Chapitre 2

Intégration

2.1 Intégrale de Riemann

2.1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

Pour une fonction définie et disons, pour l'instant, continue sur un intervalle $[a, b]$, on introduit d'abord une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $x_0 = a$, $x_N = b$, d'union $\cup I_k = [a, b]$, voir figure 2.1, on choisit un point $\xi_k \in I_k$, et on construit la somme de Riemann

$$\Sigma^{(R)} = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$$

Si quand $N \to \infty$ et quand le découpage devient de plus en plus fin : $\sup_k (x_k - x_{k-1}) \to 0$, la somme $\Sigma^{(R)}$ a une limite indépendante du choix des intervalles I_k et des points ξ_k, cette limite est appelée intégrale de Riemann et notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Son interprétation est claire : on a coupé l'aire sous la courbe de f en tranches *verticales* de plus en plus fines.

On démontre aisément que toute fonction *en escalier* sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann ; mais aussi toute fonction *réglée* (limite uniforme de fonctions en escalier de supports contenus dans un même compact K), ce qui inclut les fonctions continues ou les fonctions monotones sur $[a, b]$, etc ; ou plus généralement toute fonction "pas trop discontinue" en un sens qu'on précisera plus bas au § 2.2.6 où on donnera un critère (condition nécessaire et suffisante) d'intégrabilité au sens de Riemann.

Intégrale et primitive

Toute fonction F de dérivée $F' = f$ est appelée *primitive* de f. Le calcul intégral fournit une méthode de calcul des primitives d'une fonction donnée f. Pour toute fonction continue f

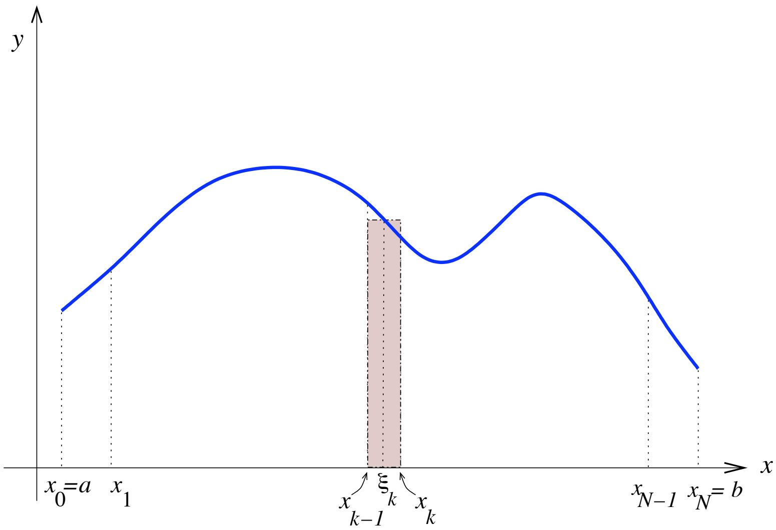

FIGURE 2.1 – Découpage de l'aire dans l'intégration de Riemann

sur un intervalle $[a, b]$, la famille de ses primitives, égales à l'addition d'une constante près, est dénotée par l'*intégrale indéfinie* $\int f(x)\mathrm{d}x$, ce qui signifie qu'une primitive quelconque est de la forme

$$F(x) = \int_a^x f(x')\mathrm{d}x' + C \qquad x \in [a, b],\ C \text{ constante arbitraire}\,. \tag{2.1}$$

Il en découle que l'intégrale entre a et b est donnée par la variation d'une primitive quelconque F :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,. \tag{2.2}$$

2.1.2 Intégrales impropres

On étend ensuite cette intégrale de Riemann d'un intervalle compact $[a, b]$ à un intervalle $[a, b[$ avec éventuellement $b = \infty$. L'intégrale "impropre" $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est par définition la limite, si elle existe, de $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ quand $c \to b_-$. De même pour la borne inférieure $\int_{-\infty} f(x)\mathrm{d}x$, etc. Noter que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est défini par la limite double $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ avec a et b tendant indépendamment vers $-\infty$ et ∞. Rappelons les notions de convergence simple (CVS) et de convergence absolue (CVA) : $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$, resp $\int_a^c |f(x)|\mathrm{d}x$, converge quand $c \to b_-$, la CVA impliquant la CVS mais pas l'inverse ; on parle d'intégrale semi-convergente si on a CVS mais pas CVA. Exemple : vérifier (par intégration par parties) que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} \sin\frac{1}{x}$ est CVS mais pas CVA.

2.1.3 Problèmes avec l'intégrale de Riemann

– Certaines fonctions sont trop irrégulières pour être intégrables au sens de Riemann. Exemple : fonction $1 - \chi_{\mathbb{Q}}$ qui vaut 0 sur les rationnels et 1 sur les irrationnels de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: son intégrale de Riemann entre 0 et 1 n'est pas définie.

– L'intégrale de la limite f d'une suite de fonctions f_n peut être différente de la limite des intégrales. Exemple : $f_n(x) = 2^n$ si $2^{-n} < x < 2^{-(n-1)}$, 0 ailleurs : $\int \mathrm{d}x f_n(x) = 1$, mais $f_n \to f = 0$. En effet *Intégration et limite commutent si la convergence est uniforme,* mais pas toujours sinon, cf le Théorème du § 1.3.4 du Chap 1.

– Considérons la (semi-)norme sur les fonctions définie par l'intégrale de Riemann et l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions de norme $\| \|_1$ finie : une suite de Cauchy n'y converge pas toujours, l'espace $\mathcal{L}^1$ n'est pas complet. Exemple : fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, $\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$; suite $f_n(x) = \mathrm{e}^{(i-\frac{1}{n})x}$, $n = 1, 2, \cdots$, $\|f_n\|_1 = n$ est finie, mais $\lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^{ix}$ est de norme infinie.

2.2 Intégrale de Lebesgue. Mesure

2.2.1 Idée intuitive

Considérons d'abord une fonction f continue et positive. Au lieu de couper en tranches verticales l'aire sous la courbe de f (Riemann), on effectue une découpe horizontale : soient $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ une subdivision des valeurs prises par une fonction positive $f(x)$, et on suppose connue une *mesure* $\mu(A_k)$ de l'ensemble A_k des x tels que $\alpha_{k-1} \le f(x) < \alpha_k$. On définit la somme de Lebesgue $\Sigma_N(\alpha) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu(A_k)\alpha_{k-1}$. Si quand la subdivision devient de plus en plus fine : $N \to \infty$ avec $\sup_k(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \to 0$, la somme $\Sigma_N(\alpha)$ a une limite indépendante de la subdivision α, cette limite définit l'intégrale de Lebesgue notée $\int f$ et la fonction f est dite intégrable (au sens de Lebesgue). Voir figure 2.2.

Il est sans doute bon à ce point de citer Lebesgue lui-même [1] :

> Les géomètres du XVII$^{\text{ème}}$ siècle considéraient l'intégrale de $f(x)$ –le mot intégrale n'était pas encore inventé, mais peu importe– comme la somme d'une infinité d'indivisibles [2] dont chacun était l'ordonnée, positive ou négative, de $f(x)$. Eh bien ! nous avons tout simplement groupés les indivisibles de grandeur comparable ; nous avons, comme on dit en algèbre, fait la réunion, la réduction des termes semblables. On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les indivisibles en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main ; tandis que nous opérons comme le

1. Henri Lebesgue, *Sur le développement de la notion d'intégrale*, Conférence à la Société Mathématique, Copenhague, 1926. Œuvres Scientifiques, L'Enseignement Mathématique, Genève 1972.

2. nous dirions aujourd'hui … infinitésimaux

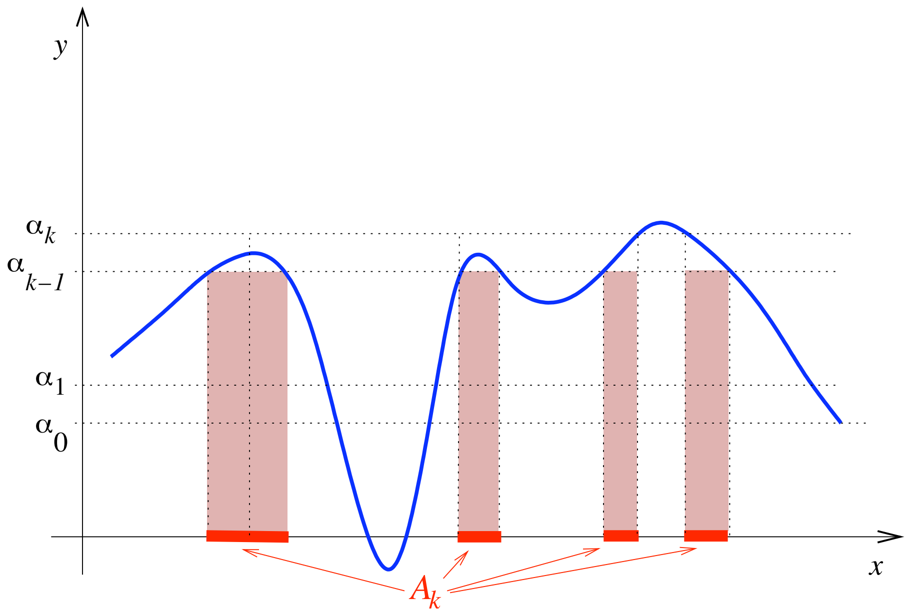

Figure 2.2 – Découpage de l'aire dans l'intégration de Lebesgue

commerçant méthodique qui dit :
j'ai $\mu(1)$ pièces de 1 couronne valant $1\cdot\mu(1)$,
j'ai $\mu(2)$ pièces de 2 couronnes valant $2\cdot\mu(2)$,
j'ai $\mu(5)$ pièces de 5 couronnes valant $5\cdot\mu(5)$,
etc, j'ai donc en tout

$$S = 1\cdot\mu(1) + 2\cdot\mu(2) + 5\cdot\mu(5) + \cdots$$

Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parce que, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter ; mais pour nous, qui avons à additionner une infinité d'indivisibles, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

Pour une fonction continue (qui peut être approchée de façon uniforme par des fonctions en escalier) et en prenant la mesure sur les intervalles fermés $\mu([\alpha,\beta]) = \beta-\alpha$, on retrouve l'intégrale de Riemann comme on le vérifiera plus bas. Mais l'idée permet de définir une intégration plus générale. Elle repose bien sûr sur une définition plus précise de la mesure μ.

2.2.2 Mesure (Bribes de théorie de la)

• Tribu de Borel

On se donne un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$, et on cherche à donner une "mesure" à des familles de sous-ensembles de X. On impose à une telle famille $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de X, appelée *tribu*

(ou *σ-algèbre*), de satisfaire les axiomes suivants :
- $X \in \mathcal{T}$, $\quad \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Si $A \in \mathcal{T}$, son complémentaire dans X : $\bar{A} = \complement_X A \in \mathcal{T}$.
- Si $\{A_n\}$ est un ensemble fini ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, $\cup_n A_n \in \mathcal{T}$.

Autrement dit, une tribu est une famille de sous-ensembles stable par passage au complémentaire et par union finie ou dénombrable, et contenant $\emptyset$.
Exercice : montrer que si $A_n \in \mathcal{T}$, (ensemble fini ou dénombrable), $\cap_n A_n \in \mathcal{T}$.

Noter que la tribu est stable par les seules unions (finies ou) dénombrables d'éléments. Cela diffère de la propriété des ouverts d'un e.t., pour lesquels toute union est un ouvert.

Dans la suite, en théorie de l'intégration mais aussi en théorie des probabilités, on fera souvent appel à la *tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, qui est la plus petite tribu contenant $\mathcal{O}(\mathbb{R})$, l'ensemble des ouverts $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, y compris les cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Par passage au complémentaire, on vérifie que tout $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $[a, b]$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, qui contient donc tous les ouverts, tous les fermés, et toutes les unions finies ou dénombrables d'ouverts et/ou de fermés (et bien plus encore). On appelle *borélien* un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On peut définir de façon analogue la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ de tout espace topologique E, comme "tribu engendrée par les ouverts" de E, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant ces ouverts. Pour un sous-e.t. $F \subset E$, $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(E) \cap F$.

• Mesure de Lebesgue.

On suppose donnée une tribu $\mathcal{T}$ de $X \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1 : *Une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ est une fonction μ sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+ \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ telle que*
- *$\mu(\emptyset) = 0$;*
- *pour toute famille finie ou dénombrable (A_n) d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints : $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, on a*

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)\,. \tag{2.3}$$

La propriété (2.3) est appelée *additivité dénombrable* (ou σ-additivité).

Exemples de mesures : Tout $(X, \mathcal{T})$ possède (au moins) une mesure μ, par exemple la mesure triviale nulle ; ou encore la mesure $\mu(A) = \text{card}(A)$, finie ou infinie ; ou bien encore, si $a \in X$, la mesure de Dirac δ_a telle que pour $A \in \mathcal{T}$, $\delta_a(A) = 1$ ou 0 selon que $a \in A$ ou $a \notin A$. On parle de "masse de Dirac", une notion que nous retrouverons dans l'étude des distributions. On peut finalement faire des combinaisons linéaires de telles masses de Dirac $\mu = \sum_n \alpha_n \delta_{a_n}$, avec une suite (finie ou infinie) de points $a_n \in X$ et des poids $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$.

L'existence de mesure sur tout $(X, \mathcal{T})$ permet les définitions suivantes

Définition 2.2 : *Un couple* $(X, \mathcal{T})$ *est dit* mesurable *; le triplet* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est dit* mesuré *une fois que l'on a choisi une mesure* μ.

Exercice : montrer que les axiomes précédents sur la mesure impliquent sa *monotonicité* : si $B \subset C$, $\mu(B) \leq \mu(C)$ (écrire $C = B \cup (C \backslash B)$) ; et sa *sous-additivité* : pour $B, C \in \mathcal{T}$, $\mu(B \cup C) \leq \mu(B) + \mu(C)$, qui se généralise à tout ensemble fini ou dénombrable $\cup_n B_n$.

Les notions précédentes de tribu de Borel, de mesure et d'espace mesuré s'étendent à des espaces topologiques plus généraux que $\mathbb{R}$.

En fait on va s'intéresser surtout à une mesure sur $\mathbb{R}$ généralisant la mesure naturelle pour un intervalle : $\mu([a, b]) = |b - a|$. On peut démontrer le

Théorème 2.1 (Mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$) : *L'ensemble* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *admet une unique mesure* μ *telle que* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mu([a, b]) = |b - a|$.

Il en découle que pour un point $\{a\} = [a, a]$, $\mu(\{a\}) = 0$, puis par union dénombrable, que pour tout sous-ensemble Y fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$, $\mu(Y) = 0$. En particulier

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{Q}) = 0\,. \tag{2.4}$$

Un exemple d'ensemble de mesure nulle mais non dénombrable est offert par l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}$, voir Appendice A du chap. 1.

Un ensemble A tel que $\mu(A) = 0$ est dit *négligeable* ou de mesure nulle.

Remarques

1. La propriété énoncée dans le Théorème est non triviale. Il s'agit de démontrer que la définition de μ s'étend des intervalles à tout borélien. L'idée est de prendre le $\sup(\mu(K))$ pour tout compact $K \subset A$, ou encore l'$\inf(\mu(O))$ pour tout ouvert $O \supset A$, [5] et la difficulté est de s'assurer que la σ-additivité est bien satisfaite.
2. Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non mesurables pour la mesure de Lebesgue, en ce sens qu'aucune extension de la mesure sur les intervalles ne peut être définie sur eux sans incohérence. Leur construction est délicate et pas explicite, faisant appel à l'axiome du choix (Zermelo), voir quelques indications dans [1] (p. 62 et note p. 55).
3. Il peut arriver qu'un ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit de mesure nulle, mais qu'il possède des sous-ensembles B non mesurables ! Ainsi si toute partie de l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}$ était mesurable, elle serait de mesure nulle puisque contenue dans $\mathcal{K}$ de mesure nulle, donc serait dans la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mais $\mathrm{card}\,(\mathfrak{P}(\mathcal{K})) = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = \mathrm{card}\,(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ contredit $\mathfrak{P}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Noter que cet argument n'est pas "constructif", il affirme l'existence de sous-ensembles non mesurables de $\mathcal{K}$, mais sans les donner explicitement.

On peut donc souhaiter étendre la mesure de Lebesgue à une "tribu de Lebesgue" contenant la tribu de Borel, de telle façon que tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle soit lui-même mesurable et de mesure nulle. Le lecteur curieux est renvoyé à la littérature sur cette extension [5].

La mesure de Lebesgue définie sur les boréliens est ensuite étendue à une tribu plus large, que nous ne préciserons pas davantage. Dans la suite la mesure considérée sera cette mesure de Lebesgue, et "ensemble mesurable" signifiera ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue.

• Propriétés vraies presque partout

Définition 2.3 : *Une proposition $P(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, est vraie presque partout (vraie p.p.) si elle est vraie pour tout x sauf sur un ensemble contenu dans un ensemble de mesure nulle.*

On dit encore que $P(x)$ est vraie pour presque tout $x \in X$.
Exemples. 1. La fonction partie entière, notée $E(x)$ (ou $\lfloor x \rfloor$),

$$E(x) = n \quad \text{si } n \leq x < n+1 \tag{2.5}$$

est dérivable et de dérivée nulle en tout point $x \notin \mathbb{Z}$, elle est donc dérivable p.p.
2. La fonction de Dirichlet $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, égale à 1 sur $\mathbb{Q}$, à 0 sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, est nulle p.p.

• Fonctions mesurables

Définition 2.4 : *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est* mesurable *si $\forall B \subset \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, $f^{-1}(B) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ est mesurable.*

On comparera cette définition à celle donnée plus haut d'une fonction continue (l'image inverse de tout ouvert est un ouvert).
Un exemple utile de fonction mesurable est celui d'une fonction constante, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$: pour tout B mesurable, ou bien $a \in B$ et $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$, ou bien $a \notin B$ et $f^{-1}(B) = \emptyset$, et dans les deux cas, $f^{-1}(B)$ est mesurable. On montre que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est soit continue, soit monotone, est mesurable ; que si $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, $f^{\pm} = \sup(\pm f, 0)$ le sont, donc aussi $|f| = f^+ + f^-$.
La réciproque n'est pas vraie : $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit. Soit $A \subset \mathbb{R}$ mais $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (un ensemble non mesurable comme ci-dessus un sous-ensemble de K). Considérons la fonction f prenant la valeur ± 1 selon que x appartient ou non à A. Puisque $f^{-1}(1) = A$ n'est pas mesurable, f ne l'est pas. Mais $|f|$ l'est puisque c'est une fonction constante.

Énonçons un fait d'expérience : toutes les fonctions rencontrées en Physique sont mesurables. Cela est dû à la grande difficulté, mentionnée plus haut, de construire des ensembles non mesurables, et donc à leur caractère très artificiel, jamais réalisé en physique. Pour cette raison, nous ne nous étendrons pas davantage sur cette notion.

• Mesures sur $\mathbb{R}^n$

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la tribu notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ "engendrée par" (c'est-à-dire la plus petite tribu contenant) tous les produits $A \times B$ de boréliens. Il existe sur cette tribu une mesure héritée de la mesure μ sur les boréliens : $\mu_2(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$. Un résultat très utile est l'invariance de la mesure μ_2 non seulement par translation ou réflexion, mais aussi par rotation ou plus généralement par déplacement dans $\mathbb{R}^2$. Cela se généralise bien sûr à $\mathbb{R}^n$.

2.2.3 Retour à l'intégrale de Lebesgue

On va reprendre et préciser la construction du § 2.2.1. Dans ce qui suit, E est un espace mesuré quelconque (donc en fait on se donne $(E, \mathcal{B}, \mu)$). On peut penser de façon concrète à $E = \mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$, ou $E = \mathbb{R}^n$, ou $E = \mathbb{C}$, avec la mesure de Lebesgue, comme on l'a vu.

• a. Fonctions étagées

Définition 2.5 : *Une fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dite* étagée *s'il existe un nombre fini d'ensembles* mesurables *deux à deux disjoints A_j, $j = 1, \cdots, n$ et des nombres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} , \tag{2.6}$$

où χ_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A, cf (A.1). Elle est donc mesurable et ne prend qu'un ensemble fini de valeurs. Exemple : la fonction de Dirichlet $D = 0\chi_{\mathbb{R}} + 1\chi_{\mathbb{Q}}$.

Un cas particulier de fonctions étagées est celui des fonctions en escalier. Rappelons la définition déjà donnée à l'App. A.4 :

Définition 2.6 : *Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dite* en escalier *si elle est constante par morceaux.*

C'est donc une fonction étagée dont les ensembles A_j sont des intervalles bornés.

Par exemple, la fonction de Dirichlet déjà rencontrée, $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, est étagée mais pas en escalier.

Un théorème important pour la construction de l'intégrale de Lebesgue est le suivant

Théorème 2.2 : *Soit E un espace mesuré. Toute fonction mesurable $f : E \to \overline{\mathbb{R}}^+$ est limite simple d'une suite* croissante *(f_n) de fonctions étagées positives.*

"Suite croissante" signifie que pour tout n, on a $f_n \leq f_{n+1}$. Autrement dit,

Corollaire : *L'ensemble des fonctions étagées est dense dans l'ensemble des fonctions mesurables.*

Preuve : Considérons d'abord une fonction étagée f positive ; pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier i tel que $1 \leq i \leq n\,2^n$ on définit

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\right) \quad \text{et} \quad F_n = f^{-1}([n, \infty])$$

et la fonction étagée

$$f_n = \sum_{i=1}^{n\,2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n} .$$

f étant mesurable, les ensembles $E_{n,i}$ et F_n sont mesurables, cf. Déf. 2.4. Vérifier que les fonctions f_n sont bien étagées et que la suite f_n est bien croissante. Soit $x \in E$. Si $f(x)$ est fini, $f_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$ pour n assez grand. Si $f(x)$ est infini, $f_n(x) = n$. Donc dans tous les cas, $f_n(x) \to f(x)$. Si f est bornée sur E, cette même construction fournit une suite uniformément convergente de fonctions étagées positives, puisque $|f - f_n| < 2^{-n}$. Pour une fonction étagée non positive, on écrit $f = f_+ - f_-$, avec $f_\pm \geq 0$ étagées, etc. □

• b. Intégrale de Lebesgue

Pour une fonction étagée positive, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}^+$, donc satisfaisant (2.6) avec $\alpha_i \geq 0$, l'intégrale de Lebesgue est définie comme le nombre positif

$$\int f \mathrm{d}\mu \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

(avec la convention que si $\alpha_i = \infty$ et $\mu(A_i) = 0$, $\alpha_i\, \mu(A_i) = 0$ et vice versa). Pour s'assurer de la cohérence de cette définition, il faut vérifier son indépendance par rapport au choix des A_i dans (2.6), ce que nous admettrons. On note de façon équivalente $\int f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x)$ ou même $= \int_E f(x) \mathrm{d}x$. Donc pour la fonction de Dirichlet, $\int D\, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$, $\int_{[0,1]} (1-D) \mathrm{d}\mu = 1$, $\int (1-D) \mathrm{d}\mu = +\infty$.
Soit une fonction f mesurable à valeurs positives ; on définit son intégrale par

$$\int f \mathrm{d}\mu \overset{\text{déf}}{=} \sup \left\{ \int g\, \mathrm{d}\mu \mid g \;\text{ étagée et } 0 \leq g \leq f \right\} . \tag{2.7}$$

C'est un nombre de $\overline{\mathbb{R}}^+$, donc éventuellement infini !

Définition 2.7 : *Si ce nombre est fini, f est dite* intégrable *(ou sommable) au sens de Lebesgue.*

Finalement pour une fonction mesurable de signe quelconque, on définit ses parties positive et négative comme ci-dessus, $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, toutes deux positives (ou nulles) et mesurables. On a $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Alors f est intégrable (ou sommable) si séparément f^+ et f^- le sont, autrement dit si $|f|$ est intégrable, et on écrit l'intégrale de Lebesgue de f comme

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu\,. \tag{2.8}$$

Retenons donc que par définition,

$$\boxed{f \textbf{ est intégrable de Lebesgue ssi } |f| \textbf{ l'est.}}$$

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, on procède de même : on sépare partie réelle et partie imaginaire et f est intégrable si $\Re e\, f$ et $\Im m\, f$ le sont, avec $\int f \mathrm{d}\mu = \int \Re e\, f \mathrm{d}\mu + i \int \Im m\, f \mathrm{d}\mu$.

2.2.4 Intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$

On a mentionné plus haut la mesure produit μ_2 définie sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$. Cette mesure est invariante par translation, rotation ou plus généralement par déplacement. On peut alors définir une intégrale de Lebesgue pour les fonctions $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qu'on notera $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}\mu_2(x,y)$. Ici encore, la fonction f est dite *intégrable* (de Lebesgue) ssi $|f|$ l'est. Pour un changement de variable arbitraire $\{x_j\} \mapsto \{y_i\}$, la formule de changement de variable implique le *jacobien* $J = \det\left(\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}\right)$, voir Appendice B.

Un résultat très utile est le Théorème de Fubini qui justifie l'interversion des intégrations.

Théorème 2.3 (Fubini) : *Pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et f intégrable sur $A \times B$*

$$\int_{A\times B} \mathrm{d}\mu_2(x,y)\, f(x,y) = \int_B \mathrm{d}\mu(y) \left(\int_A \mathrm{d}\mu(x) f(x,y)\right) = \int_A \mathrm{d}\mu(x) \left(\int_B \mathrm{d}\mu(y) f(x,y)\right) . \quad (2.9)$$

Inversement le fait que les deux intégrales du milieu et de droite ne soient pas égales signale que f n'est pas intégrable. Voir des exemples en TD.

En fait l'hypothèse que f est intégrable découle elle-même de l'hypothèse que l'une ou l'autre des "intégrales itérées" du milieu ou de droite dans (2.9) est **absolument convergente** (théorème de Tonelli).

Autrement dit Fubini nous dit : si f est intégrable, alors $x \mapsto \int \mathrm{d}y f(x,y)$ existe p.p. et est intégrable (et *ibid* avec $x \leftrightarrow y$) et on peut intervertir les intégrations ; Tonelli nous dit : si soit $\int_B \mathrm{d}\mu(y) \left(\int_A \mathrm{d}\mu(x)|f(x,y)|\right)$, soit $\int_A \mathrm{d}\mu(x) \left(\int_B \mathrm{d}\mu(y)|f(x,y)|\right)$ est finie, alors f est intégrable et le théorème de Fubini s'applique !

Mais cette condition n'est pas toujours remplie, même en physique, donc prudence ! Voir des exemples en TD.

2.2.5 Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

• a. Espaces $\mathcal{L}^p$

Pour f une fonction mesurable $E \to \mathbb{R}$ (E désignant toujours un espace mesuré), on se rappelle que $\int |f|\mathrm{d}\mu$ est défini dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. On définit pour p réel ≥ 1

$$\|f\|_p \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} . \quad (2.10)$$

Proposition 2.4 : *$\| \ \|_p$ est une semi-norme. En particulier*

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \text{ nulle p.p.} . \quad (2.11)$$

Preuve : c'est évident dans le sens $\Leftarrow$; dans le sens $\Rightarrow$, on procède par l'absurde. La propriété $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ est évidente et l'inégalité triangulaire est laissée en exercice (inégalité de Minkowski, voir TD).

On note $\mathcal{L}^p(E)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f telles que $|f|^p$ soit *intégrable*. (Bien noter qu'on prend la valeur absolue de f, ce qui évite des problèmes quand f a des valeurs négatives et que p est non entier...) Si E est de mesure finie, on montre que $1 \le p \le q$ implique que $\|f\|_p \le \mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ et donc que $\mathcal{L}^q(E) \subset \mathcal{L}^p(E) \subset \mathcal{L}^1(E)$ (cf [5], p.75). Par exemple, pour $E =]0,1[$, $x \mapsto 1/\sqrt{x} \in \mathcal{L}^1(]0,1[)$ mais $\notin \mathcal{L}^2(]0,1[)$. Noter que la condition "E est de mesure finie" exclut $E =]1,\infty[$ ou $\mathbb{R}$. Ainsi $x \mapsto 1/x \notin \mathcal{L}^1(]1,\infty[)$ mais $\in \mathcal{L}^2(]1,\infty[)$. Donc attention ! il n'existe pas de relation d'inclusion entre les $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.
Exercice : trouver un exemple de fonction qui $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; qui $\notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; qui $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Il conviendrait alors d'étudier les questions de convergence : quand une suite $f_n \in \mathcal{L}^p$ convergeant p.p. vers f a-t-elle une limite $f \in \mathcal{L}^p$? (théorème de Fatou) ; quelles sont les relations entre la convergence p.p. et la convergence dans la semi-norme $\| \ \|_p$ (ou "convergence en moyenne d'ordre p") ? ; l'espace $\mathcal{L}^p$ est-il complet ? (théorème de Riesz–Fischer), voir plus bas. Pour toutes ces questions, nous renvoyons à la littérature mathématique, voir références en fin de chapitre, et nous nous contenterons d'énoncer un résultat remarquable et très utile, dû à Lebesgue :

Théorème 2.5 de Lebesgue de convergence dominée : *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement p.p. vers une fonction f, et on suppose qu'il existe une fonction g intégrable t.q. $\forall n \ge 1$, $|f_n| \le g$ p.p. Alors f est intégrable, et (f_n) converge pour la semi-norme $\| \ \|_1$ vers f et pour tout $E \subset \mathbb{R}$ mesurable, on a $\lim \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$.*

La preuve, un peu technique, peut être trouvée par exemple dans [5] pp 94-95, qui en donne aussi une version pour des fonctions f_n et $g \in \mathcal{L}^p$.

Autrement dit, l'existence d'une majoration des $|f_n|$ ("domination") par une *même fonction g indépendamment de n* suffit à assurer l'intégrabilité $\mathcal{L}^1$ de la limite et l'égalité des intégrales à la limite, sans supposer de convergence uniforme comme dans le Théorème 1.8.

Ce théorème a d'importantes conséquences pratiques sur l'intégration terme à terme d'une série, la continuité et la dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre, etc, voir ci-dessous §2.3.

Exemple : ([1] p. 65). Soit $f_n(x) = \frac{e^{-x^2/n^2} \cos \frac{x}{n}}{1+x^2}$ qui converge simplement vers $f(x) = 1/(1+x^2)$ qui est intégrable et est dominée par ce f pour tout x. On en conclut que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \big[\mathrm{Arctan}\, x\big]_{-\infty}^{\infty} = \pi$. Voir d'autres exemples en TD.

• b. Espaces L^p

On a vu que si deux fonctions intégrables f et g sont égales p.p., leurs intégrales sont égales. On va maintenant identifier deux fonctions égales p.p. et on est amené à la

Définition 2.8 : Espaces L^p. *Soit E un espace mesuré. L'espace $L^p(E)$ est l'espace vectoriel des fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définies à une égalité p.p. près et telles que f^p soit intégrable.*

Exemple. La fonction de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ s'identifie dans L^1 à la fonction nulle.

On peut munir ces espaces de la norme $\|f\|_p \stackrel{\text{déf}}{=} \int |f|^p \mathrm{d}\mu$. Nous aurons à travailler tout particulièrement avec les espaces L^1 et L^2.

Théorème 2.6 (Riesz–Fischer) : *L'espace $L^p(E)$ des fonctions intégrables (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), muni de la norme $\|f\|_p = (\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu)^{1/p}$ est un e.v. normé* complet. *L'espace $C([a,b])$, resp. $C[\mathbb{R}]$ des fonctions continues sur $[a,b]$, resp. $\mathbb{R}$, est* dense *dans $L^1([a,b])$, resp. $L^1(\mathbb{R})$.*

On a donc résolu une des difficultés de l'intégrale de Riemann mentionnée au § 2.1.

2.2.6 Comparaison entre intégrales de Riemann et de Lebesgue

1. Propriétés communes aux intégrales de Riemann et Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue possède les propriétés suivantes :

- (a) linéarité : l'ensemble des fonctions intégrables (sur un certain espace mesuré E) est un espace vectoriel et $f \mapsto \int f \mathrm{d}\mu$ est une forme linéaire ;
- (b) croissance : si f et g sont réelles et intégrables et $f \le g$, alors $\int f \mathrm{d}\mu \le \int g \mathrm{d}\mu$;
- (c) si f est intégrable (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\left|\int f \mathrm{d}\mu\right| \le \int |f| \mathrm{d}\mu$;
- (d) domination : si $g \ge 0$ est intégrable et si f mesurable satisfait p.p. $|f| \le g$, alors f est intégrable.
- (e) additivité : si A et B sont mesurables et $A \cap B$ est fini ou de mesure nulle, et si f est intégrable sur $A \cup B$, $\int_{A\cup B} f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_B f \mathrm{d}\mu$.
- (f) si f et g sont égales p.p. sur A mesurable, $\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A g \mathrm{d}\mu$;
- (g) si une fonction mesurable f positive sur A a une intégrale sur A nulle, elle y est nulle p.p.

Les propriétés (a), (b), (c) sont aussi satisfaites par l'intégrale de Riemann ; (e) généralise $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ si $c \in]a,b[$. Les propriétés (f) et (g) généralisent au sens du "p.p" des propriétés de l'intégrale de Riemann. La propriété (d) (qui découle du Théorème de Lebesgue de convergence dominée) ne se transpose pas naïvement à l'intégrale de Riemann. Une fois encore, un contre-exemple nous est fourni par la fonction $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ qui n'est pas intégrable de Riemann mais satisfait $|f| < \chi_{[0,1]}$ et est intégrable de Lebesgue.

2. Changement de variable

Soit f une fonction intégrable sur $B \subset \mathbb{R}$. Soit φ une fonction de classe C^1 (continûment différentiable) et de dérivée non nulle sur $A = \varphi^{-1}(B)$. Alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur A et

$$\int_B f(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_A f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{2.12}$$

Pour l'intégrale de Riemann sur un intervalle image par φ monotone de $[\alpha, \beta]$ on reconnaît la formule familière de changement de variable par $y = \varphi(x)$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x\,.$$

La formule (2.12) s'étend aux intégrales dans $\mathbb{R}^n$, voir App. B.

3. Intégrabilité à la Riemann, à la Lebesgue

Un théorème dû à Lebesgue affirme

Théorème 2.7 (Critère de Lebesgue) : *Soit f une fonction définie et bornée sur $[a, b]$ et soit Δ l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a, b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si Δ est contenu dans un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.*

Exemples : la fonction indicatrice de l'ensemble de Cantor $\chi_{\mathcal{K}}$ est intégrable de Riemann bien que non réglée, et bien qu'ayant une infinité non dénombrable de points de discontinuité ; celle de $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ne l'est pas.
En effet on se rappelle (App A.1) que l'ensemble des points de discontinuité de χ_X est la "frontière" de X, soit $\Delta = \bar{X} \setminus \overset{\circ}{X}$. Ici $\bar{X} = [0, 1]$, $\overset{\circ}{X} = \emptyset$, $\mu(\Delta) = 1$.

Ce critère permet aussi de démontrer le théorème 1.7 du chapitre 1 sur la commutation de l'intégration et de la limite, sous l'hypothèse de convergence uniforme.
En effet f_n intégrable de R. $\Rightarrow \Delta_n$ est de mesure nulle ; la CVU implique que f est continue à tous les points où les f_n sont continues $\Rightarrow \Delta \subset \cup_n \Delta_n$ est de mesure nulle $\Rightarrow f$ intégrable de R.

On a vu que toute fonction réglée est intégrable de Riemann ; on montre qu'elle est aussi intégrable de Lebesgue, par application du théorème de Lebesgue de convergence dominée, (voir [5] p 104), et leurs intégrales sont égales. Plus généralement

Théorème 2.8 : *Toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Riemann l'est aussi au sens de Lebesgue et leurs intégrales sont égales*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu\,.$$

On peut aussi énoncer la même propriété pour toute fonction bornée définie sur un compact $[a, b]$.

Mais bien sûr, et c'est l'intérêt de l'intégrale de Lebesgue, il existe des fonctions non intégrables au sens de Riemann mais intégrables au sens de Lebesgue. Exemple, la fonction de Dirichlet $D = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

Par ailleurs, la condition $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du Théorème précédent exclut le cas des *intégrales impropres* de fonctions sur $[a, b[$, avec b fini ou infini, cf ci-dessus §2.1.2. Il faut donc reprendre l'analyse dans ces cas-là.

Pour une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, on note f^* son prolongement à $\mathbb{R}\backslash[a, b[$ par 0. Par définition de l'intégrale de Lebesgue, f^* est intégrable de Lebesgue ssi $\int_a^b f\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Par conséquent **les intégrales semi-convergentes**, telle $\int_1^\infty \frac{dx}{x}\sin x$, **ne peuvent être interprétées comme intégrales de Lebesgue**.

Remarque. *L'intégrale fonction de sa borne supérieure.*
Comme on l'a rappelé plus haut, pour l'intégrale de Riemann, intégration et dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre : si f est continue donc intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, pour tout $x \in]a, b[$ $F(x) := \int_a^x f(x')\mathrm{d}x'$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$. De plus $\int_a^b f(x')\mathrm{d}x' = F(b) - F(a)$. Pour l'intégrale de Lebesgue, cela n'est plus toujours le cas : on verra plus bas, au Chap. 5, le cas de la fonction de Cantor F telle que $F(1) - F(0) = 1$ mais dont la dérivée est définie et nulle p.p. Clairement on ne peut avoir $F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(x)\mathrm{d}x$. D'une manière générale, si f est intégrable de Lebesgue, l'intégrale de Lebesgue $\int_a^x f(x')\mathrm{d}x'$ est dérivable avec pour dérivée $f(x)$ *sauf sur un ensemble de mesure nulle*.

2.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère une fonction de deux variables réelles $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ (si c'est $\to \mathbb{C}$, il suffit de séparer partie réelle et partie imaginaire), on suppose $x \mapsto f(x, t)$ mesurable pour tout $t \in [a, b]$, et on s'intéresse à la fonction ϕ définie par l'intégrale

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x, t) \qquad t \in [a, b] \tag{2.13}$$

et à ses propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité etc.

Théorème 2.9 : *Pour $t_0 \in [a, b]$, si pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue en t_0, et s'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, intégrable et dominant $|f|$ dans un voisinage $\mathcal{V}$ de t_0*

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \textit{p.p. en } x \in \mathbb{R}$$

alors $t \mapsto \phi(t)$ est continue en t_0.

La preuve repose sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue, ([1], p 66).

Avec les mêmes notations

Théorème 2.10 : *Si dans un voisinage de t_0 la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable et la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et que la dérivée est dominée*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x) \quad \forall t \in \mathcal{V} \ \text{ et p.p. en } x \in \mathbb{R}\,,$$

avec g intégrable, alors la fonction $t \mapsto \phi(t)$ est dérivable en t_0 et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\mathrm{d}x\Big|_{t=t_0} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}x\,, \tag{2.14}$$

autrement dit, on peut "dériver sous le signe somme".

Il s'agit là d'un résultat important en pratique en physique, où on est souvent amené à dériver sous le signe somme. Il importe donc de connaître les conditions qui justifient cette opération.

Exemples, contrexemples

a) Considérons la fonction f : $f(x,0) = 0$ et si $t \neq 0$, $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{t})^2\right]$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est une gaussienne d'intégrale $\phi(t) = 1$. Mais pour $t = 0$, $f = 0$ a une intégrale nulle. La fonction ϕ est discontinue en $t = 0$. Dans ce cas, on n'a pas de fonction g dominante.

b) Considérons la fonction $\phi(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\cos(xt)}{1+x^2}$, dont on montrera (Chap. 8, § 8.1.5) qu'elle vaut $\phi(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}$, et donc qu'elle est continue mais non dérivable en $t = 0$. Voir TD2.

En ce qui concerne l'intégrabilité de $\phi(t)$, on a vu plus haut le Théorème de Fubini.

Dans le même esprit, quand peut-on intégrer terme à terme une série de fonctions ? Un théorème donne une condition suffisante

Théorème 2.11 (B. Levi) : *Si une suite de fonctions f_n de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est telle que $\sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\mathrm{d}x < +\infty$, alors la série $\sum f_n$ converge absolument p.p., sa somme f est intégrable et $\int f\mathrm{d}x = \sum \int f_n \mathrm{d}x$.*

Appendice B. Changements de variables dans une intégrale sur un domaine de $\mathbb{R}^n$. Jacobien

Nous admettrons les résultats suivants, qui constituent une généralisation à $\mathbb{R}^n$ du résultat bien connu (2.12) sur les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ une application bijective et continûment différentiable (= de classe C^1) de Ω sur Ω'

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_n) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)\,. \tag{B.1}$$

Définition 2.9 : *On appelle* matrice jacobienne *la matrice des dérivées partielles*

$$\mathcal{J}_\varphi \equiv \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}\,, \tag{B.2}$$

et on appelle Jacobien *le déterminant de la matrice jacobienne*

$$J_\varphi = \det \mathcal{J}_\varphi\,. \tag{B.3}$$

Si ce jacobien J_φ ne s'annule pas sur Ω, la fonction inverse $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ est aussi continûment différentiable sur Ω'. On appelle un tel φ un *difféomorphisme* de Ω.

Avec ces notations, on a le

Théorème 2.12 (changement de variables) : *Supposons que le jacobien J_φ ne s'annule pas sur Ω. Soit f une fonction $\Omega' \to \mathbb{R}^p$. Alors*

$$f \textit{ intégrable sur } \Omega' \quad \Leftrightarrow \quad f\circ\varphi \textit{ intégrable sur } \Omega$$

et

$$\int_{\Omega'} f(y)\mathrm{d}^n y = \int_\Omega (f\circ\varphi)(x)|J_\varphi(x)|\mathrm{d}^n x\,.$$

Cela s'applique en particulier aux changements de coordonnées rectangulaires $\leftrightarrow$ polaires dans $\mathbb{R}^2$ ou $\leftrightarrow$ cylindriques ou sphériques dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$

$$(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta),\ r \ge 0,\ 0 \le \theta < 2\pi \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{B.4}$$

Coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$

$$(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z),\ r \ge 0,\ 0 \le \theta < 2\pi \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta \tag{B.5}$$

Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(x = r\cos\phi\sin\theta, y = r\sin\phi\sin\theta, z = \cos\theta) \quad &, \quad r \ge 0,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi, \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad &= \quad r^2\mathrm{d}r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,. \end{aligned}\tag{B.6}$$

Exercice : écrire les coordonnées sphériques et leur jacobien dans $\mathbb{R}^n$, n arbitraire.

Lectures complémentaires

Voir Appel [1], et pour plus de précisions mathématiques, Gapaillard [5] et Rudin, [6].