

Ondes de surface

Michel Talon*

Février 2006

Résumé

On introduit le sujet des ondes de surface, ondes de gravité se produisant à la surface d'un fluide. On étudie d'abord la théorie linéaire, conduisant à une propagation dispersive, puis la théorie non linéaire simplifiée appelée théorie en eau peu profonde. Enfin on étudie un modèle tenant compte à l'ordre le plus bas à la fois de la dispersion et de la non linéarité, l'équation de Korteweg–de Vries. On montre que dans ce cas des solitons peuvent se propager sans déformation. Cet exposé s'appuie principalement sur l'ouvrage de G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves Wiley (1974).

LPTHE Université Paris VI – CNRS

*D'après des notes de Gary Jacques & Benjamin Salles (2005) et de Lionel Bergerat & Maxence Pierrard (2006)

Table des matières

1	Motivation.	3
2	Introduction.	6
3	Etablissement des équations.	6
3.1	Equations de la dynamique et de conservation.	7
3.2	Conditions aux limites.	9
4	Linéarisation.	11
4.1	Approximation linéaire.	11
4.2	Solution des équations.	12
4.3	Relation de dispersion.	13
5	Etude de la propagation.	14
5.1	Transformation de Fourier.	15
5.2	Méthode de la phase stationnaire.	16
5.3	Vitesse de phase, vitesse de groupe.	17
5.4	Comportement à proximité du front d'onde.	18
5.5	La fonction d'Airy.	20
6	Théorie non-linéaire.	23
6.1	Théorie en eaux peu profondes.	23
6.2	Méthode des caractéristiques.	24
6.3	Solution de proche en proche.	25
6.4	Un exemple très simple.	27
6.5	Résolution des équations en eaux peu profondes.	29
6.6	Le problème du bris du barrage.	30
6.7	La propagation d'un paquet d'ondes.	32
7	Solitons.	35
7.1	Equation de Korteweg – de Vries.	35
7.2	Le soliton.	37

1 Motivation.

En 2005 et 2006 l'université Paris VI a demandé aux chercheurs de ses laboratoires, particulièrement aux chercheurs du CNRS, d'accueillir des étudiants de Licence et de Maîtrise pour des stages leur permettant de se faire une idée de l'activité de recherche dans les laboratoires.

J'ai pensé que des étudiants de Licence, ayant donc une connaissance relativement faible de la physique moderne, mais ayant demandé à faire un stage dans un laboratoire de physique théorique, pourraient trouver intérêt à étudier un sujet de physique extrêmement classique, mais néanmoins non trivial au niveau mathématique. Le sujet des ondes de surface m'a paru être l'un des sujets célèbres de la physique classique, sur lequel s'est illustré Lord Rayleigh, permettant de mettre constamment en rapport l'intuition physique qui est toujours proche et évidente dans ce domaine, et le formalisme mathématique. Ce rapport est précisément ce qui fait la nature spécifique de la physique théorique, par opposition avec la physique expérimentale ou les mathématiques appliquées, même si bien sûr il ne s'agit plus d'un sujet de recherche actuel dans les laboratoires de physique théorique. Ce choix a été renforcé par l'existence d'un ouvrage magnifique, écrit par l'un des plus grands spécialistes modernes du sujet, G.B. Whitham, "Linear and non linear waves" lequel illustre parfaitement l'interaction permanente entre les problèmes physiques et le formalisme mathématique, ainsi que l'art de passer à vitesse vertigineuse de l'exposé élémentaire d'un problème à des considérations à la pointe de la recherche.

L'un des objets, très pragmatique, que j'avais assigné à ce stage, était aussi la découverte de TeX, et les étudiants ont appris qu'ils pouvaient en quelques heures acquérir une aisance suffisante pour mettre en forme les notions de physique qu'ils avaient acquises. Etant donné la qualité des notes qu'ils avaient rédigées, je suis parti du texte de Lionel Bergerat et Maxence Pierrard, que j'ai édité, commenté et augmenté pour atteindre l'exposé suivant¹, qui me paraît un peu plus accessible que le chapitre correspondant du livre de Whitham, lequel est, il faut l'avouer, un peu "raide".

Une autre motivation est, bien sûr, le fait que de nombreuses notions introduites ci-dessous dans l'étude des ondes de surface, ont aussi des applications importantes dans la physique moderne, en particulier en mécanique quantique ou en optique, et vont donc enrichir la compréhension des stagiaires quand ils les rencontreront en Licence ou en Maîtrise au cours des enseignements traditionnels. Notamment :

¹Tout un chacun peut en faire ce qu'il souhaite, mais j'aimerais qu'on me communique les erreurs éventuelles – talon@lpthe.jussieu.fr

- La propagation dispersive. Les ondes de surface ont une célérité dépendant de leur longueur d’onde. Le même phénomène se produit en optique pour la propagation dans un milieu dispersif. Cela conduit à des difficultés bien connues pour comprendre la propagation des “pulses” et en particulier la manière dont se manifeste la causalité et la forme du front d’onde. Dans ce contexte les travaux de A. Sommerfeld et L. Brillouin sont des classiques.²
- Vitesse de phase et vitesse de groupe. La propagation dispersive conduit aussi à la distinction entre vitesse de phase et vitesse de groupe qui est un chapitre traditionnel de l’enseignement ! Les ouvrages usuels étaient généralement cette discussion par des arguments à la fois peu convaincants, peu généraux et physiquement peu clairs. Whitham consacre plusieurs pages au sujet, présente de nombreux arguments, dont certains très généraux, en fait reliés à sa théorie des “équations de Whitham”. Ici nous utilisons la méthode de la phase stationnaire, qui est un outil très important dans toute la physique, pour comprendre ce sujet. C’est l’approche originale de Lord Rayleigh. L’étudiant retrouvera peut être cette méthode pour comprendre le passage à la limite classique dans l’intégrale de chemin en mécanique quantique.
- La fonction d’Airy. L’étude du front d’onde mène naturellement à la fonction d’Airy. Cette fonction apparaît dans de nombreux domaines de physique. D’une part elle est solution de l’équation de Schrödinger pour le potentiel $V(x) = x$ et à ce titre intervient dans l’étude des conditions de raccordement aux “turning points” pour l’approximation BKW en mécanique quantique. D’autre part elle apparaît en optique physique dans l’étude de la transition entre zone éclairée et ombre géométrique, ou de la répartition lumineuse autour des caustiques. Son étude asymptotique pour les grandes valeurs de l’argument est un cas particulier de l’étude asymptotique en présence d’une singularité irrégulière. Les développements asymptotiques ne sont pas valables tout autour du point singulier mais uniquement dans des “secteurs de Stokes”. En fait G. Stokes a découvert précisément ce phénomène en étudiant l’équation d’Airy. Pour des valeurs positives de l’argument la méthode du col permet de trouver un comportement exponentiel décroissant, alors que pour des valeurs négatives la méthode de la phase stationnaire donne une approximation sinusoïdale. Le phénomène de Stokes est justement le fait que la sinusoïde n’est **pas** le prolongement analytique de l’exponentielle

²Voir le livre “Optics” de A. Sommerfeld, Academic Press (1972), Section 22

décroissante.

- Les solitons. Les propagations de solitons en physique non linéaire trouvent des applications de plus en plus répandues. On croit qu’elles interviennent dans la propagation à longue distance des tsunamis, sans déformation ni atténuation, mais aussi dans la propagation du signal lumineux dans certaines fibres optiques, et dans d’autres domaines de l’optique non linéaire. Le sujet est en lui même redevable du traitement par les méthodes des “systèmes intégrables” qui sont un des domaines de recherche de notre laboratoire. Ces méthodes permettent en particulier de trouver des solutions très générales de l’équation de Korteweg–de Vries, mais en fait les mêmes techniques permettent de résoudre des modèles de mécanique statistique, etc.

Le sujet est aussi motivé par le souci d’introduire même très brièvement les stagiaires à la mécanique des fluides, par exemple en établissant les équations du mouvement qui vont être étudiées. La partie centrale, et aussi la plus délicate de l’exposé traite de la méthode des caractéristiques qui a été introduite par le grand mathématicien B. Riemann pour résoudre le problème de la propagation unidimensionnelle de gaz compressible³. L’une des conséquences est la possibilité de trouver, dans ce genre de problèmes, des ondes de choc, dont l’étude plus approfondie nécessite de recourir à la thermodynamique (Rankine et Hugoniot). Inutile de dire à quel point ce sujet a des applications pratiques⁴ importantes. Du point de vue mathématique, c’est un des domaines les plus importants en mathématiques appliquées, la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires hyperboliques. Face à la complexité de la situation générale, il est d’autant plus remarquable de noter l’habileté dont Riemann a fait preuve pour trouver des solutions concrètes !

Espérant que tout ceci justifie suffisamment l’étude de ce sujet, en particulier par le mélange très satisfaisant de mathématiques et de raisonnement physique, je crois utile de noter que les stagiaires ont apparemment pris plaisir à cette étude, et y ont raisonnablement bien réussi.

Michel Talon

³Voir “Mécanique des Fluides” Sections 94–97 Landau et Lifchitz, Editions Mir (1971)

⁴Voir “Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena” Zeldovich & Raizer, Dover (2002)

2 Introduction.

Le but de ce travail sera d'étudier la théorie des ondes de gravité à la surface d'un fluide, supposé non visqueux et incompressible. Par simplicité on n'étudiera pas les ondes "capillaires" qui dépendent des effets de tension superficielle et permettent de comprendre des effets intéressants tels que la vague d'étrave d'un navire. On obtiendra les équations qui décrivent l'évolution de la surface libre, et qui forment un système couplé non linéaire très compliqué.

Nous commencerons par linéariser ces équations, ce qui permet d'obtenir des solutions ondulatoires assez simples. Le point notable est le fait que cette propagation est dispersive, c'est à dire que la célérité des ondes dépend de leur longueur d'onde. De ce fait l'évolution temporelle d'un paquet d'ondes est non triviale. Nous étudierons le profil d'un train d'onde par deux méthodes d'approximations, l'une utilisant la méthode de la phase stationnaire, l'autre utilisant la fonction d'Airy - que nous étudierons - est valable près du front d'onde.

Ensuite, nous aborderons l'étude des aspects non linéaires en nous limitant à une théorie simplifiée, la "théorie en eaux peu profondes". Pour cela, nous introduirons la méthode des caractéristiques, qui s'avèrera être un puissant outil de résolution de ce problème. Le phénomène nouveau, commun à beaucoup d'équations différentielles non linéaires, est que l'évolution temporelle peut mener à la génération "spontanée" de singularités.

Puis nous présenterons le soliton. Il s'agit d'une vague localisée qui se propage sans étalement (en dépit de la dispersion) ni déformation (en dépit des non linéarités). Cette solution apparaît dans le cadre d'une approximation des équations exactes du mouvement, l'équation de Korteweg-de Vries, contenant à l'ordre le plus bas, à la fois des termes dispersifs et des termes non linéaires, et qui se trouve être "intégrable", ce qui permet de trouver des solutions à N solitons. Toutefois nous nous arrêterons à l'orée de ce sujet.

3 Etablissement des équations.

On étudie ici un volume élémentaire de fluide incompressible et non-visqueux dV situé au point \mathbf{x} , de masse volumique ρ dans un repère cartésien de coordonnées x_1, x_2, y , avec un vecteur vitesse \mathbf{u} de coordonnées u_1, u_2, v . La coordonnée verticale est notée y et la vitesse verticale v . On note aussi \mathbf{j} le vecteur unitaire vertical.

3.1 Equations de la dynamique et de conservation.

Etablissons les équations liées au principe fondamental de la dynamique $m\gamma = \mathbf{F}$. Rappelons que l'on suppose que le fluide n'est pas visqueux, donc les seules forces agissant sur dv sont la gravité et la pression. La particule étudiée est soumise à une force extérieure $\mathbf{F} = (-\rho g \mathbf{j} - \nabla P)dv$ où $-\nabla P \cdot dv$ représente les forces de pression extérieure sur le volume élémentaire de fluide. En effet la force sur la surface $dx_2 dy$ en $x_1 + dx_1$ est $-P(x_1 + dx_1)dx_2 dy$ selon la direction de x_1 , tandis que sur la face opposée on a $+P(x_1)dx_2 dy$ et donc au total $-\partial_{x_1} P dv$. D'autre part l'accélération est la dérivée totale de la vitesse de la particule. Or une fonction g de la particule varie non seulement par $\partial_t g$ mais aussi parce que la particule se trouve en $t + dt$ au point $\mathbf{x} + \mathbf{u} dt$ et donc g varie encore de $\sum u_i \partial_{x_i} g dt$. On écrit encore la dérivée "totale" sous la forme :

$$\frac{Dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)g$$

On écrit $m\gamma = \rho dv \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho dv \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$. Ainsi, en divisant par ρdv , on a :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\mathbf{j} - \frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1)$$

D'autre part, on a supposé le fluide incompressible. Pour cette raison on peut écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

En effet l'équation de conservation pour un fluide compressible s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Ainsi $(\rho u_1)(x_1 + dx_1)dx_2 dy - (\rho u_1)(x_1)dx_2 dy dt$ est la quantité de masse sortant durant dt par les deux faces opposées de surface $dx_2 dy$, ce qui vaut $\partial_{x_1}(\rho u_1)dv dt$. Idem pour les deux autres paires de face. La masse totale sortant durant dt du cube dv est donc $\text{div}(\rho \mathbf{u})dt$. La masse totale dans le cube, ρdv diminue d'autant, si bien que $\partial_t \rho dv dt$ est l'opposé de la quantité ci-dessus. Par définition un fluide est incompressible si ρ est constant, alors l'équation de conservation se réduit évidemment à $\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

On va maintenant supposer que le mouvement est irrotationnel, soit $\text{rot} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$. On peut justifier cette hypothèse dans le cas où le fluide n'est pas visqueux, par le raisonnement suivant : soit $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. On vérifie aisément que :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

si bien que l'équation (1) s'écrit encore :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \mathbf{j} \quad (3)$$

En prenant le rotationnel des deux termes de l'équation, comme le rotationnel d'un gradient est nul, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (4)$$

On vérifie explicitement que :

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

or $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ identiquement et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ par hypothèse. Il reste donc $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Soit :

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ est une solution évidente de cette équation. En outre si \mathbf{u} est supposé connu, c'est une équation différentielle linéaire pour $\boldsymbol{\omega}$ dont la seule solution s'annulant en un point est nulle partout. Par exemple l'équation $y' = \gamma y$ a la solution $C \exp(\gamma x)$ qui vaut 0 si elle s'annule en un point. Or on suppose que le mouvement est irrotationnel dans les conditions initiales, et donc le reste.

Physiquement cet argument n'est pas très satisfaisant car on a négligé la viscosité, or on sait bien que des tourbillons sont générés sous l'effet de la viscosité au voisinage d'un obstacle dans un flot irrotationnel. D'un autre côté on sait que ces tourbillons sont localisés dans une "couche limite" entourant l'obstacle, et dans le "sillage turbulent". Au delà l'énergie des tourbillons se dissipe sous l'effet de la "cascade turbulente de Kolmogorov", si bien que dans la quasi totalité du flot le mouvement est bien irrotationnel, précisément à cause de la dissipation turbulente. C'est ce qui justifie réellement l'hypothèse tout à fait usuelle du flot irrotationnel dans un grand nombre de problèmes d'hydrodynamique.

Puisque $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, on peut introduire un potentiel φ tel que $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ (le rotationnel d'un gradient étant toujours nul). On parle encore d'écoulement potentiel. De plus, l'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, implique $\Delta \varphi = 0$ c'est à dire que le potentiel est harmonique. Rappelons que l'équation de Laplace est une équation **elliptique**, typiquement on peut donner des conditions au bord arbitraires sur la périphérie d'un volume simplement connexe, l'équation de

Laplace détermine alors φ à l'intérieur de ce domaine. Les phénomènes de propagation sont au contraire liés aux équations **hyperboliques** que l'on définira plus loin. Pour le moment rien ne permet de comprendre l'origine des ondes de surface. Plus bas nous verrons qu'elles se produisent précisément en tenant compte des conditions aux limites très particulières à la surface libre.

L'équation (1) se réécrit en utilisant le potentiel φ :

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \mathbf{j} \quad (5)$$

Intégrant cette équation, en sachant que $\nabla y = \mathbf{j}$, on a :

$$\varphi_t + \frac{1}{2} u^2 + \frac{P - P_0}{\rho} + gy = C(t) \quad (6)$$

On peut ajouter au potentiel φ une fonction arbitraire de t qui disparaît dans la définition $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, et donc profiter de cet arbitraire pour absorber la constante d'intégration $C(t)$. On obtient ainsi l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{P - P_0}{\rho} = -\varphi_t - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - gy \quad (7)$$

Notons que dans le cas statique uniforme, $\varphi_t = 0$ et $\nabla \varphi = 0$ notre équation se réduit à l'équation "hydrostatique" bien connue $P = P_0 + \rho g |y|$. D'autre part pour un flot stationnaire $\varphi_t = 0$ elle se réduit à l'équation de Bernoulli $P + 1/2 \rho \mathbf{u}^2 + \rho gy = C$, c'est à dire grosso modo la conservation de l'énergie.

3.2 Conditions aux limites.

Soit $f(x_1, x_2, y, t) = 0$ l'équation de la surface libre, ou si l'on préfère, sous forme résolue, $y = \eta(x_1, x_2, t)$. Nous exprimons la condition que cette surface est bien à tout instant la surface libre du fluide en écrivant que la composante normale à la surface de la vitesse du fluide est exactement égale à la vitesse normale de déplacement de la surface. Bien entendu il peut y avoir un déplacement arbitraire tangentiel du fluide, la seule condition nécessaire porte sur les vitesses normales à la surface libre.

Exprimons d'abord les coordonnées du vecteur normal en un point de la surface d'équation $f = 0$ à t fixé. Un déplacement (dx_1, dx_2, dy) dans le plan tangent est tel que l'on reste sur la surface, $f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, y + dy) = 0$, ce qui donne au premier ordre (on écrira $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}$) :

$$dx_1 f_{x_1} + dx_2 f_{x_2} + dy f_y = 0$$

L'équation du plan tangent est donc : $x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + y f_y = 0$. On en déduit l'expression du vecteur normal à la surface :

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}} (f_{x_1}, f_{x_2}, f_y)$$

La projection normale de la vitesse du fluide est donc :

$$v_n = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \frac{(f_{x_1} u_1 + f_{x_2} u_2 + f_y v)}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}$$

Il est plus délicat d'obtenir la vitesse de déplacement de la surface $f = 0$ quand t varie, mesurée le long de la normale. Soit v_n cette vitesse, si le point $P = (x_1, x_2, y)$ est sur la surface $f = 0$ au temps t , alors le point $P + (v_n dt) \mathbf{n}$ est sur la surface $f = 0$ au temps $t + dt$, c'est à dire :

$$f(x_1 + v_n dt n_1, x_2 + v_n dt n_2, y + v_n dt n_3, t + dt) = 0$$

Au premier ordre ceci donne $f_{x_1} v_n n_1 + f_{x_2} v_n n_2 + f_y v_n n_3 + f_t = 0$ soit :

$$v_n = \frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}$$

L'égalité de la vitesse normale du fluide à celle de la surface s'écrit donc :

$$\frac{Df}{Dt} = f_t + u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y = f_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f = 0 \quad (8)$$

où D est la dérivée "totale" en suivant le fluide. Autrement dit cette équation signifie que si une particule de fluide est sur la surface, et qu'on la suit à l'instant $t + dt$ elle est encore sur la surface. Elle a pu glisser le long de la surface au premier ordre en dt mais n'a pas pu s'éloigner normalement à elle au premier ordre.

Si l'on utilise la forme résolue, $y = \eta(x_1, x_2, t)$ de l'équation de la surface, cela revient à prendre $f = \eta - y$ donc $f_{x_1} = \eta_{x_1}$, $f_{x_2} = \eta_{x_2}$, $f_t = \eta_t$ et $f_y = -1$. La condition aux limites à la surface libre s'écrit donc $\eta_t + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} - v = 0$ valable pour $y = \eta(x_1, x_2, t)$, et dans laquelle on peut remplacer $\mathbf{u} = \nabla \phi$. De même l'équation de la dynamique (7) se simplifie sur la surface libre puisque $P = P_0$, la pression atmosphérique, et $y = \eta$, donc $\phi_t + 1/2(\nabla \phi)^2 + g\eta = 0$. On a donc sur la surface libre deux conditions :

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \phi_{x_1} \eta_{x_1} + \phi_{x_2} \eta_{x_2} &= \phi_y \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2 + \phi_y^2) + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } y = \eta(x_1, x_2, t) \quad (9)$$

La condition aux limites sur le fond est tout à fait similaire, si ce n'est que le fond est une surface d'équation $y = -h_0(x_1, x_2)$ indépendante du temps, et l'on a donc simplement :

$$\varphi_y + \varphi_{x_1} h_{0x_1} + \varphi_{x_2} h_{0x_2} = 0 \quad \text{pour } y = -h_0(x_1, x_2) \quad (10)$$

Plus trivialement si le fond est plat h_0 est constant, et $\varphi_y = 0$ pour $y = -h_0$. A priori, le fait que φ est harmonique, joint aux conditions aux limites portant sur les dérivées de φ au bord du domaine (conditions de Neumann) permet de déterminer φ à l'intérieur du domaine $-h_0 < y < \eta$ à constante près. Evidemment le problème est bien plus redoutable, car les équations (9) expriment aussi η en fonction de φ . C'est pourquoi nous allons d'abord obtenir une approximation linéarisée de ces équations et nous verrons alors qu'elles déterminent bien une solution convenable.

4 Linéarisation.

Nous montrons d'abord comment linéariser les équations des ondes de surface, puis nous étudions longuement la solution qui en résulte.

4.1 Approximation linéaire.

Le système (9) est non linéaire, mais il contient sous forme quadratique des quantités qui sont supposées être petites, notamment la vitesse \mathbf{u} du fluide et le déplacement η de la surface libre. Ne gardant que les termes du premier ordre on abandonne le terme $\varphi_{x_1} \eta_{x_1} + \varphi_{x_2} \eta_{x_2}$ dans la première équation, et le terme $1/2(\nabla\varphi)^2$ dans la deuxième, c'est à dire qu'on néglige l'énergie cinétique du fluide dans le bilan d'énergie. Les équations ainsi obtenues ne sont linéaires qu'en apparence, car on doit les appliquer en $y = \eta$. Si l'on développe ces équations autour de $y = 0$ en puissance de η on engendre des termes d'ordre supérieur. Comme les équations sont homogènes d'ordre 1, tous les termes d'ordre supérieur sont au moins d'ordre 2, et la linéarisation consiste à les abandonner tous, c'est à dire à écrire les conditions aux limites, non pas en $y = \eta$ mais en $y = 0$. On obtient alors le système linéaire :

$$\left. \begin{array}{l} \eta_t = \varphi_y \\ \varphi_t + g\eta = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } y = 0 \quad (11)$$

En dérivant la deuxième équation on peut éliminer η , soit $\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0$ sur $y = 0$. Supposant le fond plat, on a donc le système complet d'équations

linéaires :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 & \text{sur } y = 0 \\ \Delta\varphi = 0 & \text{dans le fluide} \\ \varphi_y = 0 & \text{au fond} \end{cases} \quad (12)$$

4.2 Solution des équations.

Recherchons des solutions de (12) ayant un comportement ondulatoire en x_1, x_2 pour η et donc pour φ qui lui est couplé. On pose donc :

$$\begin{aligned} \eta &= A e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \varphi &= Y(y) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \end{aligned} \quad (13)$$

où $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = k_1 x_1 + k_2 x_2$. Comme φ est harmonique et que : $\Delta\varphi = -k^2\varphi + Y'' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ nous trouvons pour Y l'équation $Y'' - k^2 Y = 0$ où $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, et donc $Y(y)$ est une combinaison linéaire de $\exp(ky)$ et de $\exp(-ky)$.

Ceci est une propriété générale de l'équation de Laplace, si une solution a un comportement ondulatoire dans une direction, elle a un comportement exponentiel dans l'autre et les vecteurs d'onde sont similaires dans les deux cas. On tire de là tout de suite une propriété importante pour la suite : si la longueur d'onde des ondes de surface est grande devant la profondeur h_0 , la dépendance en y de φ et donc de la vitesse \mathbf{u} sera faible. En fait dans l'approximation en eau peu profonde on néglige complètement la dépendance en y de \mathbf{u} . Dans le cas opposé, et comme φ_y doit être nul au fond, φ doit essentiellement décroître exponentiellement vers le fond, et le champ de vitesse \mathbf{u} concerne essentiellement une couche près de la surface libre d'épaisseur du même ordre que la longueur d'onde.

Etudions plus précisément la solution quand le fond est plat : $Y'(y = -h_0) = 0$. La combinaison linéaire appropriée d'exponentielles est $Y \propto \cosh[k(h_0 + y)]$ car $Y' \propto \sinh[k(h_0 + y)]$ s'annule bien en $y = -h_0$. On obtient ainsi l'expression de φ :

$$\varphi = C^t \cosh[k(h_0 + y)] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

Comme $\varphi_t = -g\eta$, on peut exprimer cette constante à l'aide de A :

$$C^t = \frac{-igA}{\omega \cosh(kh_0)}$$

ce qui nous donne l'expression finale du potentiel des vitesses :

$$\varphi = \frac{-igA}{\omega \cosh(kh_0)} \cosh[k(h_0 + y)] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (14)$$

Nous n'avons pas encore utilisé la première équation de (12), mais nous verrons plus bas qu'elle donne uniquement une relation entre k et ω la "relation de dispersion".

Ces expressions sont encore plus simples quand la hauteur d'eau est très grande. On peut alors prendre $h_0 = -\infty$, et φ est évidemment une pure exponentielle décroissante ($y < 0$) : $\varphi = -\frac{igA}{\omega} e^{ky} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ Supposant $\mathbf{k} = (k, 0)$, c'est à dire $k_2 = 0$, on a donc, voir Fig. (1) :

$$u_1 = \frac{kgA}{\omega} e^{ky+i(kx_1-\omega t)}, \quad u_y = \frac{-ikgA}{\omega} e^{ky+i(kx_1-\omega t)}$$

Comme dans l'approximation linéaire u_1 est la vitesse d'une particule de fluide selon x_1 , et u_y selon y , on peut intégrer ces équations pour obtenir (on a utilisé $\omega^2 = gk$ qui se déduit de $\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0$) quand $kA \ll 1$ (la hauteur de vague très petite devant la longueur d'onde) :

$$x_1 = a + A \exp(-k|b|) \sin(\omega t - kx_1), \quad y = b + A \exp(-k|b|) \cos(\omega t - kx_1)$$

ce qui est le résultat bien connu : les "particules" d'eau décrivent des cercles de centre $(x_1 = a, y = b)$.

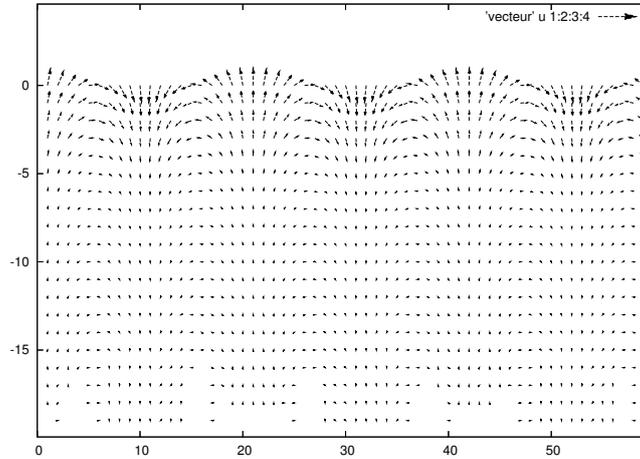


FIG. 1 – Champ de vitesses dans le fluide à t fixé.

4.3 Relation de dispersion.

Il nous reste à exploiter la première équation (12) qui décrit la dynamique de la surface libre, soit $\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0$. Or, avec les solutions ci-dessus

nous avons $\varphi_{tt} = -\omega^2 \varphi$ tandis que $\varphi_y = k \tanh(kh_0) \varphi$ (pour $y = 0$) dans le cas d'une profondeur finie, et $\varphi_y = k \varphi$ quand $h_0 \rightarrow \infty$.

Ainsi, la condition à la surface libre est toujours satisfaite pourvu que ω et k soient liés par la "relation de dispersion" :

$$\omega^2 = (gk) \tanh(kh_0) \quad (15)$$

qui s'écrit $\omega^2 = (gk)$ dans le cas $h_0 = \infty$. Sous forme résolue en ω on a donc $\omega(k) = \pm \sqrt{(gk) \tanh(kh_0)} = \pm W(k)$ ou $\omega(k) = \pm \sqrt{(gk)}$.

La relation de dispersion se simplifie dans les deux limites de l'eau peu profonde, $h_0 \ll \lambda$, soit $(kh_0) \ll 1$, ou de l'eau profonde, $h_0 \gg \lambda$. Dans le premier cas on a $\tanh(kh_0) \sim (kh_0)$ et donc $\omega = \pm ck$ avec $c = \sqrt{gh_0}$, où c est la célérité des ondes et est constante : il n'y a pas de dispersion. Dans le second cas, on a $\tanh(kh_0) = 1$ et ω prend la même forme que dans le cas $h_0 = \infty$. La célérité des ondes dépend constamment de leur longueur d'onde, il y a dispersion. Dans Fig.(2) on voit à gauche la loi de dispersion correspondant à h_0 fini, qui est linéaire sans dispersion pour k petit, et à droite la loi pour h_0 infini qui est toujours dispersive. Les deux lois se confondent pour k grand.

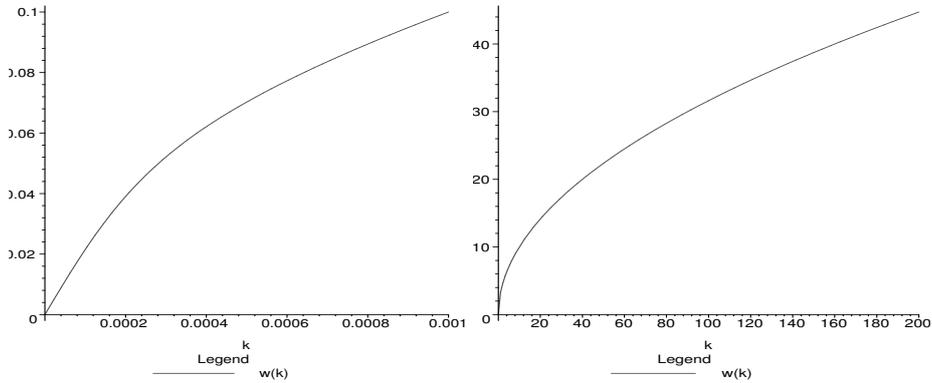


FIG. 2 – Relations de dispersion pour h_0 fini et infini.

5 Etude de la propagation.

Les équations de propagation étant linéaires se résolvent naturellement par transformation de Fourier. Cependant le caractère dispersif de la relation entre ω et k rend les choses compliquées.

5.1 Transformation de Fourier.

Le système (12) étant linéaire, la solution générale est combinaison linéaire des solutions ondulatoires que nous avons décrites, ce que l'on peut exprimer comme une intégrale de Fourier. Par simplicité on se limitera au cas unidimensionnel, $\mathbf{k} = (k, 0)$ et $\mathbf{x} = (x, 0)$. On a donc la solution générale pour la surface libre :

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(kx-Wt)}F_+(k) + e^{i(kx+Wt)}F_-(k)]dk$$

où l'intégrale est rendue compliquée par le fait que W dépend de k . Les deux fonctions $F_{\pm}(k)$ sont fixées par les conditions initiales, c'est à dire par les valeurs arbitraires de $\eta(x, t)$ et $\eta_t(x, t)$ à $t = 0$, la formule ci-dessus exprimant alors $\eta(x, t)$ pour tout t . Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned}\eta(x, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}[F_+(k) + F_-(k)]dk \\ \eta_t(x, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-iW(k))e^{ikx}[F_+(k) - F_-(k)]dk\end{aligned}$$

A titre d'exemple, choisissant les conditions initiales $\eta_t(x, 0) = 0$ et $\eta(x, 0) = \eta_0(x)$ on a $F_+ = F_- = F$ donc $\eta_0(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}F(k)dk$, soit par transformée de Fourier inverse :

$$F(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x)e^{-ikx} dx$$

La solution pour tout t est alors :

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cos[W(k)t]e^{ikx}F(k)dk \quad (16)$$

En particulier on peut traiter le cas où η_0 est un "pulse" infiniment fin, en prenant $\eta_0(x) = \delta(x)$ (fonction de Dirac) : on a $F(k) = \frac{1}{4\pi}$ et donc :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos[kx] \cos[W(k)t]dk \quad (17)$$

Evidemment cette expression n'est pas évaluable simplement vu la forme de $W(k)$.

5.2 Méthode de la phase stationnaire.

Il s'agit d'une méthode générale, due à Lord Kelvin, pour évaluer approximativement les intégrales de Fourier ci-dessus. L'idée est qu'une intégrale de Fourier telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix\phi(k)) F(k) dk$ pour x grand, reçoit des contributions importantes uniquement dans les régions d'intégration où la phase $\phi(k)$ est **stationnaire**, c'est à dire $d\phi/dk = 0$. On dit aussi que ϕ a un point critique. La justification physique est que, si on n'est pas sur un point critique, la phase $x\phi(k)$ oscille rapidement sur un petit intervalle de variations de k (donc où on peut considérer $F(k)$ constant), et ce d'autant plus que x est grand, ce qui conduit à des interférences destructives et une contribution très petite. En un point critique k_0 , on écrit $\phi(k) = \phi(k_0) + (k - k_0)^2\alpha + \dots$ et on évalue simplement la contribution du voisinage de k_0 comme :

$$F(k_0) e^{ix\phi(k_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\alpha(k-k_0)^2} dk = F(k_0) e^{ix\phi(k_0)+i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{x\alpha}} \quad (18)$$

On a translaté $k \rightarrow k_0 + k$ dans l'intégrale, puis utilisé, $\int \exp(-k^2) dk = \sqrt{\pi}$ d'où par changement d'échelle sur k , $\int \exp(-ak^2) dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, pour $a > 0$. Enfin par prolongement analytique on a étendu le résultat pour a imaginaire pur, et on a noté que $\sqrt{i} = \exp(i\pi/4)$.

Une justification plus sérieuse de ce calcul est obtenue comme suit. Notons que le résultat ci-dessus se comporte en $1/\sqrt{x}$ pour x grand. Nous allons voir que les contributions que nous avons négligées sont au plus en $1/x$, c'est à dire sont plus petites que les contributions dominantes aux points critiques par au moins un facteur $1/\sqrt{x}$. Ainsi se trouve établi le calcul (18) pour x grand.

La contribution la plus inquiétante est celle des zones d'intégration où l'on n'a pas de point critique. Considérons donc $\int_a^b \exp(ix\phi(k)) F(k) dk$ où l'on suppose que ϕ n'a pas de point critique sur $[a, b]$, donc est une bijection sur cet intervalle. Posons $\psi = \phi(k)$ et inversement $k = K(\psi)$ et exprimons notre intégrale en fonction de ψ , avec $\psi_a = \phi(a)$ et $\psi_b = \phi(b)$. Nous avons donc à calculer :

$$\int_{\psi_a}^{\psi_b} \exp(ix\psi) \frac{F(K(\psi))}{\phi'(K(\psi))} d\psi$$

qui est de la forme $\int \exp(ix\psi) G(\psi) d\psi$ avec G parfaitement régulier. Mais alors posant $x\psi = \chi$ notre intégrale vaut :

$$\frac{1}{x} \int_{x\psi_a}^{x\psi_b} e^{i\chi} G(\chi/x) d\chi$$

L'intégrale est majorable par une constante, et on a bien un résultat en $1/x$.

Dés lors on peut se limiter à calculer des intégrales au voisinage immédiat des points critiques. Nous avons calculé une telle intégrale en (18), d'une part en négligeant tous les termes d'ordre supérieur, d'autre part en étendant le domaine d'intégration sur $] - \infty, +\infty[$, alors qu'il est à priori limité autour du point critique, ce qui fait un écart d'ordre $1/x$ par l'argument ci-dessus.

Reste la contribution des termes d'ordre supérieur, tant dans le développement de l'exponentielle que de $F(k)$. On a le droit de développer ces fonctions autour de k_0 tant que le domaine d'intégration est petit, puis d'étendre le domaine d'intégration, ce qui donne des expressions du genre $\int k^2 \exp(i\alpha x k^2) dk$ (les puissances impaires s'annulent pas symétrie). Or cette intégrale se calcule à partir de (18) en dérivant par rapport à x et vaut donc $(i/(2\alpha x))\sqrt{(i\pi)/(\alpha x)}$. On voit que chaque puissance de k produit un facteur $1/\sqrt{x}$ supplémentaire.

Appliquons la méthode de la phase stationnaire à l'évaluation de la surface libre $\eta(x, t)$ qui est donnée par une intégrale de Fourier :

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx - W(k)t)} F(k) dk \quad (19)$$

On suppose que x et t sont simultanément grands, par exemple x/t fixé et x grand. Seuls comptent les points où la phase est stationnaire :

$$\frac{d}{dk}(kx - W(k)t) = 0 \implies \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dW(k)}{dk} = v_g(k)$$

où l'on voit apparaître la *vitesse de groupe* bien connue $v_g(k)$. Ce calcul montre que pour un rapport x/t donné, x et t tendant vers l'infini, la seule valeur de k qui compte dans l'intégrale est celle pour laquelle la vitesse x/t est égale à $v_g(k)$. Si par exemple $W(k) = \sqrt{gk}$ on a $v_g(k) = 1/2\sqrt{g/k}$. Cette vitesse doit être soigneusement distinguée de la *vitesse de phase* $v_\phi = \omega/k$, qui dans notre exemple vaut $\sqrt{g/k}$ c'est à dire le double de la vitesse de groupe.

Appliquant la formule (18), avec $\alpha = W''(k_0)/2$, on obtient l'expression de la surface libre $\eta(x, t)$ à l'approximation de la phase stationnaire :

$$\eta(x, t) = F(k_0) e^{i(k_0 x - \omega t + \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2\pi}{t |W''(k_0)|}} \quad \frac{x}{t} = W'(k_0) \quad (20)$$

On remarque la décroissance en $\frac{1}{\sqrt{t}}$ de l'amplitude des vagues.

5.3 Vitesse de phase, vitesse de groupe.

Un mouvement ondulatoire compliqué de la surface libre se présente généralement sous la forme $\eta(x, t) = \Phi(x, t) \cos \phi(x, t)$ où $\phi(x, t)$ est une

phase variant **rapidement**, généralement de la forme $kx - \omega t + \phi_0$, tandis que Φ est une fonction variant **lentement** qu'on appelle l'enveloppe. Dire que ϕ varie rapidement, et Φ lentement c'est dire que k et ω sont très grands devant $\partial_x \Phi$ et $\partial_t \Phi$. Evidemment une telle séparation peut être relativement floue, point sur lequel on ne s'attardera pas. En outre en général k est aussi une fonction à variation lente de (x, t) , tandis que ω est une fonction de k (relation de dispersion).

Dans un tel cas on appelle **vitesse de phase** v_ϕ le rapport ω/k . Sa signification physique est que si un observateur se déplace par rapport à la surface libre à la vitesse v_ϕ il observe toujours la même phase ϕ c'est à dire se trouve toujours au même endroit de la sinusoïde $\cos \phi$. Par contre l'enveloppe des oscillations évolue autour de lui. Comme $k = k(x, t)$, v_ϕ va aussi évoluer lentement.

La formule (20) a la structure ci-dessus. Outre une décroissance lente globale en $1/\sqrt{t}$ elle possède une enveloppe variant lentement, et de même k varie lentement. En fait fixons une valeur de k_0 et considérons un observateur qui se déplace par rapport à la surface libre avec la **vitesse de groupe** $v_g = (d\omega/dk)(k_0)$, si bien que $x = v_g(k_0)t$. Clairement k_0 est la valeur qui résout $W'(k) = x/t$ donc l'amplitude enveloppe, ω , et k , qui dépendent tous de k_0 sont constants. L'observateur voit un paysage constant autour de lui, excepté bien sûr la phase rapide $\cos(k_0x - \omega(k_0)t + \pi/4)$. Les vagues à courte longueur d'onde défilent sous lui, mais l'enveloppe est fixe. Voilà qui définit la signification physique de la vitesse de groupe. Notons cependant qu'à d'autres parties du profil enveloppe, correspondant à des valeurs différentes de k_0 sont associées des vitesses de groupe différentes.

Enfin considérons un élément de profil enveloppe correspondant à un intervalle $[k_0, k_0 + \delta k_0]$. On retrouve le même profil en tous les points où $x/t = v_g(k_0)$ et donc, à t fixé, pour les valeurs de x dans l'intervalle $[tv_g(k_0), tv_g(k_0) + tv'_g(k_0)\delta k_0]$. Cette intervalle a une largeur $t|W''(k_0)|\delta k_0$ augmentant linéairement avec t . C'est l'**étalement du paquet d'onde**, qui va de pair avec sa décroissance générale en $1/\sqrt{t}$. Cet étalement se produit dans toutes les propagations linéaires dispersives (mais non dans les propagations à célérité constante) car les ondes de différentes fréquences constituant un paquet se déplacent à vitesse différente, entraînant l'étalement du paquet.

5.4 Comportement à proximité du front d'onde.

Appliquons la méthode de la phase stationnaire au cas où la relation de dispersion est donnée par (15). Dans ce cas la Figure (3) représente la vitesse de groupe en fonction de k . On voit tout de suite que l'équation $x/t = v_g(k)$ possède une solution et une seule pour chaque valeur $0 < x/t < c_0$ et n'en

possède aucune si $x/t > c_0$, où $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

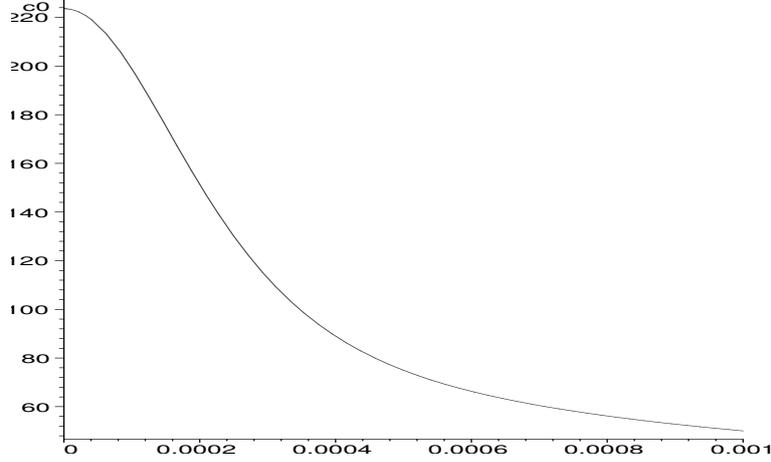


FIG. 3 – Vitesse de groupe en fonction de k .

Ainsi la vitesse de groupe maximale pour la propagation des ondes de surface est c_0 , ce qui veut dire que, à t donné, la valeur maximale de x où l'on peut observer une enveloppe notable est $c_0 t$. On appelle cette zone le **front d'onde**, c'est à dire le point où l'onde commence à se manifester. Clairement la valeur de k correspondante est voisine de 0, ce qui correspond à un régime très peu dispersif (on a presque $\omega = c_0 k$). Au contraire pour $x \ll c_0 t$ on est dans le régime de grand k , c'est à dire d'eau profonde, où $\omega = \sqrt{gk}$ qui est très dispersif. Pour k petit, on a :

$$\omega = W(k) = \sqrt{gk(kh_0 - \frac{1}{3}(kh_0)^3)} = k\sqrt{gh_0}\sqrt{1 - \frac{1}{3}(kh_0)^2} = kc_0 - \gamma k^3$$

avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$ et $\gamma = \frac{c_0}{6}h_0^2$. Notons que pour $k = 0$ on a $W'' = 0$ (pas de terme en k^2) donc on ne peut pas appliquer directement la méthode de la phase stationnaire, il faut appliquer une technique similaire faisant intervenir la fonction d'Airy. Par contre nous allons voir que pour k petit, les résultats obtenus par la méthode de la phase stationnaire se fondent dans ceux obtenus à l'aide de la fonction d'Airy.

Considérons donc l'intégrale (19) dans les cas où x est voisin de $c_0 t$ et où donc le point critique de la phase est en $k = 0$. Remplaçant $W(k)$ par $kc_0 - \gamma k^3$ la surface libre au voisinage du front d'onde est donnée par :

$$\eta(x, t) = F(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp (ik(x - c_0 t) + i\gamma k^3 t) dk$$

Autrement dit, génériquement le point critique est quadratique, ici il est cubique. Il existe une théorie de la classification des points critiques modulo déformation, c'est la théorie des catastrophes⁵ de Thom. Ici nous rencontrons la première espèce de point critique différente du cas standard, le cas quadratique. La formule (18) n'est valable que pour des points critiques quadratiques. L'intégrale ci-dessus se ramène simplement à une intégrale bien connue, qui définit la fonction d'Airy :

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(sz + \frac{1}{3}s^3)} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(sz + \frac{1}{3}s^3) ds \quad (21)$$

Le changement de variables $s = (3\gamma t)^{\frac{1}{3}} k$ et $z = \frac{x - c_0 t}{(3\gamma t)^{\frac{1}{3}}}$ donne immédiatement l'expression de la surface libre :

$$\eta(x, t) = \frac{2\pi F(0)}{(3\gamma t)^{\frac{1}{3}}} \text{Ai} \left(\frac{x - c_0 t}{(3\gamma t)^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (22)$$

Connaissant le graphe de la fonction d'Airy, Figure (4), on voit quelle est la forme du front d'onde : la surface libre devient exponentiellement petite pour $x > c_0 t$, présente une valeur maximale en $x = c_0 t$, puis présente un caractère ondulatoire avec une vitesse de phase c_0 pour $x < c_0 t$, tout en décroissant lentement en $1/(c_0 t - x)^{1/4}$ quand on s'éloigne du front d'onde. La décroissance générale au cours du temps est en $1/t^{1/4}$ ce qui veut dire que le front d'onde décroît moins rapidement que le reste du système ondulatoire (qui est en $1/t^{1/2}$). Au cours du temps l'onde de surface tend à exister surtout au niveau du front d'onde, ce qui correspond bien aux observations.

5.5 La fonction d'Airy.

Nous allons montrer quel est le comportement de la fonction d'Airy pour $z > 0$ grand et $z < 0$ grand, ce qui permet de comprendre son graphe. En outre nous allons montrer que, pour k_0 petit mais non nul, le calcul par la méthode de la phase stationnaire produit un résultat qui se raccorde bien avec l'expression donnée par la fonction d'Airy. Autrement dit il n'y a pas de discontinuité quand on passe du point critique quadratique au point critique cubique à $k_0 = 0$.

La fonction d'Airy possède des développements asymptotiques pour

⁵Voir Techniques and Applications of Path Integration L. S. Schulman Dover Chapitre 16

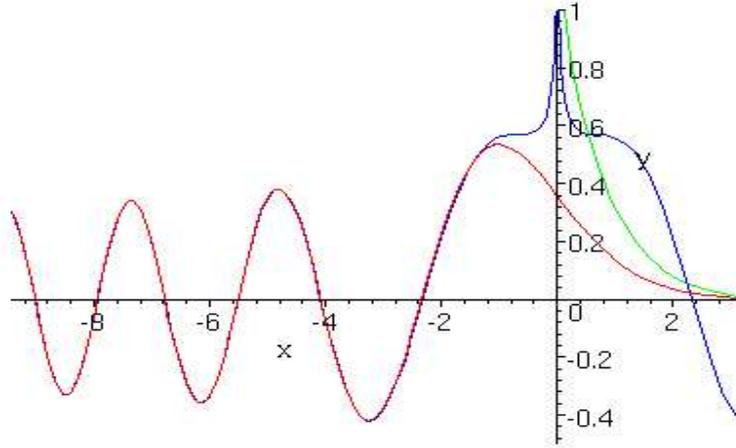


FIG. 4 – Fonction d’Airy et approximations en $+\infty$ et $-\infty$: allure du front d’onde

$|z|$ grand, prenant deux formes différentes selon que $z > 0$ ou $z < 0$:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z > 0 \\ \text{Ai}(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

En réalité la Figure (4) montre à quel point ces approximations sont excellentes immédiatement dès que $|z| > 1.5$. Le point remarquable de ces approximations est que le développement asymptotique pour $z > 0$ n’est **pas** le prolongement analytique du développement pour $z < 0$. En effet le sinus est la demi-différence de deux exponentielles. Seule, l’une d’entre elles figure, analytiquement prolongée dans l’expression pour $z > 0$. Ceci s’appelle le phénomène de Stokes et est caractéristique des développements asymptotiques autour de points singuliers irréguliers. Ici il est immédiat que $\text{Ai}(z)$ est solution de l’équation différentielle $f''(z) - zf(z) = 0$ qui a un point singulier irrégulier à l’infini.

Pour obtenir ces développements, on applique encore la méthode de la phase stationnaire, mais cette fois ci à la phase $i(sz + s^3/3)$. Le point critique est obtenu quand $s^2 + z = 0$ c’est à dire, pour $z < 0$ aux deux points $s = \pm\sqrt{-z}$. Appliquant la formule (18) avec $W' = s^2 + z$, $W'' = 2s$, et $sz + s^3/3 = -\pm|z|^{3/2}$ et ajoutant la contribution des deux points critiques, on obtient $1/\sqrt{\pi} 1/|z|^{1/4} \cos(|z|^{3/2} - \pi/4)$ ce qui est l’expression (23) pour $z < 0$.

Pour $z > 0$ il n’y a pas de point critique dans le domaine d’intégration,

ce qui laisse présager que l'intégrale est petite. Il existe une variante de la méthode de la phase stationnaire, la méthode du col, due à P. Debye, qui permet de traiter le problème. L'idée est de déformer le contour d'intégration dans le plan complexe. Si on s'arrange pour que les contributions en $\pm\infty$ restent exponentiellement petites, comme on ne rencontre pas de pôle, l'intégrale ne va pas changer. Il est aisé de voir que $\exp i(sz + s^3/3)$ est exponentiellement petit quand s va vers l'infini dans les deux secteurs $0 < \arg(s) < \pi/3$ et $2\pi/3 < \arg(s) < \pi$. On laisse donc les extrémités du chemin d'intégration dans ces secteurs. Autour du point critique $s = i\sqrt{z}$ on peut poser $s = i\sqrt{z} + t$ donc $i(sz + s^3/3) = -2/3z^{3/2} - \sqrt{z}t^2 + it^3/3$. Donc si on s'éloigne avec t réel, la quantité à intégrer décroît exponentiellement, alors qu'elle croît exponentiellement dans le sens de t imaginaire pur. Ceci est le phénomène bien connu qu'une fonction analytique ne peut avoir de maximum du module en un point, on a nécessairement un portrait en forme de selle. La méthode du col consiste à déformer le chemin pour qu'il passe par le col, c'est à dire décroisse autour du point critique. Ici il suffit de prendre un chemin avec t réel, qui se termine dans les secteurs ci-dessus. On a alors une intégrale gaussienne autour du point critique, qui se calcule par la même formule (18) et donne immédiatement l'expression (23) pour $z > 0$. Notons que le second point critique en $s = -i\sqrt{z}$ ne se trouve jamais proche du chemin d'intégration, d'où le phénomène de Stokes.

Utilisant l'expression asymptotique de la fonction d'Airy pour $z < 0$ on obtient l'approximation (excellente) de la surface libre $\eta(x, t)$, en arrière du front d'onde :

$$\eta(x, t) \sim 2\sqrt{\pi}F(0)[(3\gamma t(c_0 t - x))]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\frac{2}{3} \frac{(c_0 t - x)^{\frac{3}{2}}}{(3\gamma t)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (24)$$

C'est cette expression que nous voulons comparer à l'application de la méthode de la phase stationnaire pour k petit. Rappelons que nous devons résoudre l'équation $v_g(k) = c_0 - 3\gamma k^2 = \frac{x}{t}$, ce qui donne :

$$k = \pm \sqrt{\frac{c_0 t - x}{3\gamma t}}, \quad W''(k) = \frac{dv_g}{dk} = -6\gamma k$$

Reportant dans l'équation (20), pour chacune des deux valeurs de k on reproduit exactement le calcul de l'expression asymptotique de la fonction d'Airy et on retrouve donc bien le même résultat que dans l'équation (24). Le domaine de validité des approximations se recouvre parfaitement, permettant d'avoir une solution valable aussi bien près que loin du front d'onde, sous la forme de deux formules approximatives qui se recollent. Ceci aussi est une leçon importante que l'on peut tirer de l'étude des ondes de surface.

6 Théorie non-linéaire.

Les effets non linéaires deviennent déterminants quand la profondeur d'eau devient du même ordre ou plus faible que la longueur d'onde des vagues. Par contre dans ce cas on peut dans un premier temps négliger les effets dispersifs, ce qui mène à une théorie non linéaire simplifiée appelée "théorie en eaux peu profondes".

6.1 Théorie en eaux peu profondes.

Rappelons les équations formulées dans la première partie de cette étude :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{j}\end{aligned}$$

On considère la composante verticale de l'accélération faible ($-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g \simeq 0$)
D'où $p - p_0 = \rho g(\eta - y)$, ce qui est l'équation hydrostatique usuelle pour la pression. En projetant sur l'horizontale, avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, v)$ et $x = (x_1, x_2, y)$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$$

On peut supposer que les u_i ne dépendent pas de y , car l'échelle de variation significative est la longueur d'onde, qui est bien plus grande que la profondeur. L'équation précédente devient : $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0$ La signification physique de cette équation est qu'une tranche d'eau comprise entre x et $x + dx$ est accélérée en bloc uniquement par la différence de pression qui règne sur les deux faces, et celle-ci ne dépend que de la différence de hauteur d'eau entre les deux faces, puisque la profondeur y se simplifie entre les contributions opposées.

En intégrant sur un volume l'équation de conservation locale $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ on obtient la conservation du flux sortant à travers n'importe quelle surface close :

$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Prenant un volume "cylindrique" de la forme $[x_1, x_1 + dx_1] \times [x_2, x_2 + dx_2] \times [-h_0, \eta]$ le flux sortant de la face $x_1 = x_1 + dx_1$ est $(u_1 h)(x_1 + dx_1)dx_2$, car on suppose que u_1 ne dépend pas de y , tandis que le flux sortant de la face

opposée est $-(u_1 h)(x_1) dx_2$ laissant une contribution nette $\partial_{x_1}(hu_1) dx_1 dx_2$. Idem pour les deux faces verticales perpendiculaires. Le flux sortant par la face haute du cylindre est $v dx_1 dx_2$ où v est la vitesse verticale au niveau de la surface, qui vaut $\partial_t h$ dans notre approximation. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (hu_i)$$

avec $h = h_0 + \eta$ la profondeur totale.

Par simplicité dans la suite on étudie exclusivement le problème unidimensionnel ($u = u_i$ et $x = x_i, i = 1$) :

$$\left. \begin{aligned} h_t + hu_x + uh_x &= 0 \\ u_t + uu_x + gh_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

6.2 Méthode des caractéristiques.

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles en x, t non linéaire que l'on peut mettre sous la forme :

$$\partial_t f + A \partial_x f = 0 \quad (26)$$

où f est un vecteur à n composantes (dans le cas qui nous intéresse $n = 2$) et A une matrice $n \times n$ dont les éléments a_{ij} dépendent des fonctions inconnues $f_i(x, t)$. Introduisons une valeur propre λ et le vecteur propre à gauche correspondant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où λ et les α_i dépendent à priori des f_j :

$$\alpha A = \lambda \alpha$$

Supposons λ réel.

Multipliant à gauche⁶ par la matrice ligne α on obtient l'équation scalaire $\alpha \partial_t f + \alpha A \partial_x f = \alpha \partial_t f + \alpha \lambda \partial_x f = 0$ soit :

$$\alpha \cdot \partial^{(\lambda)} f = 0$$

où nous avons noté $\partial^{(\lambda)} = \partial_t f + \lambda \partial_x$. Si on considère une courbe (C) , appelée **caractéristique** le long de laquelle on a $dx/dt = \lambda$ (supposant bien sûr l'équation résolue ! et donc les f_i puis λ connus pour chaque (x, t)) alors $\partial^{(\lambda)}$

⁶On ne pourrait pas faire des manipulations similaires en combinant les équations à droite, car les dérivations ne commutent pas avec les composantes des vecteurs propres

est la dérivée le long de cette courbe, puisque pour toute fonction g la dérivée le long de la courbe est :

$$\frac{dg}{dt}|_{(C)} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial g}{\partial x} = \partial^{(\lambda)} g$$

On dit que le système d'équations aux dérivées partielles est **hyperbolique** si la matrice A possède partout des valeurs propres **réelles** et des vecteurs propres à gauche correspondants linéairement indépendants. Dans ce cas par chaque point (x, t) vont passer n lignes caractéristiques, et sur chacune on aura une contrainte $\alpha_j \cdot \partial^{(\lambda_j)} f = 0$. Ces contraintes sont linéairement indépendantes, par hypothèse (même aux points où deux valeurs propres coïncident exceptionnellement) et permettent de construire les solutions f_i de proche en proche comme nous allons le voir ci-dessous.

Qui plus est il se trouve souvent en pratique (et c'est toujours le cas pour $n = 2$) que l'on puisse trouver des "facteurs intégrants" ϕ_j tels que les contraintes prennent la forme :

$$\frac{1}{\phi_j} \alpha_j (\partial_t f + \lambda \partial_x f) = dI_j$$

On doit donc avoir $dI_j = 0$ sur la caractéristique $(C)_j$; c'est à dire I_j constant. On appelle alors les I_j les *invariants de Riemann*, car Riemann a introduit cette méthode des caractéristiques pour résoudre le problème des flots gazeux unidimensionnels compressibles. Dans ce cas il est aisé d'étendre l'argument ci-dessous du cas infinitésimal au cas fini, c'est à dire de comprendre comment les équations $I_j = C_j$ permettent en fait de déterminer complètement la solution, y compris de trouver les caractéristiques.

6.3 Solution de proche en proche.

Supposons la solution connue sur une surface (Σ) et montrons comment on peut la propager sur une surface $(\Sigma + \delta\Sigma)$ un peu plus tard.

Puisque f_1 et f_2 sont connus sur Σ on y connaît la matrice A et ses deux valeurs propres λ_{\pm} qu'on peut supposer constantes dans le voisinage de P . Les caractéristiques (C_{\pm}) sont deux segments de droite de pente λ_{\pm} passant par P et qui coupent (Σ) en P_{\pm} . Sur chaque caractéristique on a l'équation $\alpha^{\pm} \cdot \delta f = 0$ où α^{\pm} sont les vecteurs propres à gauche correspondants. Soit :

$$\begin{aligned} \alpha_1^+ f_1(P) + \alpha_2^+ f_2(P) &= \alpha_1^+ f_1(P_+) + \alpha_2^+ f_2(P_+) \\ \alpha_1^- f_1(P) + \alpha_2^- f_2(P) &= \alpha_1^- f_1(P_-) + \alpha_2^- f_2(P_-) \end{aligned} \quad (27)$$

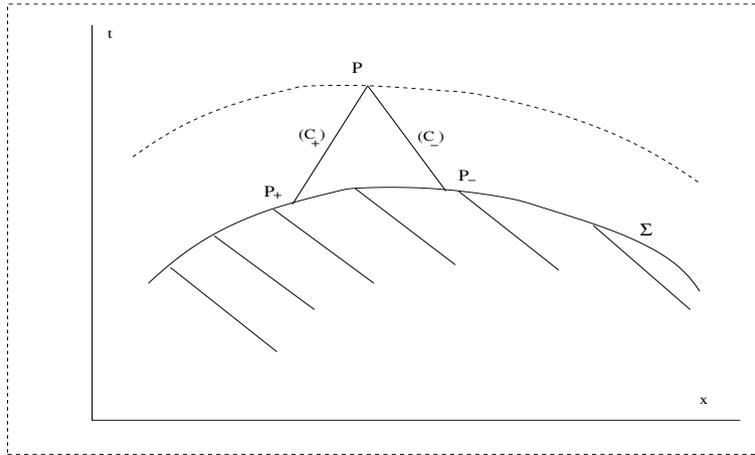


FIG. 5 – Propagation le long des caractéristiques.

Par hypothèse α^\pm sont indépendants donc ce système détermine bien $f(P)$ en fonction des membres de droite qui sont connus.

On peut faire cela tout le long de $(\Sigma + \delta\Sigma)$ tant que les caractéristiques (C_\pm) intersectent (Σ) comme sur le dessin. Ceci permet de connaître f sur $(\Sigma + \delta\Sigma)$ et donc d'y connaître les pentes λ_\pm . On peut alors déterminer de proche en proche à la fois la propagation de f et les caractéristiques, qui permettent de continuer la détermination de cette propagation. D'une certaine manière on peut dire que le "champ" $\alpha_1^\pm f_1(P) + \alpha_2^\pm f_2(P)$ se propage inchangé sur les caractéristiques (C_\pm) de manière infinitésimale.

S'il existe des invariants de Riemann I^\pm qui restent constants sur (C_\pm) on peut faire le même genre de déduction, mais de manière finie. Si la caractéristique (C_+) qui maintenant est une courbe finie coupe (Σ) en P_+ et de même pour P_- alors $f(P)$ est déterminé par les deux équations $I^\pm(P) = I^\pm(P_\pm)$ où les membres de droite sont connus. Fréquemment les conditions initiales sont telles que ces membres de droite sont très simples, par exemple constants, et que l'on peut déterminer à la fois $f(P)$ et la forme des caractéristiques à partir de cette information. Clairement on peut aussi dire que la quantité $I^\pm(f)$ se propage inchangée le long de la caractéristique (C_\pm) . Qui plus est le tracé du réseau de caractéristiques permet de discuter la nature des conditions initiales permettant de déterminer la solution ultérieure, et le domaine dans lequel cette solution ultérieure est déterminée. Essentiellement il faut que la surface (Σ_0) des conditions initiales coupe toujours correctement les caractéristiques, et dans le cas où (Σ_0) est finie, la solution ne sera déterminée que dans un cône bordé par des caractéristiques (C_\pm) appropriées issues du bord, ce qui est l'expression de la **causalité** de la

propagation des solutions d'une équation hyperbolique.

6.4 Un exemple très simple.

Nous allons considérer d'abord le cas particulièrement simple des ondes de densité se propageant uniquement de gauche à droite à la célérité c . Ainsi la solution de la théorie linéaire est de la forme $\rho(x, t) = f(x - ct)$ où f est une fonction quelconque déterminée par les conditions initiales. Clairement à $t = 0$ on doit avoir $f(x) = \rho_0(x)$. L'équation d'ondes correspondante est $\rho_t + c\rho_x = 0$ qui est une équation du premier ordre, ce qui correspond à la propagation dans un seul sens. On introduit une non linéarité dans cette équation en supposant que la célérité c dépend de l'amplitude de l'onde, $c = c(\rho)$. L'équation d'onde s'écrit alors :

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$$

où $c(\rho) = c_0 + \rho c_1 + \dots$. Nous sommes dans le cas $n = 1$ de notre théorie générale et nous allons voir que la méthode des caractéristiques fournit la solution générale.

La matrice A est 1×1 et donc a une seule valeur propre $c(\rho)$. La théorie nous dit alors de considérer les caractéristiques (C) qui sont les courbes ayant en tout point (x, t) la pente c supposant connu $\rho(x, t)$ en ce point. Nous allons voir que ρ est tout simplement l'invariant de Riemann sur cette caractéristique. En effet :

$$\frac{d\rho}{dt} \Big|_{(C)} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$$

Mais alors comme ρ est constant sur la caractéristique, la pente $c(\rho)$ est constante, si bien que (C) est une droite ! Dans ce problème *toutes les caractéristiques sont des droites* de pente positive. Une telle droite coupe l'axe des x (conditions initiales à $t = 0$) en un point ξ où la densité vaut $\rho_0(\xi)$, et la densité garde cette même valeur partout sur la droite : Elle a donc pour équation, en posant $c(\rho_0(\xi)) = F(\xi)$:

$$x = \xi + F(\xi)t \tag{28}$$

Ceci détermine complètement la solution en tout point (x, t) : il suffit de résoudre l'équation $x = \xi + F(\xi)t$ qui donne ξ en fonction de (x, t) (ce qui revient à déterminer sur quelle caractéristique se trouve le point), on sait alors que la densité en ce point vaut $\rho_0(\xi)$.

L'analyse ci-dessus est l'exemple le plus simple de la détermination simultanée de la solution et des caractéristiques, que nous allons entreprendre

plus bas dans le cas plus complexe de la théorie en eaux peu profondes. Vu la simplicité des formules il est bon de vérifier par un calcul explicite que l'on a bien obtenu la solution de l'équation de départ. Notons $\rho_0(\xi) = f(\xi)$ et donc $\rho(x, t) = f(\xi(x, t))$, $\rho_t = f'(\xi)\xi_t$, $\rho_x = f'(\xi)\xi_x$, donc

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = f'(\xi)[\xi_t + F(\xi)\xi_x]$$

En prenant la différentielle de l'équation (28) : $dx = d\xi + tF'(\xi)d\xi + F(\xi)dt$. De plus, $d\xi = \xi_x dx + \xi_t dt$, donc $dx = (1 + tF')(\xi_x dx + \xi_t dt) + Fdt$, soit

$$dx(-1 + \xi_x(1 + tF')) + dt(F + (1 + tF')\xi_t) = 0$$

x et t sont des variables indépendantes, leurs coefficients doivent donc être séparément nuls ; on trouve ainsi

$$\xi_x = \frac{1}{1 + tF'} \quad \text{et} \quad \xi_t = -\frac{F}{1 + tF'}$$

Ainsi on a bien $\xi_t + F(\xi)\xi_x = 0$ et donc $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$.

Le diagramme des caractéristiques nous permet de discuter les effets très intéressants de la propagation dans le cas non linéaire. Supposons que l'on ait à $t = 0$ une bosse de densité, localisée. Comment se propage t'elle ? Toutes les caractéristiques issues, à $t = 0$ d'origines ξ hors de la bosse, ont une pente constante égale à c_0 . Par contre, supposant que $c(\rho)$ est une fonction croissante de ρ ($c_1 > 0$), les caractéristiques d'origine ξ dans la bosse ont une pente dx/dt plus forte, ce qui dans le diagramme (6) où x est en abscisse et t en ordonnée, se traduit par des caractéristiques plus plates. Le sommet de la bosse correspond aux caractéristiques les plus plates. Or l'équation (28) signifie physiquement que chaque partie de la bosse d'amplitude ρ se propage le long de sa propre caractéristique, c'est à dire avec sa propre vitesse $c(\rho)$. Le sommet de la bosse se propage plus vite que sa base. Si l'on intersecte le diagramme (6) par une ligne $t = C^t$ suffisamment proche de $t = 0$ on retrouve une bosse déformée où le sommet avance par rapport à la base. Pour une certaine valeur de t on entre dans la zone où les caractéristiques se recoupent. Ceci veut dire que pour (x, t) donnés il n'y a plus une seule solution ξ à l'équation (28) mais au moins deux, autrement dit il y a au moins deux valeurs de ρ possibles pour certaines valeurs de x . De fait le sommet de la bosse a dépassé sa base, et il s'agit des régions en x sous ce phénomène. Evidemment, ceci est impossible physiquement, il se forme une discontinuité, la partie haute de la bosse tombe brutalement sur la partie basse. Pour le cas des ondes de densité ou de pression, ceci s'appelle une *onde de choc*. Pour le cas des ondes de surface, il s'agit d'une vague qui se brise. Bien entendu, si

$c_1 < 0$ le même phénomène se produit, mais à l'arrière de la bosse. Nous voyons que dans le cas d'une théorie non linéaire simple comme ci-dessus, toute condition initiale localisée produit inéluctablement au bout d'un certain temps une onde de choc.

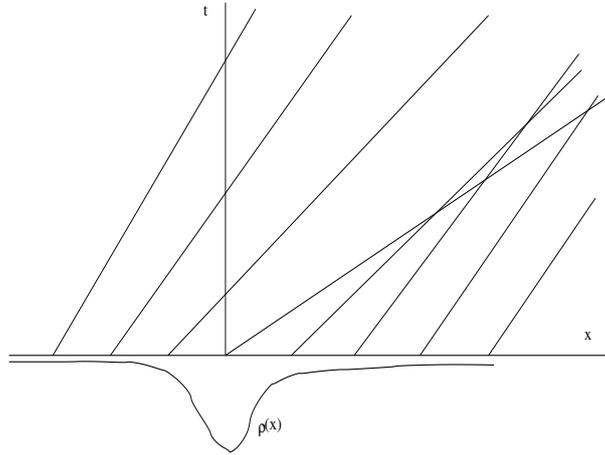


FIG. 6 – Diagramme caractéristique

6.5 Résolution des équations en eaux peu profondes.

Le système décrivant le mouvement en eau peu profonde, equation (25) peut s'écrire sous forme matricielle, comme dans l'équation (26) :

$$\begin{pmatrix} h_t \\ u_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ u_x \end{pmatrix} = 0 \quad (29)$$

On détermine les valeurs propres λ de la matrice A en résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$, ce qui donne $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$. Les vecteurs propres à gauche correspondants $(\alpha_1^{\pm}, \alpha_2^{\pm})$ sont tels que :

$$(\alpha_1^{\pm}, \alpha_2^{\pm}) \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} = \lambda_{\pm} (\alpha_1^{\pm}, \alpha_2^{\pm})$$

Les composantes des vecteurs propres sont déterminées à une constante près. Posant $\alpha_1^{\pm} = \sqrt{g}$, on trouve $\alpha_2^{\pm} = \pm\sqrt{h}$. si bien que les deux vecteurs propres sont : (\sqrt{g}, \sqrt{h}) et $(\sqrt{g}, -\sqrt{h})$.

Selon la théorie générale on multiplie l'équation (29) à gauche par les vecteurs propres ligne, ou ce qui revient au même, on multiplie les deux

lignes de l'équation (25) par les composantes de ces vecteurs propres pour ensuite sommer ces deux lignes :

$$\begin{aligned} \sqrt{g}h_t \pm \sqrt{h}u_t + (\sqrt{g}u \pm \sqrt{h}g)h_x + (\sqrt{g}h \pm \sqrt{h}u)u_x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{g}(h_t + \lambda_{\pm}h_x) \pm \sqrt{h}(u_t + \lambda_{\pm}u_x) &= 0 \end{aligned}$$

Ce sont les deux contraintes sur les deux caractéristiques (C_{\pm}) d'équation $dx/dt = \lambda_{\pm}$. Il se trouve que ces contraintes possèdent un facteur intégrant évident. En effet divisant par \sqrt{h} on isole les variables u et h et on a l'identité :

$$\sqrt{\frac{g}{h}}dh \pm du = d(2\sqrt{gh} \pm u)$$

valable quels que soient les différentielles du et dh et en particulier quand il s'agit des dérivées $\partial_t + \lambda_{\pm}\partial_x$ de h et u le long des caractéristiques (C_{\pm}). C'est dire qu'il existe deux **invariants de Riemann** :

$$I_{\pm} = 2\sqrt{gh} \pm u \quad (30)$$

qui sont **constants** le long des caractéristiques correspondantes. Prosaïquement on vérifie immédiatement que l'équation $(\partial_t + \lambda_{\pm}\partial_x)I_{\pm} = 0$ se ramène aux contraintes ci-dessus. Le reste de la solution consiste à examiner la disposition géométrique du réseau des caractéristiques, et tirer parti de la constance de I_{\pm} pour calculer u et h pour toutes valeurs de (x, t) .

6.6 Le problème du bris du barrage.

Ce problème est l'exemple le plus simple où tout est exactement calculable par la méthode ci-dessus sans aucune difficulté. On suppose que pour $t = 0$ on a $h = h_0$ et $u = 0$ pour $x < 0$ et $h = u = 0$ pour $x > 0$, c'est à dire qu'on a un barrage de hauteur h_0 . A cet instant le barrage se brise et il faut déterminer la solution pour $t > 0$. Les (C_-) ont une pente négative ou positive et les (C_+) une pente positive toujours plus grande que celle des (C_-). La famille des (C_+) coupe l'axe des x sur $x < 0$ et donc l'invariant de Riemann $I_+ = 2\sqrt{gh} + u$ vaut la valeur *constante* $2\sqrt{gh_0}$. Elle intersecte la famille des (C_-) du fait de la supériorité de ses pentes. Comme $2\sqrt{gh} - u$ est constant sur (C_-) à la fois u et h y sont constants, donc aussi λ_- , si bien que les (C_-) sont des droites.

En particulier pour les caractéristiques (C_-) qui coupent $x < 0$ on aussi $I_- = 2\sqrt{gh_0}$, ce qui impose $h = h_0$ et $u = 0$ dans toute cette zone, et aussi que les (C_+) y sont rectilignes. La dernière (C_-) de ce type est issue de $z = 0$

et a donc l'équation $x = -\sqrt{gh_0}t$. Nous apprenons que pour $x \leq -\sqrt{gh_0}t$ on a toujours $h = h_0$ et $u = 0$, c'est à dire que la perturbation due au bris de barrage recule avec la vitesse maximale $\sqrt{gh_0}$ vers les $x < 0$.

Les autres caractéristiques (C_-) forment un "éventail" de droites issues de $x = 0, t = 0$, bordées par deux droites $x = -\sqrt{gh_0}t$ et $x = +ct$ où c est la célérité avec laquelle le front d'onde avance vers $x > 0$. Pour $x > ct$ on n'a pas d'eau, $h = 0$, et juste sur le front d'onde on a $u = c$ et $h = 0$. Le front d'onde appartient donc à la dernière caractéristique (C_-) de pente c et d'invariant $I_- = -c$. Un point du front d'onde appartient aussi à la dernière caractéristique (C_+) issue de $x = 0$ et d'invariant $I_+ = 2\sqrt{gh} + u = c = 2\sqrt{gh_0}$, ce qui permet d'identifier $c = 2\sqrt{gh_0}$. Le front d'onde avance deux fois plus vite vers les $x > 0$ qu'il ne recule vers les $x < 0$.

Les droites (C_-) de l'éventail ont l'équation $x = \lambda t$ avec une pente λ telle que $-\sqrt{gh_0} \leq \lambda \leq 2\sqrt{gh_0}$. Cette pente vaut aussi $u - \sqrt{gh}$ et d'autre part on est nécessairement sur une (C_+) donc $u + 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gh_0}$. Éliminant u entre ces deux équations on obtient la forme de h comme fonction de x à t fixé, précisément :

$$h = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t} \right)^2$$

autrement dit la surface libre est une parabole variant de $h = h_0$ au front arrière à $h = 0$ au front avant. De plus le sommet de la parabole est sur le front avant, c'est à dire que la tangente est verticale en $x = 2\sqrt{gh_0}t$. De même on peut éliminer h pour obtenir :

$$u = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_0} + \frac{x}{t} \right)$$

ce qui évolue de $u = 0$ au front arrière à $u = 2\sqrt{gh_0}$ au front avant comme il convient, en passant par la valeur curieuse $u = \frac{2}{3}\sqrt{gh_0}$ à l'emplacement du barrage $x = 0$.

Dans la zone où les (C_+) intersectent l'éventail elles s'incurvent nécessairement. On peut les déterminer : leur pente vaut $u + \sqrt{gh} = 4/3\sqrt{gh_0} + x/(3t) = dx/dt$. Cette équation s'intègre en $x = 2\sqrt{gh_0}t + Ct^{1/3}$, où C est la constante d'intégration. On voit que les (C_+) qui sont des droites de pente $\sqrt{gh_0}$ pour x assez petit voient leur pente augmenter jusqu'à devenir parallèles à la caractéristique du front d'onde en traversant l'éventail.

Il est remarquable que dans ce problème aucune discontinuité n'est générée, la seule curiosité étant l'existence d'un éventail de caractéristiques (C_-) toutes issues de l'événement "bris du barrage". Il est aussi remarquable que l'on obtienne la solution complète sans aucun calcul, simplement en analysant la structure du diagramme de caractéristiques, voir le schéma (7).

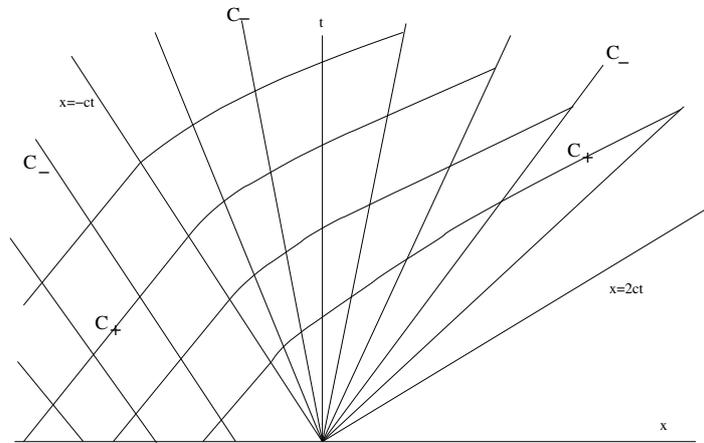


FIG. 7 – Courbes caractéristiques.

6.7 La propagation d'un paquet d'ondes.

Nous allons maintenant décrire la propagation d'un paquet d'ondes localisé, un "pulse" dans la théorie en eau peu profonde, ce qui est le principal objet de cette section. Nous supposons donc que à $t = 0$ l'eau a une hauteur constante $h = h_0$ sauf dans une région $-X < x < +X$ où $h = h_0 + \eta(x)$. En outre nous supposons que le pulse *se propage de la gauche vers la droite*. Comment exprimer cela ? Un point (x, t) loin de la perturbation appartient

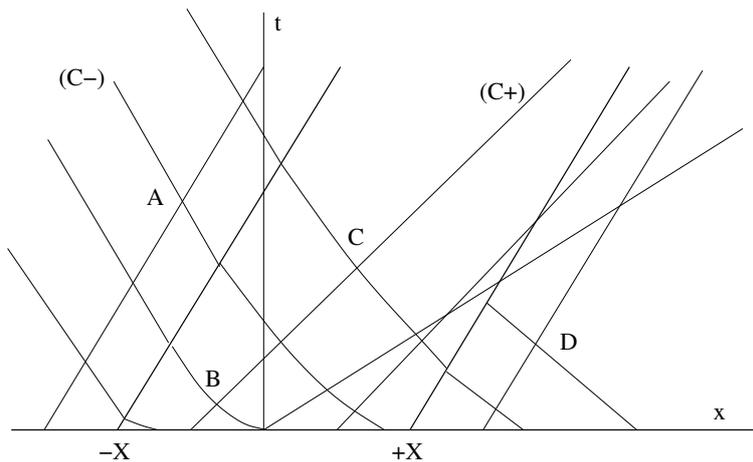


FIG. 8 – Courbes caractéristiques.

à deux caractéristiques (C_{\pm}) rectilignes de pentes respectives $\pm\sqrt{gh_0}$, et

d'invariants de Riemann $2\sqrt{gh_0}$, c'est à dire qu'en un tel point $h = h_0$ et $u = 0$. C'est pourquoi nous avons dessiné les deux lignes $x = \pm X + t\sqrt{gh_0}$ qui sont deux caractéristiques rectilignes (C_+) issues de points où $h = h_0$ et qui donc se propagent avec la célérité $c_0 = \sqrt{gh_0}$. Il est possible que des points issus de $-X < x < +X$ se propagent plus vite que c_0 et donc dépassent la ligne $x = X + c_0t$ comme on le voit sur la figure (8) mais supposer que le pulse se déplace de gauche à droite c'est supposer que tous les points tels que A, à gauche de $x = -X + c_0t$ ne sont pas atteints par la perturbation et que l'on y a donc $u = 0$ et $h = h_0$. C'est cette hypothèse qui fixe la solution suivante.

Elle implique que toute caractéristique (C_-) passe par un point tel que A de la figure et donc possède un invariant de Riemann $I_- = 2\sqrt{gh_0}$. Par la suite, deux choses peuvent se produire : ou bien (C_-) passe par un point tel que B et vient toucher l'axe des x en un point ξ , et dans ce cas $I_- = 2\sqrt{gh(\xi)} - u(\xi)$, ou bien elle traverse complètement la zone perturbée en se courbant, passe par les points tels que C, et redevient une caractéristique rectiligne de pente $-c_0$ qui coupe l'axe des x au delà de X ce qui est conforme avec la valeur $2c_0$ de son invariant de Riemann. Finalement en un point tel que D en avant de la zone perturbée on a aussi $u = 0$ et $h = h_0$ et des caractéristiques rectilignes.

Notant que tout ξ de $[-X, X]$ appartient à une (C_-), on voit que notre hypothèse de propagation de gauche à droite fixe en fait la valeur de la vitesse $u(\xi)$ en fonction de la hauteur du pulse $h(\xi)$. On va noter $H(\xi)$ la fonction qui décrit la condition initiale, c'est à dire la valeur de $h(\xi)$ pour $t = 0$. On peut fixer $H(\xi)$ de façon arbitraire, mais alors $u(\xi)$ est complètement déterminé. Evidemment ceci ne serait pas vrai si supposait une propagation à la fois à gauche et à droite, même dans la théorie linéaire. En principe l'équation de propagation est du second ordre et on peut fixer arbitrairement $h(\xi)$ et $u(\xi)$. Supposer un mouvement de gauche à droite c'est prendre une réduction de l'équation à une équation du premier ordre, similaire à l'équation $\rho_t + c(\rho)\rho_x$ que l'on a étudiée plus haut, et de ce fait $u(\xi)$ n'est plus une donnée indépendante. Finalement, $I_- = 2\sqrt{gh(\xi)} - u(\xi) = 2\sqrt{gh_0}$ nous donne la valeur de la vitesse :

$$u(\xi) = 2(\sqrt{gH(\xi)} - \sqrt{gh_0})$$

Dans la section suivante, pour introduire l'équation de Korteweg-de Vries qui est une équation du premier ordre décrivant un mouvement de gauche à droite, on se servira précisément de cette détermination de la vitesse pour réduire le système de la théorie en eau peu profonde.

Il est maintenant aisé de résoudre complètement le système. Les caractéristiques (C_+) issues de $\xi \in [-X, X]$ ont un invariant de Riemann

$I_+ = 2\sqrt{gH(\xi)} + u(\xi) = 2\sqrt{gh} + u$ et coupent les (C_-) d'invariants de Riemann $I_- = 2\sqrt{gh_0} = 2\sqrt{gh} - u$ constants en des points tels que B et C. Il en résulte que u et h sont **constants** sur ces caractéristiques (C_+) donc les pentes $\lambda_+ = u + \sqrt{gh}$ sont aussi constantes et **toutes** les (C_+) sont rectilignes. Puisque u et h sont constantes, on a $h = H(\xi)$ et $u = 2(\sqrt{gH(\xi)} - \sqrt{gh_0})$. Finalement $\lambda_+ = u + \sqrt{gH(\xi)} = 3\sqrt{gH(\xi)} - 2\sqrt{gh_0}$, et l'équation de (C_+) est $x = \xi + \lambda_+t$, ce qui détermine implicitement ξ comme fonction de (x, t) . On peut aussi voir comment se courbent les (C_-) en des points tels que B. En effet on y a $\lambda_- = u - \sqrt{gh} = \sqrt{gH(\xi)} - 2\sqrt{gh_0}$ à comparer avec la pente non perturbée $\lambda_- = -\sqrt{gh_0}$. On voit que la pente *augmente* de la quantité $\sqrt{gH(\xi)} - \sqrt{gh_0} > 0$ donc les (C_-) se courbent vers le haut, et si elles sortent de la zone perturbée c'est avec une translation verticale. Résumons nos résultats :

$$\begin{cases} h = H(\xi) \\ u = 2\sqrt{gH(\xi)} - 2\sqrt{gh_0} \\ x = \xi + [3\sqrt{gH(\xi)} - 2\sqrt{gh_0}]t \end{cases} \quad (31)$$

Physiquement, il faut noter que la propagation produit, comme on le voit sur la figure (8) le même genre de phénomène que dans le cas des ondes de densité. Les caractéristiques (C_+) issues des ξ où $H(\xi)$ est grand ont une pente plus élevée que les caractéristiques où $H(\xi)$ est moindre et les rattrapent. Il en résulte que l'équation $x = \xi + \lambda_+t$ ne détermine plus uniquement ξ connaissant x (à t donné) c'est à dire qu'il y a plusieurs points initiaux ξ correspondant à des hauteurs $H(\xi)$ différentes pour la même position x . Intuitivement l'équation $x = \xi + \lambda_+t$ signifie que la partie de la vague de hauteur $H(\xi)$ s'est propagée à la vitesse λ_+ **le long de la caractéristique** (C_+) et sans aucune modification de sa hauteur. Le haut de la vague se déplace en gardant sa hauteur, mais plus rapidement que le bas. Rapidement il rattrape le bas qui était parti avec un avantage, et il existe plusieurs solutions à l'équation $x = \xi + \lambda_+t$. Evidemment ceci est impossible, la vague se brise.

Nous pouvons maintenant tirer quelques conclusions de l'étude de la théorie en eau peu profonde. D'une part les caractéristiques (C_+) sont en fait des lignes selon lesquelles se propagent des perturbations de gauche à droite, et de même les (C_-) sont des lignes selon lesquelles se propagent les perturbations de droite à gauche. Dans cette théorie, il n'y a pas de dispersion et atténuation du paquet d'onde, comme dans la théorie linéaire. En fait la hauteur reste constante sur chaque caractéristique. Par contre le pulse se déforme inévitablement ce qui conduit à des singularités. Le fait expérimental que toutes les vagues ne se brisent pas prouve que la théorie en eau peu profonde n'est pas satisfaisante. Le but de la section suivante est de montrer

qu'on peut résoudre ce problème, mais la solution est pire que le mal, parce que dans la théorie de Korteweg–de Vries, aucune vague ne se brise !

7 Solitons.

Nous présentons d'abord une justification de l'équation de Korteweg–de Vries, suivie par la présentation de la solution à un soliton.

7.1 Equation de Korteweg – de Vries.

En 1838, J. Scott Russel observe dans un canal la propagation sans déformation d'une onde avec une vitesse dépendant de son amplitude : le soliton. Mais ce n'est qu'en 1895 que les Néerlandais D. Korteweg et G. de Vries expliquent l'existence de cette onde solitaire par la théorie : une équation traduisant la non-linéarité et le phénomène de dispersion.

Nous partons de la théorie en eau peu profonde, dont nous allons extraire les effets non linéaires à l'ordre le plus bas, et que nous allons réduire à une équation décrivant purement une propagation de gauche à droite. Comme nous l'avons vu, dans ce cas la vitesse initiale est déterminée voir l'équation (31) :

$$u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0} \geq 0, \quad h = h_0 + \eta \geq h$$

La première des équations (25) s'écrit :

$$h_t = \eta_t + u\eta_x + (h_0 + \eta)u_x = 0$$

Utilisant notre expression de la vitesse et en particulier $u_x = \frac{g\eta_x}{\sqrt{g(h_0 + \eta)}}$ nous pouvons complètement éliminer u et obtenir une équation du premier ordre pour η uniquement, décrivant la propagation de droite à gauche :

$$\eta_t + [3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}]\eta_x = 0 \quad (32)$$

Notons que cette équation est très similaire à l'équation des ondes de densité, $\rho_t + c\rho_x = 0$, avec une célérité c qui n'est autre que la pente λ_+ des caractéristiques (C_+) que nous avons bien identifié à la vitesse de propagation des perturbations de droite à gauche. Cette équation est la réduction des équations en eau peu profonde que nous recherchions. Il reste à la simplifier en gardant l'effet non linéaire de dépendance de la célérité en fonction de

l'amplitude au plus bas ordre. Pour celà on développe la racine carrée pour η petit :

$$3\sqrt{g(h_0 - \eta)} = 3\sqrt{gh_0}\left(1 + \frac{\eta}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 3c_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\eta}{h_0}\right)$$

On obtient la forme simplifiée de l'équation (32) :

$$\eta_t + c_0\left(1 - \frac{3\eta}{2h_0}\right)\eta_x = 0 \quad (33)$$

Nous voulons maintenant modifier cette équation pour y introduire les effets de la dispersion à l'ordre le plus bas. Rappelons que nous sommes toujours dans l'hypothèse d'une eau peu profonde, donc d'une longueur d'onde grande par rapport à h_0 . Nous avons vu que, dans ce cas, la théorie linéaire prédit une célérité $c_0 = \sqrt{gh_0}$ très peu dépendante de la longueur d'onde. En fait la relation de dispersion est $\omega = c_0k - \gamma k^3$, valable pour k petit, c'est à dire λ grand. Une équation *linéaire* décrivant un mouvement de droite à gauche avec cette loi de dispersion est :

$$\eta_t + c_0\eta_x + \gamma\eta_{xxx} = 0 \quad (34)$$

où l'on rappelle que l'on avait $\gamma = c_0h_0^2/6$, ce qui veut dire que pour la vitesse de groupe, $v_g = d\omega/dk = c_0(1 - (kh_0)^2/3)$, le terme correctif est une très petite correction dispersive si $\lambda \gg h_0$.

Il est donc naturel de modifier l'équation linéaire simple⁷ $\eta_t + c_0\eta_x = 0$ en y ajoutant, d'une part la petite correction non linéaire $-(3c_0\eta\eta_x)/(2h_0)$ (petite si $\eta/h_0 \ll 1$) et d'autre part la petite correction dispersive $\gamma\eta_{xxx}$. On obtient ainsi par combinaison des équations (33) et (34) l'équation de Korteweg-de Vries :

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3\eta}{2h_0}\right)\eta_x + \gamma\eta_{xxx} = 0 \quad (35)$$

Cette équation admet une solution se propageant sans déformation, comme nous allons le voir, et en fait se trouve être une équation appartenant à toute une hiérarchie d'équations dotées d'une structure extrêmement riche, sujet que nous n'aborderons pas.

⁷On peut douter de la légitimité d'introduire des approximations dans une équation, notamment quand le plus petit terme non linéaire peut provoquer des singularités dramatiques, ainsi que nous l'avons vu. D'autre part, il existe des théorèmes sur le comportement des solutions d'équations différentielles analytiques par rapport à une variation analytique des paramètres, dont la conséquence pour notre problème est de rejeter les singularités au loin, et qui plus est toute la démarche des physiciens consiste bien à introduire des équations approximatives pour représenter la complexité du phénomène réel.

7.2 Le soliton.

On se limitera à trouver la solution de cette équation pour un unique soliton se propageant à une vitesse U . Nous allons voir que U peut être choisi arbitrairement, mais que la hauteur du soliton en dépend, deux propriétés bien différentes de celles des solutions traditionnelles.

On pose $\eta = h_0 \zeta(X)$ avec $X = x - Ut$. On a donc :

$$\eta_t = -h_0 U \zeta'(X)$$

$$\eta_x = h_0 \zeta'(X)$$

$$\eta_{xxx} = h_0 \zeta'''(X)$$

Ce qui nous donne, en reportant dans (35), avec $\gamma = \frac{c_0}{6} h_0^2$:

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta''' + \frac{3}{2} \zeta \zeta' - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta' = 0$$

En intégrant :

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta'' + \frac{3}{4} \zeta^2 - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta + G = 0$$

où G est une constante d'intégration. Puis en multipliant par ζ' , pour ensuite intégrer et multiplier par 4 :

$$\frac{1}{3} h_0^2 \zeta'^2 + \zeta^3 - 2 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta^2 + 4G\zeta + H = 0$$

où H est une deuxième constante d'intégration. Cette équation a exactement la même forme qu'un problème de dynamique en dimension 1, et se résout donc de même. On isole $\zeta' \left(= \frac{d\zeta}{dX} \right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} h_0 \frac{d\zeta}{dX} = \sqrt{2 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta^2 - 4G\zeta - H - \zeta^3}$$

On en déduit :

$$X = \int \frac{\frac{h_0}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta^2 - 4G\zeta - H - \zeta^3}} d\zeta \quad (36)$$

Cette intégrale est une intégrale elliptique, elle définit ζ comme une fonction elliptique de X .

En fait nous ne sommes pas intéressés par la solution générale, mais par une solution qui représente un pulse⁸ et donc telle que ζ s'annule pour $x \rightarrow \pm\infty$. Si l'on tient compte de cette condition dans les deux intégrations ci-dessus, nous voyons que les constantes d'intégration G et H sont nulles. Mais alors ζ^2 se factorise sous le radical, qui passe du degré 3 au degré 1, si bien que l'intégrale cesse d'être elliptique pour devenir trigonométrique. Posant $\alpha = 2(U/c_0 - 1)$, l'intégrale (36) devient :

$$X = \int \frac{h_0}{\zeta \sqrt{3(\alpha - \zeta)}} d\zeta$$

Cette intégrale est élémentaire, et on peut inverser $\zeta = \zeta(X)$:

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3\alpha}{4h_0^2}} X \right) = \frac{\alpha}{\cosh^2 \sqrt{\frac{3\alpha}{4h_0^2}} X} \quad (37)$$

Ce qui nous donne en revenant aux notations initiales :

$$\eta(x, t) = \frac{2h_0 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right)}{\cosh^2 \left[\sqrt{\frac{3 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right)}{2h_0^2}} (x - Ut) \right]} \quad (38)$$

Comme nous l'avions annoncé ceci représente une solution localisée, se déplaçant à la vitesse arbitraire U mais dont la hauteur maximale η_0 (obtenue quand $x = Ut$) dépend de U selon la formule :

$$\eta_0 = 2h_0 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right)$$

Notons aussi que la largeur du soliton dépend de U via le facteur d'échelle dans le \cosh^2 , de sorte que les solitons plus petits sont aussi plus larges, et enfin que les équations impliquent que $U > c_0$, mais que U/c_0 ne peut être beaucoup plus grand que 1, sinon η serait du même ordre que h_0 .

L'équation de Korteweg–de Vries étant non linéaire, il est hors de question de présenter des solutions à n solitons comme combinaison des solutions à un soliton que nous avons présentées. Cependant, on peut produire des solutions exactes, qui dans la limite $t \rightarrow \pm\infty$ se présentent sous la forme de n solitons largement séparés et se déplaçant chacun avec sa propre vitesse

⁸Pour les applications aux tsunamis, aux solitons optiques, etc. voir le site web : <http://people.deas.harvard.edu/jones/solitons/solitons.html>

U_i , et donc chacun d'entre eux ayant sa propre hauteur déduite de U_i par la formule ci-dessus. Dans un régime de temps intermédiaires, la solution prend une forme complexe représentant "l'interaction des solitons".

Ainsi donc dans une seule solution **exacte** se trouvent décrits non seulement plusieurs solitons mais aussi toute l'histoire de leur interaction. Il se trouve que les différents solitons présents dans les conditions initiales ressortent inchangés en taille et vitesse dans l'état final, le seul effet de l'interaction étant d'introduire des déphasages, c'est à dire des retards. Ci-dessous nous présentons l'image d'une collision de deux solitons, où l'on voit le plus grand rattraper le plus petit, une interaction se produire, et les deux solitons émerger inchangés. Ces propriétés surprenantes sont dues à l'intégrabilité de l'équation de Korteweg–de Vries, c'est à dire le fait qu'il existe une infinité de quantités conservées dans le mouvement, ce qui contraint les solitons à garder leurs propriétés individuelles.

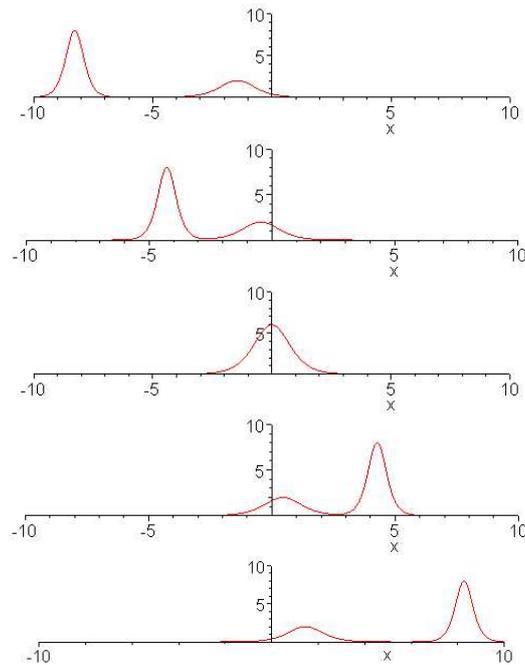


FIG. 9 – Propagation de deux solitons.