

# Chapitre 9

## Transformation de Laplace

La transformation de Laplace fait passer d'une fonction  $f$  à valeurs réelles ou complexes d'une variable  $t$  réelle non négative :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , à une fonction d'une variable complexe  $p$ ,  $\hat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ , avec bien sûr des conditions sur  $f$  pour assurer la convergence. Elle est donc apparentée à la transformation de Fourier, mais en diffère par quelques points que nous allons examiner. Comme la transformation de Fourier, la transformation de Laplace est un outil puissant dans l'étude des équations différentielles ou aux dérivées partielles et des systèmes linéaires en physique.

### 9.1 Définitions et premières propriétés

#### 9.1.1 Abscisse de sommabilité et transformée de Laplace

On rencontre souvent en physique des fonctions définies seulement sur la demi-droite réelle positive  $\mathbb{R}^+$ . C'est par exemple le cas dans un système dynamique soumis au temps  $t = 0$  à une excitation (une "source") : on s'intéresse à sa "réponse"  $f(t)$  aux temps ultérieurs  $t \geq 0$ . On peut aussi considérer que la fonction  $f$  est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  mais n'est non nulle que pour  $t \geq 0$ . D'où la

**Définition 9.1 :** On appelle fonction causale une fonction  $t \mapsto f(t)$  nulle pour  $t < 0$ .

**Définition 9.2 :** Pour une fonction causale, on définit la transformée de Laplace par

$$\hat{f}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (9.1)$$

mais aussi, compte tenu de l'hypothèse d'annulation à  $t < 0$ , par  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ .

La transformée de Laplace est notée selon les auteurs (et les circonstances!)  $\hat{f}(p)$ ,  $\mathcal{L}[f](p)$ ,  $L_f(p)$ , etc, et la transformation parfois  $f(t) \sqsupset \hat{f}(p)$ .

Il reste à préciser les conditions de convergence. On va d'abord supposer que  $f$  est localement intégrable (c'est-à-dire intégrable sur tout compact, cf Déf. 3.5), ce qui n'interdit pas à la fonction d'avoir une singularité intégrable à distance finie, comme par exemple  $|t - 1|^{-\frac{1}{2}}$ . Par ailleurs on observe que si  $|f(t)|e^{-st}$  est intégrable pour  $s \in \mathbb{R}$ , il en est de même de  $|f(t)|e^{-s't}$  pour tout  $s' > s$ . (On rappelle que la fonction  $f$  est causale, seule nous intéresse la convergence en  $+\infty$ .) Cela conduit à la

**Définition 9.3 :** On appelle abscisse de sommabilité de  $f$  la borne inférieure  $\alpha$  des  $s \in \mathbb{R}$  tels que  $f(t)e^{-st}$  est intégrable.

$$\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{s \in \mathbb{R} : |f(t)|e^{-st} \text{ est intégrable}\}. \quad (9.2)$$

Cette abscisse de sommabilité peut être infinie, voir plus bas.

Plus précisément, si on pose  $p = x + i\omega$ , l'intégrabilité de  $f(t)e^{-pt}$  équivaut à celle de  $f(t)e^{-xt}$ , et est assurée pour  $x > \alpha$ . La transformée de Laplace est donc définie pour  $x = \Re(p) > \alpha$ . Inversement l'intégrale ne converge certainement pas pour  $x < \alpha$ . Pour  $x = \alpha$ , on peut avoir ou non intégrabilité au sens de Lebesgue; l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$  peut être non intégrable de Lebesgue mais semi-convergente pour certaines valeurs de  $p$ , permettant ainsi d'étendre la transformée de Laplace à ces valeurs : il faut se livrer à une étude cas par cas pour le déterminer. En résumé,

**Proposition 9.1 :** La transformée de Laplace est définie dans le demi-plan ouvert de sommabilité,  $\Re(p) > \alpha$ .

Heuristiquement, l'existence d'une abscisse de sommabilité finie ou  $-\infty$  signifie que  $f$  a une croissance au plus exponentielle à l'infini.

**Exemples :** a) Une fonction constante a une abscisse de sommabilité nulle; la transformée de Laplace est définie pour  $x = \Re(p) > 0$ . Ainsi pour  $f = 1$  (pour  $t \geq 0$  c'est-à-dire en fait pour la fonction de Heaviside  $H$ !).

$$\hat{H}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} [-e^{-pt}]_0^{\infty}$$

donc  $\hat{H}(p) = \frac{1}{p}$  pour  $\Re(p) > 0$ . On note que dans ce cas,  $\hat{H}$  peut être étendue (prolongée) à tout  $p \neq 0$ , en particulier pour  $\Re(p) = 0$ ,  $\Im(p) = \omega \neq 0$  avec le résultat  $\hat{H}(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$ .

---

1. Certains auteurs appellent *original* une fonction  $f$  ayant les propriétés énumérées ci-dessus : causalité, intégrabilité locale, existence d'une abscisse de sommabilité, et *image* sa transformée de Laplace.

b)  $f(t) = 1/(1 + t^2)$  a aussi une abscisse de sommabilité nulle ; mais la transformée de Laplace est définie pour tout  $x = \Re(p) \geq 0$ . (Son expression implique des “fonctions spéciales”, le sinus intégral et le cosinus intégral.)

c) La fonction  $e^{-at^2}$  pour  $a > 0$  a une abscisse de sommabilité  $\alpha = -\infty$  : la transformée de Laplace existe pour tout  $p$  ; à l’inverse pour  $a < 0$ ,  $f$  n’a pas d’abscisse de sommabilité (ou si on veut,  $\alpha = \infty$ ) et la transformée de Laplace n’est définie pour aucun  $p$ . Nous verrons d’autres exemples au § 9.1.3 ci-dessous.

### 9.1.2 Holomorphie de $\hat{f}$ , etc

**Proposition 9.2 :** *La transformée de Laplace  $\hat{f}(p)$  est une fonction holomorphe, donc analytique, de la variable  $p$  dans le demi-plan ouvert de sommabilité.*

Preuve : Établissons d’abord que l’abscisse de sommabilité  $\alpha'$  de  $tf(t)$  égale celle de  $f$  notée  $\alpha$ . Heuristiquement, si  $|f|$  a une croissance exponentielle en  $e^{\alpha t}$  à l’infini, il en est de même de  $t|f(t)|$ . Plus précisément, utilisons une évidence utile : si  $g$  domine  $f$  ( $|f| < |g|$ ) pour  $t$  assez grand, l’intégrabilité de  $ge^{-st}$  assure celle de  $fe^{-st}$ , donc l’abscisse de sommabilité de  $f$  est inférieure ou égale à celle de  $g$ . Ici, si  $t > 1$ ,  $|tf(t)|e^{-st} > |f(t)|e^{-st}$ , donc  $\alpha \leq \alpha'$  ; mais par ailleurs comme  $t|f| < e^{\epsilon t}|f|$  pour tout  $\epsilon > 0$  et  $t$  assez grand,  $\alpha' \leq \alpha + \epsilon$  quel que soit  $\epsilon$ , donc finalement  $\alpha = \alpha'$ , qed. Donc dans le demi-plan ouvert  $\Re(p) > \alpha$ ,  $\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}$  est absolument convergente, on peut donc dériver  $\hat{f}(p)$  sous le signe somme par rapport à  $\Re(p)$  ou à  $\Im(p)$  ; on trouve  $\frac{\partial \hat{f}(p)}{\partial \Re(p)} = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt} = -i \frac{\partial \hat{f}(p)}{\partial \Im(p)}$ , les conditions de Cauchy–Riemann sont satisfaites et on a donc  $\frac{d\hat{f}(p)}{dp} = \hat{f}'(p) = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}$ .  $\hat{f}$  est dérivable dans le demi-plan, c’est-à-dire holomorphe, donc analytique. Par récurrence la dérivée  $n$ -ième vaut  $\hat{f}^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)e^{-pt}$ .

### Relation avec la transformée de Fourier

On aura noté que la transformée de Fourier d’une *fonction causale* est sa transformée de Laplace à  $\Re(p) = 0$ , c’est-à-dire sur l’axe imaginaire.

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^\infty e^{ikt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{ikt} f(t) dt = \hat{f}(-ik). \tag{9.3}$$

Selon le type de croissance de la fonction  $f$  pour  $t \rightarrow +\infty$ , on peut voir si l’axe imaginaire est ou non dans le domaine de définition de  $\hat{f}$  et conclure à l’existence ou non de la transformée de Fourier :

- si  $f$  croît moins vite qu’une exponentielle,  $\alpha < 0$ , donc la transformée de Fourier existe ;
- si  $f$  croît plus vite que toute puissance mais au plus comme une exponentielle, on a  $\alpha > 0$ , l’axe imaginaire n’est pas dans le domaine de définition de  $\hat{f}$  et la transformée de Fourier n’existe pas ;
- dans le cas intermédiaire où  $\alpha = 0$ , la transformée de Fourier n’existe pas toujours au sens des fonctions.

### Comportement asymptotique de $\hat{f}$

**Proposition 9.3 :** Soit  $f$  une fonction causale d'abscisse de sommabilité  $\alpha$  et  $\hat{f}$  sa transformée de Laplace. Si  $x > \alpha$ , alors  $\hat{f}(x + i\omega) \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$

Cela résulte du lemme 4.5 de Riemann–Lebesgue,

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_0^{\infty} (f(t)e^{-xt}) e^{-i\omega t} dt = 0$$

puisque  $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ .

### 9.1.3 Exemples

a) On a vu la transformée de Laplace de  $f = 1$  plus haut. Considérons maintenant celle de  $f(t) = t$ . Un calcul immédiat, par intégration par parties ou par dérivation sous le signe somme, donne pour  $\Re(p) > 0$

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = -\frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2},$$

qui est prolongeable en une fonction méromorphe avec un pôle en 0. Plus généralement, quelle est la transformée de  $t^n$  ?

b)  $f(t) = \cos t$  a pour abscisse de sommabilité  $\alpha = 0$  et pour  $\Re(p) > 0$  :

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} (e^{it} + e^{-it}) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(i-p)t}}{i-p} - \frac{e^{-(i+p)t}}{i+p} \right]_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + 1},$$

qui est prolongeable en une fonction méromorphe avec deux pôles en  $\pm i$ .

c)  $f(t) = e^{at}$ , avec  $a \in \mathbb{C}$  a pour abscisse de sommabilité  $\alpha = \Re(a)$  et pour  $\Re(p) > \Re(a)$  :

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a},$$

à nouveau prolongeable en une fonction méromorphe avec un pôle en  $a$ .

d) Au vu de ces exemples, il est tentant de penser que la transformée de Laplace est toujours prolongeable en une fonction méromorphe. Cela est souvent le cas mais n'est pas vrai en général. Ainsi  $f(t) = 1/(t+1)$  (fois  $H(t)$ , fonction causale!) a une transformée de Laplace  $e^p \int_p^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u}$  ( $e^p$  fois la "fonction Gamma incomplète") bien définie pour  $\Re(p) > 0$  mais dont on montre qu'elle a un point de branchement en 0.

Cela apparaît aussi sur la transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = t^\kappa$ ,  $\kappa$  réel, dont l'abscisse de sommabilité est  $\alpha = 0$ . Se rappelant la définition de la fonction  $\Gamma$  dans (8.15), on a pour  $\kappa > -1$  et  $p$  réel d'abord  $\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^\kappa dt = p^{-\kappa-1} \int_0^{\infty} e^{-u} u^\kappa du = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{p^{\kappa+1}}$ . On invoque alors l'holomorphie pour dire que  $\hat{f}(p) = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{p^{\kappa+1}}$  reste vrai dans le demi-plan complexe,  $\Re(p) > 0$ . Pour  $\kappa > -1$  non entier,  $\hat{f}(p)$  a un point de branchement en 0.

## 9.2 Inversion, dérivation, convolution etc

### 9.2.1 Inversion de la transformation de Laplace

La transformée de Laplace de  $f$  en  $p = x + i\omega$  peut s'écrire comme une transformée de Fourier d'une fonction reliée à  $f$  :

$$\hat{f}(x + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{-xt}e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}[H(t)e^{-xt}f(t)](-\omega).$$

Utilisant alors la formule d'inversion de la transformée de Fourier, pour  $t$  un point où  $H(t)f(t)$  est continue (cf Théorème 4.6)

$$H(t)f(t)e^{-xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x + i\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

donc

$$H(t)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+i\omega)t} \hat{f}(x + i\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_x} \hat{f}(p)e^{pt} dp \quad (9.4)$$

où l'intégration en  $p$  est effectuée le long d'une *droite de Bromwich*

$$D_x \stackrel{\text{déf}}{=} \{x + i\omega; \omega \in \mathbb{R}\}. \quad (9.5)$$

Bien noter que cette formule donne un résultat indépendant de  $x > \alpha$ , domaine où la transformée de Laplace est holomorphe, grâce au théorème de Cauchy. Il convient aussi de s'assurer que cette expression s'annule bien pour  $t < 0$ . En effet pour  $t < 0$ , le lemme de Jordan 2 nous dit que l'on peut refermer le contour d'intégration par un grand cercle dans le demi-plan à droite de la droite  $\Re(p) = x$ , mais le contour est complètement dans le domaine d'holomorphie, donc le résultat est nul, comme attendu pour une fonction causale.

**Théorème 9.4 :** Soit  $f$  une fonction causale d'abscisse de sommabilité  $\alpha$  et  $\hat{f}$  sa transformée de Laplace. Alors en tout point de continuité de  $f$  et avec  $x > \alpha$  quelconque

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{f}(p)e^{pt} dp$$

Exemple : Prenons  $\hat{f}(p) = \frac{1}{p-a}$  (transformée de Laplace de  $e^{at}$ , voir plus haut). Pour  $x > \Re(a)$ , on calcule

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{f}(p)e^{pt} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} \frac{1}{p-a} e^{pt} dp$$

Si  $t > 0$ , on peut refermer le contour par un demi-cercle dans le demi-plan à gauche de la droite  $\Re(p) = x$ , qui ne contribue pas quand  $R \rightarrow \infty$  (lemme de Jordan 2) et qui englobe le pôle en

$p = a$ ; le théorème des résidus donne alors le résultat  $e^{at}$  comme attendu. Si  $t < 0$ , le résultat est nul, par l'argument précédent.

D'une façon générale, la formule de Laplace inverse combinée avec la formule des résidus fournit le plus souvent le résultat cherché.

### 9.2.2 Translation

Soit  $f$  une fonction causale d'abscisse de sommabilité  $\alpha$ , et  $\hat{f}$  sa transformée de Laplace. On vérifie alors aisément que la transformée de Laplace de  $f(t)e^{-at}$  n'est autre que  $\hat{f}(p+a)$

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-at}e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p+a)t}dt = \hat{f}(p+a)$$

pour  $\Re(p) > \alpha - \Re(a)$ . Exemple, de  $\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}$  on tire  $\mathcal{L}[e^{at}](p) = \frac{1}{p-a}$  comme on a vu.

Attention qu'inversement  $\hat{f}(p)e^{-\tau p}$  est la transformée de Laplace de  $H(t-\tau)f(t-\tau)$  et non de  $H(t)f(t-\tau)$ !

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-p(t+\tau)}dt = \hat{f}(p)e^{-\tau p}.$$

### 9.2.3 Convolution

Pour deux fonctions causales  $f$  et  $g$ , le produit de convolution

$$f * g(t) = \int_0^{\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

ne dépend que des valeurs de  $f$  et  $g$  dans l'intervalle  $[0, t]$  pour  $t \geq 0$  et s'annule pour  $t < 0$ . La convolution préserve donc le caractère causal. On démontre alors comme pour la transformation de Fourier le

**Théorème 9.5 :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions causales d'abscisses de sommabilité  $\alpha$  et  $\alpha'$ , et  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  leurs transformées de Laplace, définies respectivement dans les demi-plans ouverts  $\Re(p) > \alpha$ ,  $\Re(p) > \alpha'$ . Alors

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)$$

est définie pour  $\Re(p) > \max(\alpha, \alpha')$ . Inversement pour  $\Re(p) > \alpha + \alpha'$  et avec  $x_0 > \alpha$

$$\mathcal{L}[f \cdot g](p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} \hat{f}(q)\hat{g}(p-q)dq.$$

La démonstration s'effectue comme au Théorème 4.13.

### 9.2.4 Opérations de dérivation et intégration

Soit une fonction causale qu'on suppose dérivable (au sens des fonctions!),  $\alpha$  l'abscisse de sommabilité de  $f$ , on suppose que  $f'$  a une abscisse de sommabilité  $\alpha'$ . Attention! par transformée de Laplace de  $f'$ , on entend transformée de Laplace de  $H(t)f'(t)$ , et non de  $(Hf)'$ ! Par intégration par parties, pour  $\Re(p) > \max(\alpha, \alpha')$

$$\mathcal{L}[Hf'](p) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt + [f(t)e^{-pt}]_0^\infty = p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$$

car  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0^2$ .

Donc avec les hypothèses ci-dessus ( $f$  dérivable,  $\alpha$ , resp.  $\alpha'$  les abscisses de sommabilité de  $f$  et  $f'$ )

**Proposition 9.6 :**  $\mathcal{L}[Hf'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$  pour  $\Re(p) > \max(\alpha, \alpha')$ .

La propriété se généralise aux dérivées d'ordre supérieur, cf. [1]

**Proposition 9.7 :** La transformée de Laplace de  $f^{(n)}$  égale  $p^n \hat{f}(p) - \sum_{m=0}^{n-1} p^{n-1-m} f^{(m)}(0^+)$ .

Comme on l'a observé plus haut, si  $f$  a pour abscisse de sommabilité  $\alpha$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t^n f(t)$  est aussi causale avec la même abscisse de sommabilité et

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p) = \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f](p). \tag{9.6}$$

On peut aussi intégrer

**Proposition 9.8 :** Si  $f$  a pour abscisse de sommabilité  $\alpha$  et  $\hat{f}$  pour transformée de Laplace, alors pour  $\Re(p) > \max(\alpha, 0)$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(u) du \right] (p) = \frac{\hat{f}(p)}{p}.$$

Inversement, si  $\hat{f}(p)$  décroît plus vite que  $1/p$  à l'infini

$$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (p) = \int_p^\infty \hat{f}(z) dz,$$

avec un chemin d'intégration de  $p$  à l'infini arbitraire dans le demi-plan de sommabilité, en vertu de l'holomorphie de  $\hat{f}$ .

---

2. On a supposé  $\Re(p) > \max(\alpha, \alpha')$ , et l'intégrabilité de  $f e^{-pt}$  et de sa dérivée implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$ , selon un argument déjà utilisé dans la transformation de Fourier, cf remarque après (4.13).

### 9.2.5 Autres exemples

Les exemples de la section 9.1.3 peuvent être retrouvés ou combinés avec les propriétés de dérivation, d'intégration et de linéarité de la transformation de Laplace pour obtenir d'autres formules (où le  $H(t)$  est implicite)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\pm i\omega t}](p) &= \frac{1}{p \mp i\omega} \\ \mathcal{L}[\cos(\omega t)](p) &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad , \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[\cosh(\omega t)](p) &= \frac{p}{p^2 - \omega^2} \quad , \quad \mathcal{L}[\sinh(\omega t)](p) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (9.7)$$

toutes formules initialement valables pour  $\Re(p) > 0$ , puis prolongeables comme on a vu. De même pour  $\Re(p) > \Re(a)$ ,

$$\mathcal{L}[H(t)e^{at}](p) = \frac{1}{p - a}$$

puis par dérivation

$$\mathcal{L}\left[H(t)e^{at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](p) = \frac{1}{(p-a)^n} \quad (9.8)$$

En décomposant en pôles simples toute fraction rationnelle, on reconstruit son "original", c'est-à-dire la fonction dont elle est la transformée de Laplace, etc etc.

## 9.3 Transformée de Laplace des distributions

On a vu plus haut le cas de la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside. Plus généralement pour une fonction causale  $f$  localement sommable, la modification sur un ensemble de mesure nulle ne modifie pas l'intégrale de définition de la transformée de Laplace. Cette dernière est donc attachée à la distribution régulière définie par  $f$ . Plus généralement encore, pour  $T$  une distribution de support contenu dans  $\mathbb{R}^+$ , ( $T \in \mathcal{D}'_+$ ), telle qu'il existe un  $\alpha$  réel tel que pour tout  $x > \alpha$ ,  $e^{-xt}T \in \mathcal{S}'$ , (distribution tempérée), on définit la transformée de Laplace de  $T$  par

$$\widehat{T}(p) = \langle T, e^{-pt} \rangle \quad \text{pour } \Re(p) > \alpha \quad (9.9)$$

En effet si  $x = \Re(p) > \alpha$ , il existe un  $y : \alpha < y < x$  et  $\langle e^{-yt}T, e^{-(p-y)t} \rangle$  existe bien et définit  $\langle T, e^{-pt} \rangle$  indépendamment de  $y$ .

On appelle encore  $\alpha$  abscisse de sommabilité de  $T$ , et on démontre qu'à nouveau,  $\widehat{T}(p)$  est une *fonction* holomorphe de  $p$  dans le demi-plan ouvert  $\Re(p) > \alpha$ . Exemples : La distribution de Dirac a un support dans  $\mathbb{R}^+$ , elle est tempérée et  $\delta e^{-xt}$  l'est aussi pour tout  $x : \alpha = -\infty$  et donc pour tout  $p$ ,  $\mathcal{L}[\delta] = 1$ ,  $\mathcal{L}[\delta^{(m)}] = p^m$ ,  $\mathcal{L}[\delta_{t-a}] = e^{-pa}$ .



Les propriétés de la transformation de Laplace étudiées plus haut –convolution, translation, relation Laplace–Fourier, etc– s’étendent aux distributions. Le seul point nécessitant un peu d’attention concerne la dérivation. Si  $T \in \mathcal{D}'_+$ , et si  $T'$  est la *distribution dérivée*, alors  $\mathcal{L}[T'](p) = p\hat{T}(p)$ , sans le terme supplémentaire qui apparaissait à la Prop. 9.6. Cela est dû au fait que la dérivée au sens des distributions de la distribution régulière  $T = H(t)f(t)$  a deux termes :  $T' = \delta(t)f(0) + H(t)f'(t)$ . Le calcul de la Prop. 9.6 ne retenait que le deuxième terme, celui que nous faisons maintenant au sens des distributions les prend en compte tous les deux.

## 9.4 Applications de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace, comme celle de Fourier, a pour effet de transformer les dérivées en multiples de la fonction. Elle simplifie donc considérablement l’étude des équations différentielles ou aux dérivées partielles et permet de prendre aisément en compte les conditions aux limites, comme on va voir. La transformée de Laplace a de plus l’avantage (par rapport à celle de Fourier) de demander moins de régularité à la fonction : intégrabilité locale et comportement exponentiel à  $+\infty$ , là où Fourier demande l’intégrabilité au sens  $L^1$ .

### 9.4.1 Équations différentielles, problème de Cauchy

Rappelons d’abord ce qu’on entend par *problème de Cauchy* pour une équation différentielle. Considérons par exemple le cas d’une variable dynamique  $f(t)$  satisfaisant une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, comme on en rencontre couramment en Mécanique, en Électricité, etc. Cette équation est complétée par *deux* conditions au bord (ou conditions initiales), ce nombre étant bien sûr égal à l’ordre de l’équation. On considère donc le système

$$\begin{aligned} a_2 \ddot{f} + a_1 \dot{f} + a_0 f &= g(t) \\ f(t) \Big|_{t=0} &= f_0 \\ \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0} &= f_1. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Au final, la fonction  $f$  satisfaisant (9.10) est unique, et on dit que le problème de Cauchy admet une solution unique. D’un point de vue physique, cette unicité de la solution pour des conditions initiales données est étroitement liée à la question du *déterminisme* de la physique classique : une fois données la position et la vitesse de départ et les équations du mouvement, la dynamique du système est complètement déterminée à tous les temps ultérieurs.

On connaît le principe de résolution : recherche de la solution générale de l’équation “homogène” (sans second membre  $f$ ), puis recherche d’une solution particulière de l’équation avec

second membre, enfin détermination des constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales.

La transformation de Laplace va nous permettre de mener toutes ces opérations simultanément. Soit  $\hat{f}(p)$  la transformée de Laplace de  $f$ . On a

$$a_2(p^2 \hat{f}(p) - pf_0 - f_1) + a_1(p\hat{f}(p) - f_0) + a_0\hat{f}(p) = \hat{g}(p)$$

d'où l'on tire

$$\hat{f}(p) = \frac{\hat{g}(p)}{a_2p^2 + a_1p + a_0} + \frac{a_2(pf_0 + f_1) + a_1f_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0}, \quad (9.11)$$

et il ne reste plus qu'à effectuer une transformation de Laplace inverse pour obtenir  $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_x} e^{pt} \frac{\hat{g}(p)}{a_2p^2 + a_1p + a_0} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_x} e^{pt} \frac{a_2(pf_0 + f_1) + a_1f_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0} dp, \quad (9.12)$$

avec une intégration le long d'une droite de Bromwich. Le premier terme peut être considéré comme une solution particulière de l'équation avec second membre (la solution à  $f_0 = f_1 = 0$ ), tandis que le second est la solution générale (si  $f_0$  et  $f_1$  sont considérés comme des paramètres arbitraires) de l'équation sans second membre. L'intérêt de la méthode est son caractère général et systématique : pas besoin de chercher une solution particulière, (9.12) nous la fournit gracieusement ! En pratique, le calcul explicite des intégrales dans (9.12) est mené avec l'aide du théorème des résidus.

### Un exemple simple

Soit à résoudre le système

$$\ddot{f} + f = 2 \cos t \quad f(0) = 0 \quad \dot{f}(0) = -1.$$

Selon ce qui précède,  $g(t) = 2 \cos t$ ,  $\hat{g}(p) = 2p/(p^2 + 1)$ , donc (9.11) donne

$$\hat{f}(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{(p^2 + 1)}$$

dont il faut prendre la transformée de Laplace inverse. On peut faire ce calcul par le théorème des résidus, mais il est plus simple d'observer que  $\frac{1}{(p^2+1)} = \mathcal{L}[\sin t]$  et  $\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{d}{dp} \frac{1}{(p^2+1)} = \mathcal{L}[t \sin t]$  (cf (9.6-9.7)), d'où la solution du problème  $f(t) = (t-1) \sin t$ , obtenue avec une grande économie de moyens !

### Fonction de transfert, susceptibilité, etc

Examinons la structure générale des formules (9.11-9.12). On appelle *fonction de transfert* la fonction (de la variable de Laplace  $p$ )

$$Z(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

(ou plus généralement, pour une équation différentielle linéaire du  $n$ -ième ordre à coefficients constants  $a_q$ ,  $Z(p) = \sum_{q=0}^n a_q p^q$ ). Les zéros  $z_k$  de  $Z(p)$  donnent des pôles (simples ou multiples) à  $\hat{f}(p)$ , qui par transformation de Laplace inverse, donnent des exponentielles  $e^{z_k t}$ , (fois peut-être des puissances de  $t$ , cf (9.8)).

Dans le cas où  $Z(p)$  n'a que des pôles simples,  $Z(p) = \prod_{k=1}^2 (p - z_k)$ , la solution a la forme générale  $f(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{Z'(z_k)} e^{z_k t}$  où  $A_k$  incorpore les conditions initiales.

Il est aussi d'usage de définir la susceptibilité  $\hat{\chi}(p) = \frac{1}{Z(p)}$ , qui décrit la réponse du système  $f$  à la source  $g$ ; par transformée de Laplace inverse, on construit  $\chi(t)$ , et la dépendance de la réponse  $f(t)$  dans la source  $g$  est via une intégrale de convolution  $f(t) = \int_0^t ds \chi(t-s)g(s) + \dots$ , où les points de suspension contiennent la dépendance dans les conditions initiales, cf (9.12).

#### 9.4.2 Exemple : Circuit LRC

Un exemple typique du problème précédent est celui du circuit LRC se chargeant ou se déchargeant, voir Fig. 9.1. La tension  $u$  aux bornes du condensateur satisfait

$$LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = v$$

où  $v$  est la tension appliquée aux bornes du circuit. Les conditions initiales spécifient les valeurs de  $u(0) = u_0$  et de  $\dot{u}(0) = -\frac{i_0}{C}$ ,  $i_0$  le courant initial dans le circuit.

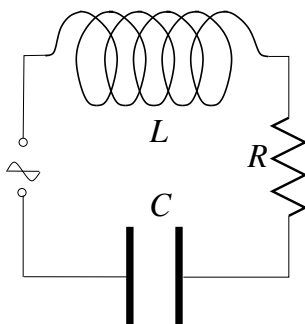


FIGURE 9.1 – Circuit LRC.

On va considérer deux situations différentes.

1. Le circuit n'est pas chargé et le courant  $y$  est nul,  $u_0 = u_1 = 0$ . On le branche au temps

$t = 0$  à un générateur  $v = Ve^{i\omega t}$  (comme toujours, on prendra la partie réelle de  $u$  à la fin des calculs.)

2. Le circuit est alimenté pour  $t \leq 0$  par un générateur  $v = V = \text{const}$ ; au temps  $t = 0$ , on ouvre le circuit (on déconnecte le générateur). Donc les conditions initiales sont  $u_0 = V$ ,  $u_1 = 0$ .

La forme générale de la solution (9.11-9.12) fournit, avec  $Z(p) = LCp^2 + RCp + 1$

$$\hat{u}(p) = \frac{\hat{v}(p)}{Z(p)} + \frac{LCu_0p + LCu_1 + RCu_0}{Z(p)}. \quad (9.13)$$

Les zéros de  $Z(p)$  sont en  $z_{\pm} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$ . La susceptibilité du circuit se calcule explicitement, selon le signe de  $\Delta = R^2 - 4L/C$  (qu'on supposera non nul)

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp e^{pt} \frac{1}{Z(p)} = \sum_{z_{\pm}} \text{Res} \left( \frac{e^{pt}}{Z(p)}, z_{\pm} \right) = \begin{cases} \frac{2}{C\sqrt{\Delta}} e^{-Rt/2L} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2L}t\right) & \text{si } \Delta > 0 \\ \frac{2}{C\sqrt{-\Delta}} e^{-Rt/2L} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2L}t\right) & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

1. fermeture du circuit : le deuxième terme de la solution (9.13) est nul, il reste

$$u(t) = V \int_0^t ds \chi(t-s) e^{i\omega s}$$

et on calcule

$$u(t) = \frac{Ve^{i\omega t}}{Z(i\omega)} + \frac{V}{LC(z_+ - z_-)} \left( \frac{e^{z_+t}}{z_+ - i\omega} - \frac{e^{z_-t}}{z_- - i\omega} \right). \quad (9.14)$$

Aux grands temps, comme  $\Re(z_{\pm}) < 0$ , seul subsiste le premier terme, proportionnel à la source, tandis que les deux derniers termes décrivent le comportement transitoire du circuit.

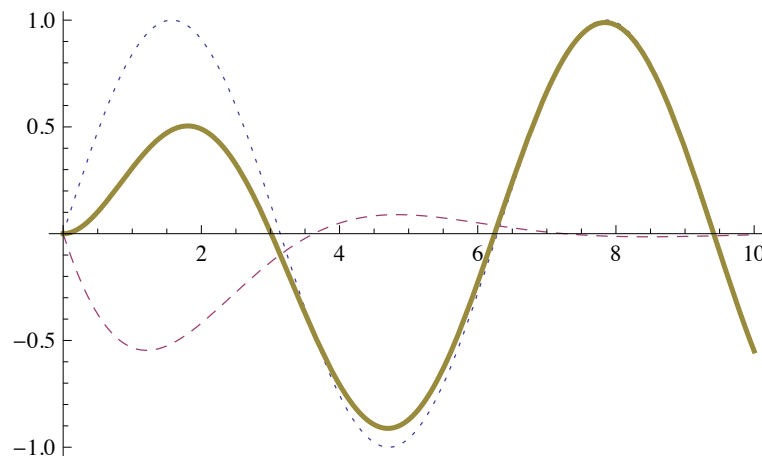


FIGURE 9.2 – Les courbes pointillée, resp. brisée, représentent le premier, resp le second terme de (9.14), et la courbe pleine, c'est-à-dire la solution  $u(t)$ . On a pris  $R = C = L = \omega = V = 1$ .

2. ouverture du circuit : cette fois, l'équation est homogène, seul demeure le deuxième terme de (9.13).

$$\hat{u}(p) = \frac{LCp + RC}{Z(p)}V = \frac{1}{LC(z_+ - z_-)}(LCp + RC) \left( \frac{1}{p - z_+} - \frac{1}{p - z_-} \right)$$

d'où

$$u(t) = \frac{V}{z_+ - z_-} \left( e^{z_+t} \left( z_+ + \frac{R}{L} \right) - e^{z_-t} \left( z_- + \frac{R}{L} \right) \right).$$

Là encore, puisque  $\Re(z_{\pm}) < 0$ ,  $u(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow \infty$ , comme on s'y attend pour ce processus de décharge.

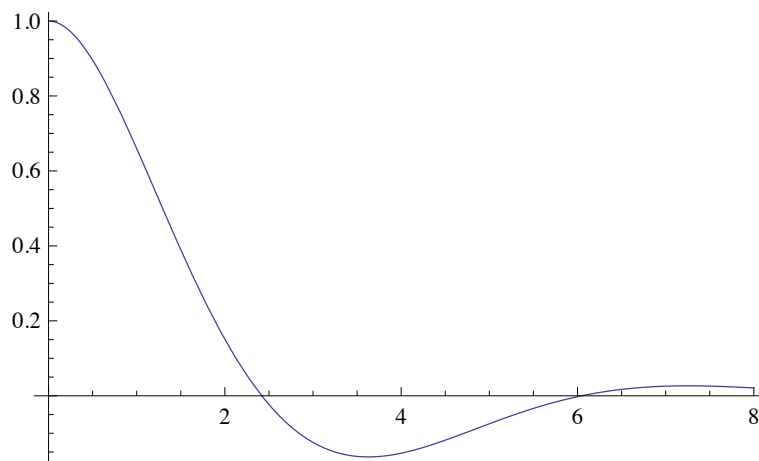


FIGURE 9.3 – La courbe de décharge du circuit, dans le cas (2), toujours avec  $R = C = L = \omega = V = 1$ .

Il faudrait compléter cette discussion par le cas où  $\Delta = 0$ ,  $R^2 = 4LC$ . Comme on sait bien et comme on le retrouve ici via la transformation de Laplace, apparaissent alors des fonctions  $te^{at} \dots$

### 9.4.3 Équations linéaires aux dérivées partielles

La méthode faisant appel à la transformation de Laplace peut aussi s'appliquer aussi à des équations différentielles à coefficients non constants, ou à des équations aux dérivées partielles linéaires. Illustrons-le sur le cas de la désintégration radioactive rencontré au chap 5.

On y considèrerait la fonction génératrice  $\phi(x, t) = \sum_{N=0}^{N_0} x^N \mathbf{P}_N(t)$  des probabilités d'avoir  $N$  noyaux dans l'état initial au temps  $t$ ; on avait montré à l'équation (5.70) que  $\phi$  satisfait l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \kappa(1 - x) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t). \tag{5.70}$$

avec des conditions aux limites qu'on va préciser. Considérons la transformée de Laplace  $\hat{\phi}(x, p)$  de  $\phi(x, t)$  par rapport à la variable  $t$  (ce qui est naturel puisque dans ce problème  $t \geq 0$ ). Elle satisfait l'équation différentielle

ordinaire ( $\hat{\phi}'$  est la dérivée par rapport à  $x$ )

$$\kappa(1-x)\hat{\phi}'(x,p) = p\hat{\phi}(x,p),$$

équation “à variables séparées” qu'on intègre en

$$\hat{\phi}(x,p) = \hat{\phi}(0,p)(1-x)^{-p/\kappa}. \quad (9.15)$$

C'est le moment de préciser les conditions aux limites. À  $x = 0$ ,  $\phi(0,t) = \mathbf{P}_0(t) = (1 - e^{-\kappa t})^{N_0}$  puisque chaque noyau a la probabilité  $1 - e^{-\kappa t}$  de s'être désintégré au temps  $t$  et que ces noyaux se désintègrent de façon indépendante. Donc  $\phi(0,t) = \sum_{N=0}^{N_0} C_{N_0}^N (-1)^N e^{-N\kappa t}$  dont la transformée de Laplace est  $\hat{\phi}(0,p) = \sum_{N=0}^{N_0} C_{N_0}^N (-1)^N \frac{1}{p + \kappa N}$ . Après insertion dans (9.15) et transformation de Laplace inverse, on obtient

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{N=0}^{N_0} C_{N_0}^N (-1)^N \frac{1}{p + \kappa N} (1-x)^{-p/\kappa} e^{pt} \\ &= \sum_{N=0}^{N_0} C_{N_0}^N (-1)^N (1-x)^N e^{-N\kappa t} \\ &= \left(1 - (1-x)e^{-\kappa t}\right)^{N_0} \end{aligned} \quad (9.16)$$

qui est le résultat obtenu en (5.71), d'où l'on tire la probabilité cherchée  $\mathbf{P}_N(t) = C_{N_0}^N (1 - e^{-\kappa t})^{N_0-N} e^{-\kappa t N}$ .

On voit que la transformée de Laplace nous a permis de réduire une équation aux dérivées partielles (PDE dans l'acronyme anglo-saxon) en une équation différentielle ordinaire (ODE), et de déduire la solution à  $x$  fini de celle à  $x = 0$ .

## Lectures complémentaires

J'ai suivi la discussion de W. Appel [1] complétée par celle de L. Schwartz [7], qu'on pourra consulter pour plus de détails. Le livre de C. Aslangul [2] contient de très nombreuses applications physiques.