre que (3.22).

• δ comme limite de fonctions variées

Définition 3.8 : (Convergence faible dans $\mathcal{D}'$) *: Une suite T_n de distributions de $\mathcal{D}'$ converge faiblement dans $\mathcal{D}'$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, la suite $\langle\, T_n, \varphi\, \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$.*

Cela définit une fonctionnelle linéaire T, on peut montrer que cette fonctionnelle est continue, c'est donc une distribution de $\mathcal{D}'$ et on écrit $T_n \stackrel{\mathcal{D}'}{\to} T$.

On montre aussi la compatibilité entre limite faible et dérivation *au sens des distributions* : si $T_n \stackrel{\mathcal{D}'}{\to} T$, il y a aussi convergence faible de toutes les dérivées $T_n^{(p)} \stackrel{\mathcal{D}'}{\to} T^{(p)}$.

Exemples. Considérons les deux suites de fonctions
– gaussiennes $f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-\frac{nx^2}{2}}$, ce sont des fonctions de classe C^∞ ;
– fonctions "porte" $g_n(x) = \frac{n}{2}(H(x + \frac{1}{n}) - H(x - \frac{1}{n}))$, égales à $\frac{n}{2}$ pour $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$, nulles ailleurs : ce sont des fonctions en escalier.

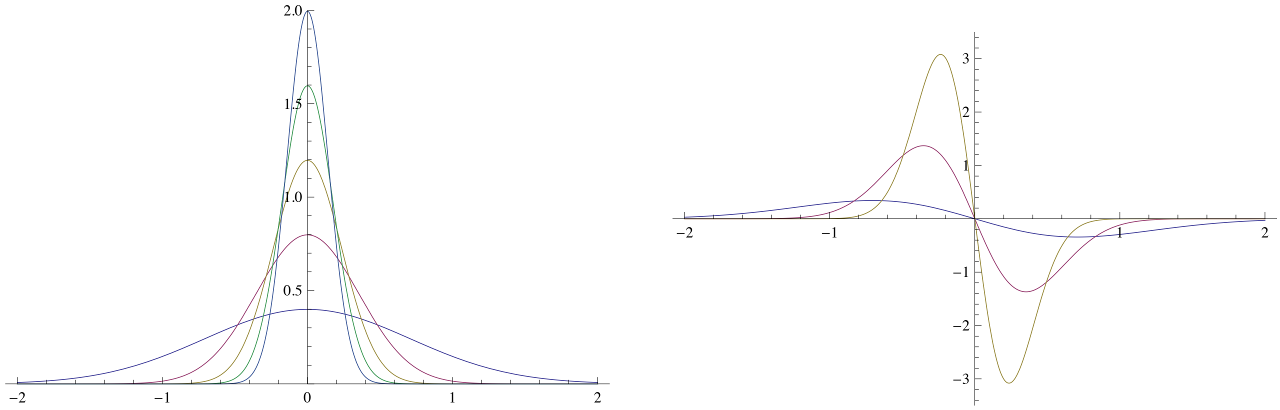

FIGURE 3.6 – Les fonctions gaussiennes f_n de plus en plus piquées, de $n = 1$ à $n = 5$, et leurs dérivées premières de $n = 1$ à $n = 3$.

Ces fonctions f_n et g_n sont positives et normalisées par $\int f_n \mathrm{d}x = 1$, $\int g_n \mathrm{d}x = 1$. Elles prennent des valeurs $\geq O(1)$ (en un sens qu'il faudrait préciser) dans un intervalle de longueur tendant vers 0 quand $n \to \infty$. Elles définissent des distributions régulières qui tendent faiblement dans $\mathcal{D}'$ vers δ quand $n \to \infty$. Inversement elles peuvent constituer des "régularisations" utiles de la distribution de Dirac.

Exercice : étudier analytiquement et avec le logiciel Maple ou Mathematica la convergence des fonctions trigonométrico-rationnelles : $h_n(x) = \sin^2(\pi n x)/n\pi x^2$ et de leurs dérivées. Le cas des fonctions $\sin nx/\sin x$ rencontrées dans l'introduction, ou celui des $\sin nx/x$ (cf [1] p210) est plus délicat, mais permet aussi de construire les distributions Ш ou δ par une limite.

3.4.3 δ sur une courbe, une surface, ...

• Courant linéique

On apprend en électromagnétisme qu'une particule de charge q suivant une trajectoire d'espace $\mathbf{x}(t)$ crée en tout point $y = (\mathbf{y}, t)$ un vecteur courant d'expression

$$\mathbf{j}(\mathbf{y}, t) = q \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t))\,.$$

On peut aussi écrire la densité de charge au point y comme

$$\rho(\mathbf{y}, t) = q\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t))\,.$$

Cette formule admet une intéressante généralisation relativiste. Une particule de charge q suivant une trajectoire d'espace-temps $x^\mu(\tau)$, avec τ le temps propre, $ds^2 = c^2 d\tau^2$, crée en tout point y d'espace-temps un quadri-vecteur courant d'expression

$$j^\mu(\mathbf{y},t) = q\frac{\mathrm{d}x^\mu(\tau)}{\mathrm{d}t}\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}(\tau))|_{t=x^0(\tau)} = q\int \mathrm{d}\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\delta^4(y-x(\tau))\,.$$

Noter que dans la 3ème expression on a récrit le courant sous forme explicitement covariante, en passant d'une distribution de Dirac à trois dimensions δ^3 à une distribution δ^4. Exercice : vérifier l'équivalence entre les 2ème et 3ème expressions en utilisant (3.21). Ce courant a une composante temporelle, la densité de charge, $j^0(\mathbf{y},t) = q\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}(\tau))|_{t=x^0(\tau)}$ qui satisfait bien $\int \mathrm{d}^3y\, j^0(\mathbf{y},t) = q$ et on vérifie qu'il est de (quadri)divergence nulle : $\partial_\mu j^\mu(y) = 0$.

On pourrait discuter de même une distribution "surfacique" de charges, etc.

• Particule relativiste sur sa "couche de masse"

En mécanique relativiste, on apprend qu'une particule de masse au repos m a une énergie E et une impulsion $\mathbf{p}$ reliées par la relation $E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$ qui se réduit, pour une particule au repos, au célèbrissime $E = mc^2$. On peut redire cela en termes du quadri-vecteur impulsion $p = (p^0 = E/c, \mathbf{p})$ dont la longueur minkovskienne carrée est $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$. On choisit généralement des unités où $c = 1$ et finalement

$$p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2\,. \tag{3.23}$$

On a parfois à intégrer sur des quadri-impulsions contraintes à satisfaire la condition (3.23), c'est-à-dire à être sur la "couche de masse" dans le jargon des physiciens, en fait un hyperboloïde à deux nappes dans l'espace de Minkowski. On peut imposer cela en insérant dans l'intégration une distribution $\delta(p^2 - m^2)$. En suivant (3.22) on récrit

$$\delta(p^2-m^2) = \frac{\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} + \frac{\delta(p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}$$

mais on accompagne en général la condition (3.23) de la condition que l'énergie p^0 est positive, en d'autres termes on s'intéresse à

$$\delta(p^2-m^2)\,H(p^0) = \frac{\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\,.$$

La mesure d'intégration sur la couche de masse s'écrit donc

$$\mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\,H(p^0) = \frac{\mathrm{d}^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \tag{3.24}$$

où l'expression du membre de gauche, qui est évidemment invariante relativiste nous garantit que celle du membre de droite l'est aussi. Il faut comprendre (3.24) au sens des distributions, c'est-à-dire testé dans une intégration avec une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ arbitraire

$$\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\,H(p^0)\,\varphi(p^0,\mathbf{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\,\varphi(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2},\mathbf{p})\,.$$

3.5 Produit de distributions. Convolution

Il faut faire attention à ce que l'on entend par produit de distributions. Plusieurs définitions sont en effet possibles

1. Le produit d'une distribution T par une fonction ψ de classe C^∞ ne pose pas de problème : $\langle T\psi, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \psi\varphi \rangle$, puisque si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi\varphi \in \mathcal{D}$ et l'expression de droite est bien définie, c'est une fonctionnelle continue et linéaire de φ, elle définit donc la distribution $T\psi$. Exemple : pour toute fonction $\psi \in C^\infty$, $\delta(x)\,\psi(x) = \delta(x)\,\psi(0)$, $\delta_a(x)\,\psi(x) = \delta_a(x)\,\psi(a)$.
2. Pour deux fonctions localement intégrables f et g de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (et donc pour les distributions régulières associées) on peut définir aussi un produit "direct" (ou "tensoriel") $f \otimes g$ qui est une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie très naturellement par $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Plus généralement, pour deux distributions S et T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'une "agissant" sur la variable x, l'autre sur y, ce qu'on note par $S(x) \otimes T(y)$ est la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ agissant sur des fonctions $\varphi(x, y)$ par $\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y S(x)T(y)\varphi(x, y)$. Exemple, $\delta(x) \otimes \delta(y)$ n'est autre que la distribution notée plus haut $\delta^2(\mathbf{x})$.
3. En revanche, le produit de deux distributions $T_1,\ T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ n'est en général pas défini. Cela apparaît déjà sur le produit de deux fonctions localement intégrables, qui n'a aucune raison d'être lui-même localement intégrable : ainsi $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est localement intégrable, mais $\psi^2(x) = \frac{1}{x}$ ne l'est pas. En général les distributions, rappelons-le, prennent leur sens quand elles sont testées sur des fonctions régulières (appartenant à $\mathcal{D}$), **pas sur d'autres distributions**. Rien d'étonnant donc à ce que le produit inconsidéré de deux distributions amène à des résultats incontrôlables ... L'exemple le plus simple est donné par le produit de deux distributions de Dirac : $\delta\delta \stackrel{?}{=} \delta(0)\delta$ qui n'est pas défini.
   On rencontrera ce genre de situations en physique, en Mécanique Quantique par exemple dans le calcul de la "règle d'or de Fermi", ou en théorie quantique des champs où apparaissent des "divergences ultraviolettes", nécessitant la mise en œuvre de l'opération de renormalisation. Quand il est confronté à cette situation, le physicien doit chercher à revenir au problème de départ et à "régulariser" la quantité responsable de l'apparition des infinis. Ainsi une distribution delta pourra être remplacée par une courbe en cloche très pointue, telle une gaussienne de largeur tendant vers 0, comme on a vu plus haut.
4. Finalement venons-en au produit le plus naturel sur des distributions, celui de convolution.

D'abord pour des fonctions f et g localement intégrables, on définit leur *produit de convolution* $f * g$ par l'intégrale suivante, si elle existe,

$$(f * g)(x) = \int \mathrm{d}y f(x - y)g(y)\,. \tag{3.25}$$

Il est aisé de trouver des conditions *suffisantes* pour que cette intégrale existe : par exemple si f et g sont localement intégrables et de support borné à gauche, (resp. à droite, ou *a fortiori* à gauche et à droite !), l'intégration en y est restreinte à un ensemble borné donc existe.

Exemples : La fonction de Heaviside H a un support borné à gauche (par 0). Son carré de convolution $H * H$ existe donc. En revanche, $H(x) * H(-x)$ n'existe pas.

Intuitivement, l'effet de la convolution d'une fonction f par une fonction $g \in \mathcal{D}$ est de "lisser" les singularités de f. Voir sur la figure 3.7 la convoluée d'une fonction "porte" par une fonction du type (3.5).

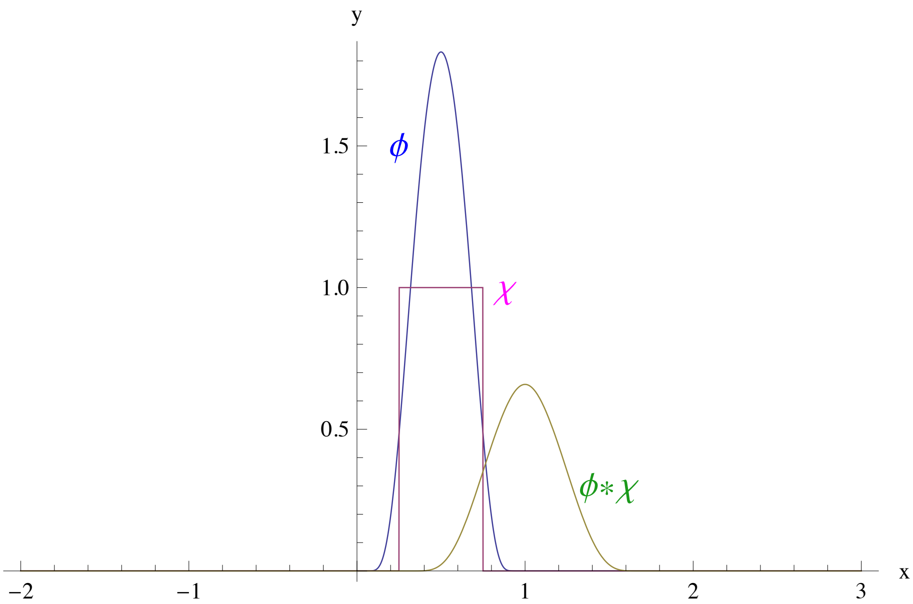

FIGURE 3.7 – Convoluée de la fonction porte $\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}$ avec la fonction (3.5) pour $a = 0$, $b = 1$. La convoluée a un support décalé vers la droite, pourquoi ?

Exercice (facile !) : Vérifier que le produit de convolution, s'il existe, est commutatif : $f * g = g * f$.

Une fois cette définition acquise, on peut envisager de l'étendre à des distributions. Pour deux fonctions localement intégrables f et g et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ considérons

$$\langle\, f * g, \varphi \,\rangle = \int \mathrm{d}x (f * g)(x)\varphi(x) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y f(x-y)g(y)\varphi(x) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y f(x)g(y)\varphi(x+y)$$

par un changement de variable évident $x \to x+y$ de jacobien 1. Supposons que les supports de f et g sont tels que les domaines d'intégration sur x et sur y sont bornées. Par exemple si f est à support borné, comme φ l'est aussi, les intégrations sur x et sur y ont lieu sur des domaines bornés. Le théorème de Fubini s'applique et on peut écrire

$$\langle\, f * g, \varphi \,\rangle = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y f(x)g(y)\varphi(x+y)$$

($= \langle\, f \otimes g, \varphi(x+y) \,\rangle$ avec la notation $\otimes$ du point 2 précédent.) Une fois encore nous généralisons cette relation à un produit de deux distributions.

Définition 3.9 : *Le produit de convolution de deux distributions T_1 et T_2 est défini par l'intégrale suivante*

$$\langle\, T_1 * T_2, \varphi \,\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle\, T_1(x) T_2(y), \varphi(x+y) \,\rangle$$

si elle existe ! À nouveau on peut trouver des conditions suffisantes d'existence. Par exemple, (exercice !) T_1 et T_2 sont toutes deux à support borné à gauche (resp. à droite). Ou bien l'une des deux est à support borné. (Voir la définition du support d'une distribution au § 3.2.1.)

Exercice : vérifier que le produit de convolution de distributions (s'il existe) est commutatif et associatif : $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3) = T_1 * T_2 * T_3$. En revanche, examiner le cas de $1 * \delta' * H$ où 1 est la distribution régulière associée à la fonction constante 1 et montrer que dans ce cas, on n'a pas associativité !

Importance des convolutions en mathématiques et en physique.
L'intérêt des convolutions est d'abord d'ordre mathématique : nous verrons que par transformation de Fourier, produit de convolution et produit ordinaire sont échangés ; la convolution apparaît aussi dans la théorie des probabilités, etc. Mais ce produit est aussi très naturel dans les *systèmes linéaires*, en physique. Considérons un système physique, représenté par une "boîte noire", qui peut être de nature mécanique, électrique, optique, acoustique, etc. Un signal d'entrée dépendant du temps, noté $X(t)$ (qui peut être multidimensionnel) est transformé par le système en un signal de sortie $Y(t)$ et la transformation $X \mapsto Y$ est supposée linéaire, mais non instantanée, $Y = \mathcal{K}X$. Donc $Y(t)$ à un temps t donné est fonction linéaire des $X(t')$, $t' < t$ pour respecter la causalité. On suppose que l'opération $\mathcal{K}$ n'implique pas de dérivation (nous verrons plus tard comment lever cette restriction). On écrit donc $Y(t) = \int \mathrm{d}t' K(t,t') X(t')$. Si on suppose de plus qu'il y a "invariance par translation dans le temps" $K(t+\tau, t'+\tau) = K(t,t')$, le "noyau" K ne dépend en fait que de la différence de ses arguments et, gardant la même notation K, on écrit finalement

$$Y(t) = \int \mathrm{d}t' K(t-t') X(t')$$

qui n'est autre qu'un produit de convolution de K et de X. Pour une discussion plus approfondie de cette problématique, voir [7] et [1].
Autre exemple rencontré au début de ce chapitre : le potentiel électrique créé par une distribution de charges de densité ρ est, voir (3.2), le produit de convolution de ρ par le noyau de Coulomb $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}|}$. Cette fois, c'est l'invariance par translation spatiale qui jointe à la linéarité dicte la forme de convolution.

3.6 Exemple : Fonction de Green et potentiel de Coulomb en dimension d.

On apprend dans le cours d'électromagnétisme que le potentiel électrique V, ou le champ électrique $\vec{E}$ qui en dérive, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, satisfont à la loi de Gauss

$$\mathrm{div}\vec{E} = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.26}$$

où ρ est la densité de charge.

Rappelons que la loi de Gauss est l'expression locale du fait que le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est égale (au facteur $1/\epsilon_0$ près) à la charge totale Q contenue dans le volume englobé par S (théorème de Gauss-Ostrogradsky)

$$\iint \mathrm{d}\vec{S}.\vec{E} = \iiint \mathrm{d}^3x \,\mathrm{div}\vec{E} = \iiint \mathrm{d}^3x \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\,. \tag{3.27}$$

Pour une densité discrète de charges, c'est-à-dire localisée sur des charges ponctuelles en $\mathbf{r}_i$, cela nous apprend que ΔV s'annule, donc que V est une *fonction harmonique* (voir ci-dessous au Chap. 8), en tout point *en dehors des charges*.

Mais plus précisément, le potentiel coulombien V créé par les charges ponctuelles q_i en $\mathbf{r}_i$ doit satisfaire

$$\Delta V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)\,, \tag{3.28}$$

en accord avec (3.27).

Généralisant le problème à d dimensions, cherchons une solution de l'équation

$$\Delta_x G(x-y) = \delta^d(x-y) \tag{3.29}$$

où $x, y \in \mathbb{R}^d$. (On donne le nom de "fonction de Green" à une telle solution, cf plus bas, Chap. 11). Montrons que

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{C_d^{-1}}{\|x\|^{d-2}} & \text{si } d \neq 2 \\ -\frac{1}{2\pi}\ln(\frac{1}{\|x\|}) & \text{si } d = 2 \end{cases} \tag{3.30}$$

est solution, où $C_d = (d-2)\Omega_{d-1}$, Ω_{d-1} l'aire de la sphère unité S^{d-1} dans $\mathbb{R}^d$:

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,. \tag{3.31}$$

Γ désigne une "fonction spéciale" que l'on étudiera en détail plus bas (Chap. 6 et 8). Qu'il suffise de dire ici que $\Gamma(x)$ généralise à x réel quelconque la fonction factorielle, $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}$ et pour $n = p + \frac{1}{2}$ demi-entier, $\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2^p}\sqrt{\pi}$. On retrouve en particulier $\Omega_1 = 2\pi$, $\Omega_2 = 4\pi$ etc.

Preuve : Pour $d \neq 2$ et φ une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on veut calculer $I = \int \mathrm{d}^d x\, \varphi(x) \Delta \frac{1}{\|x\|^{d-2}}$. Comme $\Delta \frac{1}{\|x\|^{d-2}}$ est invariant par rotation et ne dépend que de la variable radiale $r = \|x\|$, seule contribue à cette intégrale la moyenne angulaire $\overline{\varphi}(r)$ de φ sur la sphère de rayon r

$$\Omega_{d-1} r^{d-1} \overline{\varphi}(r) = \int_{\|x\|=r} \mathrm{d}^d x\, \varphi(x)\,,$$

et $I = \int \Omega_{d-1} r^{d-1} \overline{\varphi}(r) \Delta \frac{1}{r^{d-2}}$. Noter que $\overline{\varphi}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, avec $\overline{\varphi}(0) = \varphi(0)$. En utilisant que pour des fonctions de la seule variable r, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, (vérifier !), et en effectuant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I &= \Omega_{d-1} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{d-1} \Big(\overline{\varphi}''(r) + \frac{(d-1)}{r} \overline{\varphi}'(r) \Big) \frac{1}{r^{d-2}} = \Omega_{d-1} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, (\overline{\varphi}'(r) r^{d-1})' \frac{1}{r^{d-2}} \\ &= \Omega_{d-1} \Big\{ \big[\overline{\varphi}' r \big]_0^\infty + (d-2) \int_0^\infty \mathrm{d}r\, \overline{\varphi}'(r) \Big\} = -\Omega_{d-1}(d-2)\varphi(0) = -C_d\, \varphi(0)\,, \end{aligned}$$

comme annoncé en (3.30). On effectue un calcul analogue en $d = 2$ (vérifier !).

On trouvera dans [7] ou [1] une autre démonstration, faisant appel aux dérivées (au sens des distributions) de fonctions discontinues.

On note que la solution (3.30) contient bien la loi de Coulomb en $1/r$ à trois dimensions, mais que le “potentiel coulombien à deux dimensions” est logarithmique !

Lectures complémentaires

La référence de base est bien sûr [8], ou dans une version plus proche de ce cours, [7]. L'exposé de [1] est très clair et complet.

Pour l'histoire du développement des distributions, lire Jean-Michel Kantor, *MATHEMATIQUES D'EST EN OUEST, théorie et pratique : l'exemple des distributions*, disponible sur `http://www.math.jussieu.fr/~kantor/`

Appendice C. Rappels d'algèbre

Outre les structures algébriques classiques, groupe, anneau, corps, espace vectoriel,..., on utilise dans les notes celle d'*algèbre* : une algèbre A sur un corps K est un espace vectoriel sur K qui a aussi un produit interne associatif qui en fait un anneau ; les structures d'espace vectoriel et d'anneau sont compatibles en ce sens que la multiplication par un scalaire λ de K commute avec le produit interne ; et le produit interne est supposé bilinéaire. Donc

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu y) z &= \lambda x z + \mu y z \qquad \text{bilinéarité} \\ x(\lambda y + \mu z) &= \lambda x y + \mu x z \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ x(yz) &= (xy)z \quad \text{associativité} \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$(\lambda x)y \;=\; \lambda(xy) = x(\lambda y)$$

Exemples : les polynômes d'une variable à coefficients dans $\mathbb{R}$ forment une algèbre sur $\mathbb{R}$ notée $\mathbb{R}[x]$; l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à éléments dans $\mathbb{R}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$. On rencontrera au Chap. 6 l'algèbre des séries entières.

Dual d'un espace vectoriel (e.v.)

Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$. L'*espace dual* E' est par définition l'espace vectoriel des *formes linéaires* sur E, $T : E \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Si $\dim E = n$, soit $e_i,\ i = 1, \cdots n$, une base de E : $\forall X \in E,\ X = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, et si T est une forme linéaire de E', on note $T(X)$ ou $\langle\, T|X\,\rangle$ son action sur X, c'est une fonction linéaire des x^i : $T(X) = \langle\, T|X\,\rangle = \sum_i x^i t_i$ avec des coefficients $t_i \in \mathbb{R}$, ce qu'on peut récrire comme $T(X) = \langle\, T|X\,\rangle = \sum_{i,j} x^i t_j \langle\, f^j|e_i\,\rangle$ avec f^j tels que $\langle\, f^j|e_i\,\rangle = \delta_{ij}$. On montre aisément que ces f^j sont linéairement indépendants et qu'ils forment une base de E', c'est la *base duale* des e_i dans E'. On note aussi que $\dim E' = \dim E = n$. Cette propriété qui est vraie en dimension finie ne l'est plus forcément en dimension infinie, comme on a vu au § 3.2.1.