UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE



THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité: PHYSIQUE THEORIQUE

présentée par

Paul ZINN-JUSTIN

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet:

QUELQUES APPLICATIONS DE L'ANSATZ DE BETHE

Soutenance le 8 juillet 1998 devant le jury composé de:

- M. ANDREI Natan
- M. BREZIN Edouard
- M. DE VEGA Hector (rapporteur)
- M. GERVAIS Jean-Loup
- M. KAZAKOV Vladimir (directeur)
- M. KOSTOV Ivan (rapporteur)
- M. ZUBER Jean-Bernard

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien mon travail de thèse.

Je souhaite remercier tout d'abord les membres du jury: les rapporteurs H. De Vega et I. Kostov, pour avoir accepté cette tâche ingrate, et pour un grand nombre de passionnantes discussions, sur les modèles intégrables et sur les modèles de matrices respectivement; N. Andrei, pour avoir fait le déplacement depuis l'autre côté de l'Atlantique, et pour m'avoir expliqué la physique du modèle de Kondo lors de notre fructueuse collaboration; J-B. Zuber et E. Brézin, avec lesquels j'ai eu des rapports aussi amicaux qu'instructifs; J.L. Gervais, qui m'a conseillé dans mon travail à de nombreuses reprises; et V. Kazakov, mon directeur de thèse, qui a accepté de diriger mes recherches, et qui m'a prodigué des conseils utiles.

Je remercie le Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure qui m'a accueilli pendant ces trois ans: aussi bien les chercheurs avec qui j'ai eu des contacts enrichissants, en particulier A. Georges, B. Julia, N. Sourlas et les thésards D. Carpentier, P. Chose, O. Parcollet, S. Silva, T. Wynter, que les secrétaires M-C. Launay, M. Leliepvre et N. Ribet pour leur aide inestimable.

Je remercie également les chercheurs du LPTHE (Jussieu) et du SPhT (Saclay) qui m'ont aidé dans mon travail de recherche, parmi lesquels O. Babelon, D. Bernard, F. Smirnov et bien sûr J. Zinn-Justin; ainsi que les nombreuses personnes que j'ai rencontrées lors de mes déplacements, en particulier les chercheurs du Yukawa Institute à Kyoto pour leur accueil, et S. Hikami qui m'a invité à l'université de Tokyo.

Enfin, je remercie mon entourage qui m'a soutenu tout au long de mon travail de thèse.

RESUME: Quelques applications de l'Ansatz de Bethe

L'Ansatz de Bethe est une méthode utilisée dans les modèles quantiques intégrables pour une résolution explicite de ceux-ci. Cette méthode est exposée ici dans un cadre général, valable pour les chaînes de spin quantiques 1D, les modèles statistiques sur réseau (du type modèles de vertex) 2D et les théories des champs relativistes à 1 dimension d'espace et 1 dimension de temps. Le lien avec les groupes quantiques est explicité. Plusieurs applications sont alors présentées. Le calcul des corrections de taille finie est effectué par deux méthodes: les Equations Non-Linéaires Intégrales, que l'on applique à l'étude des états du modèle de Toda affine en constante de couplage imaginaire sur un espace compactifié, et leur interpolation entre la région de haute énergie (ultra-violette) et de basse énergie (infra-rouge); et les Equations d'Ansatz de Bethe Thermodynamique, ainsi que les Equations de Fusion qui leur sont associées, dont on se sert pour déterminer la thermodynamique du modèle de Kondo multi-canal généralisé. Ce dernier est ensuite étudié plus en détail, toujours par l'Ansatz de Bethe et les groupes quantiques, de façon à caractériser le spectre des excitations de basse énergie.

 \star mots-clés: modèles intégrables, diffusion factorisée, Ansatz de Bethe, groupes quantiques, effet Kondo.

ABSTRACT: A few applications of the Bethe Ansatz

The Bethe Ansatz is a method that is used in quantum integrable models in order to solve them explicitly. This method is explained here in a general framework, which applies to 1D quantum spin chains, 2D statistical lattice models (vertex models) and relativistic field theories with 1 space dimension and 1 time dimension. The connection with quantum groups is expounded. Several applications are then presented. Finite size corrections are calculated via two methods: The Non-Linear Integral Equations, which are applied to the study of the states of the affine Toda model with imaginary coupling, and their interpolation between the high energy (ultra-violet) and low energy (infra-red) regions; and the Thermodynamic Bethe Ansatz Equations, along with the associated Fusion Equations, which are used to determine the thermodynamic properties of the generalized multi-channel Kondo model. The latter is then studied in more detail, still using the Bethe Ansatz and quantum groups, so as to characterize the spectrum of the low energy excitations.

 \star keywords: integrable models, factorized scattering, Bethe Ansatz, quantum groups, Kondo effect.

Table des matières

Introduction	1
1. L'Ansatz de Bethe: la chaîne XXX	7
1.1. L'Ansatz de Bethe Algébrique	7
1.1.1. La chaîne de spins $1/2$ XXX \ldots	7
1.1.2. Le modèle de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) $SU(2)$	12
1.1.3. Modèles statistiques sur réseau: modèles de vertex	16
1.1.4. Diagonalisation de la matrice de transfert inhomogène 1	18
1.1.5. L'état fondamental et les premiers états excités	22
1.2. BAE continues	25
1.2.1. Diffusion diagonale $\ldots \ldots 2$	25
1.2.2. Dualité particule-trou	27
1.2.3. Chaîne XXX et hypothèse de corde	29
1.2.4. BAE continues de la chaîne XXX	30
1.2.5. BAE nues/BAE physiques: les excitations isotopiques $SU(2)$ 3	34
2. Structure des Equations d'Ansatz de Bethe	39
2.1. Généralités sur les groupes quantiques	39
2.1.1. Quelques définitions	10
2.1.2. Algèbres de Lie simples et leur déformation; exemple de $\mathfrak{sl}(2)$ 4	12
2.1.3. Yangiens, groupes quantiques affines et matrices $R(\lambda)$	16
2.1.4. Le groupe quantique affine $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ et ses représentations de niveau 0 . 4	18
2.2. Anisotropie	51
2.2.1. La chaîne XXZ $\ldots \ldots \ldots$	51
2.2.2. Troncation de groupe quantique	56
2.2.3. BAE nues/BAE physiques: cas anisotrope	58
2.3. Spin plus élevé et fusion	31
2.3.1. La procédure de fusion $\ldots \ldots \ldots$	52
2.3.2. Chaîne de spins XXX et modèle NJL fusionnés	36
2.3.3. BAE nues/BAE physiques: spin supérieur	38
2.3.4. Fusion mixte $\ldots \ldots $	74
2.3.5. Fusion et anisotropie $\ldots \ldots $	75
2.4. Rang plus élevé	75
2.4.1. Modèles invariants $SU(N)$	75
2.4.2. Rang plus élevé et anisotropie	79
2.4.3. BAE nues/BAE physiques: rang supérieur	30
2.4.4. Dualité rang-niveau	32
2.5. BAE physiques générales: comparaison $SU(2)/SU(N)$	33
3. Corrections de taille finie et TBA	37
3.1. Equations d'Ansatz de Bethe Thermodynamiques (TBA)	37
3.1.1. Principe	37
3.1.2. Application aux modèles à diffusion non-diagonale	38
3.1.3. Théories conformes et calculs de dilogarithme	39
3.1.4. Limite ultraviolette des théories massives et découplage des chiralités $\ .$. 9) 4
3.1.5. Les flots non-massifs $\dots \dots \dots$) 7

3.2. Y-système et équations de fusion	. 98
3.3. Une alternative aux TBA: les Equation Non-Linéaires Intégrales (NLIE) $$.	102
3.3.1. Les NLIE de Toda affine en couplage imaginaire	103
3.3.2. Limite ultra-violette et poids conformes	105
3.3.3. Retour sur le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$	108
4. Les modèles σ principal, de Wess–Zumino–Witten et de Kondo	117
4.1. Les modèles σ principal et WZW $\ldots \ldots \ldots$	117
4.1.1. Equations d'Ansatz de Bethe	119
4.1.2. TBA, limites ultra-violette et infra-rouge	121
4.1.3. Spectre et matrices S du modèle σ principal $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	123
4.1.4. Les excitations du modèle de WZW	124
4.1.5. Calculs en champ magnétique	127
4.2. Limite de grand N des TBA \ldots	129
4.3. Le modèle de Kondo généralisé	132
4.3.1. BAE physiques et spectre des excitations dans Kondo	135
4.3.2. TBA et interprétation de l'entropie à température nulle	138
4.3.3. Etude en champ magnétique	140
4.3.4. Lien avec l'approche de théorie conforme de Kondo	145
Conclusion	149
Appendice	153
Article I	153
Article II	163
Article III	193
Article IV	235
Article V	269
Références	293

Introduction

Pendant les trois ans qu'a duré mon travail de thèse, j'ai consacré un temps à peu près égal à deux sujets: les modèles de matrice et les modèles intégrables. Nous allons dans cette introduction expliquer les enjeux de ces deux thèmes de recherche; par la suite, il ne sera plus question que de modèles intégrables, pour des raisons qui vont être exposées ci-dessous. Dans tout ce qui suit, les chiffres romains désignent les articles que j'ai écrits et qui sont placés en appendice; ainsi, [IV.3.1] désigne la section 3.1 de l'article IV, tandis que (III.2.7) désigne l'équation (2.7) de l'article III. Nous ne donnerons aucune référence dans cette introduction, celles-ci étant contenues dans les articles et/ou dans le texte de la thèse.

Les modèles de matrices ont de multiples applications physiques: gravitation quantique bidimensionnelle, statistique des membranes, physique des systèmes désordonnés. Le point commun de ces différents domaines est la possibillité de se ramener au calcul de la fonction de partition – ou de fonctions de corrélations d'observables – de modèles dont les champs sont des matrices $N \times N$, où la taille N est généralement supposée grande. Dans les cas les plus simples, le calcul est effectué en se ramenant à un point de col sur les valeurs propres des matrices. Je me suis pour ma part intéressé à un certain nombre de méthodes mathématiques pour traiter des cas plus compliqués: développement en caractères, points de col non-triviaux, problèmes d'inversion fonctionnelle, etc. J'ai appliqué certaines de ces méthodes dans les articles [I,II,V], que je vais maintenant brièvement présenter.

Le problème qui est à la base de [I,II] est le suivant: en physique nucléaire et en physique des systèmes désordonnés, on représente les Hamiltoniens de systèmes complexes ou désordonnés par des matrices aléatoires de grande taille. On s'intéresse alors à la statistique des niveaux (valeurs propres des matrices). Une donnée *a priori* est la loi de probabilité des matrices: de celle-ci dépendent évidemment les propriétés statistiques des niveaux. Ainsi, si le Hamiltonien possède une symétrie, de telle sorte qu'on peut le diagonaliser par blocs dans les différentes représentations de cette symétrie, alors les valeurs propres appartenant à des représentations distinctes seront totalement incorrélées. A l'opposé, pour une mesure raisonnablement régulière sur l'espace des matrices, des arguments élémentaires (déterminant de Van Der Monde dans la mesure exprimée en termes des valeurs propres) montrent que les différents niveaux ont tendance à *se repousser*. Il est donc essentiel de comprendre jusqu'à quel point les propriétés statistiques des niveaux sont affectées par le choix de la mesure. On recherche en particulier des *classes*

d'universalité de mesures pour lesquelles, dans la limite de taille infinie des matrices, les corrélations entre valeurs propres acquièrent la même forme.

Il existe une certaine classe de modèles pour lesquels les fonctions de corrélation des valeurs propres se factorisent sous forme de déterminant (Eq. (I.1.2)); dans ce cas, l'analyse des corrélations est grandement facilitée, et on a en particulier accès à la fonction d'espacement des niveaux, qui est l'une des principales quantités physiques recherchées. Dans [I], il est prouvé que pour une classe de modèles assez large, une telle formule de déterminant existe. Dans [II] est développée une nouvelle méthode pour exprimer le noyau qui apparaît dans la formule de déterminant, à travers des équations aux dérivées partielles qu'il satisfait. On parvient alors à démontrer *l'universalité à courte distance* de l'espacement des niveaux (courte distance voulant dire un espacement de l'ordre de 1/N, N taille de la matrice). Les appendices de [II] contiennent quelques résultats complémentaires obtenus par des méthodes similaires, dont une démonstration élémentaire de formules de développements en caractères. Les deux articles [I,II] s'autosuffisent, et c'est pourquoi j'ai choisi de ne plus parler de cette partie de mon travail dans la suite de cette thèse.

J'ai également appliqué des techniques assez proches, en particulier le développement en caractères déjà évoqué dans [II], dans mon dernier travail sur le modèle à deux matrices avec terme en ABAB [V]. Ce modèle, de par son développement en diagrammes de Feynmann, est en fait un modèle de surfaces discrétisées (soit encore de gravité quantique bidimensionnelle), sur lesquelles on dessine des boucles de deux couleurs (qui forment la matière couplée à la gravité). L'article, tel qu'il est présenté dans l'appendice, est encore au stade de brouillon, mais il montre que ce nouveau modèle de possède des propriétés intéressantes (transition de phase, point critique c = 1...). Etant donné que le travail, au moment où j'ai écrit ce mémoire de thèse, n'était pas encore terminé, il n'en sera plus question non plus dans ce qui suit.

Passons donc au deuxième sujet, les modèles intégrables, que j'étudie depuis environ deux ans. Je me suis plus précisément intéressé à un certain nombre de théories des champs à deux dimensions, qui s'avèrent être intégrables. Qu'entend-on par là? La définition classique d'intégrabilité pour un système qui possède un nombre fini de degrés de liberté suggère qu'une telle théorie doit posséder une infinité de quantités conservées qui commutent entre elles; on impose généralement à celles-ci une condition de localité appropriée (sur des états asymptotiques composés de particules éloignées les unes des autres, ces quantités se décomposent en somme de termes correspondant à chaque particule). Ces lois de conservation ont pour conséquence que la cinématique des théories intégrables est extrêmement contrainte; c'est là qu'intervient de manière cruciale le fait que l'on se place à 2 dimensions. On trouve les propriétés suivantes: a) Il y a conservation du nombre de particules, c'est-à-dire plus précisément que le nombre de particules d'une masse donnée est fixe, les particules de même masse étant interchangeables¹. b) Il y a diffusion factorisée des particules (sans réflexion possible pour des particules de masses différentes): la diffusion d'un nombre quelconque de particules se factorise comme produit de diffusions de 2 particules; la condition de cohérence de cette factorisation est l'équation dite de Yang-Baxter, sur laquelle nous reviendrons en détail. Il existe des solutions non-triviales des équations de Yang-Baxter, c'est-à-dire correspondant à des matrices S de diffusion non-diagonale; nous utiliserons pour notre part les solutions dites rationnelles et trigonométriques.

L'existence d'une infinité de quantités conservées qui commutent entre elles s'avère n'être qu'une partie de la symétrie des modèles intégrables; en étudiant l'algèbre de Yang-Baxter associée aux équations du même nom, il s'avère que l'objet algébrique qu'il convient de considérer est ce qu'on appelle les groupes quantiques Chaque solution des équations de Yang-Baxter est naturellement reliée à un groupe quantique², qui est représenté par une algèbre d'opérateurs sur le Hilbert de la théorie.

Arrivons-en au sujet central de cette thèse: l'Ansatz de Bethe est une méthode développée originellement pour diagonaliser le Hamiltonien de chaînes de spins intégrables, et dont on verra qu'il peut également conduire, dans une limite d'échelle appropriée, à une description complète de théories quantiques des champs intégrables (spectre, matrices S, etc). L'"Ansatz", dans la formulation originelle de Bethe, consiste à supposer une certaine forme de la fonction d'onde, afin de diagonaliser le Hamiltonien. Dans cette thèse, nous ferons appel à une version plus abstraite de l'Ansatz de Bethe, nommée Ansatz de Bethe algébrique.

En comparant les deux paragraphes précédents, on se rend compte, que, pour que la procédure de diagonalisation de l'Ansatz de Bethe ait un sens, il faut que l'algèbre

¹ Pour une théorie non-intégrable, la conservation du nombre de particules n'a en général lieu que dans la limite non-relativiste $(c \to \infty)$, où la production/annihilation de particules est supprimée, et qui nous ramène à un problème de mécanique quantique non-relativiste.

 $^{^2}$ Ceci n'est strictement vrai que pour les solutions rationnelles/trigonométriques. Pour les solutions elliptiques, il faut considérer un objet mathématique un peu plus général (groupe quantique elliptique).

de symétrie du modèle ne soit pas trop grosse (sinon, il y aurait une trop grande dégénérescence du spectre). Or, les groupes quantiques associés aux solutions de Yang-Baxter qui nous intéressent (solutions avec paramètres spectraux) sont des groupes quantiques affines, c'est-à-dire intuitivement des symétries de dimension infinie. Ceci nous amène à l'une des ambiguités fondamentales de l'Ansatz de Bethe: pour résoudre un modèle intégrable, l'Ansatz de Bethe nous force à briser l'énorme symétrie sous-jacente! En pratique, on diagonalise le Hamiltonien sur un espace compactifié de longueur finie, alors que les groupes quantiques (affines) ne sont typiquement des symétries que sur un espace non-compactifié³. La symétrie complète ne réapparaît que dans la limite de taille infinie de l'espace. On verra que l'on peut tout de même restaurer un "sous-groupe de dimension finie" de la symétrie complète sur un espace de taille finie, à condition de prendre des conditions aux bords particulières: celui-ci joue alors le rôle habituel de groupe de symétrie globale (comme SU(2) dans le modèle de spins de Heisenberg) du modèle. On verra également que cette subtilité rend difficile la comparaison entre l'Ansatz de Bethe et la Théorie Conforme (deux domaines dans lesquels la notion de groupe quantique joue un rôle-clé), du fait qu'en théorie conforme on suppose généralement l'espace compactifié (quantification radiale).

Une fois émise cette réserve, on verra que l'on peut tout de même extraire de l'Ansatz de Bethe l'essentiel de la physique des modèles intégrables connus. Nous reprendrons tout d'abord l'exemple historique de la chaîne de spins XXX (chapitre 1), et nous verrons comment une légère généralisation de ses équations d'Ansatz de Bethe décrit également d'autres théories reliées. Nous introduirons sur ce cas particulier l'une des notions-clé de cette thèse, celle d'Equations d'Ansatz de Bethe physiques. Le contenu du chapitre 1 est très classique, et nous adopterons donc une démarche synthétique et moderne (mais qui reste suivable pas-à-pas) pour le parcourir.

Le chapitre **2** contient l'essentiel de la technique nécessaire pour les applications de l'Ansatz de Bethe que l'on a en vue. Tout d'abord, une brève introduction aux groupes quantiques, qui, volontairement, ne rentre pas plus dans les détails mathématiques qu'il n'est jugé utile, permet de replacer le cas particulier étudié au chapitre **1** dans un contexte plus général; ceci permet alors d'en étudier un certain nombre de généralisations, et

³ Notons que cette approche est strictement non-historique, puisqu'on a d'abord résolu des modèles avec des conditions périodiques aux bords (où l'algèbre de Yang–Baxter suffit à assurer la solubilité), puis on s'est rendu compte que la limite thermodynamique faisait apparaître une symétrie plus grande ...

d'analyser les Equations d'Ansatz de Bethe associées. Bien qu'une partie du chapitre **2** soit constituée de résultats bien connus, la manière dont ils sont présentés et les commentaires qui les accompagnent me sont propres. En particulier, les sections 2.3.3, 2.3.4 et **2.5** contiennent des observations nouvelles. Egalement, nous nous appuierons de plus en plus, au fur et à mesure des généralisations, sur les diagrammes qui représentent les Equations d'Ansatz de Bethe: bon nombre de phénomènes physiques se "voient" sur ces diagrammes.

Nous rentrerons dans le vif du sujet avec le chapitre **3**. Celui-ci présente les Equations d'Ansatz de Bethe Thermodynamique, qui gouvernent les systèmes à température finie, puis les Equations Non-Linéaires Intégrales qui sont reliées aux systèmes sur un espace de taille finie. Nous tenterons en particulier de comprendre en détail la signification des résultats de [IV], obtenus grâce aux Equations Non-Linéaires Intégrales du modèle de Toda affine en constante de couplage imaginaire.

Enfin, nous appliquerons les techniques des chapitres 2 et 3 à l'étude du modèle σ principal SU(N) et de sa généralisation, le modèle de Wess-Zumino-Witten SU(N). Nous obtiendrons pour ce dernier un certain nombre de résultats non publiés, en particulier une description explicite des excitations de basse énergie. Nous nous intéresserons alors à un modèle intimement lié au modèle de Wess-Zumino-Witten qu'est le modèle de Kondo. En plus des résultats physiques nouveaux obtenus dans [III], nous tenterons d'élaborer une vision intuitive de la physique de basse énergie du modèle de Kondo dans ses différents régimes, et ce en particulier grâce aux Equations d'Ansatz de Bethe Physiques.

1. L'Ansatz de Bethe: la chaîne XXX

L'Ansatz de Bethe est une méthode qui permet la diagonalisation explicite du Hamiltonien de théories intégrables. Les états propres dépendent de nombres complexes appelés les paramètres spectraux; ceux-ci vérifient un système d'équations algébriques couplées, les Equations d'Ansatz de Bethe (BAE). Dans une limite thermodynamique à définir, ces équations se réduisent à des équations linéaires intégrales pour les densités de ses racines.

Les paragraphes qui suivent rappellent brièvement la solution de la chaîne de spins XXX (1.1.1) et de modèles reliés (1.1.2-1.1.3) par l'Ansatz de Bethe (1.1.4-1.1.5); puis les équations continues qui apparaissent dans la limite thermodynamique (section **1.2**). Nous expliquerons en particulier la distinction entre Equations d'Ansatz de Bethe Nues et Equations d'Ansatz de Bethe Physiques (1.2.5).

De manière générale, nous insisterons plus sur la théorie des champs continue que l'on obtient dans une limite d'échelle relativiste que sur les modèles de départ (de type "chaîne de spins"); à plusieurs endroits, tout au long de cette thèse, nous supposerons que nous avons affaire à une théorie des champs relativiste pour faire un calcul, bien que ce ne soit souvent pas indispensable.

1.1. L'Ansatz de Bethe Algébrique

Nous allons maintenant passer en revue plusieurs modèles dont la résolution passe par l'introduction d'un opérateur que nous nommerons matrice de transfert, et dont la forme la plus générale sera considérée au 1.1.3. On procèdera alors à la diagonalisation de cette matrice de transfert, grâce à l'Ansatz de Bethe Algébrique; celui-ci nous conduira aux Equations d'Ansatz de Bethe.

1.1.1. La chaîne de spins 1/2 XXX

Considérons une chaîne de spins quantiques 1/2 placés sur M sites, avec des conditions de bord périodiques. Soit $V = \mathbb{C}^2$ la représentation de spin 1/2 de SU(2), et $V_k = V$ l'espace du $k^{\text{ème}}$ spin; le Hamiltonien \mathbf{H}_{XXX} de la chaîne de spin XXX, qui agit donc sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^M V_k = V^{\otimes M}$, est

$$\mathbf{H}_{\mathrm{XXX}} = 2\sum_{k=1}^{M} \vec{\mathbf{s}}_k \cdot \vec{\mathbf{s}}_{k+1}$$
(1.1)

où les composantes s_k^A (A = 1, 2, 3) de \vec{s}_k sont les générateurs (hermitiens) de $\mathfrak{su}(2)$, agissant sur le $k^{\text{ème}}$ site. On a la condition de périodicité $\vec{s}_{k+M} \equiv \vec{s}_k$.

Le Hamiltonien \mathbf{H}_{XXX} possède une invariance évidente SU(2): $[\mathbf{H}_{XXX}, \vec{S}] = 0$ où $\vec{S} = \sum_{k=1}^{M} \vec{s}_k$. L'interaction entre spins est antiferromagnétique, donc même le vide de la théorie n'est pas trivial.

Pour diagonaliser \mathbf{H}_{XXX} , on introduit la matrice R agissant dans l'espace $V \otimes V$:

$$R(\lambda) = \frac{\lambda - i\mathcal{P}}{\lambda - i} \tag{1.2}$$

où \mathcal{P} permute les deux facteurs du produit tensoriel $V \otimes V$, et λ est un nombre complexe (le *paramètre spectral*). Nous représenterons R par une intersection (figure 1).



Fig. 1: La matrice $R(\lambda)$. Le paramètre λ doit être considéré comme la différence des paramètres spectraux des deux lignes qui se croisent: $R(\lambda) \equiv R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)$.

On utilisera une notation courante dans les modèles intégrables, qui consiste à placer en indice d'un opérateur les espaces sur lequel il agit; ainsi, on notera R_{12} pour indiquer que la matrice R agit sur l'espace $V_1 \otimes V_2$, où V_1 et V_2 sont deux espaces quelconques isomorphes à V. Sur un dessin, le premier indice correspond à la ligne qui est en-dessous de l'autre à gauche de l'intersection.

Avec la convention de normalisation choisie⁴, R vérifie la condition dite *d'unitarité*, qui peut être représentée par la figure 2.



Fig. 2: La condition d'unitarité.

⁴ Pour son application à la chaîne XXX, la normalisation de la matrice R n'a aucune importance et l'on pourrait la multiplier par une fonction (scalaire) arbitraire de λ . Pour le modèle NJL (cf section 1.1.2), l'unitarité est indispensable, sans qu'elle détermine pour autant la normalisation de manière unique – pour ce faire, on a besoin d'une autre condition que l'on verra plus loin: la symétrie de croisement, qui donne la "bonne" normalisation de R.

On voit d'emblée un premier avantage de la notation indiciée: en effet, on peut écrire grâce à elle la condition d'unitarité:

$$R_{12}(\lambda)R_{21}(-\lambda) = 1$$
 (1.3)

alors qu'avec des notations plus explicites il faudrait écrire: $R(\lambda)\mathcal{P}R(-\lambda)\mathcal{P} = 1^5$. Pour λ réel, $R_{21}(-\lambda) = R_{12}(\lambda)^{\dagger}$ et donc $R(\lambda)$ est unitaire.

R possède aussi une propriété d'invariance SU(2) en ce sens que R commute avec l'action de SU(2) sur $V \otimes V$. En termes de projecteurs P_1 et P_0 sur les sous-représentations irréductibles (de spins 1 et 0) de SU(2) dans $V \otimes V$, on a $R(\lambda) = P_1 + \frac{\lambda+i}{\lambda-i}P_0$.

De plus, la matrice R vérifie la célèbre équation de Yang-Baxter [1]:

$$R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3)R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3)R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3)R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)$$
(1.4)

que l'on peut représenter graphiquement par la figure 3.



Fig. 3: L'équation de Yang-Baxter. On peut faire franchir à une ligne l'intersection de deux autres.

Les matrices R agissent dans (1.4) sur deux de trois espaces V_1 , V_2 , V_3 quelconques isomorphes à V, les indices indiquant lesquels. Notons que si on lit les dessins de gauche à droite (et de haut en bas pour les lignes verticales), alors on obtient les expressions correspondantes de droite à gauche. Ce choix est conventionnel, et peut varier selon les auteurs.

Le fait que la matrice R vérifie l'équation de Yang–Baxter est essentiel, car c'est cette relation qui assure qu'il existe une algèbre de Yang–Baxter sous-jacente [2], et donc au final, l'intégrabilité.

⁵ Comme R commute avec \mathcal{P} , on voit que l'on pourrait en fait écrire plus simplement $R(\lambda)R(-\lambda) = 1$. Mais cette dernière propriété est moins générale.

Introduisons maintenant un espace auxiliaire $V_a = V$ en plus de nos espaces physiques de spins V_i , et considérons la *matrice de monodromie* $T_a(\lambda)$ agissant sur $V_a \otimes \mathcal{H}$:⁶

$$T_a(\lambda) = R_{aM}(\lambda)R_{aM-1}(\lambda)\dots R_{a1}(\lambda)$$
(1.5)

Les matrices R_{ai} agissent sur le produit tensoriel de l'espace auxiliaire V_a et d'un espace physique V_i (figure 4). Rappelons que *a* n'est pas un indice (qui pourrait prendre des valeurs), mais bien le label désignant l'espace auxiliaire V_a .



Fig. 4: La matrice de monodromie $T_a(\lambda)$.

En considérant *deux* espaces auxiliaires V_a et V_b , donc deux matrices de monodromie T_a et T_b , et en appliquant à répétition (1.4), on obtient les "relations RTT" (figure 5):

$$R_{ab}(\lambda - \mu)T_a(\lambda)T_b(\mu) = T_b(\mu)T_a(\lambda)R_{ab}(\lambda - \mu)$$
(1.6)



Fig. 5: Les relations *RTT*.

On a pris dans (1.4) l'un des 3 paramètres spectraux égaux à zéro; il aurait pu être non nul si nous l'avions incorporé dans la définition (1.5) de la matrice de monodromie (en fait, on peut même plus généralement considérer une matrice de monodromie *inhomogène*, ce que nous ferons au 1.1.3). Si l'on avait laissé le troisième paramètre spectral, l'équation (1.6) serait exactement de la même forme que (1.4); nous reviendrons sur ce point lorsqu'il sera question de fusion (section **2.3**).

⁶ Pour suivre rigoureusement la notation qui consiste à placer en indice l'espace sur lequel les opérateurs agissent, il faudrait noter: $T_{a\mathcal{H}}(\lambda)$, mais nous supprimerons systématiquement les indices \mathcal{H} .

Introduisons finalement la matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda)$

$$\mathbf{T}(\lambda) = \operatorname{tr}_a(T_a(\lambda)) \tag{1.7}$$

qui est un opérateur sur \mathcal{H} obtenu en prenant la trace de $T_a(\lambda)$ sur l'espace auxiliaire V_a .

Les relations RTT (1.6) impliquent, R étant inversible, que les matrices $\mathbf{T}(\lambda)$ commutent entre elles pour des valeurs différentes du paramètre spectral:

$$[\mathbf{T}(\lambda), \mathbf{T}(\mu)] = 0 \tag{1.8}$$

Elles peuvent donc être diagonalisées simultanément. Comme $(\lambda + i)^M \mathbf{T}(\lambda)$ est un polynôme de degré M en λ , on obtient ainsi M quantités indépendantes qui commutent (cf la définition classique d'intégrabilité). Calculons les premières en développant $\mathbf{T}(\lambda)$ autour de $\lambda = 0$; on trouve que

$$\mathbf{T}(\lambda = 0) = \mathcal{P}_{aM}\mathcal{P}_{aM-1}\dots\mathcal{P}_{a1}$$
(1.9)

est l'opérateur de translation discrète sur la chaîne périodique (figure 6).



Fig. 6: La matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda = 0)$. C'est en fait la matrice de monodromie qui est représentée, car pour prendre la trace sur l'espace auxiliaire, il faudrait refermer le trait horizontal sur lui-même.

On a donc $\mathbf{T}(\lambda = 0) = e^{-i\mathbf{P}a}$, où \mathbf{P} est l'opérateur d'impulsion, et a est la distance entre 2 sites voisins. On peut aussi considérer l'impulsion par site: $p = \mathbf{P}/M$ de sorte que $\mathbf{T}(\lambda = 0) = e^{-ipL}$ où L = Ma est la longueur de la chaîne.

Ensuite, on développe au premier ordre $\mathbf{T}(\lambda)$ (figure 7) et on utilise la relation $\mathcal{P}_{k\,k+1} = 1/2 + 2\,\vec{s}_k \cdot \vec{s}_{k+1};$ on obtient



Fig. 7: Un terme dans le développement au premier ordre de $\mathbf{T}(\lambda)$ en $\lambda = 0$ (multiplié par $\mathbf{T}(0)^{-1}$).

$$\frac{1}{i}\mathbf{T}(\lambda)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{T}(\lambda)_{|\lambda=0} = -M/2 + \mathbf{H}_{\mathrm{XXX}}$$
(1.10)

donc \mathbf{H}_{XXX} est l'un des M Hamiltoniens commutant entre eux. On a ainsi ramené la diagonalisation de \mathbf{H}_{XXX} à celle de $\mathbf{T}(\lambda)$.

1.1.2. Le modèle de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) SU(2)

Considérons à présent un autre modèle, le modèle de Nambu–Jona-Lasinio [3] (parfois aussi nommé modèle de Gross–Neveu chiral) à deux dimensions. C'est une théorie des champs relativiste (une dimension d'espace, une dimension de temps); le Lagrangien est exprimé en termes de fermions de Dirac (il y a donc 2 chiralités) qui sont des doublets de U(2) et qui interagissent via une interaction à quatre fermions:

$$L = i\bar{\psi}^a \partial\!\!\!/ \psi^a - g\bar{j}_\mu \cdot \bar{j}^\mu \tag{1.11}$$

a = 1, 2 est l'indice de doublets de U(2) et $\mu = 0, 1$ est l'indice d'espace-temps. \vec{j}^{μ} est le courant SU(2); explicitement, $j^{\mu A} = \bar{\psi}_a S^A_{ab} \gamma^{\mu} \psi_b$, où les S^A sont les générateurs (hermitiens) de $\mathfrak{su}(2)$ dans la représentation doublet des fermions. Dans (1.11), il y a sommation sur les indices (tensoriels) répétés, comme partout dorénavant.

Pour assurer la renormalisabilité du modèle, il faudrait ajouter également un terme courant-courant U(1), mais comme il va s'avérer que le secteur U(1) de la théorie est trivial et se découple, nous omettons ce terme.

Le modèle NJL est intéressant car il exhibe un certain nombre de phénomènes physiques universels, tels que la génération dynamique de masse, la liberté asymptotique [4], et d'autres plus spécifiques à la dimension 2, comme l'apparition d'un secteur non-massif malgré l'impossibilité d'avoir des bosons de Goldstone, du fait que la symétrie chirale ne peut pas être brisée. Tout ceci apparaît dans sa solution par l'Ansatz de Bethe [5]. Précisons maintenant quelles sont les symétries du Lagrangien:

◊ invariance sous SU(2). En fait, on a bien sûr une symétrie U(2), mais, comme on l'a déjà signalé, le secteur U(1) de la théorie ne nous intéresse pas, donc on ne considère qu'une symétrie SU(2)⁷. L'invariance séparée des deux chiralités sous l'action de SU(2) (symétrie SU(2)₊ × SU(2)₋) est, elle, brisée par l'interaction.

⁷ Notons que U(2) n'est que localement isomorphe à $SU(2) \times U(1)$: plus précisément $U(2) = (SU(2) \times U(1))/\mathbb{Z}_2$, donc on ne peut pas "complètement" découpler U(1) et SU(2). Nous reviendrons sur cette subtilité au chapitre 3.

\$\phi\$ symétrie chirale U(1)⁸, donc conservation du nombre de fermions gauches et droits. Cette dernière propriété est caractéristique d'une théorie dont la diffusion est factorisée (cf introduction); elle permet de se placer d'un point de vue dit de "première quantification", c'est-à-dire de considérer le Hamiltonien à nombre fixé de particules. Nous le diagonaliserons alors par "l'Ansatz de Bethe en coordonnées". Dans les modèles les plus simples (gaz de Bose avec interaction δ répulsive [6]), ceci produit directement la solution du modèle; dans notre cas, du fait du nombre quantique SU(2), nous serons ramenés à une matrice de transfert qui agit sur les indices SU(2) seulement, et dont la diagonalisation nécessitera un second Ansatz de Bethe.

Fixons donc le nombre de particules M du système. Il est important de souligner que ces particules "nues", c'est-à-dire les fermions qui apparaissent dans le Lagrangien, *ne sont pas* les excitations physiques du modèle. En effet, le vrai vide de la théorie est obtenu en remplissant la mer de Fermi par des fermions d'énergie négative, dont les excitations physiques sont des excitations collectives de spin. Nous extrairons ces dernières par une procédure de *limite d'échelle* dans laquelle nous enverrons la densité linéique de fermions M/L à l'infini tout en maintenant une échelle de masse fixée, et recouvrerons ainsi l'invariance relativiste de la théorie.

Commençons par considérer le cas M = 2. Si les deux particules sont de chiralités différentes, le Hamiltonien s'écrit:

$$\mathbf{H} = i(\partial_1 - \partial_2) + 4g\,\delta(x_1 - x_2)\mathcal{P} \tag{1.12}$$

où x_1 et x_2 sont les positions des particules gauche et droite, et \mathcal{P} permute les deux particules. Cherchons à résoudre l'équation de Schrödinger associée $\mathbf{H}|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$, avec

$$|\Phi\rangle = \int \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\Phi^{ab}(x_1, x_2)\psi^a(x_1)\psi^b(x_2)|0\rangle$$

Dans chacune des régions $x_1 < x_2$ et $x_1 > x_2$, on peut choisir $|\Phi\rangle$ sous forme d'onde plane:

$$\Phi^{ab}(x_1, x_2) = e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \begin{cases} \phi_1^{ab} & x_1 < x_2 \\ \phi_2^{ab} & x_1 > x_2 \end{cases}$$
(1.13)

⁸ Cette symétrie – dont le courant développe une anomalie, mais qui n'est pas brisée – interdit aux fermions d'avoir une masse: nous verrons qu'il y a effectivement un secteur non-massif de la théorie (le secteur U(1)), mais il est trivial et se découple du secteur en interaction (le secteur SU(2)), qui, lui, échappe à l'interdiction et possède une masse.

de façon à satisfaire l'équation de Schrödinger avec $E = p_2 - p_1$. Les composantes de spin de la fonction d'onde ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent, pour reprendre les notations du 1.1.1, à $V \otimes V$. L'Ansatz (1.13) sur la forme de la fonction d'onde contient implicitement le fait que l'énergie/impulsion est conservée séparément pour chaque particule lors de la diffusion (ce qui est caractéristique d'une théorie intégrable).

Il faut ensuite assurer le "recollement" des deux solutions à $x_1 = x_2$; on vérifie que si $\phi_2 = S_{-+} \phi_1$, où la matrice S "nue" S_{-+} entre particules gauches et droites agit sur $V \otimes V$ et vaut

$$S_{-+} = \frac{1 + ig\mathcal{P}}{1 - ig\mathcal{P}} \tag{1.14}$$

alors $|\Phi\rangle$ est vecteur propre de **H**.

Si les deux particules sont de même chiralité, il n'y a pas d'interaction entre elles, et on pourrait être tenté de prendre les ondes planes comme base des fonctions propres de **H**. Cependant, il y a une grande dégénérescence dans le spectre, du fait que $E = \pm (p_1 + p_2)$ ne dépend que de $p_1 + p_2$ et pas de chacune des impulsions séparément. On peut tirer parti de ce fait pour prendre les vecteurs propres du même type que (1.13), avec une matrice S_{++} ou S_{--} reliant ϕ_1 et ϕ_2 a priori quelconque. Chaque choix de matrice Sconstitue un choix de base de fonctions propres. Gardons pour l'instant S_{++} et S_{--} arbitraires; nous les fixerons ultérieurement.

Considérons maintenant le système avec un nombre supérieur de particules M; la $i^{\text{ème}}$ particule est de chiralité ϵ_i (+ pour les particules droites, - pour les particules gauches). On peut opérer de la même manière que pour M = 2 et séparer l'espace des positions (x_1, \ldots, x_M) de nos particules en régions du type $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \ldots < x_{\sigma(N)}$, où σ est une permutation quelconque; dans chacune de ces régions, on a, avec des notations évidentes

$$\Phi^{a_1...a_M}(x_1,...,x_M) = \phi^{a_1...a_M}_{\sigma} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_M x_M)}$$
(1.15)

et l'énergie totale vaut $E = \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_M p_M$.

A nouveau, à la frontière entre deux domaines, soit quand $x_i = x_j$, on doit utiliser la matrice $S_{ij} \equiv S_{\epsilon_i \epsilon_j}$ correspondant aux chiralités des particules i et j et agissant sur les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ indices de $\phi_{\sigma}^{a_1...a_M}$. Nous utilisons ici la factorisation de la diffusion, en termes de diffusions successives entre 2 particules (lire à ce sujet [7]).

Evidemment, cette procédure n'est cohérente que si la définition de la fonction d'onde ne dépend pas du chemin choisi lors des franchissements de frontières successifs pour aller d'une région à une autre; on peut vérifier que ceci impose pour seule condition, en dehors des relations triviales $S_{ij}S_{ji} = 1$ (soit explicitement $S_{+-}\mathcal{P}S_{+-}\mathcal{P} = S_{++}\mathcal{P}S_{++}\mathcal{P} = S_{--}\mathcal{P}S_{--}\mathcal{P} = 1$), l'équation de Yang-Baxter pour les matrices S:

$$S_{ij}S_{ik}S_{jk} = S_{jk}S_{ik}S_{ij} \tag{1.16}$$

Nous allons maintenant choisir $S_{++} = S_{--}$ de telle façon que (1.16) soit satisfaite. Pour ce faire, on observe que si $S_{ij} = R(\theta_i - \theta_j)$, où R est la matrice qui a été définie dans (1.2), pour des paramètres θ_i bien choisis, alors d'après (1.4), (1.16) sera automatiquement satisfaite (et $S_{ij}S_{ji} = 1$ n'est autre que la condition d'unitarité de $R(\lambda)$).

Prenons donc $\theta_i = \epsilon_i/c$, où c est une nouvelle paramétrisation de la constante de couplage: $c = 4g/(1-g^2)$. On vérifie que S_{-+} , donnée par (1.14), vaut bien $R(-2/c)^g$. De plus, ce choix impose une matrice S non-triviale: $S_{++} = S_{--} = \mathcal{P}$ entre particules de même chiralité.

Maintenant que l'on a trouvé les matrices S nues, on utilise une procédure standard pour parvenir à la matrice de transfert (et donc aux équations d'Ansatz de Bethe): celle du déphasage (phase shift). Elle consiste à considérer un espace compactifié de longueur L, ce qui revient à imposer des conditions au bord périodiques à la fonction d'onde $\Phi^{a_1...a_M}(x_1,...,x_M)$. Plaçons-nous par exemple dans la région $x_1 < x_2 < ... < x_M$, choisissons un certain x_k et augmentons-le de manière à lui faire faire le tour des autres x_i ; on voit facilement que la condition $x_k \equiv x_k + L$ se récrit:

$$e^{-ip_k L} = S_{k\,k-1} \dots S_{k1} S_{kM} \dots S_{k\,k+1} \tag{1.17}$$

(1.17) doit être interprétée comme une équation aux valeurs propres de l'opérateur du second membre $\mathbf{T}_k = S_{k\,k-1} \dots S_{k1} S_{kM} S_{k\,k+1}$, le vecteur propre correspondant étant $\phi_1^{a_1 \dots a_M}$. Cette équation affirme que le déphasage de la $k^{\text{ème}}$ particule – tenant compte à la fois du déphasage libre $e^{ip_k L}$ et de la diffusion sur les autres particules – après un tour complet de l'espace compactifié vaut 1. La diagonalisation de \mathbf{T}_k permet donc de calculer p_k , et de là, le spectre du Hamiltonien.

Finalement, on introduit comme au 1.1.1 un espace auxiliaire $V_a \equiv V$, et la matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda)$ définie par:

$$\mathbf{T}(\lambda) = \operatorname{tr}_{a}(R_{aM}(\lambda - \theta_{M})R_{aM-1}(\lambda - \theta_{M-1})\dots R_{a1}(\lambda - \theta_{1}))$$
(1.18)

(où, rappelons-le, $\theta_k = \pm 1/c$). On a alors la relation (figure 8):

$$\mathbf{T}_{k} = S_{k\,k-1}\dots S_{k1}S_{kM}\dots S_{k\,k+1} = \mathbf{T}(\lambda = \theta_{k}) \tag{1.19}$$

⁹ Ceci n'est en fait vrai qu'à une phase près; mais le lecteur pourra vérifier que la phase supplémentaire n'a qu'un effet trivial, et qu'on peut donc l'omettre.



Fig. 8: La matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda = \theta_k)$. La ligne horizontale doit se refermer sur elle-même.

Cette identification nous permet d'affirmer que les \mathbf{T}_k commutent entre eux, ce qui est une condition de cohérence de la construction que nous avons effectuée (sinon il serait impossible de les diagonaliser simultanément, cf eq. (1.17)); et que nous avons ramené la diagonalisation du Hamiltonien à celle de la matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda)$ définie par (1.18).

1.1.3. Modèles statistiques sur réseau: modèles de vertex

Les "matrices de transfert" que nous avons introduites pour les deux modèles précédents sont très similaires: nous allons présenter maintenant un formalisme unificateur, qui justifiera en même temps la dénomination de matrice de transfert.

Considérons un modèle défini sur un réseau rectangulaire 2D. A chaque ligne verticale (respectivement horizontale), on associe un paramètre spectral θ_i (resp. θ'_i). Les poids statistiques sont assignés aux vertex du réseau: chaque arête peut être dans 2 états, souvent représentés par des flèches (figure 9) et le poids de Boltzmann associé au vertex dépend des valeurs des arêtes qui en partent.



Fig. 9: Modèle de vertex sur réseau. Si on suppose le réseau doublement périodique, les arêtes sortantes doivent être identifiées deux à deux.

Il y a dans notre cas $2^4 = 16$ configurations d'arêtes possibles autour d'un vertex donné, mais seules 6 ont des poids non-nuls (notre modèle est un cas particulier du *modèle* à 6 vertex). Pour faire le lien avec la matrice R, nous allons placer les 16 poids (nuls ou non-nuls) sur une matrice 4×4 : la ligne correspond à la configuration des arêtes au-dessus et à gauche du vertex (dans l'ordre: $\rightarrow \downarrow, \rightarrow \uparrow, \leftarrow \downarrow, \leftarrow \uparrow$), la colonne correspond à celles au-dessous et à droite (dans le même ordre). Alors, le poids correspondant au vertex à l'intersection de la $j^{\text{ème}}$ ligne horizontale et de la $k^{\text{ème}}$ ligne verticale est par définition la matrice $R(\theta'_j - \theta_k)$ dans la base standard de $V = \mathbb{C}^2$. Le moment est venu d'écrire explicitement la matrice $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda - i} & \frac{-i}{\lambda - i} & 0\\ 0 & \frac{-i}{\lambda - i} & \frac{\lambda}{\lambda - i} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(1.20)

On vérifie qu'il y a bien 6 poids non-nuls. Cette matrice R est dite *rationnelle*, du fait de sa dépendance en λ . Evidemment, pour que les poids soient réels, il faut que les θ_j soient purement imaginaires: notre paramétrisation de la matrice R est adaptée à un espace-temps à 1+1 dimensions, mais pour passer à la mécanique statistique à 2+0 dimensions, il faut effectuer la "rotation de Wick" $\lambda \to i\lambda$.

Pour sommer sur les différentes configurations du système, il est naturel d'introduire les matrices de monodromie

$$T(\theta'_j|\theta_1,\ldots,\theta_M) = R_{aM}(\theta'_j - \theta_M)R_{aM-1}(\theta'_j - \theta_{M-1})\ldots R_{a1}(\theta'_j - \theta_1)$$
(1.21)

agissant comme au 1.1.1 sur le produit tensoriel de l'espace de Hilbert "physique" $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{M} V_k = V^{\otimes M}$, qui est ici associé aux valeurs des arêtes verticales (plus précisément V_k est associé à la $k^{\text{ème}}$ ligne verticale), et d'un "espace auxiliaire" qui s'identifie ici aux valeurs des arêtes horizontales de la $j^{\text{ème}}$ ligne. Ce sont les matrices de monodromie *inhomogènes* (les inhomogénéités sont les $\theta_1, \ldots, \theta_M$).

Considérons maintenant la fonction de partition du modèle sur un réseau doublement périodique, de périodes M et M'; pour tenir compte de la périodicité horizontale, on doit prendre la trace sur le " $j^{\text{ème}}$ espace auxiliaire", c'est-à-dire la $j^{\text{ème}}$ ligne horizontale:

$$\mathbf{T}(\theta'_{j}|\theta_{1},\ldots,\theta_{M}) = \operatorname{tr}_{a}(T_{a}(\theta'_{j}|\theta_{1},\ldots,\theta_{M}))$$
(1.22)

On voit ainsi apparaître $\mathbf{T}_j \equiv \mathbf{T}(\theta'_j | \theta_1, \dots, \theta_M)$, les matrices de transfert (inhomogènes). Elles méritent ce nom, puisque la fonction de partition Z s'écrit alors

$$Z = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}}(\mathbf{T}_{M'}\mathbf{T}_{M'-1}\dots\mathbf{T}_1)$$
(1.23)

Dans la limite $M' \to \infty$, Z est dominée par les valeurs propres les plus grandes des \mathbf{T}_j , et on est donc amené à les diagonaliser. En vertu de l'équation de Yang-Baxter, les relations RTT (1.6) sont toujours valables pour les matrices de monodromie inhomogènes, et ainsi les \mathbf{T}_j commutent: on peut donc les diagonaliser simultanément.

Il est clair que les matrices de transfert introduites aux paragraphes précédents ne sont que des cas particuliers de la matrice de transfert $\mathbf{T}(\theta'|\theta_1,\ldots,\theta_M)$, pour des inhomogénéités θ_k particulières: $\theta_k = 0$ pour la chaîne XXX, $\theta_k = \pm 1/c$ pour le modèle NJL.

1.1.4. Diagonalisation de la matrice de transfert inhomogène

Nous allons maintenant diagonaliser la matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda|\theta_1,\ldots,\theta_M)$, qui est la trace sur l'espace auxiliaire de la matrice de monodromie $T_a(\lambda|\theta_1,\ldots,\theta_M)$ (figure 10).



Fig. 10: La matrice de monodromie inhomogène.

Nous représentons les lignes verticales quelque peu inclinées (contrairement à la figure 9), pour signifier qu'elles ont des paramètres spectraux associés différents (on verra en effet que les paramètres spectraux s'interprètent comme des rapidités dans le Minkowskien, ou des angles dans l'Euclidien).

La construction qui suit (Ansatz de Bethe Algébrique, ou encore Quantum Inverse Scattering Method quand elle est considérée comme la version quantique de la Classical Inverse Scattering Method) est particulièrement standard [8] et nous ne ferons donc que la décrire brièvement.

Rappelons que SU(2) agit naturellement sur le Hilbert physique \mathcal{H} et sur l'espace auxiliaire V_a . Si l'on décompose la matrice de monodromie T_a sur la base usuelle de l'espace auxiliaire V_a (base de diagonalisation de s_3 , composante z du spin), on obtient

$$T_a(\lambda|\theta_1,\ldots,\theta_M) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\lambda) & \mathbf{B}(\lambda) \\ \mathbf{C}(\lambda) & \mathbf{D}(\lambda) \end{pmatrix}$$
(1.24)

où les $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathbf{C}(\lambda)$, $\mathbf{D}(\lambda)$ (ces notations sont standard) sont des opérateurs sur le Hilbert \mathcal{H} . Ainsi $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{D}(\lambda)$. Du fait de l'invariance SU(2) de la matrice R, $\mathbf{B}(\lambda)$ diminue la composante S³ du spin total (dans \mathcal{H}) de 1, tandis que $\mathbf{C}(\lambda)$ l'augmente de 1, et $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{D}(\lambda)$ commutent avec elle.

Commençons donc avec l'état de plus haut poids $|\Omega\rangle$ de \mathcal{H} (vis-à-vis de la symétrie SU(2)); dans la base standard de V, on a

$$|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}$$
(1.25)

On vérifie aisément que

$$\mathbf{A}(\lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$
$$\mathbf{D}(\lambda)|\Omega\rangle = \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda - \theta_k}{\lambda - \theta_k - i}|\Omega\rangle$$
(1.26)

donc $|\Omega\rangle$ est un état propre de $\mathbf{T}(\lambda)$.

L'idée est alors d'utiliser $\mathbf{B}(\lambda)$ comme opérateur de création d'une pseudo-particule (une excitation de spin du système, parfois nommée *onde de spin*) au-dessus du pseudovide que constitue $|\Omega\rangle$. Ainsi, on définit l'état $|\Psi\rangle$ (figure 11)

$$|\Psi\rangle = \mathbf{B}(\lambda_1)\dots\mathbf{B}(\lambda_m)|\Omega\rangle \tag{1.27}$$

où les λ_{α} sont des nombres complexes, qui doivent être tels que $|\Psi\rangle$ soit un état propre de $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{D}(\lambda)$.



Fig. 11: Construction de l'état $|\Psi\rangle$. Les flèches entourées de cercles symbolisent les états: $\uparrow \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \downarrow \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme la matrice de monodromie $T(\lambda)$ vérifie les relations RTT (1.6), on dispose de relations de commutation pour ses composantes $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathbf{D}(\lambda)$, qui nous permettent de calculer l'action de $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{D}(\lambda)$ sur $|\Psi\rangle$. A la suite d'un calcul classique, on trouve que $|\Psi\rangle$ est vecteur propre si et seulement si les λ_{α} vérifient le système d'équations algébriques suivant:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} + i}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} - i} = \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_{k}}{\lambda_{\alpha} - \theta_{k} - i}$$
(1.28)

Ce sont les *Equations d'Ansatz de Bethe* (BAE). La valeur propre correspondante est alors donnée par:¹⁰

$$\mathbf{T}(\lambda)|\Psi\rangle = \left[\prod_{\alpha=1}^{m} \frac{\lambda - \lambda_{\alpha} + i}{\lambda - \lambda_{\alpha}} + \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda - \theta_{k}}{\lambda - \theta_{k} - i} \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{\lambda - \lambda_{\alpha} - i}{\lambda - \lambda_{\alpha}}\right]|\Psi\rangle$$
(1.29)

Nous admettrons également les résultats suivants:

- Les états |Ψ⟩ ainsi construits ("états de Bethe") sont des états de plus haut poids vis-à-vis de SU(2); donc leur spin S³ = s = M/2 m. En fait, quand λ → ∞, on a B(λ) ~ ¹/_λS⁻, où S⁻ = S¹ iS² est l'opérateur de descente. Admettons alors que les λ_α puissent prendre la valeur ∞. On remarque que si (λ₁,..., λ_m) est une solution des BAE (1.28), alors (λ₁,..., λ_m, ∞,..., ∞) en est une autre, avec la même valeur propre (1.29): on peut insérer un nombre arbitraire de racines infinies, ce qui est bien sûr une manifestation de la symétrie SU(2), et donc atteindre ainsi les états de poids inférieur dans les multiplets.
- En considérant comme cela est expliqué ci-dessus les multiplets associés aux vecteurs de plus haut poids $|\Psi\rangle$, on obtient une base d'états propres de $\mathbf{T}(\lambda)$.
- Les λ_{α} sont génériquement tous distincts (principe d'exclusion pour les excitations de spin).

Ceci conclut la diagonalisation de la matrice de transfert.

Pour interpréter les BAE (1.28)-(1.29), on remarque qu'aussi bien au 1.1.1 (chaîne XXX) qu'au 1.1.2 (modèle NJL) on ne considère que la valeur particulière $\lambda = \theta_k$ du

¹⁰ Notons que les équations peuvent être rendues légèrement plus symétriques en décalant les θ_k de i/2: ceci est obtenu en remplaçant dans la construction de la matrice transfert la matrice $R(\lambda)$ par la matrice $L(\lambda) \equiv R(\lambda + i/2)$.

paramètre spectral. Pour cette valeur $\mathbf{D}(\lambda)|\Psi\rangle = 0$, et, décalant les λ_{α} de i/2, les équations (1.28)-(1.29) se récrivent:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} + i}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} - i} = \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_k + i/2}{\lambda_{\alpha} - \theta_k - i/2}$$
(1.30*a*)

$$e^{-ip_k L} = \prod_{\alpha=1}^m \frac{\theta_k - \lambda_\alpha + i/2}{\theta_k - \lambda_\alpha - i/2}$$
(1.30b)

où, conformément aux notations du 1.1.2, $e^{-ip_k L}$ est la valeur propre de $\mathbf{T}(\lambda = \theta_k)$.

On remarque alors que les équations (1.30) ont exactement la même forme que les équations de déphasage (1.17): en effet, on peut considérer que (1.30*a*) décrit l'interaction de nos particules initiales de paramètres spectraux θ_k avec de nouvelles particules de paramètres spectraux λ_{α} , et que (1.30*b*) décrit l'interaction de ces nouvelles particules entre elles. Ces dernières sont elles-mêmes sujettes à la diffusion factorisée, puisque seules des fonctions de $\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}$ apparaissent dans (1.30*b*). La différence essentielle entre (1.17) et (1.30) tient au fait que dans (1.30), la diffusion est *diagonale*: la matrice de monodromie correspondante n'a pas de structure matricielle. On peut encore dire que les pseudo-particules soumises aux équations (1.30) n'ont pas de nombres quantiques internes. Ainsi, l'Ansatz de Bethe algébrique ramène un problème de déphasage non diagonal à un problème de déphasage diagonal.

Terminons l'analyse des BAE par une autre remarque importante: les θ_k , qui sont les paramètres spectraux des particules "nues" de notre modèle, sont fixes et ne dépendent pas des impulsions p_k de ces mêmes particules. De manière plus générale (comme cela apparaît dans les modèles de Hubbard ou de Kondo multi-canal, cf section **4.3**, mais aussi dans les "Equations d'Ansatz de Bethe physiques" que nous introduirons plus loin), les θ_k peuvent être fonctions des p_k . L'interprétation intuitive de l'absence de dépendance des θ_k en les p_k dans le modèle NJL est le découplage spin/charge: les valeurs des p_k , qui représentent le secteur de charge U(1), n'influent plus sur les valeurs des rapidités λ_{α} , qui représentent le secteur de spin SU(2). A l'inverse, les λ_{α} ne déterminent les p_k que modulo $2\pi/L$ (eq. (1.30b)): on peut ajouter à p_k un terme $2\pi n_k/L$, et le choix des n_k correspond au choix de l'état dans le secteur de charge. Ce dernier étant totalement trivial (fermion de Dirac libre découplé), nous supposerons à l'avenir que nous sommes dans l'état fondamental du secteur de charge U(1) (ce qui correspond à un choix particulier des n_k), et porterons notre attention sur le secteur SU(2).

1.1.5. L'état fondamental et les premiers états excités

Pour simplifier la discussion, nous allons à présent nous concentrer sur la chaîne XXX et le modèle NJL (et laisser de côté, bien qu'ils puissent être traités de la même manière, les modèles de vertex). De plus, nous supposerons que le nombre de sites/particules M est pair, et, pour NJL, que l'état que nous considérons est de chiralité totale nulle, i.e. qu'il y a autant de particules gauches que droites: $M_+ = M_- = M/2$ (en effet, le vide et les états de basse énergie du secteur de spin vérifient cette condition). Nous reviendrons plus loin sur l'hypothèse de parité. Enfin, pour le restant de cette section, nous garderons la distance entre deux sites/inverse de la densité linéique de fermions fixée (selon le modèle), de sorte que nous pouvons nous placer dans des unités telles que: a = 1, soit encore M = L.

Il s'agit désormais de chercher l'état fondamental, c'est-à-dire de minimiser l'énergie E. L'impulsion vaut $P = \sum_k p_k$ pour les deux modèles considérés, où les p_k sont donnés par (1.30):

$$P_{\text{XXX}} = -\sum_{\alpha=1}^{m} [2 \arctan(2\lambda_{\alpha}) + \pi]$$
$$P_{\text{NJL}} = -\sum_{\alpha=1}^{m} [\arctan(2(\lambda_{\alpha} - 1/c)) + \arctan(2(\lambda_{\alpha} + 1/c)) + \pi]$$

(modulo 2π). Par contre, l'énergie n'a pas la même expression; pour la chaîne XXX, il faut dériver l'impulsion par rapport au paramètre spectral (cf eq. (1.10)), donc

$$E_{\rm XXX} = -\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\lambda_{\alpha}^2 + 1/4}$$
(1.31)

Pour le modèle NJL, avec des notations évidentes, on a: $E_{\text{NJL}} = M/2 (p_+ - p_-)$, donc

$$E_{\text{NJL}} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\arctan(2(\lambda_{\alpha} + 1/c)) - \arctan(2(\lambda_{\alpha} - 1/c)) \right]$$
(1.32)

Le choix de modulo pour E_{NJL} équivant à n'écrire que la contribution à l'énergie du secteur de spin.

La caractéristique commune aux deux expressions de l'énergie (1.31) et (1.32) est que la contribution de chaque pseudo-particule de rapidité λ_{α} est toujours négative. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on les appelle pseudo-particules. Le vide (ou état fondamental) n'est donc pas le pseudo-vide $|\Omega\rangle$ introduit au 1.1.4: il est obtenu au contraire en remplissant la "mer de Fermi" de pseudo-particules (qui, rappelons-le, vérifient un principe d'exclusion).

La limite thermodynamique est obtenue en prenant $M \to \infty$. Pour l'état du vide, on peut montrer que les λ_{α} solutions des BAE (1.30*a*) forment une densité continue $\rho_{g.s.}(\lambda)$ de racines sur l'axe réel. Pour éviter les redondances avec les sections qui suivent, nous n'allons pas faire de calcul explicite ici. La plupart des résultats que nous allons citer dans les lignes qui suivent seront redémontrés plus loin par des méthodes générales.

Les états excités sont obtenus en créant des *trous* dans la mer de Fermi de racines (nous donnerons plus loin une définition rigoureuse d'un trou): si l'on place un trou au paramètre spectral $\tilde{\lambda}$, on peut dire que l'on a créé une excitation physique dont l'énergieimpulsion est paramétrisée par $\tilde{\lambda}$ (le tilde sert à distinguer toutes les quantités associées aux trous). Pour \tilde{m} trous placés aux paramètres spectraux $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{\tilde{m}}$, on peut montrer que l'énergie-impulsion s'écrit sous la forme:

$$E = E_{\text{g.s.}} + \sum_{\alpha=1}^{\tilde{m}} \tilde{\epsilon}(\tilde{\lambda}_{\alpha})$$

$$P = \sum_{\alpha=1}^{\tilde{m}} \tilde{p}(\tilde{\lambda}_{\alpha})$$
(1.33)

où les fonctions $\tilde{\epsilon}(\lambda)$ et $\tilde{p}(\lambda)$ dépendent du modèle considéré:

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}_{XXX}(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh \pi \lambda} \\ \tilde{p}_{XXX}(\lambda) = 2 \arctan(e^{\pi \lambda}) \end{cases} \begin{cases} \tilde{\epsilon}_{NJL}(\lambda) = \arctan(e^{\pi(\lambda - 1/c)}) + \arctan(e^{\pi(-\lambda - 1/c)}) \\ \tilde{p}_{NJL}(\lambda) = \arctan(e^{\pi(\lambda - 1/c)}) - \arctan(e^{\pi(-\lambda - 1/c)}) \end{cases}$$
(1.34)

(notons que $\tilde{\epsilon}_{XXX} = \frac{d}{d\lambda} \tilde{p}_{XXX}$). L'état à \tilde{m} trous constitue donc sans surprise un état à \tilde{m} particules physiques, de rapidités $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{\tilde{m}}$. (1.34) nous donne également la *relation de dispersion* de la chaîne XXX: $\tilde{\epsilon} = \pi \sin \tilde{p}$. En particulier, il n'y a pas de gap. Nous n'écrivons rien d'analogue pour le modèle NJL, puisque nous discuterons sa relation de dispersion après avoir pris la limite d'échelle (section **1.2**). Remarquons simplement qu'au contraire, le modèle NJL possède un gap ($\tilde{\epsilon}$ est minimum en $\lambda = 0$).

Considérons maintenant le spin d'un état: on peut montrer qu'il est simplement donné par $s = \tilde{m}/2$. Les excitations physiques élémentaires sont donc de spin 1/2. On les appelle des *spinons*. L'état formé de \tilde{m} trous est l'état à \tilde{m} trous "le plus symétrique", c'est-à-dire de plus haut poids dans la représentation produit tensoriel de \tilde{m} représentations de spin 1/2. Cependant, comme cette représentation est réductible pour $\tilde{m} > 1$, le multiplet du vecteur de plus haut poids ne décrit pas tout l'espace des états à \tilde{m} particules.

Prenons un exemple concret, celui de $\tilde{m} = 2$, soit de deux particules de rapidités $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$. On a l'état triplet (s = 1) qui est le plus symétrique, et qui est l'état à deux trous, mais aussi l'état singlet (s = 0). Comment obtenir ce dernier ? Il faut se rappeler pour cela que les racines des BAE (1.30) ne sont pas nécessairement réelles: ici, pour obtenir l'état singlet à partir de l'état triplet, on ajoute une 2-corde centrée en $(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)/2$, c'est-à-dire deux racines complexes conjuguées $(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)/2 \pm i/2$. On peut montrer que, quand $L \to \infty$, la contribution de la 2-corde à l'énergie est nulle, de sorte que $E = E_{\text{g.s.}} + \tilde{\epsilon}(\lambda_1) + \tilde{\epsilon}(\lambda_2)$ (et de même pour l'impulsion). Les états triplet et singlet sont donc dégénérés: c'est le signe qu'à $L = \infty$ apparaît une symétrie plus grande que SU(2). Nous reviendrons sur ce point au 2.2.3. En étudiant les corrections en 1/L à l'énergie/impulsion des premiers états excités, on peut obtenir la matrice S de diffusion des excitations physiques¹¹. On trouve que la matrice de diffusion entre deux particules dont la différence des rapidités vaut λ , est donnée par:

$$S(\lambda) = \frac{\Gamma\left(1+i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\lambda}{2}\right)}R(\lambda)$$
(1.35)

où $R(\lambda)$ est la matrice R habituelle (eq. (1.2)). La matrice S est donc une autre version de la matrice R, avec un préfacteur scalaire supplémentaire; elle vérifie comme R l'équation de Yang-Baxter, l'unitarité, mais vérifie de surcroît la symétrie de croisement: si $S(\lambda) =$ $f(\lambda) + g(\lambda)\mathcal{P} = \hat{f}(\lambda) + \hat{g}(\lambda)E$ avec $E_{ij}^{kl} = \varepsilon_{ij}\varepsilon^{kl}$, alors $f(i - \lambda) = \hat{f}(\lambda)$ et $g(i - \lambda) = \hat{g}(\lambda)$.

Il convient de remarquer que puisqu'on a supposé M pair, le spin du système est nécessairement entier et donc \tilde{m} est pair: on ne peut créer les particules élémentaires que par paires¹². En particulier, ceci pourrait donner l'illusion qu'on a un spectre d'excitations de spin 1, ce qui est une interprétation erronée. On peut résoudre cette difficulté en considérant "simultanément" M pair et M impair dans la limite $M \to \infty$, de façon à construire un espace de Fock complet.

Après cette brève description des états de Bethe (vide, états excités), nous allons passer à la limite thermodynamique.

¹¹ La méthode en question ne donne pas la matrice S correcte pour des modèles plus généraux: c'est pourquoi nous exposerons plus loin une autre méthode, celle des Equations d'Ansatz de Bethe physiques (voir section 1.2.5), qui est applicable à tous les modèles.

¹² C'est d'ailleurs la raison pour laquelle \tilde{p} est défini modulo π et non 2π .

1.2. BAE continues

On a vu au 1.1.5 que le vide de la chaîne XXX/modèle NJL est constitué d'une densité continue de racines des BAE. Nous allons maintenant généraliser cette idée à des états thermodynamiques quelconques. Par "états thermodynamiques", il faut entendre états dans lesquels le nombre d'excitations physiques¹³ est grand: la densité linéique de ces excitations reste fixée dans la limite $L \to \infty$. Il convient de distinguer ces états thermodynamiques des "états excités" que sont les premiers états propres du Hamiltonien au-dessus du vide, et qui contiennent un nombre fini d'excitations physiques. Ce sont de tels états que nous avons considéré au 1.1.5. Pour ces derniers, les équations que nous allons écrire à présent ne sont pas valables; nous reviendrons à eux lorsque nous parlerons d'Equation Non-Linéaire Intégrale (section **3.3**). Nous traiterons d'abord en détail (1.2.1 et 1.2.2) un modèle simplifié qui met en lumière les mécanismes essentiels de la limite continue des BAE; puis nous indiquerons comment les généraliser aux BAE de XXX/NJL, ce qui nécessitera l'introduction de l'hypothèse de corde. Une des idées-clé que nous développerons alors sera l'introduction de nouvelles équations, les Equations d'Ansatz de Bethe physiques, qui s'obtiennent directement du spectre des excitations physiques, et qui sont équivalentes aux Equations d'Ansatz de Bethe nues, qui sont celles que l'on a considérées jusqu'à présent.

1.2.1. Diffusion diagonale

Pour montrer dans le cadre le plus simple comment écrire des équations d'Ansatz de Bethe continues, nous allons considérer un modèle de diffusion (factorisée) diagonale dans lequel des particules d'un seul type diffusent entre elles avec une certaine matrice S. L'énergie-impulsion (ϵ , p) est exprimée en termes d'un paramètre spectral λ réel (la rapidité), de telle manière que la matrice S de la diffusion de deux particules de rapidités λ_1 et λ_2 ne dépende que de $\lambda_1 - \lambda_2$. Par exemple, dans le cas de particules relativistes de masse m non nulle, la paramétrisation de la couche de masse en termes de la rapidité λ s'écrit (ϵ , p) = ($m \cosh \lambda$, $m \sinh \lambda$), et $\lambda_1 - \lambda_2$ est l'unique invariant relativiste de la diffusion (dans la paramétrisation traditionnelle, $s = 4m^2 \cosh^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$).

On peut utiliser ici le même procédé de "déphasage" qui nous a conduit précédemment à écrire l'équation (1.17) pour le modèle NJL. On considère un état à m particules de

¹³ Cette quantité est bien définie dans une théorie intégrable, car on peut nécessairement parler d'états asymptotiques.

rapidités $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; on suppose que les particules vérifient un principe d'exclusion, de sorte que les λ_{α} sont tous distincts. On impose des conditions périodiques au bord à la fonction d'onde¹⁴. L'équation de déphasage pour une particule s'écrit:

$$e^{-ip(\lambda_{\alpha})L} = \prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} S(\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta})$$
(1.36)

Conformément aux remarques faites au 1.1.4, les équations (1.36) sont du même type que (1.30*a*) (pour des θ_k fixés jouant le rôle du terme d'impulsion dans (1.36)), mais les λ_{α} sont par définition réels dans (1.36).

Comme la diffusion est diagonale, la matrice $S(\lambda)$ est une simple phase: $S(\lambda) = \exp(-i\phi(\lambda))$. Nous supposerons pour simplifier que $\phi(0) = 0$. Introduisons alors la fonction de comptage $I(\lambda)$:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[p(\lambda)L + \sum_{\beta=1}^{m} \phi(\lambda - \lambda_{\beta}) \right]$$
(1.37)

On voit que (1.36) se récrit simplement: $\exp(2\pi i I(\lambda_{\alpha})) = 1$, soit encore $I(\lambda_{\alpha})$ entier pour tout α . Avec des hypothèses appropriées sur $p(\lambda)$ et $\phi(\lambda)$, la fonction $I(\lambda)$ est strictement croissante; alors, comme les λ_{α} sont des réels distincts, les $I(\lambda_{\alpha})$ sont des entiers distincts.

Les λ_{α} n'épuisent pas nécessairement toutes les valeurs entières de $I(\lambda)$; pour compléter, on introduit les *trous* $\tilde{\lambda}_{\alpha}$, qui sont les réels distincts entre eux et distincts des λ_{α} , et tels que $I(\tilde{\lambda}_{\alpha})$ soit entier.

On considère maintenant les équations (1.36) dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, en nous concentrant sur les états dits thermodynamiques. Pour saisir intuitivement ce qui se passe dans cette limite, et identifier lesdits états, supposons un instant que $\phi = 0$: on a alors affaire à un système de fermions libres, et les impulsions autorisées $p = 2\pi I/L$ (avec I entier) décrivent, quand $L \to \infty$, un continuum d'états accessibles aux particules du système. Certains de ces états sont effectivement occupés: ce sont les $p(\lambda_{\alpha}) = 2\pi I(\lambda_{\alpha})/L$; d'autres ne le sont pas: ce sont les $p(\tilde{\lambda}_{\alpha}) = 2\pi I(\tilde{\lambda}_{\alpha})/L$. Remarquons la dualité complète trou-particule qui apparaît dans cette description; cette dualité est brisée par l'ajout de l'interaction ($\phi \neq 0$), puisque ce sont les particules qui interagissent

¹⁴ Evidemment, la notion de fonction d'onde n'a pas grand sens ici, à moins que les interactions ne soient ponctuelles. Dans le cas général, il faut supposer que $mL \gg 1$, où 1/m est l'échelle de longueur du système.

entre elles, et non les trous (on verra cependant au paragraphe suivant comment rétablir cette dualité en la généralisant).

Pour décrire un état donné, on introduit très classiquement des densités $\rho(p)$ et $\tilde{\rho}(p)$ de particules et de trous tels que

$$\rho(p) + \tilde{\rho}(p) = \frac{1}{2\pi} \tag{1.38}$$

Les états thermodynamiques sont par définition les états pour lesquels on peut définir de telles fonctions $\rho(p)$ et $\tilde{\rho}(p)$ bien régulières dans la limite $L \to \infty$.

Reprenons maintenant le cas général $\phi \neq 0$, ainsi que notre paramétrisation $p = p(\lambda)$ qui est la plus naturelle dans le cas en interaction. On définit les densités $\rho(\lambda)$ et $\tilde{\rho}(\lambda)$ de la manière évidente: $\rho(\lambda)d\lambda$ est le nombre de λ_{α} compris entre λ et $\lambda + d\lambda$ divisé par L, et de même pour $\tilde{\rho}(\lambda)$. La généralisation au cas en interaction de (1.38), qui traduisait la quantification des impulsions, consiste à utiliser la "condition de quantification des impulsions généralisée": $I(\lambda_{\alpha})$ entier, d'où l'on déduit immédiatement que, quand $L \to \infty$,

$$dI/d\lambda = L(\rho(\lambda) + \tilde{\rho}(\lambda))$$
(1.39)

On exprime maintenant $I(\lambda)$ en termes de $\rho(\lambda)$: d'après (1.37), $2\pi I(\lambda)/L = p(\lambda) + \int d\mu \rho(\mu)\phi(\lambda-\mu)$, et l'équation (1.39) s'écrit explicitement:

$$2\pi(\rho(\lambda) + \tilde{\rho}(\lambda)) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\lambda} + K \star \rho(\lambda)$$
(1.40)

où l'on a dénoté par $K \star \rho$ le produit de convolution de $K \equiv d\phi/d\lambda$ et de ρ . Remarquons que (1.40) se réduit bien à (1.38) pour K = 0 et $\rho(p)dp = \rho(\lambda)d\lambda$, $\tilde{\rho}(p)dp = \tilde{\rho}(\lambda)d\lambda$.

L'équation (1.40) est l'Equation d'Ansatz de Bethe continue que nous recherchions. C'est une équation intégrale linéaire qui admet une infinité de solutions (en effet, il y a deux inconnues, $\rho(\lambda)$ et $\tilde{\rho}(\lambda)$, pour une seule équation) correspondant aux différents états thermodynamiques du système.

1.2.2. Dualité particule-trou

Continuons notre étude du modèle de diffusion diagonale introduit au paragraphe précédent, caractérisé par un seul type de particules et une matrice S de diffusion. Le mécanisme que nous allons décrire est à la base des dualités plus compliquées présentes dans les modèles de diffusion non diagonale.

Nous avons montré que les BAE s'écrivaient dans la limite thermodynamique pour le modèle de diffusion diagonale (Eq. (1.40)): $2\pi(\rho(\lambda) + \tilde{\rho}(\lambda)) = dp/d\lambda + K \star \rho(\lambda)$, où K est la dérivée logarithmique de la matrice S. Comme nous l'avons déjà signalé, cette équation n'est pas symétrique par échange de ρ et $\tilde{\rho}$: en effet, le terme $K \star \rho$ n'a pas d'équivalent $\tilde{K} \star \tilde{\rho}$, ce qui revient à dire que ce sont les particules qui interagissent, et non les trous.

Pour rétablir la dualité particule-trou, nous allons donc écrire (1.40) sous la forme

$$\tilde{\rho}(\lambda) + A \star \rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\lambda}$$
(1.41)

où $A = 1 - K/(2\pi)$ est un noyau de Fredholm, qui admet donc un inverse de la même forme: $A^{-1} = 1 - \tilde{K}/(2\pi)$. Multiplions alors (1.41) par A^{-1} et définissons $\tilde{p} = -A^{-1} \star p$; on obtient:

$$2\pi(\rho(\lambda) + \tilde{\rho}(\lambda)) = -\frac{\mathrm{d}\tilde{p}}{\mathrm{d}\lambda} + \tilde{K} \star \tilde{\rho}(\lambda)$$
(1.42)

Comparant (1.40) et (1.42), on voit que les rôles de ρ et $\tilde{\rho}$ ont été échangés (la seule différence tient au signe de \tilde{p} , que nous avons choisi opposé à celui de p pour des raisons qui vont apparaître clairement par la suite).

Avant d'interpréter intuitivement ces résultats, écrivons aussi l'énergie/impulsion du système. Par définition de $\rho(\lambda)$, on a:

$$E/L = \int d\lambda \,\rho(\lambda)\epsilon(\lambda)$$

$$P/L = \int d\lambda \,\rho(\lambda)p(\lambda)$$
(1.43)

En utilisant (1.41), on peut récrire E et P en fonction de $\tilde{\rho}$:

$$E/L = \operatorname{cst} + \int d\lambda \,\tilde{\rho}(\lambda)\tilde{\epsilon}(\lambda)$$

$$P/L = \operatorname{cst} + \int d\lambda \,\tilde{\rho}(\lambda)\tilde{p}(\lambda)$$
(1.44)

où \tilde{p} a déjà été défini précédemment, et $\tilde{\epsilon}(\lambda) = -A^{-1} \star \epsilon(\lambda)$.

En général, $\epsilon(\lambda)$ et $\tilde{\epsilon}(\lambda)$ sont de signes opposés: ainsi, si les particules que nous avons considérées initialement ont leur énergie positive, alors créer un trou la diminue. Inversement, supposons que les particules ont leur énergie négative (ce sont alors des pseudo-particules, au même titre que les excitations de spin que nous avons introduites pour la chaîne XXX): le vrai vide de la théorie est alors caractérisé par $\tilde{\rho}(\lambda) = 0$, et ce sont les trous qui tiennent lieu d'excitations physiques.
D'après (1.42), on peut alors considérer que ce sont les trous qui interagissent avec une matrice \tilde{S} dont la dérivée logarithmique vaut \tilde{K} : en effet, si l'on procédait à l'envers, partant d'un système défini par la matrice de diffusion \tilde{S} et déterminant les BAE de ce système, on obtiendrait précisément (1.42) (avec les notations ρ et $\tilde{\rho}$ échangées).

Ainsi, partant de la matrice S des pseudo-particules, on calcule $K = i(d/d\lambda) \log S(\lambda)$, puis $\tilde{K}(\lambda) = -A^{-1} \star K(\lambda)$, d'où finalement la vraie matrice de diffusion \tilde{S} de la théorie, définie (à une constante multiplicative près) par $\tilde{K} = i(d/d\lambda) \log \tilde{S}(\lambda)$.

1.2.3. Chaîne XXX et hypothèse de corde

Reprenons maintenant l'étude des BAE (1.30), qui gouvernent en particulier les modèles XXX et NJL. Afin d'appliquer le procédé du paragraphe précédent à ces équations, il faut d'abord se ramener à des paramètres spectraux réels: en effet, les λ_{α} solutions de (1.30) sont *a priori* complexes. Cependant il existe un argument "naïf" qui permet de justifier que dans la limite $M \to \infty$, les λ_{α} ne peuvent former que certaines configurations particulières dans le plan complexe.

Supposons donc qu'une racine λ_{α} n'est pas réelle, par exemple que sa partie imaginaire est strictement positive. Alors chaque facteur du second membre de l'équation (1.30*a*) est de module strictement supérieur à 1, de sorte que le module du second membre diverge exponentiellement avec M. Cette divergence doit donc être également prèsente dans le membre de gauche, de sorte qu'il doit exister une autre racine λ_{β} qui s'approche exponentiellement vite dans la limite $M \to \infty$ d'un pôle:

$$\lambda_{\beta} = \lambda_{\alpha} - i + O(\mathrm{e}^{-aM})$$

Si λ_{β} est encore de partie imaginaire strictement supérieure à zéro, on peut recommencer le processus: on obtient une nouvelle racine $\lambda_{\gamma} = \lambda_{\alpha} - 2i$, etc. Le processus s'arrête quand la partie imaginaire de la dernière racine considérée devient négative. En effet, pour les racines λ_{α} de partie imaginaire strictement négative, il faut au contraire une autre racine $\lambda_{\beta} = \lambda_{\alpha} + i$, ce dont on dispose par construction.

On peut de plus démontrer que si λ_{α} est une racine de (1.30), alors λ_{α} l'est aussi. Ceci nous amène naturellement à l'*hypothèse de corde* [9]: celle-ci stipule que les solutions de (1.30) forment des "cordes", c'est-à-dire des groupes composés de nombres complexes de même partie réelle et de parties imaginaires équidistantes. On définit ainsi une *j*-corde $(j \geq 1)$ comme un ensemble de *j* racines de la forme

$$\left\{\lambda_{j;\alpha} + i\left(\frac{j+1}{2} - k\right), \ 1 \le k \le j\right\}$$
(1.45)

où le centre de la corde $\lambda_{j;\alpha}$ est réel. On peut imaginer les cordes comme des états liés de pseudo-particules, du fait de la forme de (1.45) (bien sûr, les cordes ne sont pas plus des excitations physiques que les pseudo-particules elles-mêmes). Ceci suggère qu'il existe une interprétation plus profonde de l'hypothèse de corde, qui est liée à la procédure de fusion, ce que nous verrons au 2.3.1.

Pourquoi l'hypothèse de corde n'est-elle qu'une hypothèse, c'est-à-dire pourquoi l'argument naïf n'en est-il pas une preuve ? Le problème vient du fait que pour appliquer cet argument, il faut supposer que le nombre de racines m reste fini quand $M \to \infty$, ce qui n'est le cas que pour des états non-physiques très loin du vrai vide de la théorie. Si l'on considère au contraire des états excités au-dessus du vrai vide, on peut démontrer [10] que la divergence du membre de droite de (1.30*a*) quand $M \to \infty$ est exactement compensée par la divergence du membre de gauche due au fait que $m \sim M$, sans qu'il y ait besoin d'avoir de cordes¹⁵. Lorsque nous reviendrons à ces états excités (section **3.3**), nous ne ferons donc pas usage de l'hypothèse de corde.

Pour ce qui est des états thermodynamiques, au sens défini précédemment, il est raisonnable de supposer (bien que cela n'aie jamais été prouvé rigoureusement) que la compensation de la divergence n'est que partielle, de sorte que l'hypothèse de corde appliquée à ces états est valide.

Notons enfin que l'hypothèse de corde a souvent été utilisée en dehors de son domaine de validité, car elle reste "qualitativement" vraie; ainsi, on sait faire un comptage des états correct en supposant l'hypothèse de corde, même pour une chaîne finie [12].

1.2.4. BAE continues de la chaîne XXX

Admettons donc l'hypothèse de corde telle qu'elle a été définie au paragraphe précédent. On peut maintenant multiplier (1.30*a*) pour les différentes racines d'une même corde et on obtient des équations pour les centres des cordes; ainsi, pour le centre $\lambda_{j;\alpha}$ (où α parcourt les différentes *j*-cordes, $1 \leq \alpha \leq m_j$) d'une *j*-corde, on obtient

$$\prod_{\substack{j' \ge 1, \ 1 \le \beta \le m_{j'} \\ (j',\beta) \ne (j,\alpha)}} S_{jj'}(\lambda_{j;\alpha} - \lambda_{j';\beta}) = \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_k + ij/2}{\lambda_{\alpha} - \theta_k - ij/2}$$
(1.46)

¹⁵ En simplifiant quelque peu. Voir [10] et la généralisation XXZ [11] pour plus de détails. Notons que le fait que l'hypothèse de corde soit alors violée s'interprète tout naturellement comme le fait que les racines qui définissent ces états excités satisfont aux BAE physiques, qui par définition restent finies quand le nombre d'excitations physiques est fini, même si M a été envoyé à l'infini (voir 1.2.5).

où $S_{jj'}(\lambda)$ est la matrice S entre les *j*-cordes et les *j'*-cordes: elle est obtenue par définition en faisant le produit des facteurs $(\lambda + i)/(\lambda - i)$ sur toutes les paires de racines d'une corde et de l'autre. Le second membre est obtenu de la même manière. On peut faire subir une transformation similaire à (1.30*b*).

Les équations (1.46) ne font intervenir que les centres des cordes qui sont par définition réels; de plus, elles constituent manifestement une généralisation à plusieurs types de particules de la situation du paragraphe précédent. On peut donc introduire des densités de *j*-cordes $\rho_j(\lambda)$ et de trous de *j*-cordes $\tilde{\rho}_j(\lambda)$, et opérer comme au 1.2.1¹⁶. On a: $\int d\lambda \rho_j(\lambda) = m_j/L$, où m_j est le nombre de *j*-cordes, et de même on peut définir \tilde{m}_j par $\int d\lambda \tilde{\rho}_j(\lambda) = \tilde{m}_j/L$. Dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, m_j/L et \tilde{m}_j/L restent fixés de l'ordre de la seule échelle d'énergie que l'on ait: M/L. Nous serons plus tard amenés à considérer deux échelles d'énergie divergentes l'une par rapport à l'autre, mais pour l'instant, elles sont confondues.

Le système d'équations linéaires intégrales couplées ainsi obtenu peut être écrit de manière particulièrement esthétique si l'on introduit la "matrice de Cartan avec paramètre spectral" $C_{jk}(\lambda)$ définie par:

$$C_{jk}(\lambda) = \delta_{jk}\delta(\lambda) - (\delta_{jk-1} + \delta_{jk+1})s(\lambda) \quad j,k \ge 1$$
(1.47)

où

$$s(\lambda) = \frac{1}{2\cosh(\pi\lambda)}$$

La matrice de Cartan agit par convolution sur les fonctions de λ ; nous noterons par \star le produit de convolution: $f \star g(\lambda) \equiv \int d\mu f(\lambda - \mu)g(\mu)$. Dans (1.47), les indices vont de 1 à ∞ , ce qui signifie que C_{jk} est la matrice de Cartan du diagramme de Dynkin A_{∞} . La normalisation est telle que $\int d\lambda C_{jk}(\lambda)$ vaut *la moitié* de la matrice de Cartan au sens usuel, c'est-à-dire sans paramètre spectral.

Si l'on définit la transformée de Fourier d'une fonction $\phi(\lambda)$ par

$$\phi(\kappa) \equiv \int \phi(\lambda) \exp(2i\kappa\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

¹⁶ Notons que cette procédure est explicitée dans un cadre à peine plus compliqué dans [III.1.2]; nous adopterons ici des notations et conventions proches de celles de cet article; la normalisation des rapidités, elle, diffère, la correspondance étant: $\lambda = \Lambda/c$.

alors $s(\kappa) = 1/(2\cosh(\kappa))$, et la matrice de Cartan inverse C^{-1} est donnée par

$$C_{jk}^{-1}(\kappa) = C_{kj}^{-1}(\kappa) = 2\coth(\kappa)\exp(-j|\kappa|)\sinh(k\kappa) \qquad j \ge k$$

Les équations d'Ansatz de Bethe peuvent alors être mises sous la forme:

$$\tilde{\rho}_j + C_{jk}^{-1} \star \rho_k = \sigma \star K_j(\lambda) \tag{1.48}$$

c'est-à-dire que la dérivée logarithmique des matrices S entre les différents types de cordes s'exprime naturellement en termes de la matrice de Cartan inverse C^{-1} . On a introduit dans (1.48) le noyau $\sigma(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{M} \delta(\lambda - \theta_k)$, et les fonctions $K_j(\lambda) \equiv$ $(1/2\pi)j/(\lambda^2 + j^2/4)$ ($K_j(\kappa) = e^{-j|\kappa|}$), afin de récrire simplement le second membre. Rappelons que nous utilisons la convention de sommation sur les indices répétés.

Multiplions (1.48) par la matrice C_{jk} (qui agit par produit de convolution); on obtient la forme finale des BAE:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k + \rho_j = \delta_{j1} \sigma \star s(\lambda) \tag{1.49}$$

où $\sigma(\lambda) = \frac{M}{L}\delta(\lambda)$ pour la chaîne XXX, $\sigma(\lambda) = \frac{M}{2L}(\delta(\lambda - 1/c) + \delta(\lambda + 1/c))$ pour le modèle NJL.

Nous représenterons le système d'équations (1.49) par la figure 12.



Fig. 12: Le système de BAE de la chaîne XXX/modèle NJL SU(2).

Sur ce diagramme, chaque noeud (sauf le noeud coché) correspond à une équation; un trait entre 2 noeuds j et k (resp. entre le noeud j et le noeud coché) signifie qu'un terme $-s \star \tilde{\rho}_k$ (resp. $-s \star \sigma$) apparaît dans l'équation j. Si l'on oublie le noeud coché, ceci équivaut simplement à représenter le diagramme de Dynkin dont C_{jk} est la matrice de Cartan.

Ecrivons également l'énergie/impulsion du système: elles s'expriment en termes de racines des BAE (eqs. (1.31) et (1.32)), mais en utilisant (1.49), on peut les récrire en fonction des $\tilde{\rho}_j$; on obtient:

$$E/L = E_{g.s.}/L + \int d\lambda \,\tilde{\rho}_1(\lambda)\tilde{\epsilon}(\lambda)$$

$$P/L = \int d\lambda \,\tilde{\rho}_1(\lambda)\tilde{p}(\lambda)$$
(1.50)

où $\tilde{\epsilon}$ et \tilde{p} sont donnés par (1.34). Ceci est donc une démonstration (pour les états vérifiant l'hypothèse de corde, et bien qu'elle soit en l'occurrence inutile) des formules (1.33)-(1.34).

Le vide est obtenu pour $\tilde{\rho}_1(\lambda) = 0$, c'est-à-dire quand il n'y a aucun trou dans la mer de racines. La densité $\rho_1(\lambda)$ vaut alors: $\rho_1(\lambda) \equiv \rho_{g.s.}(\lambda) = \sigma \star s(\lambda)$, tandis que $\rho_j(\lambda) = \tilde{\rho}_j(\lambda) = 0$ pour j > 1. Les *j*-cordes (j > 1) n'ont pas d'effet sur l'énergie (1.50): c'est un phénomène que nous avions déjà observé au 1.1.5 (dégénérescence de l'état triplet et de l'état singlet). Leur rôle est élucidé en calculant le spin de l'état correspondant: partant de $2s = M - \sum_{j>1} j m_j$, on arrive à

$$2s = \tilde{m}_1 - \sum_{j \ge 2} (j-1)m_j \tag{1.51}$$

Les *j*-cordes (j > 1) permettent donc de diminuer le spin à nombre fixé de trous: ainsi, elles permettent de sélectionner dans quelle sous-représentation irréductible de $V^{\otimes \tilde{m}_1}$ se trouve le système.

Prenons enfin la limite d'échelle du modèle NJL. Pour cela, il faut réintroduire la densité linéique de fermions $D = M/L = a^{-1}$, que nous avions pour simplifier fixée à 1 dans la définition (1.34) de $\tilde{\epsilon}$ et \tilde{p} . Ainsi $\tilde{\epsilon}_{\text{NJL}}(\lambda) = D[\arctan(e^{\pi(\lambda-1/c)}) + \arctan(e^{\pi(-\lambda-1/c)})]$. Prenons alors les limites simultanées $D \to \infty$, $c \to 0$ de sorte que l'on garde fixée l'échelle d'énergie $m \equiv 2De^{-\pi/c}$ (cette limite est caractéristique de la génération dynamique de masse dans le modèle NJL): on a alors $\tilde{\epsilon}_{\text{NJL}}(\lambda) = m \cosh(\pi\lambda)$ et de même $\tilde{p}_{\text{NJL}}(\lambda) = m \sinh(\pi\lambda)$: c'est la paramétrisation usuelle (à un facteur π près) d'une particule relativiste massive de masse m. Egalement, les BAE (1.49) se simplifient dans la limite d'échelle et deviennent:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k + \rho_j = \delta_{j1} \frac{m}{2} \cosh(\pi \lambda) \tag{1.52}$$

Remarques:

* Supposons que nous ayons considéré un modèle NJL avec une seule chiralité (par exemple, uniquement des particules "droites"); évidemment, l'interaction (qui est entre particules de chiralités différentes) n'existe plus, et on obtient une théorie de doublets SU(2) de fermions de Weyl libres non-massifs. L'Ansatz de Bethe, le découplage charge/spin, la limite d'échelle, etc. constituent une manière compliquée de résoudre un modèle simple, mais qui n'en est pas moins intéressante. Reprenant les calculs, on voit que les équations sont inchangées, à part la relation de dispersion qui s'écrit $\tilde{\epsilon}(\lambda) = \tilde{p}(\lambda) = E e^{\pi \lambda}$ (où E est une échelle de masse arbitraire, puisqu'elle peut être modifiée par décalage de λ), ce qui est comme il se doit la relation de dispersion d'une particule droite non-massive. De même, les BAE s'écrivent:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k + \rho_j = \delta_{j1} \frac{E}{2} e^{\pi\lambda}$$
(1.53)

Remarquons que dans l'Ansatz de Bethe (tel qu'on l'a formulé ici), une masse n'apparaît que lorsque l'on met deux chiralités différentes de particules nues (nonmassives) ensemble, ce qui est assez compréhensible cinématiquement.

* Nous aurions également pu prendre une limite relativiste dans la chaîne XXX. En effet, dans la limite *infra-rouge*, on peut développer la relation de dispersion au voisinage de $\tilde{\epsilon} \sim 0$, et on voit facilement qu'on obtient une théorie conforme qui est le point fixe infra-rouge (du groupe de renormalisation) de la théorie. A part une subtile différence dans la définition des deux chiralités (que l'on peut aussi considérer comme une transformation de dualité; nous reviendrons sur ce point au **3.3**), ce point fixe infra-rouge est identique au point fixe *ultra-violet* du modèle NJL. La ressemblance entre un point fixe infra-rouge (de la chaîne de spins) et un point fixe ultra-violet (du modèle NJL) ne doit pas surprendre: en effet, c'est réellement la même région d'énergies que décrivent les deux théories conformes. Dans le premier cas, la limite infra-rouge consiste à regarder des énergies ϵ très petites comparées à la seule échelle d'énergie existante, c'est-à-dire le cutoff ultra-violet D: $\epsilon \ll D$. Dans le second cas, la limite ultra-violette consiste à regarder des énergies beaucoup plus grandes que la masse m, mais après la limite d'échelle qui envoie D à l'infini, de sorte que: $m \ll \epsilon \ll D$. On a simplement dans le second cas une condition supplémentaire $m \ll \epsilon$, du fait qu'on a affaire à une théorie massive obtenue par une limite d'échelle (ce qui provient de la constante c dans les inhomogénéités $\theta_k = \pm 1/c$, alors qu'aucune limite d'échelle n'existe pour la chaîne XXX.

1.2.5. BAE nues/BAE physiques: les excitations isotopiques SU(2)

Le passage des BAE nues aux BAE physiques est un concept un peu difficile à expliquer; nous allons donc utiliser les diagrammes décrivant la structure des BAE afin de mieux le visualiser. Les BAE physiques sont des équations obtenues *en supposant connus* le spectre et les matrices S des excitations physiques de la théorie. On leur applique alors la même procédure qu'aux particules nues dans le modèle NJL (déphasage sur un espace compactifié), ce qui nous amène à de nouvelles BAE, les BAE physiques, qui doivent être équivalentes par une transformation appropriée aux BAE que nous avons déjà écrites, c'est-à-dire les BAE nues.

Evidemment, les excitations physiques du modèle NJL étant des "trous", le passage des BAE nues aux BAE physiques est intimement lié à la dualité particule-trou. Cependant, du fait de la présence des excitations isotopiques (ou excitations de spin) qui reflètent la symétrie SU(2), l'équivalence comprend une étape supplémentaire par rapport à ce qui a été fait au 1.2.2:

 $\begin{array}{ccc} \text{particules nues} & \xrightarrow{\text{ABA}} & \text{ondes de spin} \\ (\text{multiplets de } SU(2)) & \xrightarrow{\text{ABA}} & \text{ondes de spin} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\$

(ABA=Ansatz de Bethe Algébrique)

Tout le principe des BAE physiques consiste à "remonter" la flèche du bas qui va vers la droite, en devinant un spectre et des matrices S (ou éventuellement en les obtenant par bootstrap) qui donnent des BAE équivalentes aux BAE nues.

Montrons comment ce procédé fonctionne pour le modèle NJL (avec des modifications mineures, on pourrait l'appliquer à la chaîne XXX). Supposons que les excitations physiques sont des doublets SU(2), avec une matrice S donnée par (1.35). Considérons un état constitué de M^{ph} particules de rapidités $\theta_1, \ldots, \theta_{M^{ph}}$ (c'est-à-dire d'énergie/impulsion $\epsilon_k = m \cosh(\pi \theta_k)$ et $p_k = m \sinh(\pi \theta_k)$). Considérons le système sur un espace compactifié de taille L, avec $mL \gg 1$, de sorte que l'on puisse supposer que les différentes particules sont séparées par des distances beaucoup plus grandes que 1/m. On peut alors utiliser les matrices S pour écrire la condition de déphasage d'une particule qui fait le tour de l'espace compactifié:

$$e^{-ip_k L} = S(\theta_k - \theta_{k-1}) \dots S(\theta_k - \theta_1) S(\theta_k - \theta_{M^{ph}}) \dots S(\theta_k - \theta_{k+1})$$
(1.54)

Cette équation est tout à fait analogue à l'équation (1.17), bien que son interprétation soit différente: dans (1.17), les rapidités θ_k (des particules nues) sont fixées, tandis que dans (1.54), elles ne le sont pas (en fait, à $L < \infty$, toutes les valeurs des θ_k ne sont pas pour autant admises puisqu'elles doivent être telles que l'équation aux valeurs propres (1.54) ait une solution, ce qui implique une quantification des θ_k). Pour résoudre (1.54), on remarque qu'ici encore le second membre de (1.54) est la trace de la matrice de monodromie inhomogène $T(\lambda = \theta_k | \theta_1, \dots, \theta_{M^{ph}})$, et on aboutit aux BAE (analogues de (1.30)):

$$1 = \prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} - i}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} + i} \prod_{k=1}^{M^{ph}} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_k + i/2}{\lambda_{\alpha} - \theta_k - i/2}$$
(1.55*a*)

$$e^{-ip_k L} = \prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{M^{ph}} \widehat{S}(\theta_k - \theta_l) \prod_{\alpha=1}^m \frac{\theta_k - \lambda_\alpha + i/2}{\theta_k - \lambda_\alpha - i/2}$$
(1.55b)

Remarquons la présence des facteurs $\widehat{S}(\theta_k - \theta_l)$, où $\widehat{S}(\lambda) = \frac{\Gamma(1+i\lambda/2)}{\Gamma(1-i\lambda/2)} \frac{\Gamma((1-i\lambda)/2)}{\Gamma((1+i\lambda)/2)}$, dus au fait que la matrice S physique est de la forme $S(\lambda) = \widehat{S}(\lambda)R(\lambda)$. Ces facteurs assurent que, même dans la représentation de plus haut poids (spin 1), c'est-à-dire en l'absence d'excitations de spin, les particules physiques ont une interaction.

Prenons enfin la limite thermodynamique des équations (1.55). L'équation (1.55a) est identique à (1.30a), et, en appliquant l'hypothèse de corde, on obtient immédiatement les BAE (cf (1.49))

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^{ph} + \rho_j^{ph} = \delta_{j1} s \star \sigma^{ph} \tag{1.56}$$

où ρ_j^{ph} et $\tilde{\rho}_j^{ph}$ sont les densités de *j*-cordes/trous de *j*-cordes des BAE (1.55), et σ^{ph} est la densité d'excitations physiques: $\sigma^{ph}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{M^{ph}} \delta(\lambda - \theta_k).$

Comme les θ_k sont des inconnues dans (1.55), il faut également récrire (1.55*b*) dans la limite thermodynamique; on prend la dérivée logarithmique et on obtient l'Equation d'Ansatz de Bethe supplémentaire:

$$2\pi(\sigma^{ph}(\lambda) + \tilde{\sigma}^{ph}(\lambda)) = m\pi \cosh(\pi\lambda) + 2\pi K_j \star \rho_j^{ph} + \left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\log\widehat{S}\right) \star \sigma^{ph}$$
(1.57)

Divisant par 2π et identifiant les noyaux, on obtient:

$$\tilde{\sigma}^{ph} + (C_{11}^{-1})^{-1} \star \sigma^{ph} + (C_{11}^{-1})^{-1} \star C_{1j+1}^{-1} \star \rho_j^{ph} = \frac{m}{2} \cosh(\pi\lambda)$$
(1.58)

En multipliant (1.58) par C_{11}^{-1} , on peut finalement identifier (1.56) et (1.58) avec (1.52); l'identification consiste à poser: $\sigma^{ph} = \tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\sigma}^{ph} = \rho_1$, ce qui est la confirmation que les excitations physiques sont des trous de 1-cordes; mais également $\rho_j^{ph} = \rho_{j+1}$ et $\tilde{\rho}_j^{ph} = \tilde{\rho}_{j+1}$, c'est-à-dire que les *j*-cordes physiques sont les (j + 1)-cordes nues! On peut représenter la transformation des BAE nues aux BAE physiques par la figure 13.



Fig. 13: Passage des BAE nues aux BAE physiques dans le modèle NJL. Les numéros sont les longueurs des cordes *nues*.

Dans les BAE nues, ce sont les particules nues (représentées par le noeud coché) qui servent de "source" (de second membre) aux excitations de spin. De même, dans les BAE physiques, ce sont les particules physiques, maintenant représentées par le noeud quadrillé, qui servent de source à leurs excitations de spin. Le noeud est quadrillé pour les BAE physiques, et non coché comme pour les BAE nues, pour indiquer que les particules physiques ont des rapidités qui sont elles-mêmes des paramètres physiques qui peuvent prendre des valeurs arbitraires, ce qui n'est pas le cas des particules nues.

Remarquons enfin que le spin est donné par $2s = M^{ph} - \sum_{j\geq 1} j m_j^{ph}$, ce qui concorde avec l'expression (1.51) obtenue à partir des BAE nues, du fait que $M^{ph} \equiv \tilde{m}_1$, $m_j^{ph} \equiv m_{j+1}$.

2. Structure des Equations d'Ansatz de Bethe

On peut généraliser de nombreuses manières les modèles considérés précédemment, et donc les BAE associées. Nous allons à présent considérer celles qui nous seront utiles pour les modèles physiques que nous avons en vue. Ceci nous contraint à un petit interlude mathématique; en effet, la notion algébrique sous-jacente aux modèles intégrables est celle de groupe quantique, et elle nous est indispensable pour aller plus loin dans nos constructions.

2.1. Généralités sur les groupes quantiques

En théorie quantique des champs, les symétries d'un modèle jouent un rôle essentiel dans son étude. Par symétrie, on entend généralement groupe de symétrie, bien que naïvement, toute observable qui commute avec le Hamiltonien puisse faire office de symétrie. Une remarque-clé est que la structure de groupe provient de l'exigence suivante: on demande que lorsqu'on a l'action de la symétrie sur un état à 1 particule, alors on sait aussi la faire agir sur un état à plusieurs particules. C'est ce qui nous amènera à la notion de co-multiplication pour les groupes quantiques.

Dans le cadre de la théorie des groupes, le théorème de Coleman-Mandula restreint énormément les symétries possibles d'une théorie quantique des champs. Un premier pas vers les groupes quantiques consiste à remarquer qu'en incluant les super-algèbres de Lie comme symétries possibles, on obtient des algèbres de symétrie plus grosses (supersymétrie). A quatre dimensions, on ne peut aller plus loin, car le théorème spin-statistique nous limite aux symétries bosonique/fermionique. Par contre, à deux dimensions, du fait qu'on peut avoir des statistiques arbitraires, on peut imaginer des symétries plus générales que les groupes ou les super-groupes: ce sont les groupes quantiques, qui sont obtenus en relaxant la condition de co-commutativité de la co-multiplication. Effectivement, les groupes quantiques s'avèrent être la symétrie naturelle des modèles intégrables à deux dimensions; les générateurs de groupes quantiques y apparaissent comme des charges non-locales [13]. Celles-ci forment en général des groupes quantiques qui sont des déformations d'algèbres de Lie de dimension infinie: ce sont les groupes quantiques affines, par opposition aux groupes quantiques usuels (de dimension finie).

Nous allons rappeler brièvement la définition d'un groupe quantique (2.1.1), et donner l'exemple de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ (2.1.2); puis nous passerons aux groupes quantiques affines et aux Yangiens (2.1.3), et développerons le cas de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ (2.1.4).

2.1.1. Quelques définitions

Il n'est pas question ici de traiter de manière détaillée la théorie des groupes quantiques. Nous renvoyons le lecteur aux références [14, 15, 16] pour plus de détails.

Rappelons simplement que pour nous, un groupe quantique est essentiellement une algèbre de Hopf quasi-triangulaire, c'est-à-dire, pour expliciter nos notations:

- a) une algèbre \mathcal{A} associative.
- b) la donnée d'un co-produit $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (homomorphisme d'algèbre co-associatif), d'une antipode $\gamma: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (anti-homomorphisme d'algèbre) et d'une co-unité $\varepsilon: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, qui vérifient des conditions de compatibilité appropriées.
- c) la donnée de la matrice R universelle: $\mathbf{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Celle-ci assure que l'algèbre de Hopf \mathcal{A} est "presque co-commutative":

$$\sigma(\Delta(a)) = \mathbf{R}\Delta(a)\mathbf{R}^{-1} \quad \forall a \in \mathcal{A}$$
(2.1)

où σ permute les facteurs dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$: $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$. La matrice **R** vérifie de plus les conditions de quasi-triangularité:

$$(1 \otimes \Delta)(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{12}$$

$$(\Delta \otimes 1)(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{23}$$

(2.2)

où par exemple $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R} \otimes 1 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Pour mémoire, on a aussi la condition $(\gamma \otimes 1)(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{-1}$.

Deux remarques élémentaires:

• En combinant (2.1) et (2.2), on obtient l'équation de Yang-Baxter sans paramètres spectraux:

$$\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{23} = \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{12} \tag{2.3}$$

en tant que relation dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

• Posons $\overline{\mathbf{R}} = \sigma(\mathbf{R}^{-1})$. Alors (2.1) implique que $\overline{\mathbf{R}}$ vérifie aussi la relation $\sigma(\Delta(a)) = \overline{\mathbf{R}}\Delta(a)\overline{\mathbf{R}}^{-1}$. Si $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{R}}$ alors on dit que l'algèbre de Hopf \mathcal{A} est triangulaire.

Nous nous intéresserons essentiellement aux représentations de groupes quantiques. Traduisons-donc nos définitions en termes de représentations:

a) une représentation de \mathcal{A} sur un Hilbert V est un morphisme d'algèbre de \mathcal{A} dans les endomorphismes de V; c'est donc donner à V une structure de \mathcal{A} -module à gauche. Nous abrègerons dorénavant représentation en "rep".

- b) Le co-produit Δ permet de définir le produit tensoriel de deux rep de \mathcal{A} : si ρ_1 est une rep sur V_1 et ρ_2 sur V_2 , alors $(\rho_1 \otimes \rho_2)\Delta$ est une rep sur $V_1 \otimes V_2$. L'antipode permet de même de définir la rep contragrédiente¹⁷: si ρ est une rep sur V, alors $(\rho\gamma)^*$ est une rep sur l'espace dual V^* . Enfin, la co-unité constitue la rep triviale de \mathcal{A} .
- c) Le produit tensoriel de rep n'est pas commutatif du fait de la non co-commutativité de Δ , c'est-à-dire que la simple permutation des facteurs $\mathcal{P}_{21\leftarrow 12}$: $V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$ n'entrelace pas les deux rep $\rho_{12} \equiv (\rho_1 \otimes \rho_2) \Delta$ et $\rho_{21} \equiv (\rho_2 \otimes \rho_1) \Delta$ sur $V_1 \otimes V_2$ et $V_2 \otimes V_1$. Cependant, la matrice **R**, prise dans les deux rep ρ_1 et ρ_2 : $R_{12} \equiv (\rho_1 \otimes \rho_2)(\mathbf{R})$ permet justement de construire un tel entrelacement: en effet, la relation (2.1) s'écrit en appliquant $\rho_1 \otimes \rho_2$:

$$\mathcal{P}_{12\leftarrow 21}\rho_{21}(a)\mathcal{P}_{21\leftarrow 12} = R_{12}\rho_{12}(a)R_{12}^{-1} \tag{2.4}$$

(où $\mathcal{P}_{12\leftarrow 21} = \mathcal{P}_{21\leftarrow 12}^{-1}$). On voit donc que $\check{R}_{12} \equiv \mathcal{P}_{21\leftarrow 12}R_{12}$ est un opérateur d'entrelacement entre ρ_{12} et ρ_{21} . Remarquons qu'avec nos notations qui consistent à placer en indice les espaces sur lesquels les matrices R agissent, il est inutile d'écrire explicitement les permutations " $\mathcal{P}_{ba\leftarrow ab}$ "¹⁸. Nous utiliserons donc R_{12} (et non \check{R}_{12}) autant que possible.

- De plus, pour trois rep ρ₁, ρ₂, ρ₃ données, on peut définir 3 matrices R: R₁₂, R₁₃, R₂₃ agissant sur V₁ ⊗ V₂, V₁ ⊗ V₃, V₂ ⊗ V₃; elles vérifient elles aussi d'après (2.3) l'équation de Yang–Baxter sans paramètres spectraux: R₁₂R₁₃R₂₃ = R₂₃R₁₃R₁₂.
- Enfin, si l'on a deux espaces de rep V_1 et V_2 , alors on a des opérateurs d'entrelacement: \check{R}_{12} qui va de $V_1 \otimes V_2$ vers $V_2 \otimes V_1$, et \check{R}_{21} qui va de $V_2 \otimes V_1$ vers $V_1 \otimes V_2$, mais ils ne sont inverses l'un de l'autre que si l'algèbre est triangulaire ($\mathbf{R} = \overline{\mathbf{R}}$).

En particulier si $V_1 = V_2 \equiv V$, d'après (2.4), $\check{R}_{12} = \check{R}_{21} \equiv \check{R}$ commute avec l'action du groupe quantique. On peut généraliser cette observation à un produit tensoriel de la forme $V^{\otimes n}$, *n* quelconque: la matrice \check{R} agissant sur deux espaces successifs du produit tensoriel commute avec l'action du groupe quantique et forme une représentation du groupe de tresses. Si l'algèbre est triangulaire, $\check{R}^2 = 1$ et on a affaire à une représentation du groupe symétrique (c'est par exemple le case des groupes quantiques affines à paramètre spectral nul, voir plus loin).

 $^{^{17}}$ D'où, en combinant co-produit et antipode, la représentation sur les opérateurs d'un Hilbert sur lequel \mathcal{A} agit, ce qui est important en physique.

¹⁸ C'est ce que nous avons fait implicitement au chapitre $\mathbf{1}$; cf l'équation d'unitarité (1.3).

L'ensemble des représentations d'une algèbre de Hopf \mathcal{A} (ou plus exactement, l'espace formé par leurs combinaisons linéaires), muni de la somme directe et du produit tensoriel, forme une algèbre associative \mathcal{R} . La "presque co-commutativité" de \mathcal{A} implique de plus que \mathcal{R} est commutative.

2.1.2. Algèbres de Lie simples et leur déformation; exemple de $\mathfrak{sl}(2)$

Le prototype de l'algèbre de Hopf co-commutative est l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . Le co-produit et l'antipode sont alors engendrés par leur définition sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} (et sur 1):

$$\Delta(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1 \quad \gamma(a) = -a \quad \varepsilon(a) = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{g}$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \qquad \gamma(1) = 1 \qquad \varepsilon(1) = 1 \qquad (2.5)$$

Dans ce cas, la matrice **R** est triviale: $\mathbf{R} = 1 \otimes 1$.

Si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact simplement connexe G, alors l'algèbre des représentations \mathcal{R} s'identifie à l'algèbre des fonctions de classe (i.e. invariantes par conjugaison) sur G: $\mathcal{R} = L^2_{class}(G)$. La base naturelle de \mathcal{R} constituée par les représentations irréductibles (que nous abrégerons en "irrep") s'identifie à la base des *caractères des irrep* de $L^2_{class}(G)$. On rappelle qu'à une représentation R et un élément $g \in G$ on peut associer le caractère $\chi_R(g)$ qui est par définition la trace de g pris dans la rep R. Pour R fixé, $g \to \chi_R(g)$ est une fonction de classe; inversement, pour g fixé, $R \to \chi_R(g)$ est une représentation (uni-dimensionnelle) de \mathcal{R} . L'algèbre \mathcal{R} possède une représentation naturelle qui est son action sur elle-même par multiplication; explicitement, à chaque représentation R on peut associer une matrice A (de taille infinie) à coefficients positifs qui donne son action par produit tensoriel dans la base des irrep:

$$R \otimes R_1 = \bigoplus_{R_2} A_{R_1}^{R_2} R_2 \qquad R_1, R_2 \text{ irrep}$$

Du fait de l'interprétation physique que nous lui donnerons, nous appellerons A la matrice d'adjacence associée à R. Comme \mathcal{R} est commutative, la représentation $R \to A(R)$ est décomposable en représentations uni-dimensionnelles, ce qui veut dire que les A(R)sont simultanément diagonalisables, de valeurs propres les caractères; on montre qu'on obtient ainsi tous les caractères exactement une fois, grâce à l'identité (qui nous donne aussi les vecteurs propres de A^t):

$$\chi_R(g)\chi_{R_1}(g) = \sum_{R_2} A_{R_1}^{R_2}\chi_{R_2}(g)$$

En particulier, la dimension d'une représentation R constitue la valeur propre de Perron– Frobenius de sa matrice d'adjacence.

De plus, si l'on veut éviter d'avoir à passer par le groupe G, on peut définir un caractère en restant au niveau de l'algèbre \mathfrak{g} de la manière suivante: on considère une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, et alors pour $x \in \mathfrak{h}$, $\chi_R(x) \equiv \operatorname{tr}_R(\exp(x))$ (où l'on considère x dans la représentation R, puis on exponentie).

Les exemples connus de groupes quantiques non co-commutatifs sont obtenus par déformation des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie usuelles: on les note $U_q(\mathfrak{g})$ [17], où q est le paramètre de déformation. Nous allons maintenant donner la définition précise de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Une construction similaire peut être effectuée pour toutes les algèbres de Lie \mathfrak{g} simples.

 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est l'algèbre engendrée par les générateurs K (inversible d'inverse K⁻¹), E, F et les relations [18,17]:

$$KEK^{-1} = q^{2}E$$

$$KFK^{-1} = q^{-2}F$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$
(2.6)

Il faut considérer que $K = q^{H}$ où $H \equiv 2S^{3}$ est l'équivalent du générateur de la sousalgèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}(2)^{19}$. Si l'on utilise la notation $\lfloor x \rfloor \equiv (q^{x} - q^{-x})/(q - q^{-1})$, alors $[E, F] = \lfloor H \rfloor$. De même, on pose $E = S^{+}K^{1/2}$ et $F = K^{-1/2}S^{-}$ (on a introduit $K^{1/2} = q^{H/2}$), de telle sorte qu'on ait encore $[S^{+}, S^{-}] = [E, F] = \lfloor H \rfloor$; S^{\pm} est alors analogue à l'opérateur $S^{1} \pm iS^{2}$ de $\mathfrak{sl}(2)$.

On voit que dans la limite $q \to 1$, (2.6) se réduit aux relations:

$$[S^3, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}$$

 $[S^+, S^-] = 2S^3$

qui ne sont autres que les relations de commutation de $\mathfrak{sl}(2)$.

Définissons maintenant le co-produit [19], l'antipode et la co-unité:

$$\Delta(\mathbf{K}) = \mathbf{K} \otimes \mathbf{K} \qquad \gamma(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^{-1} \qquad \varepsilon(\mathbf{K}) = 1$$

$$\Delta(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \otimes 1 + \mathbf{K} \otimes \mathbf{E} \qquad \gamma(\mathbf{E}) = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{E} \qquad \varepsilon(\mathbf{E}) = 0$$

$$\Delta(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \otimes \mathbf{K}^{-1} + 1 \otimes \mathbf{F} \qquad \gamma(\mathbf{F}) = -\mathbf{F}\mathbf{K} \qquad \varepsilon(\mathbf{F}) = 0$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \qquad \gamma(1) = 1 \qquad \varepsilon(1) = 1$$
(2.7)

¹⁹ H n'est pas défini en tant qu'élément abstrait de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$; cependant, dans les représentations que nous considérerons, H sera bien défini en tant qu'opérateur.

En termes de S[±], le co-produit se met sous la forme $\Delta(S^{\pm}) = S^{\pm} \otimes K^{-1/2} + K^{1/2} \otimes S^{\pm}$. Cette reformulation a le mérite de montrer que la transformation $q \to q^{-1}$ (et donc $K \to K^{-1}$), qui est une symétrie de (2.6), échange Δ et $\sigma \circ \Delta$ (et γ et γ^{-1}).

La théorie de la représentation de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, pour des valeurs génériques de q (c'està-dire pour q non racine de l'unité) ressemble à celle de $\mathfrak{sl}(2)$: pour chaque demi-entier s, on a une irrep de dimension 2s+1, l'action des générateurs dans la base de diagonalisation de S³ étant donnée par: (m = -s, -s + 1, ..., s)

$$S^{\pm}|s,m\rangle = \sqrt{\lfloor s \mp m \rfloor \lfloor s \pm m + 1 \rfloor} |s,m\pm 1\rangle$$

$$S^{3}|s,m\rangle = m|s,m\rangle$$
(2.8)

On voit que $H = 2S^3$ est bien défini en tant qu'opérateur. Les irrep sont classifiées par la valeur du q-Casimir quadratique C, générateur du centre de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$:

$$C \equiv S_{-}S_{+} + \lfloor S^{3} + 1/2 \rfloor^{2} = \lfloor s + 1/2 \rfloor^{2}$$

On appellera les irrep données par (2.8) les rep standard.

L'algèbre des représentations \mathcal{R} est donc isomorphe à celle de $\mathfrak{sl}(2)$. En d'autres termes, les coefficients de Littlewood-Richardson (les constantes de structure de \mathcal{R}) sont les mêmes; par contre, les symboles 3j (coefficients de Clebsch–Gordan) et 6j(Wigner–Racah) sont q-déformés [20]. On peut également définir des caractères $\chi_R(x) =$ tr_R(exp(xH)), qui sont les mêmes que les caractères usuels de $\mathfrak{sl}(2)$.

La situation est plus compliquée pour q racine de l'unité. Posons f le plus petit entier tel que $q^{f+2} = \pm 1$. Alors, on remarque que le centre de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est aggrandi, puisque $(S^{\pm})^{f+2}$ et K^{f+2} commutent avec tous les opérateurs de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Les représentations irréductibles de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ sont maintenant également classifiées par les valeurs propres de ces trois opérateurs, si on laisse ces dernières arbitraires: c'est ce qu'on appelle la spécialisation non-restreinte de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

Nous ne considérerons pas cette situation ici: nous n'aurons affaire qu'à des rep de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ telles que $\mathbf{K}^{f+2} = \pm 1$ et $(\mathbf{S}^{\pm})^{f+2} = 0$ (ce qui implique en particulier que H est bien défini comme opérateur dans ces rep). La théorie de la représentation n'en reste pas moins non-triviale: en effet, en imaginant q comme un paramètre amené à varier continûment, il est naturel de considérer que les opérateurs $(\mathbf{S}^{\pm})^{f+2}/\lfloor f+2 \rfloor!$ restent bien définis dans la limite où $\lfloor f+2 \rfloor! \equiv \prod_{i=1}^{f+2} \lfloor i \rfloor \to 0$ et $(\mathbf{S}^{\pm})^{f+2} \to 0$. L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ munie de ces nouveaux éléments constituent la spécialisation restreinte de

 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Les opérateurs correspondants aggrandissent les modules de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. En particulier, certaines rep deviennent réductibles mais indécomposables. Qu'advient-il des représentations standard quand q devient une racine de l'unité? On trouve la classification suivante:

- a) les représentations standard de spin s tel que $0 \le 2s \le f$ restent irréductibles.
- b) les représentations standard de dimension 2s + 1 = n(f + 2) restent également irréductibles.
- c) les autres se retrouvent groupées ensemble en rep réductibles mais indécomposables. Appelons "bonnes" (ou de type II) les rep a), et "mauvaises" (ou de type I) les rep b) et c). Il existe un critère simple pour distinguer les bonnes rep des mauvaises: on introduit pour cela la notion de q-dimension, qui n'est autre qu'un caractère particulier.

Par définition,

$$q \dim(R) = \operatorname{tr}_R(K) \tag{2.9}$$

Pour q = 1, on retrouve la notion de dimension usuelle. On calcule aisément pour la rep standard de spin s que $q \dim(R) = \lfloor 2s+1 \rfloor$. En particulier, pour $q = \pm \exp(\pm i\pi/(f+2))$, $q \dim(R) > 0$ pour $0 \le 2s \le f$. Par contre, pour les mauvaises rep, on a: $q \dim(R) = 0$ (c'est évident pour les rep de type b), et prouvable pour celles de type c)).

Ceci suggère de tronquer l'algèbre des représentations en ne conservant que les bonnes rep, c'est-à-dire de q-dimension non nulle, et en jetant les mauvaises [21]. Pour cela, il est nécessaire de définir un nouveau produit tensoriel tronqué: évidemment, il ne s'agit pas seulement d'éliminer les rep de q-dimension nulle, car ceci briserait l'associativité de l'algèbre \mathcal{R} (des bonnes rep peuvent apparaître par produit tensoriel de mauvaises). Dans le cas de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, une méthode simple pour construire les matrices d'adjacence tronquées (ce qui équivaut à donner le produit tensoriel tronqué) consiste à partir de la matrice A associée à la rep fondamentale (spin 1/2) et à la tronquer au sens littéral du terme: on obtient une matrice $(f+1) \times (f+1)$ (dans la base des irreps classées par ordre de dimension croissante):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on obtient les autres matrices d'adjacence dans la décomposition du produit tensoriel de rep de spin 1/2. Ainsi, la matrice d'adjacence de spin 1 vérifie $A_1 = (A_{\frac{1}{2}})^2 - 1$.

Nous donnerons une vision intuitive de ces matrices d'adjacence tronquées au 2.2.2. Donnons la formule finale du produit tensoriel de deux bonnes irrep de spins s et s' ($s' \leq s$):

$$s \otimes s' = \bigoplus_{s''=s-s'}^{\min(s+s',f-(s+s'))} s''$$

$$(2.10)$$

L'algèbre des représentations \mathcal{R}_{tronc} ainsi définie reste associative et commutative; elle est de dimension finie, et n'admet donc plus qu'un nombre fini d'irrep (caractères), la q-dimension étant l'un d'entre eux (valeur propre de Perron-Frobenius des matrices d'adjacence). Ceci revient à dire que les règles d'addition et de multiplication des caractères ne sont plus valables pour des caractères quelconques, du fait de la troncation (ainsi, la dimension du produit tensoriel tronqué n'est pas le produit des dimensions; par contre, la q-dimension du produit tensoriel tronqué est le produit des q-dimensions).

Finalement, on peut montrer que $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est quasi-triangulaire²⁰ et possède donc une matrice **R** universelle. Nous ne donnerons pas la formule abstraite de **R** (cf [15]), mais seulement sa matrice (et celle de $\overline{\mathbf{R}}$) dans deux représentations de spin 1/2:

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \qquad \overline{R} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$
(2.11)

2.1.3. Yangiens, groupes quantiques affines et matrices $R(\lambda)$

Nous avons vu au 2.1.1 des expressions pour les matrices R semblables à celles qui avaient été utilisées dans l'Ansatz de Bethe. Cependant, les matrices R des groupes quantiques ne dépendent *a priori* pas d'un paramètre spectral; en particulier, elles vérifient l'équation de Yang-Baxter, mais sans paramètres spectraux. Pour y remédier, il suffit de considérer des groupes quantiques dont les représentations sont indexées par un paramètre spectral λ : c'est ce qui nous conduit naturellement aux Yangiens et aux algèbres de boucles quantiques.

On sait qu'à une algèbre de Lie simple \mathfrak{g} on peut associer une algèbre affine (non tordue) $\hat{\mathfrak{g}}$ qui peut être considérée comme une extension centrale de l'algèbre de boucles $\hat{\mathfrak{g}}_0$ de \mathfrak{g} . Si l'on oublie l'extension centrale, on voit que l'on a précisément introduit un nouveau paramètre x (de sorte que l'algèbre de boucles soit: $\hat{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x, x^{-1}]$). Notons

 $^{2^{0}}$ Pour q générique. Pour q racine de l'unité, et dans la spécialisation restreinte, on peut tout de même trouver des matrices R pour toutes les représentations.

que dans l'application usuelle des algèbres affines à la physique (pour les théories conformes), x joue le rôle de variable d'espace-temps, alors qu'ici il constitue le paramètre spectral (on verra qu'il est relié à notre paramètre spectral habituel λ par $x = q^{i\lambda}$).

Pour des raisons qui vont apparaître plus loin, il est plus naturel de commencer par considérer le cas déformé. De la même manière que l'on peut déformer l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} en $U_q(\mathfrak{g})$, on peut déformer $\widehat{\mathfrak{g}}$ en un groupe quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$. En fait, nous ne nous intéresserons qu'aux représentations de niveau 0 de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})^{21}$, c'est-à-dire aux représentations de l'algèbre de boucles quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_0)$: en effet, celles-ci sont, comme dans la limite non-déformée q = 1, des représentations d'évaluation du paramètre x. On peut montrer que toute représentation de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_0)$ s'obtient par produit tensoriel de représentations d'évaluation.

On peut ensuite prendre la limite non-déformée $q \to 1$ (ou $q \to -1$, voir **2.2**); dans cette limite, et pour les modèles physiques qui nous intéressent, l'algèbre de boucles quantique $U_q(\hat{\mathfrak{g}}_0)$ ne redonne pas l'algèbre de boucles usuelle, mais "dégénère" en un Yangien [23,24], noté $Y(\mathfrak{g})$. $Y(\mathfrak{g})$ est encore une algèbre de Hopf non co-commutative, qui contient comme sous-algèbre l'algèbre universelle enveloppante $U(\mathfrak{g})$. La théorie de la représentation de $Y(\mathfrak{g})$ est complètement analogue à celle de $U_q(\hat{\mathfrak{g}}_0)$: ses représentations peuvent être obtenues par produit tensoriel de représentations dites d'évaluation. Nous n'expliciterons pas ici $Y(\mathfrak{g})$, et le lecteur est donc renvoyé aux références [14,25] pour plus de détails.

Pour deux rep d'évaluation V_1 et V_2 de paramètres spectraux λ_1 et λ_2 d'un groupe quantique affine/Yangien, la matrice $R(\lambda)$ entre les deux rep est une fonction de $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Ainsi, l'équation de Yang-Baxter acquiert la forme (1.4) avec paramètres spectraux. De plus, remarquons que l'équation d'unitarité (1.3) s'interprète alors comme la triangularité du groupe quantique affine/Yangien: $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{R}}$ prise dans $V_1 \otimes V_2$.

Il convient de remarquer que les Yangiens et les groupes quantiques affines ne sont pas *stricto sensu* des algèbres de Hopf quasi-triangulaires; en effet, ils ne sont pas tout à fait "presque co-commutatifs", fait qui s'avèrera important pour nous puisqu'il est lié à la procédure de fusion (section **2.3**). Cependant, on peut tout de même définir pour toute paire de rep V_1 et V_2 des matrices R qui vérifient l'équation de Yang-Baxter; et pour des valeurs génériques des paramètres spectraux caractérisant V_1 et V_2 , \check{R}_{12} entrelace bien $V_1 \otimes V_2$ et $V_2 \otimes V_1$.

Explicitons maintenant $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$.

²¹ Les représentations de niveau non nul peuvent quand même apparaître elles aussi, cf [22].

2.1.4. Le groupe quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ et ses représentations de niveau 0

(

L'algèbre $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ est engendrée par les éléments K_i (inversibles d'inverses K_i^{-1}), E_i , F_i (i = 0, 1) et les relations:

$$K_{i}K_{j} = K_{j}K_{i}$$

$$K_{i}E_{j}K_{i}^{-1} = q^{a_{ij}}E_{j}$$

$$K_{i}F_{j}K_{i}^{-1} = q^{-a_{ij}}F_{j}$$

$$E_{i}F_{j} - E_{j}F_{i} = \delta_{ij}\frac{K_{i} - K_{i}^{-1}}{q - q^{-1}}$$

$$(ad_{E_{i}})^{1 - a_{ji}}(E_{j}) = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(ad_{F_{i}})^{1 - a_{ji}}(F_{j}) = 0 \quad (i \neq j)$$

où (a_{ij}) est la matrice de Cartan de $A_1^{(1)}$: $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Nous n'écrirons pas plus explicitement les deux dernières conditions (voir [14] pour une définition de l'action adjointe q-déformée ad). On remarque que K_1K_0 appartient au centre de l'algèbre: dans une représentation irréductible, $K_1K_0 = q^n$, où *n* est le *niveau* de la représentation.

 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ contient deux sous-algèbres $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ (engendrées par K_i, E_i, F_i à *i* fixé), qui jouent a priori des rôles symétriques. Evidemment, ceci est à contraster avec la vision usuelle de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)}_0)$ comme algèbre de boucles (déformée), dans laquelle on a une sousalgèbre privilégiée, la sous-algèbre horizontale: les générateurs de cette dernière seront identifiés avec K₁, E₁, F₁. Le co-produit, l'antipode et la co-unité sont donnés pour chaque sous-algèbre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ par les relations (2.7).

Définissons à présent les représentations d'évaluation: elles sont obtenues par affin*isation* des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Ainsi, si l'on a défini une représentation de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ par l'action de ses générateurs E, F, K, alors l'action des générateurs de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est donnée par

On a $K_0K_1 = 1$, donc c'est une représentation de niveau 0, caractérisée par son spin (celui de la représentation de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ dont on est parti) et un paramètre spectral x. Remarquons également qu'à la représentation (2.13) est naturellement associée une qradation de $U_a(\mathfrak{sl}(2))$, c'est-à-dire que l'on associe aux générateurs E_1 , E_0 un degré +1 (car ils multiplient par x), à F₁, F₀ un degré -1, et à K₁, K₀ un degré 0. C'est la gradation *principale*, la plus naturelle pour nous.

Nous serons cependant amenés à considérer une autre gradation. Pour cela, effectuons un changement de base dépendant de x, de façon que E acquière un degré égal à -1, et F à +1. Alors, on obtient une nouvelle gradation, la gradation homogène, dans laquelle la sous-algèbre horizontale E_1 , F_1 , K_1 est de degré 0, tandis que E_0 est de degré 2 et F_0 de degré -2.

Prenons un exemple concret. Dans la représentation de spin 1/2, les matrices des générateurs (2.13) sont

$$E_{1} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad K_{1} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \\
 E_{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{0} = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_{0} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$
(2.14)

La matrice R(x) agissant sur $V_1 \otimes V_2$, produit tensoriel de deux représentations de spin 1/2 de paramètres spectraux x_1 et x_2 ($x = x_1/x_2$), vaut

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{x-x^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & \frac{q-q^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & 0\\ 0 & \frac{q-q^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & \frac{x-x^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2.15)

Effectuons maintenant le changement de base $|\tilde{\pm}\rangle = x^{\pm 1/2} |\tilde{\pm}\rangle$; on obtient les nouvelles matrices

$$\tilde{\mathbf{E}}_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{F}}_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{K}}_{1} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{E}}_{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{F}}_{0} = \begin{pmatrix} 0 & x^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{K}}_{0} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$
(2.16)

L'action de la sous-algèbre horizontale s'identifie à l'action usuelle de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Quant à la matrice $\tilde{R}(x)$, elle s'écrit

$$\tilde{R}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{x-x^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & x^{-1}\frac{q-q^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & 0\\ 0 & x\frac{q-q^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & \frac{x-x^{-1}}{xq-x^{-1}q^{-1}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{xR - x^{-1}\overline{R}}{xq - x^{-1}q^{-1}}$$
(2.17)

où R et \overline{R} sont les matrices R de sa sous-algèbre horizontale (cf (2.11)).

Qu'est-ce qui motive physiquement le choix d'une base ou de l'autre, et donc d'une gradation ou de l'autre? Pour se faire une idée, supposons que le groupe quantique affine agisse sur le Hilbert d'une théorie invariante relativiste, de telle sorte que λ ($x = q^{-i\lambda}$) s'identifie à la rapidité des états asymptotiques. Un choix naturel consiste à prendre des vecteurs de base $|\pm, x\rangle$ (où l'on a spécifié explicitement le paramètre spectral x de la représentation) tels que $|\pm, xx_1\rangle = \tau_x |\pm, x_1\rangle$ où τ_x est l'opérateur de boost dans l'espace de Hilbert. Ainsi, le degré d'un opérateur \mathcal{O} dans la gradation correspondante s'identifie au comportement sous le groupe de Lorentz de cet opérateur (son "spin"): $\tau_x^{-1}\mathcal{O}\tau_x = x^{\deg}\mathcal{O}\mathcal{O}$. Le choix de la gradation est donc lié au "spin" des générateurs du groupe quantique.

Remarquons enfin que, dans la limite $q \to 1$, la matrice R(x) (2.15) exprimée en termes de λ , avec $x = q^{-i\lambda}$ (on parle alors de matrice R trigonométrique), tend vers la matrice $R(\lambda)$ rationnelle (1.20). Cette dernière s'interprète dans ce contexte comme la matrice $R(\lambda)$ associée au Yangien $Y(\mathfrak{sl}(2))$.

Présentons maintenant la théorie de la représentation de $U_q(\mathfrak{sl}(2)_0)$ [26]. Nous supposerons q générique. On montre que toute représentation irréductible de dimension finie est caractérisée par un polynôme $P(x) = \prod_k (x-x_k)$; les x_k sont les paramètres spectraux associés à la représentation. Pour deux irrep de polynômes P(x) et Q(x) et des valeurs génériques de leurs racines, leur produit tensoriel est irréductible de polynôme P(x)Q(x). Voyons précisément ce qu'on entend ici par génériques.

Partons de la rep d'évaluation de spin 1/2, de paramètre spectral x_0 . Le polynôme associé est $P(x) = x - x_0$. Pour deux telles rep sur $V_1 = \mathbb{C}^2$ et $V_2 = \mathbb{C}^2$, de polynômes $P(x) = x - x_1$ et $Q(x) = x - x_2$, le produit tensoriel est irréductible sauf si $\lambda_2 - \lambda_1 = \pm i$ (on a repris notre paramétrisation $x = q^{-i\lambda}$). Dans ce cas, la représentation est réductible (mais indécomposable), et on a un sous-espace stable. Pour $\lambda_2 - \lambda_1 = +i$, ce sous-espace constitue la rep d'évaluation de spin 1, de polynôme $P(x)Q(x)^{22}$; pour $\lambda_1 - \lambda_2 = -i$, c'est la représentation de spin 0 (triviale), de polynôme 1. Remarquons la dissymétrie manifeste entre les deux cas: dans le premier cas, le polynôme est comme dans le cas générique le produit des polynômes, et non dans le second. Ceci est dû au fait que le vecteur de plus haut poids (pour une sous-algèbre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$) du produit tensoriel se trouve dans la sous-représentation dans le premier cas, et non dans le second. La sous-représentation du vecteur de plus haut poids joue donc un rôle spécial, ce que nous aurons l'occasion de revoir plus loin, lorsque nous mettrons en pratique ces résultats pour la procédure de fusion.

De même, la représentation d'évaluation de spin s admet pour polynôme $P(x) = \prod_{k=1}^{2s} (x - x_k)$ avec $x_k = q^{-i\lambda_k}$ et $\lambda_k = \lambda + i(s + 1/2 - k)$, c'est-à-dire que les λ_k forment

²² Ce sous-espace s'identifie avec la sous-représentation de spin 1 dans la décomposition $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$ pour une quelconque des deux sous algèbres $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

une 2*s*-corde. Nous justifierons d'ailleurs au 2.3.1 le lien avec l'hypothèse de corde. La représentation d'évaluation de spin *s* s'obtient donc comme sous-représentation du vecteur de plus haut poids de la représentation $V^{\otimes 2s}$ (*V* rep de spin 1/2) avec les paramètres spectraux $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2s}$.

De manière générale, pour deux représentations de polynômes P(x) et Q(x), leur produit tensoriel est irréductible si et seulement si les racines de P(x) et de Q(x) mises ensemble ne forment pas de nouvelles cordes (cas "générique"). Pour une analyse complète du cas non-générique, nous renvoyons le lecteur à [14].

2.2. Anisotropie

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour généraliser la chaîne XXX ou le modèle NJL en introduisant une anisotropie dans l'interaction spin-spin. Remarquons que nous ne considèrerons pas l'anisotropie la plus générale (les trois constantes de couplages différentes), car elle serait associée aux solutions *elliptiques* de l'Equation de Yang–Baxter (et aux groupes quantiques elliptiques) dont nous n'avons pas parlé; cependant, ce cas de figure ne nous intéresse pas directement car il est lié à des modèles sur réseau noncritiques.

2.2.1. La chaîne XXZ

Considérons donc un Hamiltonien de la chaîne XXZ, qui agit sur le même Hilbert $\mathcal{H} = V^{\otimes M}$ avec $V = \mathbb{C}^2$, et qui est donné par

$$\mathbf{H}_{XXZ} = \mathbf{H}_{XXZ}(\Delta) = -2\sum_{i=1}^{M} (\mathbf{s}_{k}^{1}\mathbf{s}_{k+1}^{1} + \mathbf{s}_{k}^{2}\mathbf{s}_{k+1}^{2} + \Delta\mathbf{s}_{k}^{3}\mathbf{s}_{k+1}^{3})$$
(2.18)

où Δ est un réel fixé. Ce Hamiltonien ne généralise pas de manière évidente le Hamiltonien XXX (1.1), du fait du signe – dans (2.18). Cependant, si l'on effectue la transformation $T = \prod_{k \text{ impair}} s_k^3$, alors le nouveau Hamiltonien $\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(\Delta) \equiv T\mathbf{H}_{XXZ}(\Delta)T^{-1}$ vaut

$$\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(\Delta) = 2\sum_{i=1}^{M} (\mathbf{s}_{k}^{1}\mathbf{s}_{k+1}^{1} + \mathbf{s}_{k}^{2}\mathbf{s}_{k+1}^{2} - \Delta\mathbf{s}_{k}^{3}\mathbf{s}_{k+1}^{3})$$

soit encore: $\mathbf{H}_{XXZ}(\Delta) = -\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(-\Delta)$. En particulier, $\mathbf{H}_{XXX} = \tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(\Delta = -1)$. Evidemment, les deux Hamiltoniens $\mathbf{H}_{XXZ}(\Delta)$ et $\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(\Delta)$ n'exhibent pas les mêmes symétries: par exemple, $\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(\Delta = -1) = \mathbf{H}_{XXX}$ a une invariance SU(2), alors que cette dernière n'est pas manifeste pour $\mathbf{H}_{XXZ}(\Delta = -1)$. De manière générale, on verra que $\mathbf{H}_{XXZ}(\Delta)$ est naturellement associé à un groupe quantique avec un paramètre de déformation q, où $\Delta = (q + q^{-1})/2$; alors, $\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}(\Delta) = -\mathbf{H}_{XXZ}(-\Delta)$ est associé à un paramètre de déformation -q. Cependant, ces deux groupes quantiques sont reliés de manière triviale l'un à l'autre. Dorénavant, de façon à nous conformer aux conventions de la littérature sur le sujet, nous ne considérerons plus le Hamiltonien de la chaîne XXZ que sous la forme \mathbf{H}_{XXZ} (et non $\tilde{\mathbf{H}}_{XXZ}$); en particulier, la limite isotrope correspond pour nous à $q \to -1$, et non à $q \to 1$.

Le Hamiltonien (2.18) n'est pas invariant sous SU(2), mais seulement sous l'action de sa sous-algèbre de Cartan U(1): $[\mathbf{H}_{XXZ}, \mathbf{S}^3] = 0$. Y a-t-il une symétrie naturelle de la théorie, qui puisse généraliser SU(2)?

Une première suggestion de réponse apparaît en remarquant que la chaîne XXZ, avec des conditions aux bords ouvertes particulières [27], possède une symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ où

$$\Delta = \frac{q+q^{-1}}{2} \tag{2.19}$$

Cependant, cette symétrie n'est "pas suffisante" pour nos besoins; en effet, on a vu aux paragraphes précédents que pour construire une matrice $R(\lambda)$ avec paramètre spectral, il nous faut une symétrie beaucoup plus grosse qu'un simple groupe quantique. Il est donc naturel de considérer le groupe quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ (pour q donné par la même valeur (2.19)), et de le faire agir sur le Hilbert $\mathcal{H} = V^{\otimes M}$ de la chaîne XXZ. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ agit sur V par la représentation de spin 1/2 et de paramètre spectral x = 1, et donc sur \mathcal{H} par co-produit. On introduit ensuite un espace auxiliaire V_a , de rapidité x, et la matrice de monodromie

$$T_a(x) = R_{aM}(x)R_{aM-1}(x)\dots R_{a1}(x)$$
(2.20)

où R(x) est la matrice R donnée par (2.15). Choisissons maintenant la paramétrisation suivante: posons $q = -e^{-i\gamma}$, soit $\Delta = -\cos\gamma$, et $x = e^{\gamma\lambda}$. La matrice R est alors donnée par

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sinh(\gamma\lambda)}{\sinh(\gamma(i-\lambda))} & \frac{\sinh(i\gamma)}{\sinh(\gamma(i-\lambda))} & 0\\ 0 & \frac{\sinh(i\gamma)}{\sinh(\gamma(i-\lambda))} & \frac{\sinh(\gamma\lambda)}{\sinh(\gamma(i-\lambda))} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2.21)

Pour avoir des conditions aux bords périodiques, on pose $\mathbf{T}(x) = \operatorname{tr}_a(T_a(x))$. On a alors la relation:

$$\mathbf{H}_{XXZ} = i \frac{\sin \gamma}{\gamma} \mathbf{T}(\lambda)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathbf{T}(\lambda)_{|\lambda=0} + \mathrm{cst}$$
(2.22)

Il est pratique de redéfinir $\mathbf{H}_{XXZ} \to \frac{\gamma}{\sin \gamma} \mathbf{H}_{XXZ}$ pour se débarrasser de la constante multiplicative dans (2.22). C'est ce que nous ferons dorénavant.

Par définition de la matrice $R(\lambda)$, on a

$$T_a(\lambda)g_{a\mathcal{H}} = g_{\mathcal{H}a}T_a(\lambda)$$

où $g_{a\mathcal{H}}$ (resp. $g_{\mathcal{H}a}$) est l'action d'un élément g de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ sur $V_a \otimes \mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H} \otimes V_a$); donc "modulo les termes de bord", c'est-à-dire en oubliant l'espace auxiliaire, $T_a(\lambda)$ commute avec l'action de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ sur \mathcal{H} . Cependant, ces termes de bord ne disparaissent pas quand on prend des conditions aux bords périodiques, et donc ni l'algèbre entière $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ ni même une quelconque sous-algèbre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ ne commutent avec le Hamiltonien \mathbf{H}_{XXZ} ; on peut seulement considérer que le groupe quantique affine constitue en un sens vague une symétrie du Hamiltonien de la chaîne XXZ dans la limite $M \to \infty$ (puisque le manque de commutation entre \mathbf{H}_{XXZ} et l'action de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ est lié à des termes de bord). Ce point de vue est celui qui est la base des travaux [22], mais leur optique est suffisamment différente de la nôtre pour que nous ne nous attardions pas sur ce point.

Signalons immédiatement que, de la même manière que l'on passe de la chaîne XXX à la chaîne XXZ, on peut considérer un modèle NJL déformé, dont le Lagrangien est [28]:

$$L = i\bar{\psi}^a \partial \!\!\!/ \psi^a - g j^3_\mu j^{3\mu} - f(j^1_\mu j^{1\mu} + j^2_\mu j^{2\mu})$$
(2.23)

Aussi bien la chaîne XXZ que le modèle NJL déformé nous conduisent à des cas particuliers de la matrice de monodromie inhomogène

$$T_a(x|y_1,\ldots,y_M) = R_{aM}(xy_M^{-1})R_{aM-1}(xy_{M-1}^{-1})\ldots R_{a1}(xy_1^{-1})$$
(2.24)

Pour le modèle NJL déformé, γ est donné par $\cos \gamma = \cos g / \cos f$ et les inhomogénéités $y_k = e^{\pm A}$ où $\tanh A = \cos f \sin \gamma / \sin g$ (de sorte que $A \to \infty$ quand $f \to 0$).

Comme au 1.1.3, on peut définir un modèle statistique sur réseau à partir de la matrice de monodromie (2.24): on obtient ainsi le modèle à 6 vertex général. En effet, la matrice la plus générale qui conserve la charge U(1) et qui est \mathbb{Z}_2 -invariante par retournement des flèches a les mêmes 6 poids non-nuls que $R(\lambda)$ et dépend de trois paramètres indépendants, qui sont pour nous la normalisation globale de la matrice R, le paramètre de déformation q et le paramètre spectral x.

Une fois que l'on a compris que l'anisotropie nous forçait simplement à remplacer le Yangien $Y(\mathfrak{sl}(2))$ par le groupe quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$, on peut recommencer l'Ansatz

de Bethe algébrique pour diagonaliser la matrice de transfert $\mathbf{T}(\lambda) = \operatorname{tr}_a(T_a(\lambda))$. La procédure est inchangée, mais elle nous conduit à de nouvelles équations d'Ansatz de Bethe:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{x_{\alpha} x_{\beta}^{-1} q^{-1} - x_{\alpha}^{-1} x_{\beta} q}{x_{\alpha} x_{\beta}^{-1} q - x_{\alpha}^{-1} x_{\beta} q^{-1}} = \prod_{k=1}^{M} \frac{x_{\alpha} y_{k}^{-1} - x_{\alpha}^{-1} y_{k}}{x_{\alpha} y_{k}^{-1} q - x_{\alpha}^{-1} y_{k} q^{-1}}$$
(2.25)

Nous nous limiterons dorénavant à la phase dite non-massive, c'est-à-dire $-1 < \Delta < 1$, soit encore |q| = 1. Dans la paramétrisation $q = -e^{-i\gamma}$, γ est réel, $0 < \gamma < \pi$.

Les BAE (2.25) se récrivent alors, après le décalage des λ_{α} de $i(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2\gamma})$:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\sinh(\gamma(\lambda_{\alpha}-\lambda_{\beta}+i))}{\sinh(\gamma(\lambda_{\alpha}-\lambda_{\beta}-i))} = \prod_{k=1}^{M} \frac{\sinh(\gamma(\lambda_{\alpha}-\theta_{k}+i/2))}{\sinh(\gamma(\lambda_{\alpha}-\theta_{k}-i/2))}$$
(2.26)

où $y_k \equiv e^{\gamma \theta_k}$. De même, la valeur propre $e^{-ip_k L}$ de $\mathbf{T}(\theta_k)$ correspondant à l'état de Bethe caractérisé par les λ_{α} vaut:

$$e^{-ip_k L} = \prod_{\alpha=1}^m \frac{\sinh(\gamma(\theta_k - \lambda_\alpha + i/2))}{\sinh(\gamma(\theta_k - \lambda_\alpha - i/2))}$$
(2.27)

Une différence essentielle avec le cas isotrope consiste en ce que, le système n'ayant plus l'invariance $\mathfrak{sl}(2)$ (ni l'invariance de groupe quantique du fait des conditions de bord), on ne peut plus rajouter de racines $\lambda_{\alpha} = \infty$ à une solution donnée; les états de Bethe avec des racines λ_{α} finies n'obéissent pas de contrainte du type plus haut poids. Les articles [29] prétendent même démontrer que tous les vecteurs propres sont ainsi obtenus²³, même si la preuve est peu convaincante.

Dans la région $-1 < \Delta < 1$ que nous considérons, le vide de la théorie, comme dans le cas isotrope, est non-trivial: il est obtenu en remplissant de racines des BAE (2.26) l'axe réel.

Dans la limite thermodynamique, il faut trouver une hypothèse de corde appropriée: celle-ci existe [30], mais elle est relativement compliquée pour une valeur quelconque de γ (elle dépend du développement en fraction continue de γ/π). Nous nous limiterons donc ici à la valeur $\gamma = \pi/(p+1)$, p > 1 entier (nous reviendrons à une valeur arbitraire de γ

 $^{^{23}}$ Le point important est que les "1⁻-cordes" – voir plus loin – n'ont pas d'équivalent dans la limite isotrope (où elles sont envoyées à l'infini) et permettent d'obtenir le prolongement des états de poids inférieurs.

quand nous parlerons de NLIE, section **3.3**), qui a un intérêt tout particulier pour nous. L'hypothèse de corde s'exprime alors ainsi: les racines des BAE (2.26) forment soit des *j*-cordes (centrées sur l'axe réel) avec $1 \le j \le p$, soit des "1⁻-cordes", c'est-à-dire des racines de partie imaginaire $\frac{\pi}{2\gamma}$. En utilisant des techniques similaires à celles employées au 1.2.3, on obtient le nouveau système d'Equations d'Ansatz de Bethe continues:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k + \rho_j - \delta_{j\,p-1}s \star \rho_{1-} = \delta_{j1}\sigma \star s(\lambda) \quad 1 \le j \le p$$

$$\tilde{\rho}_{1-} - s \star \tilde{\rho}_{p-1} + \rho_{1-} = 0$$

$$(2.28)$$

 C_{jk} est la matrice de Cartan avec paramètre spectral de A_p , c'est-à-dire qu'elle est donnée par (1.47), mais avec les conditions de bord $1 \le j, k \le p$. Comme nous nous resservirons de la matrice de Cartan de A_p plus tard, donnons son inverse en transformée de Fourier:

$$C_{jk}^{-1}(\kappa) = C_{kj}^{-1}(\kappa) = 2\coth(\kappa)\frac{\sinh((p+1-k)\kappa)\sinh(j\kappa)}{\sinh((p+1)\kappa)} \qquad k \ge j$$
(2.29)

Les BAE (2.28) peuvent être décrites par la figure 14.



Fig. 14: BAE de la chaîne XXZ à $\gamma = \pi/(p+1)$.

Le noeud supplémentaire lié au noeud p-1 est celui qui correspond aux 1⁻-cordes: le lien entre les deux noeuds signifie qu'il y a un terme $-s \star \tilde{\rho}_{p-1}$ dans l'équation du noeud 1⁻, et qu'il a un terme $-s \star \rho_{1-}$ dans l'équation du noeud p-1.

L'énergie-impulsion a précisément la même forme (1.33)-(1.34) que dans le cas isotrope (rappelons que nous avons redéfini la normalisation de \mathbf{H}_{XXZ} à cet effet). Les excitations physiques sont donc des trous dans la mer de Fermi de racines réelles des BAE, et elles ont les relations de dispersion $\tilde{\epsilon} = \pi \sin \tilde{p}$ pour la chaîne XXZ, $\tilde{\epsilon}^2 = \tilde{p}^2 + m^2$ pour le modèle NJL anisotrope (après avoir pris la limite d'échelle $D \to \infty$, $m \equiv 2De^{-\pi/c}$ fixée).

Bien sûr, le manque de symétrie du Hamiltonien à $L < \infty$ n'empêche pas les excitations physiques d'avoir une structure "isotopique", liée à la possibilité d'insérer des *j*-cordes, $j \ge 2$, et des 1⁻-cordes. Nous reviendrons sur ce point au 2.2.3; nous déterminerons alors également la matrice S des excitations physiques. Comme nous l'avons dit, le système que nous venons de décrire n'est pas invariant par l'action d'un groupe quantique du fait des conditions de bord. Il y a deux manières de rétablir cette invariance:

- * soit, comme nous l'avons expliqué précédemment, en prenant des conditions de bord ouvertes particulières [27]; ceci a le désavantage de modifier l'aspect des BAE, du fait qu'elles doivent maintenant incorporer les effets de réflection aux bord [31].
- ★ soit, pour q racine de l'unité (donc en particulier pour $\gamma = \pi/(p+1)$), on peut modifier la matrice de transfert (tout en conservant les conditions de bord périodiques) [32] de façon à restaurer la symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Il est alors naturel de changer la gradation du groupe quantique affine en la gradation homogène, de façon à faire de la symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ une sous-algèbre horizontale²⁴. Il est par contre impossible de restaurer la symétrie du groupe quantique affine complet.

Nous choisirons donc la deuxième solution: elle conduit à des BAE quasiment identiques à (2.26) (il y a simplement des "twists" supplémentaires²⁵); en particulier dans la limite thermodynamique, les BAE continues ont la même forme (2.28).

On peut alors implémenter la "troncation de groupe quantique". Rappelons que celle-ci consiste à tronquer le produit tensoriel $V^{\otimes M}$ qui constitue le Hilbert physique de façon à retirer les mauvaises rep au fur et à mesure qu'on effectue les produits tensoriels succesifs par V. Comme nous l'avons déjà signalé, cette procédure n'équivaut pas à simplement effectuer le produit tensoriel complet $V^{\otimes M}$, *puis* retirer les mauvaises rep: en effet, il existe des bonnes rep qui ont été obtenues par produit tensoriel de mauvaises rep et qui sont ainsi conservées alors qu'elles ne devraient pas appartenir au Hilbert tronqué \mathcal{H}_{tronc} . Une bonne visualisation de la procédure de troncation se fait grâce aux *diagrammes de Bratteli* (figure 15).

 $^{^{24}}$ En fait, le choix de la gradation nous est imposé par le fait que, dans la limite conforme, il existe une nouvelle action de l'algèbre de Virasoro qui modifie le spin des générateurs du groupe quantique – voir chapitre **3**.

²⁵ Ceux-ci compensent exactement les "twists" qui apparaissent par l'action des générateurs du groupe quantique, assurant ainsi l'invariance des BAE.



Fig. 15: Un diagramme de Bratteli. Le spin est placé en ordonnée.

On part de la représentation triviale, de spin s = 0, puis on effectue le produit tensoriel par V une première fois, et on obtient s = 1/2, puis une seconde fois et on obtient s = 0 ou s = 1, etc, jusqu'au cran M où l'on obtient le spin de l'état. A chaque diagramme allant du spin 0 au spin s correspond exactement une sous-rep de spin s de $V^{\otimes M}$, et on a ainsi construit une décomposition de $V^{\otimes M}$ en sous-rep irréductibles. La troncation consiste alors simplement à ne retenir que les diagrammes qui sont entièrement en-dessous de la valeur maximale s = (p-1)/2. Les diagrammes de Bratteli sont directement liés à la formulation IRF ("Interaction Round a Face") [33] des modèles qui nous intéressent (en l'occurrence les modèles IRF équivalents sont les modèles SOS/RSOS), mais il n'est pas possible, par manque de place, de discuter de cette formulation ici.

Au niveau de l'Ansatz de Bethe, la troncation implique de ne conserver que les états de Bethe qui sont les vecteurs de plus haut poids de bonnes représentations (de spin $s \leq (p-1)/2$) de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, et qui sont dans \mathcal{H}_{tronc} . Il y a plusieurs manières équivalentes de caractériser ces états (voir par exemple [34, 35] pour les conditions de bord ouvertes); dans la limite thermodynamique, on peut les identifier par les propriétés suivantes²⁶: $\rho_p = \tilde{\rho}_p = \rho_{1^-} = \tilde{\rho}_{1^-} = 0$, et donc, d'après les BAE (2.28), $\tilde{\rho}_{p-1} = 0$. La densité de (p-1)-cordes ρ_{p-1} n'est, elle, pas nécessairement nulle, (ce qui jouera un rôle par la suite), mais comme les différentes équations ne sont couplées entre elles que par les $\tilde{\rho}_j$, on peut supprimer le noeud p-1 sur le diagramme, d'où la figure 16.

Il y a encore correspondance entre noeuds des BAE tronquées et bonnes rep (à condition d'exclure les rep "triviales" de spins 0 et (p-1)/2). Nous ne donnerons pas la valeur du spin pour les états de Bethe de \mathcal{H}_{tronc} , car la situation est plus compliquée que dans le cas isotrope: ceci est dû au fait que le groupe quantique "nu" (celui dont on a parlé jusqu'à présent) et le groupe quantique "physique" (qui sera introduit au 2.2.3) sont

²⁶ Cette caractérisation a été trouvée dans [36], bien qu'elle ait été obtenue en supposant le spin $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ nul, ce qui est inutile – voir note suivante.



Fig. 16: Troncation de groupe quantique dans les BAE.

distincts. Bornons nous à constater que, dans la limite thermodynamique, s/L (le spin par unité de longueur) est nécessairement nul puisque $s \leq (p-1)/2$ tandis que $L \to \infty^{27}$.

2.2.3. BAE nues/BAE physiques: cas anisotrope

On peut également obtenir des BAE physiques pour le cas anisotrope. Pour ce faire, dessinons les diagrammes (non tronqués) correspondant aux BAE physiques et aux BAE nues pour $\gamma = \pi/(p+1)$ (figure 17).



Fig. 17: Passage des BAE nues aux BAE physiques dans le modèle NJL anisotrope. Les numéros sont les longueurs des cordes *nues*.

La situation est essentiellement la même que dans le cas isotrope, à une différence cruciale près: le diagramme auquel on a retiré un noeud n'est pas identique au diagramme complet; il correspond maintenant à une nouvelle valeur $\tilde{\Delta} = -\cos\tilde{\gamma}$, avec $\tilde{\gamma} = \pi/p$, de l'anisotropie.

Une fois cette différence observée, on conjecture que les excitations physiques sont des doublets du "groupe quantique affine physique" $U_{\tilde{q}}(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ ($\tilde{q} = -e^{-i\tilde{\gamma}}$), et que leur matrice S est donnée par $S(\lambda) = \widehat{S}(\lambda)R(\lambda)$, où \widehat{S} est un facteur scalaire et R est donnée

²⁷ En particulier, en remplaçant l'hypothèse s = 0 par l'hypothèse plus faible $s/L \to 0$ dans [36], on rend le raisonnement de cet article applicable à des états de spin quelconque.

par (2.15) pour le paramètre de déformation \tilde{q} (et où $x = e^{\tilde{\gamma}\lambda}$). Un calcul analogue à celui qui a été fait dans le cas isotrope nous permet de calculer $\hat{S}(\lambda)$ (à une phase globale près):

$$\widehat{S}(\lambda) = \exp\left(i\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa \,\frac{\sin(2\kappa\lambda)}{\kappa} \frac{\sinh((p-1)\kappa)}{\sinh(p\kappa)\cosh(\kappa)}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(1+i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\lambda}{2}\right)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1+i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{np+1}{2}-i\frac{\lambda}{2}\right)^{2}\Gamma\left(\frac{np}{2}+i\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1-i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{np+1}{2}+i\frac{\lambda}{2}\right)^{2}\Gamma\left(\frac{np}{2}-i\frac{\lambda}{2}\right)}$$
(2.30)

Cette matrice S s'identifie à la matrice S soliton-soliton de Sine–Gordon pour une constante de couplage $\beta^2/8\pi = p/(p+1)$, ce qui est un signe de l'équivalence des modèles NJL anisotrope et de Sine–Gordon. Le lien exact avec Sine–Gordon sera discuté au 3.3.2. Notons aussi que la nature des excitations physiques, et l'expression de leur matrice S, que nous avons obtenu pour $\gamma = \pi/(p+1)$, p entier, sont encore valables pour γ arbitraire, $0 < \gamma < \pi/2$, soit $p + 1 = \pi/\gamma$ non nécessairement entier.

Dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, on voit d'après l'expression de l'énergie, qui ne dépend que de la position des trous, et pas de leur spin, que le Hamiltonien commute avec l'action du groupe quantique affine $U_{\tilde{q}}(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$: c'est cette symétrie qui explique la dégénérescence supplémentaire du spectre à $L = \infty$. De même, dans la limite isotrope $\gamma \to 0$, on voit que la symétrie SU(2) est étendue en une symétrie $Y(\mathfrak{sl}(2))$ à $L = \infty$.

La situation reste inchangée quand on opère la troncation: comme on le voit diagrammatiquement sur la figure 18 (et comme on peut en effet le vérifier explicitement [35]), la troncation vis-à-vis du groupe quantique nu $U_q(\mathfrak{sl}(2)) \subset U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$ est équivalente à la troncation vis-à-vis d'un groupe quantique physique $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2)) \subset U_{\tilde{q}}(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$. Ainsi le Hilbert des excitations de basse énergie a la forme d'un espace de Fock tronqué.



Fig. 18: Passage des BAE nues aux BAE physiques dans le modèle NJL anisotrope tronqué.

Une manière agréable de visualiser la troncation consiste à considérer les excitations physiques comme des *solitons* (pour une revue des solitons dans les modèles intégrables, voir [37]). Pour cela, assignons à chaque nombre quantique s (spin de $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2)), 0 \leq 2s \leq f \equiv p-2$), un vide²⁸. D'après la loi de composition des spins

²⁸ Ceci veut-il dire que la théorie que nous considérons admet réellement plusieurs vides ? En fait, la réponse à cette question dépend des conditions de bord. Pour celles que nous avons prises (voir plus loin), le vide correspond nécessairement à la représentation triviale s = 0.



Fig. 19: Vision intuitive des différents vides.

 $s \otimes \frac{1}{2} = (s - \frac{1}{2}) \oplus (s + \frac{1}{2})$ (avec la restriction $0 \le 2s \le f$), une particule de spin 1/2 doit être considérée comme un soliton qui connecte deux vides adjacents (figure 19).

On part donc d'un vide à $x = -\infty$ qui est nécessairement pour nous s = 0; puis on place des solitons qui produisent des transitions vers des vides s > 0; la troncation est naturellement implémentée par le fait qu'on ne peut aller plus loin que le vide s = f/2.

Dans le langage solitonique, un état à deux solitons est spécifié par la donnée de trois vides, tandis que la diffusion de deux solitons est donnée par *quatre* vides: en effet, seul le vide intermédiaire peut changer entre avant et après la collision. La matrice S est donnée dans ce langage dans par exemple [38]; retrouvons-la explicitement à partir de notre matrice $S(\lambda) = \hat{S}(\lambda)\tilde{R}(\lambda)$, où l'on utilise la matrice \tilde{R} donnée par (2.17) (gradation homogène) de $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2))$. Du fait que $\check{S}(\lambda) \equiv \mathcal{P}S(\lambda)$ commute avec l'action du groupe quantique $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2))^{29}$, il peut se décomposer en projecteurs sur les différentes sous-irrep: on trouve

$$\check{S}(\lambda) = \widehat{S}(\lambda) \left(P_1 - \frac{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda+i))}{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda-i))} P_0 \right)$$
(2.31)

Il faut maintenant convertir ce résultat dans la base naturelle du langage solitonique: celle des chemins sur un diagramme de Bratteli (figure 20).

Ceci revient à décomposer la représentation $s \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ de deux manières différentes: $s \otimes (1 \oplus 0)$ pour (2.31), $(s + \frac{1}{2} \oplus s - \frac{1}{2}) \otimes \frac{1}{2}$ pour les diagrammes de la figure 20. Les diagrammes a et d sont clairement contenus dans $s \otimes 1$, et donc l'élément de matrice S associé n'est autre que $\widehat{S}(\lambda)$. Par contre, les diagrammes b et c mélangent $s \otimes 1$ et $s \otimes 0$, et la matrice \check{S}

²⁹ mais ne commute pas avec l'action du groupe quantique affine tout entier! En effet, \check{S} ne fait qu'entrelacer les représentations sur $V_1 \otimes V_2$ et $V_2 \otimes V_1$, qui sont distinctes à cause des paramètres spectraux. Par contre, grâce au changement de gradation, l'action du sous-groupe horizontal $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2))$ ne dépend pas du paramètre spectral.



Fig. 20: Les quatre chemins associés à deux excitations de spin 1/2.

n'est plus diagonale dans la base (b,c): il peut y avoir des transitions b \leftrightarrow c. Le calcul des coefficients 6*j* qui donnent le changement de base nous conduit aux formules suivantes:

$$S(a \to a) = S(d \to d) = \widehat{S}(\lambda)$$

$$S(b \to c) = S(c \to b) = \frac{\lfloor 2s + 2 \rfloor^{1/2} \lfloor 2s \rfloor^{1/2}}{\lfloor 2s + 1 \rfloor} \frac{\sinh(\tilde{\gamma}\lambda)}{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda - i))} \widehat{S}(\lambda)$$

$$S(b \to b) = -\frac{1}{\lfloor 2s + 1 \rfloor} \frac{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda + i(2s + 1)))}{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda - i))} \widehat{S}(\lambda)$$

$$S(c \to c) = \frac{1}{\lfloor 2s + 1 \rfloor} \frac{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda - i(2s + 1)))}{\sinh(\tilde{\gamma}(\lambda - i))} \widehat{S}(\lambda)$$
(2.32)

où $\lfloor x \rfloor \equiv \sin(\tilde{\gamma}x) / \sin(\tilde{\gamma})$. La formulation solitonique de la matrice \tilde{S} (2.32) est plus compliquée que sa formulation usuelle (2.31), du fait qu'intervient explicitement s, le nombre quantique qui décrit dans quels vides se situe l'interaction.

Notons également que la transition $c \to b$ est interdite pour s = f/2 (car $\lfloor f+2 \rfloor = 0$), ce qui est une justification *a posteriori* de la stabilité du Hilbert tronqué \mathcal{H}_{tronc} (cf [33] pour une remarque similaire).

2.3. Spin plus élevé et fusion

Jusqu'à présent, nous avons uniquement utilisé la représentation de spin 1/2 de SU(2) (ou sa déformation dans le cas anisotrope). Pourquoi ne pas utiliser les représentations de spin supérieur ? Pour cela, il faut construire les matrices $R(\lambda)$ correspondantes. Ce problème est intimement lié à la théorie de la représentation de $Y(\mathfrak{sl}(2))$ (ou $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$), et en fournit une bonne illustration. Pour simplifier la discussion, nous nous replaçons tout d'abord dans le cas isotrope.

2.3.1. La procédure de fusion

Nous avons vu que les matrices $R(\lambda)$ sont simplement les matrices dans une représentation donnée de la matrice R universelle de $Y(\mathfrak{sl}(2))$. Mais ceci ne nous fournit pas de manière explicite de calculer $R(\lambda)$. Le plus simple, pour y parvenir, est d'utiliser la procédure de fusion. Pour le restant de cette section, nous redéfinirons la matrice R: $R(\lambda) = \lambda - i\mathcal{P}$, suppriment le dénominateur $\lambda - i$ qui est un simple facteur scalaire. Evidemment, cette redéfinition brise l'unitarité: on a la condition plus faible $R_{12}(\lambda)R_{21}(-\lambda) = \rho(\lambda)1$.

La fusion est implémentée par l'équation de quasi-triangularité: pour 3 rep V_1 , V_2 , V_3 de paramètres spectraux λ_1 , λ_2 , λ_3 , on a, d'après (2.2):

$$R_{1(23)}(\lambda_1|\lambda_2,\lambda_3) = R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3)R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)$$
(2.33)

où $R_{1(23)}$ est la matrice R entre V_1 et $V_2 \otimes V_3^{30}$. Ainsi, la quasi-triangularité permet de construire la matrice R dans des représentations produit tensoriel à partir de celles des composantes du produit tensoriel. La matrice de monodromie inhomogène T_a introduite au **1.1**, en particulier, n'est autre que la matrice R entre l'espace auxiliaire V_a et l'espace de Hilbert entier \mathcal{H} .



Fig. 21: Représentation imagée de la quasi-triangularité, ou du bootstrap.

Le lecteur avisé aura reconnu en (2.33) une version algébrisée de la procédure de bootstrap (figure 21) pour les matrices S. Evidemment, il n'y a plus de pôles, car on a supprimé tous les facteurs scalaires dans les matrices R: les "états liés" potentiels seront donc déterminés par la condition que la matrice R laisse stable un sous-espace propre de $V_2 \otimes V_3$. L'idée est dès lors que, toute représentation de $Y(\mathfrak{sl}(2))$ pouvant être extraite du produit tensoriel des rep d'évaluation de spin 1/2, on obtiendra la matrice R dans toutes les rep.

³⁰ Du fait de l'inhomogénéité de la condition de quasi-triangularité par rapport à R, la normalisation de R importe; si l'on multiplie R par un facteur scalaire, alors (2.33) doit être modifiée de la même façon que l'équation d'unitarité.

Nous avons vu au 2.1.4 que, pour des valeurs génériques des paramètres spectraux, le produit tensoriel de deux rep d'évaluation est irréductible. Par contre, si les racines des deux polynômes associés forment une nouvelle corde, on a réductibilité. Ici, le cas se présente pour $\lambda_2 - \lambda_3 = \pm i$. Et en effet, l'équation de Yang-Baxter

$$R_{1(23)}(\lambda_1|\lambda_2,\lambda_3)R_{32}(\lambda_3-\lambda_2) = R_{32}(\lambda_3-\lambda_2)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2)R_{13}(\lambda_1-\lambda_3)$$
(2.34)

pour $\lambda_3 - \lambda_2 = -i$ (resp. $\lambda_3 - \lambda_2 = +i$) prouve, puisque R_{32} vaut alors le projecteur P_1 sur la sous-rep de spin 1 (resp. P_0 , de spin 0), que $R_{1(23)}$ laisse stable cette sous-rep. Posons donc $\lambda_2 = \lambda \pm i/2$, $\lambda_3 = \lambda \mp i/2$, et projetons $R_{1(23)}$ sur la sous-rep stable: on obtient la matrice R entre la rep de spin 1/2 et de paramètre spectral λ_1 et la rep de spin 1 ou 0 et de paramètre spectral λ . Explicitement, pour la rep de spin 1 (le cas le plus intéressant, puisque la rep de spin 0 est triviale), (2.34) implique la décomposition en blocs suivante:

$$R_{1(23)}(\lambda_1|\lambda + i/2, \lambda - i/2) = R_{13}(\lambda_1 - \lambda + i/2)R_{12}(\lambda_1 - \lambda - i/2) = \begin{pmatrix} R_{1\{23\}}(\lambda_1 - \lambda) & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R_{12}(\lambda_1 - \lambda - i/2)R_{13}(\lambda_1 - \lambda + i/2) = \begin{pmatrix} R_{1\{23\}}(\lambda_1 - \lambda) & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix}$$
(2.35)

où les deux blocs correspondent aux deux sous-rep de spin 1 et 0 dans $V_2 \otimes V_3$; $R_{1\{23\}}(\lambda)$ est donc la matrice R recherchée entre les rep de spin 1/2 et 1. Après avoir remis les facteurs scalaires, et changé de notation: $R_{1\{23\}} \equiv R_{\frac{1}{2},1}$ (on met en indice le *spin* des représentations), on obtient:

$$R_{\frac{1}{2},1}(\lambda) = \frac{\lambda - i/2 - 2\vec{s}_{\frac{1}{2}} \cdot \vec{s}_{1}}{\lambda - 3i/2}$$

où $\vec{s}_{\frac{1}{2}}$ et \vec{s}_1 sont les générateurs de $\mathfrak{sl}(2)$ dans les rep de spin 1/2 et 1.

On peut recommencer la procédure de fusion pour obtenir les matrices R pour des spins plus élevés. En particulier, d'après les résultats du 2.1.4, on sait que la matrice $R_{\frac{1}{2},s}$ peut être extraite de la matrice R agissant sur $V \otimes V^{\otimes 2s}$:

$$R_{12s+1}(\lambda + i(s-1/2))R_{13}(\lambda + i(s-3/2))\dots R_{12}(\lambda - i(s-1/2))$$
(2.36)

De plus, la sous-représentation de $V^{\otimes 2s}$ de spin 2s joue un rôle spécial: c'est la sousreprésentation de plus haut poids (i.e. elle contient le vecteur de plus haut poids de $V^{\otimes 2s}$). Ceci nous permettra d'utiliser la construction (2.36) pour généraliser les BAE à des spins supérieurs. Appliquons donc la procédure de fusion à la matrice de monodromie. On voit qu'il y a deux possibilités: on peut augmenter soit le spin de l'espace auxiliaire V_a , soit celui des espaces physiques V_i .

* Si l'on fusionne l'espace auxiliaire de la matrice de monodromie: on obtient alors une nouvelle matrice de monodromie $T_a(\lambda)$. On peut encore écrire des relations RTTdu type de (1.6) pour deux matrices T_a et T_b dont les espaces auxiliaires sont de spins quelconques; les matrices de transfert associées commutent donc entre elles. Ainsi, nous avons apparemment aggrandi l'ensemble des quantités qui commutent entre elles (et par exemple avec le Hamiltonien de la chaîne XXX); en fait, les nouvelles quantités conservées obtenues par fusion ne sont pas indépendantes des précédentes. Par exemple, en utilisant une décomposition du type (2.35), on a l'équation

$$\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}(\lambda + i/2)\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}(\lambda - i/2) = \mathbf{T}_{1}(\lambda) + \mathbf{T}_{0}(\lambda)$$
(2.37)

où l'indice correspond au spin de l'espace auxiliaire; en particulier, $\mathbf{T}_0(\lambda)$ est une fonction scalaire calculable. Comme tous ces opérateurs commutent, (2.37) est une équation pour leurs valeurs propres: c'est un cas particulier des équations de fusion satisfaites par les matrices de transfert, que nous étudierons à la section **3.2**.

De plus, puisque les nouvelles matrices de transfert fusionnées commutent avec la matrice de transfert non-fusionnée, la procédure de diagonalisation (1.1.4) n'est pas modifiée; seules les valeurs propres correspondantes sont différentes.

Remarquons qu'il existe une autre manière d'utiliser la fusion dans l'espace auxiliaire: bien que nous ne nous en servions pas par la suite, cette remarque est intéressante car elle donne une interprétation intuitive de l'hypothèse de corde. Considérons donc les opérateurs $\mathbf{B}(\lambda)$ utilisés dans la diagonalisation de la matrice de transfert: on peut eux aussi les fusionner. Il suffit de fusionner la matrice de monodromie correspondante, puis de prendre l'élément de matrice entre le vecteur de plus bas poids et le vecteur de plus haut poids du produit tensoriel des espaces auxiliaires.

Ainsi, l'opérateur $\mathbf{B}(\lambda_1) \dots \mathbf{B}(\lambda_m)$ peut être considéré comme un seul opérateur $\mathbf{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$! La matrice de monodromie correspondante a pour espace auxiliaire $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$. Ceci n'a pas d'intérêt tel quel. On peut faire mieux: supposons que les λ_{α} vérifient l'hypothèse de corde et fusionnons ensemble les différents λ_{α} appartenant à une même corde (figure 22).


Fig. 22: Fusion dans l'espace auxiliaire. Les flèches entourées d'un cercle sont les états de plus haut/bas poids.

Pour une corde de longueur j, on obtient précisément³¹ la représentation réductible du Yangien de sorte que le sous-espace irréductible du vecteur de plus haut poids (et de celui de plus bas poids) soit la rep de spin j/2 et de paramètre spectral le centre de la corde. La matrice R laisse stable ce sous-espace, et on peut donc remplacer les opérateurs $\mathbf{B}(\lambda_{\alpha_1})\mathbf{B}(\lambda_{\alpha_2})\ldots\mathbf{B}(\lambda_{\alpha_j})$, où les λ_{α_k} sont les différents membres d'une j-corde, par un seul opérateur $\mathbf{B}(\lambda_{j;\alpha})$ où \mathbf{B} est un élément de matrice de la matrice de monodromie dont l'espace auxiliaire est de spin j/2 et de paramètre spectral le centre de la corde $\lambda_{j;\alpha}$. Ceci nous donne une correspondance simple entre les différentes cordes, et donc les différents noeuds du diagramme 12, avec les représentations irréductibles (non triviales) de SU(2): on retrouvera cette correspondance lorsqu'il sera question d'équations de fusion.

 \star Si l'on fusionne les espaces physiques: la nouvelle matrice de transfert agit sur un espace de Hilbert constitué de spins dans des représentations plus élevées de SU(2). Toute représentation de spin *s* pouvant être considérée, grâce à la procédure de fusion (figure 23), comme sous-représentation *de plus haut poids* (parmi les différentes sous-représentations) du produit de 2*s* spins 1/2, il est inutile de recommencer la procédure de diagonalisation.

On obtient immédiatement les nouvelles Equations d'Ansatz de Bethe:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} + i}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} - i} = \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_k + is}{\lambda_{\alpha} - \theta_k - is}$$
(2.38)

L'équation (2.38) est obtenue à partie de l'équation non-fusionnée (1.30*a*) en appliquant (2.36) (ce sont les θ_k que l'on fusionne).

³¹ A condition de placer les racines dans l'ordre approprié. Les placer dans un autre ordre ne changerait évidemment rien, mais la situation serait plus confuse car on serait amené à considérer une partie indécomposable de la représentation du Yangien.



Fig. 23: Fusion dans l'espace physique.

2.3.2. Chaîne de spins XXX et modèle NJL fusionnés

On cherche maintenant à généraliser la chaîne de spins XXX (ou le modèle NJL) aux représentations de spin supérieur: on suppose que tous les spins (ou toutes les particules nues) sont dans la même représentation de spin s. Il faut alors combiner la fusion dans l'espace auxiliaire et dans l'espace physique, de sorte que l'on ait encore $V_a = V_k$: en effet, pour définir le Hamiltonien (ou pour relier la matrice de monodromie au déphasage d'une particule nue), on utilise le fait que $R(\lambda = 0) = \mathcal{P}$, ce qui n'a de sens que pour $V_a = V_k$. A nouveau, la chaîne XXX correspond au choix d'inhomogénéités $\theta_k = 0$. On peut alors développer au voisinage de $\lambda = 0$ $\mathbf{T}(\lambda)$, qui est une fonction génératrice de Hamiltoniens locaux. Ainsi, au premier ordre, on obtient un Hamiltonien de plus proches voisins, le Hamiltonien de la chaîne de spins s XXX; mais il est essentiel de noter que l'on n'obtient ainsi qu'un certain Hamiltonien de plus proches voisins invariant SU(2): d'autres sont possibles, qui ne sont pas intégrables, et qui peuvent avoir des propriétés physiques très différentes. Par exemple, tout Hamiltonien de plus proches voisins invariant SU(2) d'une chaîne de spins s = 1 est une combinaison linéaire de deux termes indépendants³²:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{M} \left[\alpha \, \vec{\mathbf{s}}_k \cdot \vec{\mathbf{s}}_{k+1} + \beta \, (\vec{\mathbf{s}}_k \cdot \vec{\mathbf{s}}_{k+1})^2 \right]$$

Pour des valeurs génériques des deux constantes de couplage α et β , le modèle a un gap, et seulement pour $\alpha = -\beta$ obtient-on la chaîne intégrable (qui, comme on va le voir, n'a pas de gap pour $\alpha < 0$).

De la même manière, on peut considérer des modèles NJL fusionnés. Notons que ceci n'a pas été fait explicitement pour toutes les valeurs de s (en effet, nous verrons au

 $^{^{32}}$ De manière générale, des arguments élémentaires de théorie des groupes montrent qu'il y a 2s termes indépendants dans un Hamiltonien de plus proches voisins de spin s.

chapitre 4 qu'il existe une autre manière d'arriver naturellement aux BAE fusionnées); le cas s = 1 (modèle fermionique invariant O(3)), par exemple, a été considéré dans [39]. Par extrapolation du cas non-fusionné, il est clair que l'on doit considérer la matrice de transfert inhomogène avec des inhomogénéités $\theta_k = \pm 1/c$ correspondant aux deux chiralités de fermions, c étant envoyé à 0 dans la limite d'échelle.

Pour éviter les confusions entre le spin des états de Bethe et le spin des constituants de la chaîne de spin (ou des particules nues), nous noterons ce dernier: $s \equiv f/2$, où f est un entier. Récapitulons alors les équations d'Ansatz de Bethe que nous obtenons pour les modèles fusionnés:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} + i}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} - i} = \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_k + if/2}{\lambda_{\alpha} - \theta_k - if/2}$$
(2.39*a*)

$$e^{-ip_k L} = \prod_{\alpha=1}^m \frac{\theta_k - \lambda_\alpha + if/2}{\theta_k - \lambda_\alpha - if/2}$$
(2.39b)

La seconde équation a été obtenue en appliquant la procédure de fusion dans l'espace auxiliaire (en plus de la fusion des θ_k); remarquons qu'on utilise ici le fait que $\mathbf{D}(\lambda = \theta_k)|\Psi\rangle = 0$, ce qui implique que la trace dans l'espace auxiliaire ne se fait que dans la sous-rep de plus haut poids.

On peut maintenant appliquer l'hypothèse de corde aux équations (2.39), et prendre la limite thermodynamique $L \to \infty$; on obtient la forme finale des BAE

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k + \rho_j = \delta_{jf} \sigma \star s(\lambda) \tag{2.40}$$

que l'on peut représenter graphiquement, avec les mêmes conventions de dessin qu'au *1.2.3*, par la figure 24.



Fig. 24: Le système de BAE de la chaîne de spins s intégrable (ici, s = 3/2).

On remarque la confirmation de la correspondance noeuds/représentations: pour une chaîne de spins s, le second membre agit sur le noeud f = 2s.

L'énergie/impulsion s'écrit

$$E/L = E_{g.s.}/L + \int d\lambda \,\tilde{\rho}_f(\lambda)\tilde{\epsilon}(\lambda)$$

$$P/L = \int d\lambda \,\tilde{\rho}_f(\lambda)\tilde{p}(\lambda)$$
(2.41)

où les fonctions $\tilde{\epsilon}$ et \tilde{p} sont encore données par (1.34), c'est-à-dire que l'énergie est minimisée quand il n'y a pas de trous de *f*-cordes: le vide de la théorie est un état constitué d'une densité continue (et sans trous) de *f*-cordes. Les excitations physiques sont alors créées en insérant des trous dans la mer de *f*-cordes. Le spin est maintenant donné par

$$2s = \tilde{m}_f - \sum_{j>f} (j-f)m_j$$
 (2.42)

donc les excitations physiques sont encore de spin 1/2. Cependant, on remarque que les *j*-cordes, pour j < f, n'influent plus sur le spin. Elles doivent avoir un autre rôle, qui sera élucidé au prochain paragraphe. En particulier, nous pourrons alors donner la matrice Sdes excitations physiques.

2.3.3. BAE nues/BAE physiques: spin supérieur

Commençons par dessiner le diagramme des BAE physiques pour le modèle NJL fusionné: on se convainc facilement qu'il a l'aspect du diagramme de droite de la figure 25.



Fig. 25: BAE nues et BAE physiques du modèle NJL fusionné.

Naïvement, ce diagramme suggère qu'il y a maintenant *deux* symétries qui classifient les excitations physiques:

♦ La symétrie SU(2) habituelle, qui, dans la vision "physique" des BAE, est liée aux noeuds j > f (ce qui est en accord avec l'expression du spin (2.42)). Cette symétrie s'étend en une symétrie $Y(\mathfrak{sl}(2))$. ♦ Une nouvelle symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, avec $q = -e^{-i\pi/(f+2)}$, qui est liée aux noeuds j < f. Cette nouvelle symétrie apparaît de la manière suivante: on considère d'abord un espace de Fock complet avec une symétrie $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(2)})$, tel que les particules élémentaires en soient des doublets (en plus de leur structure de doublet de $Y(\mathfrak{sl}(2))$). Puis on tronque l'espace de Fock vis-à-vis de la sous-algèbre horizontale $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

Partons alors d'un modèle massif relativiste dans lequel les particules élémentaires sont des doublets de SU(2) et de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, et dont la matrice S est donnée par

$$S(\lambda) = \widehat{S}(\lambda) R(\lambda) \otimes R'(\lambda)$$
(2.43)

où $R(\lambda)$ est la matrice R rationnelle (1.20), et $R'(\lambda)$ est la matrice R trigonométrique (2.21) ($\gamma = \pi/(f+2)$). On considère pour l'instant le modèle non tronqué (on pourrait aussi partir directement de la matrice S solitonique, comme cela est fait dans [40], mais celle-ci est plus lourde à manipuler).

La procédure habituelle de déphasage d'une particule physique quand elle fait le tour de l'espace compactifié nous conduit à diagonaliser deux matrices de transfert qui correspondent aux deux nombres quantiques. Leur diagonalisation par l'Ansatz de Bethe algébrique nécessite deux jeux de paramètres spectraux $\{\lambda_{\alpha}\}$ et $\{\mu_{\alpha}\}$ qui vérifient les équations d'Ansatz de Bethe suivantes:

$$1 = \prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m} \frac{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} - i}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta} + i} \prod_{k=1}^{M^{ph}} \frac{\lambda_{\alpha} - \theta_k + i/2}{\lambda_{\alpha} - \theta_k - i/2}$$
(2.44*a*)

$$1 = \prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m'} \frac{\sinh(\gamma(\mu_{\alpha} - \mu_{\beta} - i))}{\sinh(\gamma(\mu_{\alpha} - \mu_{\beta} + i))} \prod_{k=1}^{M^{ph}} \frac{\sinh(\gamma(\mu_{\alpha} - \theta_{k} + i/2))}{\sinh(\gamma(\mu_{\alpha} - \theta_{k} - i/2))}$$
(2.44b)

$$e^{-ip_k L} = \prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{M^{ph}} \widehat{S}(\theta_k - \theta_l) \prod_{\alpha=1}^m \frac{\theta_k - \lambda_\alpha + i/2}{\theta_k - \lambda_\alpha - i/2} \prod_{\alpha=1}^{m'} \frac{\sinh(\gamma(\theta_k - \mu_\alpha + i/2))}{\sinh(\gamma(\theta_k - \mu_\alpha - i/2))} \quad (2.44c)$$

On prend ensuite la limite thermodynamique $L \to \infty$ et on applique l'hypothèse de corde aux λ_{α} et aux μ_{α} : les ρ_{j}^{ph} et $\tilde{\rho}_{j}^{ph}$ sont les densités associées aux *j*-cordes de λ_{α} $(j \ge 1)$, les $\rho_{j}^{ph'}$ et $\tilde{\rho}_{j}^{ph'}$ sont associées aux *j*-cordes de μ_{α} $(1 \le j \le f + 1 \text{ ou } j = 1^{-})$, et σ^{ph} est la densité des rapidités des particules physiques. Les BAE sont:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^{ph} + \rho_j^{ph} = \delta_{j1} s \star \sigma^{ph} \quad j \ge 1$$
(2.45a)

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_{k}^{ph'} + \rho_{j}^{ph'} - \delta_{j\,p-2}s \star \rho_{1-}^{ph'} = \delta_{j1}s \star \sigma^{ph} \quad 1 \le j \le f + 1 \, (2.45b)$$

$$\tilde{\rho}_{1-}^{ph'} - s \star \tilde{\rho}_{p-2}^{ph'} + \rho_{1-}^{ph'} = 0 \qquad (2.45b')$$

$$\sigma^{ph}(\lambda) + \tilde{\sigma}^{ph}(\lambda) - \frac{m}{2}\cosh(\pi\lambda) + \sum_{j\ge 1} K_j \star \rho_{j}^{ph} + \sum_{j=1}^{f+1} K'_j \star \rho_{j}^{ph'} + K'_{1-} \star \rho_{1-}^{ph'} + \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \log \widehat{S}\right) \star \sigma^{ph} = 0 \qquad (2.45c)$$

où on a utilisé les fonctions

$$K_{j}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{j}{\lambda^{2} + j^{2}/4} \qquad K_{j}(\kappa) = e^{-j|\kappa|}$$
$$K'_{j}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma \sin(j\gamma)}{\sinh(\gamma(\lambda - ij/2)) \sinh(\gamma(\lambda + ij/2))} \qquad K'_{j}(\kappa) = \frac{\sinh((f+2-j)\kappa)}{\sinh((f+2)\kappa)}$$
$$K'_{1-}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma \sin(\gamma)}{\cosh(\gamma(\lambda - i/2)) \cosh(\gamma(\lambda + i/2))} = -K'_{p-1}(\lambda)$$

On voit que les équations (2.45*a*) et (2.45*b*) vont reproduire (après la troncation) les BAE (2.40) pour j < f et j > f, avec les identifications $\rho_j^{ph} = \rho_{j+f}$, $\tilde{\rho}_j^{ph} = \tilde{\rho}_{j+f}$ $(j \ge 1)$, et $\rho_j^{ph'} = \rho_{f-j}$, $\tilde{\rho}_j^{ph'} = \tilde{\rho}_{f-j}$ $(1 \le j \le f+1)$, $\rho_{1^-}^{ph'} = \rho_{1^-}$, $\tilde{\rho}_{1^-}^{ph'} = \tilde{\rho}_{1^-}$. Ce faisant, nous avons introduit trois noeuds en excédent: j = -1, j = 0 et $j = 1^-$, que la troncation doit supprimer. Cependant, avant de pouvoir opérer la troncation, il faut transformer (2.45c), car $\rho_0 = \rho_f^{ph'}$ y apparaît explicitement, et $\rho_0 \ne 0$ après la troncation, bien qu'il soit "invisible" dans le diagramme des BAE tronquées³³. Considérons donc la matrice de Cartan *C* agissant sur les indices $\{-1, 0, 1, \ldots\}$ (et non sur seulement $\{1, 2, \ldots\}$) et identifions les noyaux dans (2.45c):

$$\left(1 - \frac{1}{2\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \log \widehat{S}\right) \star \sigma^{ph} + \widetilde{\sigma}^{ph} + \sum_{j \ge 1} (C_{ff}^{-1})^{-1} \star C_{fj+f}^{-1} \star \rho_j^{ph} + \sum_{j=1}^{f+1} (C_{ff}^{-1})^{-1} \star C_{ff-j}^{-1} \star \rho_j^{ph'} - (C_{ff}^{-1})^{-1} \star C_{f0}^{-1} \star \rho_{1-}^{ph'} = \frac{m}{2} \cosh(\pi\lambda)$$

$$(2.46)$$

On voit qu'en multipliant (2.46) par C_{ff}^{-1} , puis en recombinant (2.46), (2.45*a*) et (2.45*b*), et finalement en tronquant, on obtient les équations (2.40) avec les identifications

³³ Si l'on oublie ce point, on aboutit à une formule incorrecte pour $\widehat{S}(\lambda)$, comme cela est expliqué dans [40].

supplémentaires: $\sigma^{ph} = \tilde{\rho}_f$, $\tilde{\sigma}^{ph} = \rho_f$ et $\delta(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \log \hat{S} = (C_{ff}^{-1})^{-1}$. On en déduit

$$\widehat{S}(\lambda) = \exp\left[-2i\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa \,\frac{\sin(2\kappa\lambda)}{\kappa} \left(\frac{1}{2\cosh\kappa} \frac{\sinh\kappa}{\sinh((f+2)\kappa)} \mathrm{e}^{(f+2)|\kappa|} - 1\right)\right] \\ = \exp\left[i\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa \,\frac{\sin(2\kappa\lambda)}{\kappa} \frac{1}{\cosh\kappa} \left(\mathrm{e}^{-|\kappa|} + \frac{\sinh((f+1)\kappa)}{\sinh((f+2)\kappa)}\right)\right]$$
(2.47)

On observe (seconde ligne de (2.47)) une factorisation "miraculeuse" (jusque dans les facteurs scalaires) de la matrice S de notre modèle fusionné en la matrice S de Gross–Neveu isotrope et celle de Gross–Neveu anisotrope à $\tilde{\gamma} = \pi/(f+2)$. Nous reviendrons sur ce phénomène dans la section **2.5**.

Ecrivons donc, après troncation, la matrice S dans le langage solitonique:

$$S(\lambda) = \frac{\Gamma\left(1+i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{\lambda-i\mathcal{P}}{\lambda-i} \otimes S_{\text{soli}}(\lambda)$$
(2.48)

où le premier facteur agit sur le nombre quantique SU(2), et la seconde partie est la matrice S solitonique donnée par (2.32).

Notons enfin que $\widehat{S}(\lambda)$ n'a de sens physique que pour $f \ge 2$. En effet, pour f = 1, le spin $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ est 0 ou 1/2, donc entièrement déterminé par la parité du nombre de particules. En particulier, deux particules diffusent nécessairement avec un spin $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ nul; on vérifie que les facteurs $\frac{\sinh(\frac{\pi}{3}(\lambda+i))}{\sinh(\frac{\pi}{3}(\lambda-i))}$ dans (2.48) se compensent (soit encore $S_{\text{soli}}(b \to b) = 1$ pour f = 1, s = 0) de sorte que (2.48) reproduit alors la matrice S de Gross-Neveu isotrope (Eq. (1.35)), comme il se doit.

Nous avons donc trouvé que les BAE physiques tronquées sont équivalentes aux BAE nues. Doit-on en conclure que le Hilbert du modèle NJL fusionné est exactement isomorphe à l'espace de Fock tronqué dont on a donné la construction au 2.2.3? Pour répondre à cette question, considérons plutôt la chaîne XXX, qui correpond au cas de figure le plus simple (la matrice de transfert est homogène), et supposons que le nombre de sites M est fixé et pair.

On peut alors calculer la dimension D de l'espace des états à \tilde{m}_f trous (\tilde{m}_f pair), soit par des simultations numériques, soit par un calcul analytique mais en supposant l'hypothèse de corde valide (même si ce n'est pas le cas): tenant compte de la dimension du multiplet SU(2) associé aux états de Bethe, on obtient le résultat exact (par un calcul classique): $D = 2^{\tilde{m}_f} (A^{\tilde{m}_f})_0^0$, où $(A^{\tilde{m}_f})_0^0$ est par définition la multiplicité de la rep triviale dans le produit tensoriel tronqué de \tilde{m}_f rep de spin 1/2. Ce résultat s'interprète très simplement: le facteur $2^{\tilde{m}_f}$ est lié à la structure doublet SU(2), tandis que le facteur $(A^{\tilde{m}_f})_{00}$ suggère que l'on n'obtient que les états qui sont dans la représentation triviale de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Ceci se vérifie explicitement grâce à la correspondance BAE nues/BAE physiques: en effet, on vérifie que les états solutions des BAE nues, retraduits dans le langage des BAE physiques, sont les états de spin $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ nul, à condition de rajouter les f-cordes physiques "cachées".

On se trouve donc dans la situation suivante: bien que l'espace physique soit invariant par $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, cette symétrie est tout de même nécessaire pour expliquer le facteur $(A^{\tilde{m}_f})^0_0$ dans D: on parle alors de symétrie cachée.

Y a-t-il un moyen de récupérer les représentations non-triviales de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$? Comme premier pas, supposons que l'on ait fixé au contraire le nombre de sites M à une valeur impaire. On peut refaire le calcul de la dimension de l'espace des états à \tilde{m}_f trous, et on obtient³⁴: $D = 2^{\tilde{m}_f} (A^{\tilde{m}_f})_0^{\frac{f}{2}}$, où cette fois $(A^{\tilde{m}_f})_0^{\frac{f}{2}}$ est la multiplicité de la rep de spin f/2dans le produit tensoriel tronqué de \tilde{m}_f rep de spin 1/2. Comme on le vérifie explicitement, on atteint ainsi l'équivalent des états de plus haut poids de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ dans la rep de spin f/2. L'interprétation en termes de "symétrie cachée" est la suivante: on prend l'espace de Fock tronqué total \mathcal{H}_{tronc} , on le tensorise par la rep de spin f/2 de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ et on prend le sous-espace invariant: $(\mathcal{H}_{tronc} \otimes V^{f/2})_{inv}$. Celui-ci est précisément isomorphe à l'espace des états de la chaîne XXX fusionnée avec un nombre impair de sites.

Il ne reste plus qu'à obtenir les rep de spin s, où 0 < s < f/2. Ceci est possible à condition de recourir à un artifice: considérons une chaîne de spins modifiée qui contient M sites de spin f/2 (M pair) et 1 site de spin s. Les cas étudiés précédemment sont les cas limites s = 0 et s = f/2. Le spin supplémentaire doit être considéré comme une condition de bord spéciale de la chaîne de spins (figure 26).

On associe à cette chaîne le Hamiltonien intégrable obtenu comme la dérivée logarithmique de la matrice de transfert homogène, c'est-à-dire le Hamiltonien usuel plus un terme de bord.

Dans la limite thermodynamique, les excitations physiques sont encore des trous dans la mer de f-cordes, et on peut une fois de plus calculer la dimension de l'espace des états

³⁴ Je n'ai pas tenté de démontrer ce résultat, mais je l'ai vérifié numériquement dans de très nombreux cas. J'ai en particulier vérifié, comme test non-trivial de ces simulations numériques, qu'en sommant sur les rapidités possibles, puis sur \tilde{m}_f , on obtient exactement la dimension du Hilbert complet.



Fig. 26: L'ajout du spin *s* modifie les conditions de bord dans la vision solitonique.

à \tilde{m}_f trous: on obtient, comme prévu³⁵: $D = 2^{\tilde{m}_f} (A^{\tilde{m}_f})_0^s$. Ainsi, la bonne interprétation de l'espace des états est: $(\mathcal{H}_{tronc} \otimes V^s)_{inv}$, où V^s est la rep de spin s de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

Résumons la construction qui vient d'être faite: nommons \mathcal{H}^s le Hilbert "limite" quand $M \to \infty$ de la chaîne de spins fusionnée avec un spin *s* supplémentaire. Alors le Hilbert complet s'écrit:

$$\mathcal{H}_{tronc} = \bigoplus_{s=0}^{f/2} \mathcal{H}^s \otimes V^s \tag{2.49}$$

Dans le langage de [39], on peut dire que la resommation (2.49) du Hilbert permet de "refractionniser" le nombre quantique solitonique.

La construction que nous avons faite peut paraître un peu artificielle, mais nous verrons plusieurs situations physiques dans lesquelles elle apparaît naturellement: pour les modèles fermioniques invariants U(Nf) (couleur × saveur) dans lesquels il y a fusion dynamique des spins (le spin supplémentaire constitue alors les fermions restants qui n'ont que partiellement fusionné), et surtout pour le modèle de Kondo dans le régime surécranté (le spin supplémentaire s'identifie à l'impureté). Nous reviendrons donc en détail sur l'interprétation de cette construction.

Terminons par un exemple concret qui montre comment la correspondance BAE nues/BAE physiques fonctionne: classifions les états à deux trous (de *f*-cordes) dans la chaîne de spins f/2 ($f \ge 2$). Supposons d'abord qu'il y a M spins f/2 (et pas de spin supplémentaire); on trouve alors deux états à deux trous:

 $^{^{35}\,}$ A nouveau, il ne s'agit que d'une conjecture (probablement facile à démontrer) basée sur des simulations numériques.

- L'état constitué de deux trous λ₁, λ₂, et d'une (f − 1)-corde de centre (λ₁ + λ₂)/2. Dans la vision des BAE physiques, la (f − 1)-corde est une 1-corde pour la partie U_q(sl(2)) de la matrice de transfert; chaque racine faisant diminuer de 1 le spin, et chaque trou correspondant à un spin 1/2, le spin U_q(sl(2)) vaut donc s = 0. Par contre, le spin sl(2) vaut s = 1.
- L'état constitué de deux trous λ₁, λ₂, d'une (f − 1)-corde et d'une (f + 1)-corde toutes deux de centres (λ₁ + λ₂)/2. Dans la vision des BAE physiques, la (f + 1)-corde est une 1-corde pour la partie sl(2) de la matrice de transfert; donc le spin sl(2), aussi bien que le spin U_q(sl(2)), est nul.

Si l'on suppose que l'on a rajouté dans la chaîne un spin 1, on trouve de même deux états:

- L'état constitué de deux trous, dont les spins $\mathfrak{sl}(2)$ et $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ valent tous deux 1.
- L'état constitué de deux trous et d'une (f + 1)-corde, de spin $\mathfrak{sl}(2)$ nul et de spin $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ égal à 1.

2.3.4. Fusion mixte

Nous avons jusqu'à présent considéré le cas le plus simple où toutes les particules nues (ou tous les spins) appartiennent à la même représentation. Rien ne nous empêche de considérer des matrices de transfert mixtes, comprenant différentes représentations. Du point de vue de la chaîne de spins, le seul problème consiste à définir un Hamiltonien raisonnable physiquement. Ainsi, dans [41] est introduite une chaîne de spins alternés 1/2 et 1, mais le Hamiltonien contient des couplages entre seconds plus proches voisins. De manière générale, si l'on considère un modèle NJL fusionné avec des particules nues dans les représentations $f_1/2, f_2/2, \ldots, f_k/2$, de sorte que l'énergie d'une j-corde ($j = f_1, \ldots f_k$) soit négative, alors on aboutit par un raisonnement identique à ce qui a été fait précédemment au diagramme de BAE physiques donné par la figure 27.



Fig. 27: BAE physiques d'un modèle NJL mixte.

On a alors k types différents d'excitations physiques; la $j^{\text{ème}}$ particule est obtenue en créant un trou de f_j -corde, et possède deux nombres quantiques: $U_{q_j}(\mathfrak{sl}(2))$ et $U_{q_{j+1}}(\mathfrak{sl}(2))$ $(q_j = -e^{-i\pi/(f_j - f_{j-1} + 2)}$ pour $1 \leq j \leq k$, $f_0 \equiv 0$, $f_{k+1} \equiv \infty$). On vérifie que cette vision est compatible avec les résultats trouvés dans [41,42] pour les chaînes de spins mixtes (dans le langage de [42], le nombre quantique de groupe quantique constitue le comportement "parafermionique" des excitations physiques).

Nous aurons nous-mêmes à considérer de tels modèles mixtes, par exemple pour le modèle de Wess–Zumino–Witten (chapitre 4). D'autres exemples de modèles relativistes avec fusion mixte ont été récemment étudiés (voir par exemple [43,44]).

2.3.5. Fusion et anisotropie

La procédure de fusion s'applique également au cas anisotrope; elle permet de la même manière de déplacer le second membre des BAE vers le noeud de son choix. Nous aurons l'occasion d'étudier un exemple concret de ce cas de figure à propos du régime surécranté de Kondo (section **4**).

2.4. Rang plus élevé

Une dernière généralisation consiste à remplacer l'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$, de rang 1, par une algèbre de rang plus élevé. On peut définir des matrices $R(\lambda)$ pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} simple³⁶ et pour des représentations appropriées V de \mathfrak{g} , et de là la matrice de transfert inhomogène, la chaîne de spins XXX et le modèle NJL \mathfrak{g} -symétriques.

Nous ne parlerons ici que du cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$, où toute irrep de \mathfrak{g} s'étend en une représentation d'évaluation de $Y(\mathfrak{g})$ [45].

2.4.1. Modèles invariants SU(N)

Pour la représentation fondamentale $V = \mathbb{C}^N$ de plus basse dimension de $\mathfrak{sl}(N)$, la matrice R de $V \otimes V$ vaut alors:

$$R(\lambda) = \frac{\lambda - i\mathcal{P}}{\lambda - i} = P_{\Box \Box} + \frac{\lambda + i}{\lambda - i}P_{\Box}$$
(2.50)

soit la même expression que dans le cas SU(2).

³⁶ Comme nous l'avons vu dans la section précédente, ces matrices $R(\lambda)$ sont plus précisément associées aux Yangiens $Y(\mathfrak{g})$ basés sur \mathfrak{g} .

On définit la matrice de monodromie inhomogène de la manière habituelle (eq. (1.21)). En prenant des inhomogénéités nulles, et en développant par rapport au paramètre spectral, on obtient le Hamiltonien \mathbf{H}_{XXX} SU(N):

$$\mathbf{H}_{\mathrm{XXX}} = -i\mathbf{T}(\lambda)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathbf{T}(\lambda)_{|\lambda=0} = \operatorname{cst} + \sum_{k=1}^{M} \vec{\mathbf{s}}_{k} \cdot \vec{\mathbf{s}}_{k+1}$$
(2.51)

où les s_k^A $(A = 1, ..., N^2 - 1)$ sont les générateurs de $\mathfrak{sl}(N)$. En prenant des inhomogénéités $\theta_k = \pm 1/c$, on obtient le modèle NJL SU(N).

La diagonalisation de la matrice de transfert se fait grâce à l'Ansatz de Bethe emboîté [46]. Nous ne décrirons pas ici cette procédure qui généralise l'Ansatz de Bethe usuel. La diagonalisation se fait par étapes successives, chaque étape faisant diminuer le rang de l'algèbre de 1 et faisant apparaître un nouveau jeu de paramètres spectraux. La structure des Equations d'Ansatz de Bethe qui en résulte reproduit le diagramme de Dynkin de l'algèbre correspondante (ici, A_{N-1}):

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m^r} \frac{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^r + i}{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^r - i} \prod_{\substack{t=1\\t=r\pm1}}^{N-1} \prod_{\beta=1}^{m^t} \frac{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^t - i/2}{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^t + i/2} = \begin{cases} \prod_{k=1}^{M} \left(\frac{\lambda_{\alpha}^1 - \theta_k + i/2}{\lambda_{\alpha}^1 - \theta_k - i/2}\right) & r = 1\\ 1 & r > 1 \end{cases}$$
(2.52)

où m_r est le nombre de racines λ_{α}^r au rang $r, 1 \leq r \leq N-1$. Les λ_{α}^r ont déjà été décalés dans (2.52).

Les propriétés énoncées pour le cas SU(2) s'étendent au cas SU(N); en particulier, les états de Bethe sont de plus haut poids, et ces derniers valent:

$$R = R_0 - \sum_{r=1}^{N-1} m^r \alpha^r$$

où α^r est la $r^{\text{ème}}$ racine simple de $\mathfrak{sl}(N)$, et R_0 est le plus haut poids du Hilbert complet: il correspond à la représentation du pseudo-vide $|\Omega\rangle$. Pour une chaîne à M sites dans la représentation fondamentale $V = \mathbb{C}^N$, on a: $R_0 = M\omega_1$, où ω_1 est le poids fondamental correspondant.

Dans la limite thermodynamique $M \to \infty$, on peut encore appliquer l'hypothèse de corde pour les racines de chaque rang; on doit donc introduire les densités de *j*-cordes de rang $r \rho_j^r(\lambda)$ et les densités de trous $\tilde{\rho}_j^r(\lambda)$. Les Equations d'Ansatz de Bethe continues s'écrivent sous la forme:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^r + C^{qr} \star \rho_j^q = \delta_{j1} \delta^{r1} \sigma \star s(\lambda)$$
(2.53)

La matrice C^{qr} est la matrice de Cartan avec paramètre spectral (donnée par (1.47)) de A_{N-1} . Nous pouvons représenter les BAE (2.53) par la figure 28.



Fig. 28: Le système de BAE de la chaîne XXX SU(N)/modèle NJL SU(N) (ici N = 4).

Le noeud à la ligne r et à la colonne j correspond à l'équation faisant intervenir $\rho_j^r + \tilde{\rho}_j^r$. En plus des traits horizontaux qui représentent des termes $-s\star\tilde{\rho}_{j\pm 1}^r$ (ou $-s\star\sigma$ pour le noeud coché), on a dessiné des traits verticaux qui correspondent aux termes $-s\star\rho_j^{r\pm 1}$.

L'énergie-impulsion est donnée par

$$E/L = E_{\text{g.s.}}/L + \sum_{r=1}^{N-1} \int d\lambda \, \tilde{\rho}_j^r(\lambda) \tilde{\epsilon}_1^r(\lambda)$$

$$P/L = \sum_{r=1}^{N-1} \int d\lambda \, \tilde{\rho}_j^r(\lambda) \tilde{p}_1^r(\lambda)$$
(2.54)

où

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}_{\rm NJL}^r(\lambda) = g^r(\lambda - 1/c) + g^r(\lambda + 1/c) \\ \tilde{p}_{\rm NJL}^r(\lambda) = g^r(\lambda - 1/c) - g^r(\lambda + 1/c) \end{cases} \begin{cases} \tilde{\epsilon}_{\rm XXX}^r(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}g^r(\lambda) \\ \tilde{p}_{\rm XXX}^r(\lambda) = g^r(\lambda) \end{cases}$$
(2.55)
$$g^r(\lambda) = 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{N-r}{N}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{N}\lambda\right)\right) + \pi\frac{N-r}{N}$$

Le vide est donc rempli de racines réelles (1-cordes) de tous les rangs, et il y a N-1 types d'excitations physiques, créées en plaçant des trous de rang r (r = 1, ..., N-1). La représentation d'un état est donnée par:

$$R = \sum_{r=1}^{N-1} \tilde{m}_1^r \omega^r - \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) \sum_{r=1}^{N-1} m_j^r \alpha^r$$

où ω^r est le $r^{\text{ème}}$ poids fondamental de $\mathfrak{sl}(N)$, et \tilde{m}_1^r est le nombre de trous de rang r. L'excitation de rang r appartient donc à la $r^{\text{ème}}$ représentation fondamentale de $\mathfrak{sl}(N)$ (tableau de Young constitué d'une colonne de taille r). Elles diffusent bien sûr avec une matrice S proportionnelle à la matrice R entre les rep des deux particules; par exemple,

$$S^{11}(\lambda) = \widehat{S}^{11}(\lambda) \left(P_{\Box\Box} + \frac{\lambda + i}{\lambda - i} P_{\Box} \right)$$
$$S^{1\bar{1}}(\lambda) = \widehat{S}^{1\bar{1}}(\lambda) \left(P_{ad} + \frac{\lambda + iN/2}{\lambda - iN/2} P_{\emptyset} \right)$$

où $\overline{1} \equiv N - 1$. Nous calculerons les préfacteurs scalaires dans le paragraphe sur les BAE physiques (2.4.3).

Nous n'irons pas plus loin dans l'analyse de ce modèle, car il est préférable de le généraliser tout de suite aux modèles fusionnés. En effet, on peut à nouveau appliquer la procédure de fusion au cas SU(N), ce qui permet d'obtenir la matrice R dans deux représentations arbitraires de $\mathfrak{sl}(N)$. Si l'on place au $k^{\text{ème}}$ site un spin dans la représentation $R_k = \sum_{r=1}^{N-1} \mu_k^r e^r$ (avec les notations du [III.A], c'est-à-dire dont la $r^{\text{ème}}$ ligne du tableau de Young a μ_k^r boîtes), et de paramètre spectral θ_k , alors les équations d'Ansatz de Bethe s'écrivent:

$$\prod_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{m^r} \frac{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^r + i}{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^r - i} \prod_{\beta=1}^{m^{r-1}} \frac{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^{r-1}}{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^{r-1} + i} \prod_{\beta=1}^{m^{r+1}} \frac{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^{r+1} - i}{\lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^{r+1}} = \prod_{k=1}^{M} \left(\frac{\lambda_{\alpha}^r - \theta_k - i\mu_k^{r+1}}{\lambda_{\alpha}^r - \theta_k - i\mu_k^r} \right)$$
(2.56)

(les λ_{α} n'ont pas encore été décalés; par contre, les θ_k ont été décalés d'une constante imaginaire qui dépend de la rep R_k , pour simplifier les équations). L'expression de la valeur propre correpondante est un peu compliquée, et nous ne la donnerons pas dans le cas général.

Nous nous limiterons désormais au cas où les spins physiques vivent dans des représentations V_k qui correspondent à des tableaux de Young *rectangulaires*: en effet, c'est seulement dans ce cas que l'hypothèse de corde s'applique encore. Supposons donc que tous les spins appartiennent à la représentation $n \times f$; après décalage des λ_{α} , et passage à la limite thermodynamique, on obtient les BAE représentées par la figure 29, c'est-à-dire la généralisation évidente de la figure 28.



Fig. 29: BAE SU(N) fusionnées.

On voit qu'il y a correspondance entre les noeuds de la figure 29 et les représentations rectangulaires (et elles seulement). L'énergie-impulsion est maintenant donnée par une expression similaire à (2.54), mais où ce sont les trous de *f*-cordes qui contribuent à l'énergie: le vide est donc obtenu en remplissant la mer de Fermi de *f*-cordes de tous les rangs, et il y a à nouveau N - 1 types d'excitations physiques (trous de *f*-cordes de type r, r = 1...N - 1). Dans la limite d'échelle du modèle NJL SU(N) fusionné $(c \to 0, D \to \infty)$, l'énergie

$$\tilde{\epsilon}_{\rm NJL}^r(\lambda) = m \sin(\pi r/N) \cosh(2\pi \lambda/N)$$
$$\tilde{p}_{\rm NJL}^r(\lambda) = m \sin(\pi r/N) \sinh(2\pi \lambda/N)$$

exhibe le spectre de masse: $m^r = m \sin(\pi r/N)$, où $m = 2D \frac{\sin(\pi n/N)}{\sin(\pi/N)} e^{-2\pi/Nc}$ est l'échelle de masse engendrée dynamiquement. On voit que la taille verticale du tableau de Young des spins physiques peut être entièrement cachée dans l'échelle de masse.

Enfin, les BAE représentés par la figure 29 (qui sont la généralisation fusionnée des équations (2.53)), pour être écrites dans la limite d'échelle, doivent être multipliées par la matrice de Cartan inverse de A_{N-1} (qui agit sur les indices placés en exposant)³⁷; on trouve alors:

$$C^{-1qr} \star C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^q + \rho_j^r = \delta_{jf} \frac{m}{N} \sin(\pi r/N) \cosh(2\pi\lambda/N)$$
(2.57)

2.4.2. Rang plus élevé et anisotropie

On peut aussi combiner rang plus élevé et anisotropie. On sait définir la matrice R de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(N)})$ [47] (le rang de l'algèbre augmente mais le nombre de paramètres de déformation disponibles reste égal à 1): dans la gradation homogène, on a encore la relation $\tilde{R}(x) = (xR - x^{-1}\bar{R})/(xq - x^{-1}q^{-1})$, où R et \bar{R} sont les matrices R de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, que l'on peut trouver dans [47]. On peut alors définir la chaîne XXZ SU(N) et le modèle NJL déformé SU(N). Cependant, il faut signaler que le Hamiltonien XXZ SU(N) n'est pas hermitien. Nous ne nous apesantirons donc pas sur ce cas de figure, et passerons directement au modèle tronqué à $\gamma = \pi/(p+1)$ ($q = -e^{-i\gamma}$), puisqu'à ces valeurs, la troncation permet de restaurer l'unitarité [48].

La procédure de troncation pour $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ avec q racine de l'unité, est similaire au cas N = 2. On a une notion de q-dimension: $q \dim R = \operatorname{tr}_R(K)$ avec $K = q^{\sum_{\alpha>0} H^{\alpha}}$ (H^{α})

 $^{^{37}}$ Sans cela, le second membre s'annule dans la limite d'échelle pour N>2, et les BAE ne contiendraient plus toute l'information nécessaire.

élément de la sous-algèbre de Cartan correspondant à la racine positive α), qui permet de distinguer les "bonnes" représentations des mauvaises. Si $q^{f+N} = \pm 1$, alors les "bonnes" représentations $R = \sum_{r=1}^{N-1} n^r \omega^r$ sont celles dont le tableau de Young a moins de f colonnes $(n^1 + \cdots + n^{N-1} \leq f)$, et on peut définir des matrices d'adjacences tronquées pour ces représentations (cf [III.5.3]).

Au niveau de l'Ansatz de Bethe, et bien que cela n'ait pas été prouvé rigoureusement, on a de bonnes raisons de penser [49]³⁸ que la chaîne XXZ SU(N) tronquée (ou le modèle NJL correspondant) admet les BAE décrites par la figure 30: seules les *j*-cordes, $1 \leq j \leq f$, sont autorisées, et les *f*-cordes sont invisibles sur le diagramme car $\tilde{\rho}_f^r = 0$.



Fig. 30: BAE SU(N) tronquées au niveau f.

Le reste des calculs est très similaire à ceux du 2.4.1, et nous ne reviendrons pas dessus. Pour nous, l'intérêt du cas anisotrope est essentiellement de permettre d'écrire des BAE physiques pour les modèles fusionnés, ce que nous allons faire maintenant.

2.4.3. BAE nues/BAE physiques: rang supérieur

Pour éviter les répétitions, nous traiterons directement le cas (isotrope) fusionné. Les BAE physiques sont représentées sur la figure 31.



Fig. 31: BAE physiques SU(N).

 $^{^{38}}$ Notons que dans [49], comme dans [36], le spin quantique est supposé nul *a priori*, ce qui est inutile.

Comme dans le cas SU(2), on conjecture que les excitations physiques ont deux nombres quantiques: la symétrie SU(N) dont on est parti, et une nouvelle symétrie cachée $U_q(\mathfrak{sl}(N)), q = -\exp(-i\pi/(f+N))$, tronquée. La particule de type r $(1 \le r \le N-1)$ appartient à la même représentation fondamentale à r boîtes pour les deux symétries. Les particules de différents types diffusent sans réflexion (ils ne peuvent que modifier leurs nombres quantiques lors de la collision), avec une matrice S entre particules de types qet r donnée par:

$$S^{qr}(\lambda) = \widehat{S}^{qr}(\lambda) R^{qr}(\lambda) \otimes R'^{qr}(\lambda)$$

où $R^{qr}(\lambda)$ et $R'^{qr}(\lambda)$ sont les matrices R de $Y(\mathfrak{sl}(N))$ et de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ dans les $q^{\text{ème}}$ et $r^{\text{ème}}$ représentations fondamentales, et $\widehat{S}^{qr}(\lambda)$ est le facteur scalaire qui donne la diffusion dans le plus haut poids. En écrivant les Equations d'Ansatz de Bethe physiques correspondantes et en les identifiant avec les Equations d'Ansatz de Bethe nues, on arrive comme au 2.3.3 à calculer \widehat{S}^{qr} , qui vaut:

$$\widehat{S}^{qr}(\lambda) = \exp\left[-2i\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa \,\frac{\sin(2\kappa\lambda)}{\kappa} \left(\frac{\sinh((N-q)\kappa)\sinh(r\kappa)}{\sinh(N\kappa)} \frac{\mathrm{e}^{(f+N)|\kappa|}}{\sinh((f+N)\kappa)} - \delta^{qr}\right)\right]$$
(2.58)

 $(q \ge r).$

Ces matrices S ont la particularité que toute particule peut s'obtenir comme état lié de deux autres particules: en effet, les particules q et r possèdent un état lié dans le canal antisymétrique, qui est la particule $q+r \mod N$. Les matrices S physiques peuvent donc elles aussi être obtenues les unes des autres par la procédure de fusion.

Donnons enfin l'interprétation solitonique du nombre quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$: à chaque tableau de Young de moins de f colonnes, on associe un vide. Dans le cas que nous avons considéré, les excitations physiques sont dans les représentations fondamentales, et il existe alors une règle particulièrement simple pour déterminer les transitions entre vides autorisées pour chaque type de particules (cf [III.5.3]). Cependant, il faut noter que pour des représentations plus élevées, une différence avec le cas N = 2 apparaît: certains coefficients des matrices d'adjacence deviennent supérieurs à 1, ce qui indique des transitions multiples entre deux vides. Pour décrire un état du système comportant de telles transitions, il faut donc spécifier, en plus de la donnée du vide initial et du vide final, quelle est la transition choisie.

2.4.4. Dualité rang-niveau

Pour les modèles les plus simples (diffusion diagonale), la dualité particule-trou échange ρ et $\tilde{\rho}$ dans les équations d'Ansatz de Bethe³⁹. Cependant, on a vu au 1.2.5 à propos des BAE physiques que pour le modèle NJL SU(2), il y avait bien à nouveau une dualité particule-trou, mais qu'elle n'affecte que le noeud 1 des équations: en effet, ce sont les trous de 1-cordes qui sont les excitations physiques, les *j*-cordes étant des "excitations isotopiques" et non des vraies particules. La même remarque vaut pour les modèles fusionnés, où la dualité ne s'applique qu'au noeud f.

Quand on passe à SU(N), il est pourtant particulièrement tentant d'effectuer l'échange $\rho \leftrightarrow \tilde{\rho}$. En effet, si l'on oublie le second membre, la dualité $\rho \leftrightarrow \tilde{\rho}$ a pour effet d'échanger dans les BAE (2.53) les indices du haut et du bas: c'est ce qu'on appelle la *dualité rang-niveau*. Si l'on remet le second membre, naïvement il n'y a pas de problème, et on obtient la transformation sur les BAE nues décrite par la figure 32. On voit que la dualité rang-niveau est une transformation mathématique des BAE, sans signification physique directe, qui par exemple échange un modèle tronqué relié au groupe quantique nu $U_q(\mathfrak{sl}(N), q = \exp(i\pi/(f+N))$, avec un autre de groupe quantique nu $U_q(\mathfrak{sl}(f))$.



Fig. 32: Dualité rang-niveau et BAE nues.

Cependant, les BAE ne déterminent pas entièrement la physique du modèle correspondant: une autre donnée essentielle est l'expression de l'énergie en fonction des ρ (ou des $\tilde{\rho}$); en particulier, c'est le signe de l'énergie des différents types de (pseudo-)particules qui détermine quel est le vrai vide de la théorie. Evidemment, c'est précisément la forme de l'énergie qui brise la dualité rang-niveau: on le voit par exemple sur la figure 33, qui montre la même transformation au niveau des BAE physiques.

³⁹ On verra plus loin qu'elle échange aussi η et η^{-1} dans les TBA.



Fig. 33: Dualité rang-niveau et BAE physiques.

Cela veut-il dire que le modèle décrit par le diagramme de droite de la figure 33 ne correspond à rien de connu? En fait, il correspond tout simplement à un cas que nous n'avons pas examiné, et qui est le régime ferromagnétique, obtenu à partir du régime antiferromagnétique en changeant de signe l'énergie [50]. La dualité rang-niveau permet donc de relier, dans la limite thermodynamique, les régimes ferromagnétique et antiferromagnétique.

Plus généralement, en se rappelant que les noeuds des diagrammes de BAE sont liés aux représentations rectangulaires, on voit que la dualité rang-niveau correspond à la transposition des tableaux de Young. Dans cette optique, la dualité rang-niveau est basée sur le fait que la transposition respecte le produit tensoriel, c'est-à-dire que $R^T \otimes R'^T = (R \otimes R')^T$. En particulier, les équations de fusion sont stables par transposition, ce qui nous donne des relations entre quantités thermodynamiques de différents modèles (cf [III.4.2]).

2.5. BAE physiques générales: comparaison SU(2)/SU(N)

Cette dernière section a pour but de donner une méthode générale pour passer des BAE nues aux BAE physiques dans le cas de symétries SU(2) ou $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, et de faire quelques remarques sur la généralisation à SU(N). Les calculs qui suivent sont un peu formels, mais les conclusions que l'on va en tirer seront, elles, bien concrètes.

Essayons donc de déduire de manière synthétique les BAE physiques à partir des BAE nues pour un modèle général. Rappelons l'idée générale: certains noeuds du diagramme nu vont devenir les "sources" des BAE physiques. On suppose que les particules physiques sont des multiplets de $U_{q^{(a)}}(\mathfrak{sl}(2))$, a = 1...b, et que les matrices S de diffusion se factorisent en un produit des matrices R correspondantes, fois un facteur scalaire \hat{S} . Le seul problème consiste à calculer \hat{S} . Nous avons remarqué au 2.3.3 que \hat{S} se factorisait naturellement: nous allons maintenant montrer ce fait. Supposons plus précisément que la particule de type n $(n = 1 \dots n_{\max})$ appartienne à la représentation de spin $f_n^{(a)}/2$ du groupe quantique $U_{q^{(a)}}(\mathfrak{sl}(2))$. Pour chaque symétrie $U_{q^{(a)}}(\mathfrak{sl}(2))$, on a une matrice de transfert à diagonaliser qui nous donne des équations du type:

$$C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^{(a)} + \rho_j^{(a)} = s \star \sum_{\substack{n=1\\f_n^{(a)} \neq 0}}^{n_{\max}} \delta_{jf_n^{(a)}} \sigma_n$$
(2.59)

où σ_n est la densité de particules de type n, et $\rho_j^{(a)}$ est la densité de *j*-cordes. Nous n'incluons pas les 1⁻-cordes, car du fait que seul ρ_{1^-} apparaît dans les équations, et non $\tilde{\rho}_{1^-}$, pour les manipulations formelles auxquelles nous procédens, il ne joue aucun rôle.

Ensuite, on repart des équations de BAE nues au noeud coché lié à la particule n:

$$\sigma_n + \tilde{\sigma}_n - s \star \sum_{\substack{a=1\\f_n^{(a)} \neq 0}}^b \tilde{\rho}_{f_n^{(a)}}^{(a)} = \frac{m_n}{2\pi} p'(\lambda)$$
(2.60)

Le second membre $p'(\lambda)$ ne nous intéresse pas, donc nous ne l'écrivons pas explicitement. Les équations (2.60) ne sont pas encore des BAE physiques, car y apparaissent des $\tilde{\rho}^{(a)}$, alors que seuls les $\rho^{(a)}$ doivent y apparaître. On exprime donc $\tilde{\rho}_{f_n^{(a)}}^{(a)}$ en fonction des $\rho^{(a)}$ grâce à (2.59):

$$\tilde{\rho}_{f_n^{(a)}}^{(a)} = -C_{jk}^{-1} \star \rho_k^{(a)} + s \star \sum_{\substack{m=1\\f_m^{(a)}\neq 0}}^{n_{\max}} C_{f_n^{(a)}f_m^{(a)}}^{-1} \star \sigma_m$$
(2.61)

et on remplace dans (2.60):

$$\sigma_n + \tilde{\sigma}_n = \frac{m_n}{2\pi} p'(\lambda) + s^2 \star \sum_{m=1}^{n_{\max}} \sum_{\substack{a=1\\f_n^{(a)} \neq 0}}^b C_{f_n^{(a)} f_m^{(a)}}^{-1} \star \sigma_m + \cdots$$
(2.62)

où $s^2 \equiv s \star s$, et les \cdots sont les termes qui sont fonctions des $\rho^{(a)}$, qui ne nous intéressent pas, puisque dans la diffusion de plus haut poids $\rho^{(a)} = 0$. On déduit finalement de (2.62) l'expression générale des déphasages:

$$\widehat{S}_{nm}(\lambda) = \prod_{\substack{a=1\\f_n^{(a)}, f_n^{(b)} \neq 0}}^{b} \widehat{S}_{nm}^{(a)}(\lambda)$$

c'est-à-dire que \widehat{S}_{mn} se factorise sous forme de facteurs $\widehat{S}_{nm}^{(a)}$ liés à la symétrie $U_{q^{(a)}}(\mathfrak{sl}(2))$, et donnés par

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \widehat{S}_{mn}^{(a)}(\lambda) = s^2 \star C_{f_n^{(a)} f_m^{(a)}}^{-1}$$

 C^{-1} est la matrice de Cartan inverse du diagramme de Dynkin A_{p-1} si $q^{(a)} = -\exp(-i\pi/p)$. Ceci concorde avec les expressions trouvées précédemment (Eq. (1.35), (2.30), (2.47)).

Ce raisonnement se généralise-t-il à SU(N)? Pas directement, car il faut, pour des rangs plus élevés, tenir compte de la structure "verticale" des diagrammes de BAE. Pour voir d'où vient le problème, supposons que les particules physiques sont maintenant classifiées par deux nombres n et r, de sorte qu'elles appartiennent à des tableaux de Young rectangulaires $f_n^{(a)} \times r$ pour une symétrie $U_{q(a)}(\mathfrak{sl}(N))$. On peut alors montrer que la généralisation de (2.62) est:

$$(C^{-1})^{qr}\sigma_n^q + \tilde{\sigma}_n^r = \frac{m_n^r}{2\pi}p'^r(\lambda) + s^2 \star \sum_{m=1}^{n_{\max}} \sum_{\substack{a=1\\f_n^{(a)}\neq 0}}^b C_{f_n^{(a)}f_m^{(a)}}^{-1} \star (C^{-1})^{qr} \star \sigma_m^q + \cdots$$
(2.63)

On doit tenir compte du $(C^{-1})^{qr}$ du membre de gauche dans le déphasage, si bien que l'on a:

$$\widehat{S}_{nm}^{qr}(\lambda) = \begin{cases} X^{qr}(\lambda) \prod_{\substack{a=1\\f_n^{(a)}\neq 0}}^b \widehat{S}_{nn}^{(a)\,qr}(\lambda) & n=m \\ \prod_{\substack{f_n^{(a)}, f_n^{(b)}\neq 0}}^b \widehat{S}_{nm}^{(a)\,qr}(\lambda) & n\neq m \end{cases}$$

avec les facteurs habituels

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\widehat{S}_{mn}^{(a)\,qr}(\lambda) = s^2 \star (C^{-1})^{qr} \star C_{f_n^{(a)}f_m^{(a)}}^{-1}$$

et les facteurs CDD supplémentaires X^{qr} donnés par

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}X^{qr}(\lambda) = \delta^{qr} - (C^{-1})^{qr}$$

Par exemple, on calcule que

$$X^{11}(\lambda) = \frac{\sinh \frac{\pi}{N}(\lambda+i)}{\sinh \frac{\pi}{N}(\lambda-i)}$$

On vérifie que la matrice S (2.58) admet une telle décomposition.

Remarquons finalement que le fait que la matrice S se factorise entièrement pour SU(2), et modulo un facteur CDD seulement pour SU(N), avait été remarqué empiriquement dans le modèle σ principal (voir chapitre 4) dans [51].

3. Corrections de taille finie et TBA

Nous allons maintenant nous servir des Equations d'Ansatz de Bethe pour calculer des quantités physiquement intéressantes. Une idée naturelle est d'étudier des systèmes à température finie, ce qui nécessitera les Equations d'Ansatz de Bethe Thermodynamiques (TBA, section 3.1) qui sont, elles, non-linéaires. Nous nous restreindrons ensuite aux théories quantiques des champs relativistes. Pour celles-ci, la fonction de partition à température finie n'est autre que la fonction de partition avec une direction de temps euclidienne compactifiée, et on voit que l'Ansatz de Bethe nous permet de faire des calculs de *corrections de taille finie*, c'est-à-dire des corrections aux quantités physiques dues à la géométrie finie de l'espace-temps. Nous ferons alors des calculs explicites de charges centrales grâce aux TBA et aux sommes dilogarithmiques (3.1.3). Puis nous montrerons le lien entre ces équations et les équations de fusion (section 3.2). Ceci nous conduira tout naturellement aux Equations Non-Linéaires Intégrales (NLIE), qui, comme les TBA, déterminent les corrections de taille finie, mais cette fois dans la direction spatiale. Les NLIE constituent une méthode alternative aux TBA, et nous étudierons de telles équations dans la section 3.3. Nous montrerons en particulier qu'elles fournissent plus d'informations que les TBA (charge centrale mais aussi poids conformes, etc).

3.1. Equations d'Ansatz de Bethe Thermodynamiques (TBA)

3.1.1. Principe

Nous allons exposer la méthode d'obtention des TBA dans le cadre le plus simple: le modèle de diffusion diagonale introduit au 1.2.1. On se place à température finie T, et à potentiel chimique μ , de sorte que l'énergie libre s'écrit $F = E - TS - \mu N$. Pour un état constitué de m particules et de \tilde{m} trous, on a un facteur entropique associé qui vaut: exp $S = (m + \tilde{m})!/(m! \tilde{m}!)$. Dans la limite thermodynamique, on trouve donc

$$F/L = \int d\lambda \,\rho(\lambda)\epsilon(\lambda) - \mu \int d\lambda \,\rho(\lambda) - T \int d\lambda \,\left[(\rho(\lambda) + \tilde{\rho}(\lambda)) \log(\rho(\lambda) + \tilde{\rho}(\lambda)) - \rho(\lambda) \log\rho(\lambda) - \tilde{\rho}(\lambda) \log\tilde{\rho}(\lambda) \right]$$
(3.1)

Quand $L \to \infty$, la fonction de partition est dominée par un point de col par rapport aux densités $\rho(\lambda)$ et $\tilde{\rho}(\lambda)$ [52]; on différentie (3.1) et on utilise l'Equation d'Ansatz de Bethe (1.40) qui relie $\delta\rho(\lambda)$ et $\delta\tilde{\rho}(\lambda)$; on obtient alors l'équation de point de col:

$$0 = \epsilon(\lambda) - \mu - T \left[\log \frac{\tilde{\rho}(\lambda)}{\rho(\lambda)} + \frac{1}{2\pi} K \star \log \left(1 + \frac{\rho(\lambda)}{\tilde{\rho}(\lambda)} \right) \right]$$

On voit que l'équation ne dépend que de $\eta \equiv \tilde{\rho}/\rho$:

$$\log \eta(\lambda) + \frac{1}{2\pi} K \star \log(1 + (\eta(\lambda))^{-1}) = \frac{\epsilon(\lambda) - \mu}{T}$$
(3.2)

L'équation (3.2) constitue l'Equation d'Ansatz de Bethe Thermodynamique (TBA) de notre modèle: c'est une équation non-linéaire intégrale.

On peut ensuite calculer la valeur de F au point de col; on trouve:

$$F/L = -T \int \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{dp}{d\lambda} \log(1 + (\eta(\lambda))^{-1})$$

= $-\frac{T}{2\pi} \int dp \, \log(1 + (\eta(p))^{-1})$ (3.3)

L'interprétation des équations (3.2)-(3.3) est relativement simple si l'on se rappelle l'analogie avec un système de fermions sans interaction: pour cela, posons

$$\eta(\lambda) = e^{(\epsilon_{hab}(\lambda) - \mu)/T}$$

Alors, (3.2) se récrit

$$\epsilon_{\rm hab}(\lambda) + \frac{T}{2\pi} K \star \log\left(1 + e^{(\epsilon_{\rm hab}(\lambda) - \mu)/T}\right) = \epsilon(\lambda)$$

En l'absence d'interaction entre les particules, ϵ_{hab} vaut simplement ϵ . Quand on rajoute l'interaction, on continue à interpréter, d'après (3.3), ϵ_{hab} comme la fonction énergie des particules, mais "habillée" par l'interaction.

3.1.2. Application aux modèles à diffusion non-diagonale

Considérons maintenant la chaîne XXX (ou le modèle NJL) à température finie T; il n'y a pas de notion évidente de potentiel chimique, mais en revanche, on peut placer un champ magnétique B. Celui-ci joue dans la limite thermodynamique le rôle de potentiel chimique pour les racines des BAE. En effet, lorsque $L \to \infty$, et pour $B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ($b \ge 0$), on peut se contenter de la contribution du vecteur de plus haut poids à la fonction de partition (voir [III] pour une discussion détaillée de ce point dans le cas plus général SU(N)), de sorte que B est couplé au spin: $\vec{B} \cdot \vec{S} = -bs = \text{cst} + bm$, c'est-à-dire que -b joue le rôle de potentiel chimique des pseudo-particules⁴⁰. On obtient finalement les TBA suivantes: $(\eta_j = \tilde{\rho}_j/\rho_j)$

$$\log(1 + \eta_j(\lambda)) - C_{jk}^{-1} \star \log(1 + (\eta_k(\lambda))^{-1}) = \frac{g_j(\lambda)}{T}$$
(3.4)

 $^{^{40}}$ Le signe est important car -b est toujours négatif.

où $g_j(\lambda)$ est la contribution à l'énergie d'une *j*-corde: $g_j(\lambda) = -2\pi K_j(\lambda) + jb$ pour la chaîne XXX. La multiplication par la matrice de Cartan fait disparaître la dépendance en le champ magnétique *B*:

$$\log(1 + (\eta_j(\lambda))^{-1}) - C_{jk} \star \log(1 + \eta_k(\lambda)) = \delta_{j1} \frac{\tilde{\epsilon}(\lambda)}{T}$$
(3.5)

qui se trouve cachée dans l'asymptotique de η_j pour $j \to \infty$ (voir [III.3]). L'énergie libre s'écrit quant à elle

$$F = -T \int d\lambda \, \sigma \star K_j(\lambda) \log(1 + (\eta_j(\lambda))^{-1})$$

= $E_{\text{g.s.}} - T \int d\lambda \, \sigma \star s(\lambda) \log(1 + \eta_1(\lambda))$ (3.6)

On voit que les TBA ont essentiellement la même structure que les BAE physiques, de sorte que, au moins pour les modèles relativistes, il existe des règles assez évidentes qui permettent d'obtenir les équations de TBA (3.5) et l'expression de l'énergie libre (ici, Eq. (3.5) et (3.6)) à partir des diagrammes de BAE physiques (ici, le diagramme de droite de la figure 13). Nous ne donnerons pas ces règles explicitement, car nous en verrons suffisamment d'exemples dans les paragraphes qui suivent.

3.1.3. Théories conformes et calculs de dilogarithme

Le cas de figure le plus simple est celui des TBA des théories conformes, pour lesquelles l'énergie libre F doit être directement reliée à la charge centrale par la formule [53]:

$$F/L = -\frac{\pi}{12}(c+\bar{c})T^2$$
(3.7)

Reprenons encore une fois le modèle de diffusion diagonale, et supposons (condition d'invariance conforme pour des particules "droites") que $p(\lambda) = \epsilon(\lambda)$. On suppose aussi que $\epsilon(\lambda)$ est une fonction croissante de λ . On remarque alors que si l'on pose:

$$\rho(\lambda) = -\frac{T}{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \log(1 + (\eta(\lambda))^{-1})$$

$$\tilde{\rho}(\lambda) = +\frac{T}{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \log(1 + \eta(\lambda))$$
(3.8)

(de sorte que $\tilde{\rho}/\rho = \eta$ comme il se doit, et ρ , $\tilde{\rho} > 0$), on résoud les BAE (1.40) puisque celles-ci sont une simple conséquence des TBA (3.2) par dérivation par rapport à λ !

Calculous alors $S = -\partial F / \partial T$:

$$S/L = \int d\lambda \left[\rho(\lambda) \log(1 + \eta(\lambda)) + \tilde{\rho}(\lambda) \log(1 + (\eta(\lambda))^{-1}) \right]$$

= $\frac{T}{2\pi} \int \left[-d(\log(1 + \eta^{-1})) \log(1 + \eta) + d(\log(1 + \eta)) \log(1 + \eta^{-1}) \right]$
= $\frac{T}{\pi} L(f) \Big|_{f = 1/(1 + \eta(-\infty))}^{f = 1/(1 + \eta(-\infty))}$
(3.9)

où la fonction dilogarithme [54] est définie par $L(f) = -\frac{1}{2} \int_0^f \left[\frac{\mathrm{d}z}{z} \log(1-z) + \frac{\mathrm{d}z}{1-z} \log z\right].$

Les valeurs limites $\eta(+\infty)$ et $\eta(-\infty)$ en $\lambda = \pm \infty$ sont faciles à calculer: soit elles sont infinies, soit elles vérifient d'après (3.2)

$$\log \eta(\pm \infty) + \frac{1}{2\pi} K(\kappa = 0) \log(1 + (\eta(\pm \infty))^{-1}) = \frac{\epsilon(\pm \infty) - \mu}{T}$$
(3.10)

où $K(\kappa = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda) d\lambda.$

La généralisation aux modèles dont les TBA sont un système d'équations couplées est élémentaire:

$$S/L = \frac{T}{\pi} \sum_{j} L(f_j) \Big|_{f=f_{\min}}^{f=f_{\max}}$$
 (3.11)

où j parcourt l'ensemble des équations, c'est-à-dire *tous* les noeuds du diagramme de BAE. Pour rendre l'équation (3.11) indépendante de la convention de signe choisie pour η , la prescription est que f va dans (3.11) de sa valeur minimale à sa valeur maximale pour l'équation qui contient le second membre.

Prenons maintenant un exemple concret de calcul de charge centrale. Considérons le modèle décrit par le système de BAE physiques de la figure 34 [55].



Fig. 34: BAE physiques des modèles coset.

Les excitations physiques sont des particules relativistes sans masse "droites", avec des nombres quantiques $U_{e^{i\pi/(a+2)}}(\mathfrak{sl}(2))$ et $U_{e^{i\pi/(b+2)}}(\mathfrak{sl}(2))$ tronqués. Il n'y a pas de champ magnétique. Les TBA associées sont:

$$\log(1 + (\eta_j(\zeta))^{-1}) - C_{jk} \star \log(1 + \eta_k(\zeta)) = \delta_{ja} \frac{E}{T} e^{\zeta} \qquad 1 \le j \le a + b - 1 \qquad (3.12)$$

où l'on a utilisé la normalisation usuelle des rapidités: $\zeta \equiv \pi \lambda$ (les noyaux changent donc aussi de normalisation, de façon à ce que $f(\lambda)d\lambda = f(\zeta)d\zeta$). L'èchelle de masse E est arbitraire; ceci est lié au fait que la dépendance des TBA (ainsi que de l'énergie libre F, que nous n'avons pas écrite explicitement) en la température T est triviale du fait que l'on peut décaler $\zeta \to \zeta + \text{cst}$, ce qui est normal pour une théorie conforme.

Les valeurs limites sont:

$$\eta_{j}(-\infty) = \frac{\sin(\pi j/(a+b+2))\sin(\pi (j+2)/(a+b+2))}{\sin^{2}(\pi/(a+b+2))} \qquad 1 \le j \le a+b-1$$

$$\eta_{j}(+\infty) = \frac{\sin(\pi j/(a+2))\sin(\pi (j+2)/(a+2))}{\sin^{2}(\pi/(a+2))} \qquad 1 \le j \le a \qquad (3.13)$$

$$\eta_{j}(+\infty) = \frac{\sin(\pi (j-a)/(b+2))\sin(\pi (j-a+2)/(b+2))}{\sin^{2}(\pi/(b+2))} \qquad a \le j \le a+b-1$$

Nous donnerons ultérieurement une justification de ces valeurs (section **3.2**). En utilisant des formules connues de sommes dilogarithmiques [56], on obtient (on pose $\bar{c} = 0$ dans (3.7)):

$$c = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j} L(f_j) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{3ab(a+b+4)}{(a+2)(b+2)(a+b+2)}$$
(3.14)

qui est la charge centrale des modèles cos $SU(2)_a \times SU(2)_b/SU(2)_{a+b}$ [57].

La règle générale pour déduire la charge centrale du diagramme des BAE physiques d'une théorie conforme à une chiralité est la suivante:

- Ajouter 1 par noeud hachuré.
- Ajouter la contribution du diagramme "physique", c'est-à-dire en retirant les noeuds hachurés.
- Retrancher la contribution du diagramme "nu", c'est-à-dire au contraire en considérant les noeuds hachurés comme des noeuds normaux.

La contribution des diagrammes qui nous intéressent est donnée par la figure 35.



Fig. 35: Table de sommes dilogarithmiques.

Notons que a) n'est pas la limite de c) quand $f \to \infty$ (ou d) de e)), car, pour f grand, la somme dilogarithmique c) est dominée par ses premiers termes $(j \ll f)$ et par ses derniers termes $(f - j \ll f)$, et la somme a) n'est la limite que de la première moitié. Cependant, du fait des compensations entre les contributions du diagramme physique et du diagramme nu, cela n'a pas de conséquence physique. Montrons par exemple comment obtenir la formule b) de manière élémentaire: on calcule tout d'abord les valeurs limites des η_j correspondant au diagramme: on trouve $\eta_j = j(j+2)$ pour $1 \le j \le f$, $\eta_{f+1} = \eta_{1-} = f + 1$. On cherche donc à calculer

$$c = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{f} L\left(\frac{1}{(j+1)^2}\right) + 2L\left(\frac{1}{(j+2)}\right)$$

On utilise la relation L(xy) = L(x) + L(y) - L(x(1-y)/(1-xy)) - L(y(1-x)/(1-xy))satisfaite par L, avec x = y = 1/j; on obtient alors

$$c = \frac{12}{\pi^2} \sum_{j=1}^{f} \left[L\left(\frac{1}{j+1}\right) - L\left(\frac{1}{j+2}\right) \right] + 2L\left(\frac{1}{f+2}\right)$$
$$= \frac{12}{\pi^2} L\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 1$$

Nous admettrons la valeur des autres sommes dilogarithmiques de la figure 35 (voir par exemple [58] et références incluses). Prenons encore un exemple d'application de ces formules à un calcul de charge centrale qui nous resservira par la suite: considérons la version à une seule chiralité du modèle fusionné décrit par les BAE physiques 31^{41} , et que nous reproduisons ici (figure 36).



Fig. 36: Diagramme de TBA de la CFT WZW chirale.

On calcule aisément la charge centrale, qui vaut: $c = (N^2 - 1)f/(f + N)$, c'est-à-dire celle de la théorie conforme de Wess–Zumino–Witten SU(N) au niveau f [59]. Nous prouverons au chapitre 4 que si l'on considère une chiralité de la CFT WZW, alors elle admet effectivement le diagramme de BAE physiques (ou de TBA) de la figure 36.

Terminons sur quelques remarques générales:

- ★ Une fois que l'on a calculé l'énergie libre à champ magnétique nul, on peut facilement réintroduire le champ magnétique, et calculer la nouvelle somme dilogarithmique, par exemple en dérivant deux fois par rapport au champ magnétique. Nous ferons un tel calcul au paragraphe suivant.
- * Il existe une autre méthode, plus traditionnelle, pour arriver aux formules de dilogarithmes, qui n'utilise que les TBA (et pas les BAE). C'est celle qui est utilisée dans les articles [III,IV]. Notons que dans [III.B], le modèle n'est pas à strictement parler conforme, mais cette méthode fonctionne tout de même; de plus, l'énergie libre est calculée directement en présence d'un champ magnétique.
- ★ Les structures "nue" et "physique" ne sont pas directement liées au groupe de renormalisation, puisque même pour une théorie conforme, les deux structures coexistent et donnent chacune leur contribution à la charge centrale⁴².

 $^{4^{1}}$ Ce modèle n'est bien sûr pas un modèle de fermions chiraux libres dans des rep supérieures: la première remarque de la fin du 1.2.3 ne s'applique pas au cas fusionné, cf l'observation similaire du paragraphe suivant pour le cas anisotrope.

 $^{4^2}$ Nous verrons cependant un cas où le passage de la structure nue à la structure physique est lié au flot de groupe de renormalisation: le modèle de Kondo (section **4.3**).

Les calculs faits précédemment ne s'appliquent pas au cas des théories massives. Cependant, on peut espérer, dans la limite $T \to \infty$, explorer la région ultra-violette et en particulier retrouver la théorie conforme qui constitue le point fixe ultra-violet de la théorie.

La limite $T \to \infty$ des TBA massives fait apparaître un phénomène bien connu que nous nommerons découplage des chiralités. Celui-ci est caractérisé par le fait que les fonctions $\eta(\zeta)$ (on rappelle que l'on prend maintenant la paramétrisation usuelle de la rapidité; pour un modèle SU(N), on a la correspondance: $\zeta = 2\pi\lambda/N$ avec les notations du chapitre **1**) se mettent à développer un plateau dans la région $[-\log(T/m), +\log(T/m)]$, où m est l'échelle de masse du système. On peut alors définir des fonctions $\eta^{\pm}(\zeta) =$ $\eta(\zeta \pm \log(2T/m))$ qui admettent (généralement) une limite finie quand $T \to \infty$: elles décrivent séparément les deux chiralités de la théorie conforme ultra-violette. En effet les particules qui ont une énergie de l'ordre de T ont une rapidité $\zeta \sim \pm \log(T/m)$ et vérifient $\epsilon \sim |p|$ dès que $T \gg m^{43}$.

Prenons comme exemple le modèle NJL standard. Diagrammatiquement, la limite UV est représentée par la figure 37.



Fig. 37: Découplage des chiralités dans le modèle NJL SU(2).

 $^{4^3}$ Remarquons à ce propos que les particules d'une même chiralité dans la limite UV ont la même matrice S de diffusion – exprimée en termes de la rapidité décalée – que celle de la théorie massive originale, puisque la matrice S ne dépend que de la différence des rapidités.

Les fonctions η^{\pm} vérifient des équations séparées qui sont les limites de (3.5) (avec $\tilde{\epsilon}(\zeta) = m \cosh \zeta$):

$$\log(1 + (\eta_j^{\pm}(\zeta))^{-1}) - C_{jk} \star \log(1 + \eta_k^{\pm}(\zeta)) = \delta_{j1} e^{\pm \zeta}$$
(3.15)

En appliquant les méthodes du 3.1.3 à (3.15), on calcule les charges centrales UV c et \bar{c} : on trouve sans difficulté⁴⁴ $c = \bar{c} = 1$, ce qui pouvait se deviner, puisque le modèle NJL est asymptotiquement libre: dans l'UV, restent donc deux fermions de Dirac libres (c = 2) auquels on a retiré un secteur c = 1 découplé.

On peut étendre le calcul de la charge centrale UV au modèle NJL déformé, et on trouve qu'indépendamment de l'anisotropie γ , $c = \bar{c} = 1$. Ceci veut-il dire que le modèle NJL déformé est encore asymptotiquement libre? Non, car la limite UV du modèle NJL, quand on fait varier γ , parcourt en fait la ligne de points critiques c = 1 (du côté massif de la transition de Kosterlitz–Thouless). Nous renvoyons le lecteur aux références [60,61] pour une discussion générale de la transition de Kosterlitz-Thouless et des modèles c = 1. L'essentiel pour nous est que la théorie UV ne coïncide pas avec la théorie non-perturbée; en effet, si l'on regarde le flot de groupe de renormalisation des deux constantes f et qdu Lagrangien (2.23), on voit que f tend vers 0 (le terme couplé à f constitue la perturbation), mais que q tend vers γ (l'anisotropie γ est un invariant du flot). En particulier, bien qu'il y ait génération dynamique de masse (par rapport au modèle non-perturbé), il n'y a pas liberté asymptotique puisque l'opérateur perturbant acquiert une dimension plus petite que 1 (donc devient relevant) quand on s'éloigne du point isotrope. Une autre remarque reliée est que les deux chiralités de la théorie UV ne sont pas les fermions chiraux de la théorie non-perturbée, et donc la première remarque de la fin du 1.2.3 ne s'applique pas au cas anisotrope. Nous reviendrons sur la limite UV du modèle NJL quand nous lui écrirons une NLIE (section 3.3).

Plaçons ensuite notre modèle NJL déformé à $\gamma = \pi/(p+1)$ dans un champ magnétique $B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; au lieu d'être lié à la limite $j \to \infty$ comme dans le cas isotrope, il apparaît explicitement dans les deux derniers noeuds des TBA [62]. On trouve facilement par les formules de dilogarithmes que, dans la limite ultra-violette,

$$F \sim -\frac{\pi}{6}T^2 \left(1 + \frac{6b^2/T^2}{\pi(\pi - \gamma)}\right)$$

⁴⁴ Le calcul est en fait trivial, du fait de la particularité du cas isotrope: les symétries nue et physique sont identiques, d'où compensation évidente de leur contribution à la charge centrale.

On observe alors le fait suivant [63]: pour un champ magnétique purement imaginaire $b/T = i\gamma = i\pi/(p+1)$, on a $F \sim -(\pi/6)T^2 \hat{c}$ avec la nouvelle charge centrale

$$\hat{c} = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$$

qui est celle du modèle minimal M_p [64]. L'interprétation de ce résultat est la suivante: au point fixe UV, il est possible de définir une nouvelle action de l'algèbre de Virasoro, de charge centrale inférieure à 1. Ceci est essentiellement la construction de Dotsenko– Fateev [65] (ou de Feigin–Fuks) du gaz de Coulomb avec une charge de fond à l'infini. Il est bien connu que dans cette construction, on peut se ramener à un sous-ensemble fini d'opérateurs Virasoro-primaires⁴⁵, et le Hilbert peut alors être tronqué (découplage des "null vectors") pour donner le Hilbert des modèles minimaux. Qu'en est-il ici?

Le lecteur aura sans doute deviné que c'est précisément la troncation de groupe quantique qui va jouer ce rôle [27]. En effet, on vérifie qu'en imposant le champ magnétique $b/T = i\gamma$ dans les TBA, la fonction η_{p-1} devient constante et égale à 0, de sorte que les noeuds p - 1, p, 1^- se découplent et que l'on est ramené au diagramme tronqué (cf figure 16)! Le champ magnétique imaginaire constitue donc une manière alternative d'effectuer la troncation de groupe quantique. Son avantage est qu'en modifiant le Hamiltonien (par ajout du champ magnétique), on change explicitement la gradation du groupe quantique ("spin" dans la limite relativiste). Du point de vue mathématique, l'introduction du champ magnétique imaginaire correspond à modifier la fonction de partition $Z = tr(e^{-\mathbf{H}/T})$ en $Z = tr(\mathrm{Ke}^{-H/T})$, où K est l'élément de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ pris dans sa représentation sur le Hilbert complet. Ce sont les propriétés dites de Markov [66] de cette trace modifiée $x \to tr(\mathrm{K}x)$ (où x appartient au commutant de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, soit dans les cas qui nous occupent à l'algèbre de Temperley-Lieb [67]) qui permettent de retrouver la troncation de groupe quantique. Une construction similaire existe pour $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ (cf IV.9).

Finalement, en calculant les corrections des $\eta(\zeta)$ à leur comportement dominant $\eta^{\pm}(\zeta \mp \log(2T/m))$, on peut également déterminer le voisinage du point fixe UV, et en particulier quelle est la dimension de l'opérateur perturbant. Dans les cas les plus simples, on peut systématiser le calcul de ces corrections [68]. Nous ferons nous-mêmes de tels calculs pour le modèle de Kondo (section **4.3**).

⁴⁵ Remarquons que cette réduction à un nombre fini de modules est une simple question de périodicité/symétrie par réflexion du Hilbert, et n'a rien à voir avec la troncation proprement dite.

3.1.5. Les flots non-massifs

Jusqu'ici, toutes les théories à deux chiralités que nous avons considérées étaient massives. Rien n'empêche cependant d'avoir des théories sans masse, mais non-conformes. On a alors un flot de groupe de renormalisation d'un point fixe infra-rouge à un point fixe ultra-violet. Les TBA doivent de nouveau exhiber un découplage des chiralités. On peut aisément visualiser ce phénomène au niveau diagrammatique: là où la limite UV faisait apparaître deux TBA chirales essentiellement identiques aux TBA de départ (à part pour le second membre), la limite IR produit des TBA chirales telles que les noeuds hachurés d'une chiralité "tuent" le noeud correspondant de l'autre chiralité. Voyons comment cette règle s'applique sur un exemple simple: considérons le système de TBA donné par le diagramme du milieu de la figure 38.



Fig. 38: TBA d'un flot non-massif (le flot est de bas en haut). Les noeuds hachurés sont différents pour les deux chiralités, donc il n'y a pas apparition de masse.

On a représenté les TBA dans la limite infra-rouge et dans la limite ultra-violette. Les charge centrales $c_{\rm UV} = \bar{c}_{\rm UV} = 1 - 6/(p(p+1))$ et $c_{\rm IR} = \bar{c}_{\rm IR} = 1 - 6/(p(p-1))$, et on peut se convaincre [38] que les TBA de la figure 38 représentent le flot du modèle minimal M_p vers M_{p-1} par perturbation de M_p par l'operateur $\Phi_{1,3}$.

Nous examinerons nous-mêmes un cas de flot non-massif: le modèle de Wess– Zumino–Witten (chapitre 4). Nous reviendrons alors sur la notion de diffusion des excitations non-massives.

3.2. *Y*-système et équations de fusion

Il existe un lien profond entre les TBA et les "équations de fusion" (nous avons déjà donné un exemple de ces dernières, cf Eq. (2.37)); celui-ci peut être deviné à partir du lien déjà évoqué entre la structure des TBA SU(N) et les tableaux de Young rectangulaires, suggérant une interprétation de théorie de la représentation des TBA. Nous nous limiterons dans cette section au cas isotrope (pour les TBA anisotropes, il faut des équations de fusion plus générales que celles que nous considérons, cf [69]). Ce qui suit n'est qu'un survol d'un sujet qui est encore en pleine activité à l'heure actuelle; il nous permettra de mieux situer un certain nombre de concepts introduits et utilisés dans [III,IV] (équation non-linéaire intégrale, équations de fusion modifiées, etc).

Le point de départ des équations de fusion est la procédure de fusion dans l'espace auxiliaire des matrices de monodromie. La fusion exprime alors des relations dans l'algèbre des représentations du Yangien correspondant $Y(\mathfrak{sl}(N))$. En prenant la trace sur l'espace auxiliaire, on obtient les matrices de transfert que l'on peut appeler légèrement abusivement les caractères du Yangien $Y(\mathfrak{sl}(N))$. Il s'agit d'un abus de langage car les matrices de transfert sont encore des opérateurs sur l'espace physique, mais qui se justifie du fait que, les matrices de transfert commutant entre elles, on peut les identifier à leurs valeurs propres; en particulier, toute équation vérifiée par les matrices de transfert est aussi une équation pour leurs valeurs propres.

La plupart des relations qui existent pour l'algèbre des représentations de $\mathfrak{sl}(N)$ (et donc leurs caractères) peuvent être étendues en des relations pour $Y(\mathfrak{sl}(N))$ (et donc les matrices de transferts associées), à condition d'ajouter des décalages appropriés des paramètres spectraux. Nous avons déjà vu que pour SU(2), l'identité $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ se traduit pour les matrices de transfert par l'équation (2.37):

$$\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}(\lambda+i/2)\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}(\lambda-i/2) = \mathbf{T}_{1}(\lambda) + \mathbf{T}_{0}(\lambda)$$

On remarque que les équations de fusion ne dépendent pas de l'espace physique, puisque la fusion n'a lieu que dans l'espace auxiliaire. La simple donnée des équations de fusion satisfaites par les matrices de transfert ne peut donc évidemment pas contenir toute la physique du modèle considéré. Les équations de fusion ne dépendent pas non plus de la valeur propre particulière considérée (état fondamental, états excités). Pour SU(N) et pour une représentation quelconque $R = \sum_r \mu^r e^r$ (avec les notations du [III.A], c'est-à-dire dont la $r^{\text{ème}}$ ligne du tableau de Young a μ^r boîtes), on a un analogue de la formule de Weyl pour les matrices de transfert [50]:

$$T_{\{\mu^r\}}(\lambda) = \det \left[T_{\mu_a + b - a} (\lambda + i(\mu_b - b)) \right]_{a, b = 1...N}$$

(avec des rapidités légèrement décalées par rapport à nos conventions). Cependant, la structure des TBA suggère qu'il est nécessaire de trouver des équations de fusion qui ne font appel qu'à des tableaux de Young rectangulaires. Et en effet, la figure 39 montre qu'il existe de telles relations.



Fig. 39: Egalité formelle entre des produits tensoriels de représentations de SU(N).

La relation correspondante pour les matrices de transfert s'écrit [70]:

$$\mathbf{T}_{j}^{r}(\lambda+i/2)\mathbf{T}_{j}^{r}(\lambda-i/2) = \mathbf{T}_{j}^{r+1}(\lambda)\mathbf{T}_{j}^{r-1}(\lambda) + \mathbf{T}_{j+1}^{r}(\lambda)\mathbf{T}_{j-1}^{r}(\lambda)$$
(3.16)

 \mathbf{T}_{j}^{r} est la matrice de transfert dont l'espace auxiliaire est un tableau de Young à j lignes et r colonnes. Considérons alors la combinaison [71]:

$$Y_j^r(\lambda) = \frac{\mathbf{T}_{j+1}^r(\lambda)\mathbf{T}_{j-1}^r(\lambda)}{\mathbf{T}_j^{r+1}(\lambda)\mathbf{T}_j^{r-1}(\lambda)}$$
(3.17)

On montre facilement à partir des équations de fusion (3.16) que les Y_j^r vérifient le Ysystème [72]:

$$Y_j^r(\lambda + i/2)Y_j^r(\lambda - i/2) = \frac{\left[1 + Y_{j+1}^r(\lambda)\right] \left[1 + Y_{j-1}^r(\lambda)\right]}{\left[1 + (Y_j^{r+1}(\lambda))^{-1}\right] \left[1 + (Y_j^{r-1}(\lambda))^{-1}\right]}.$$
(3.18)

Le Y-système a été introduit originellement en liaison avec les TBA; en effet, si l'on pose $Y_j^r(\lambda) = \eta_j^r(\zeta)$ avec $\zeta = 2\pi\lambda/N$, alors les équations (3.18) peuvent être déduites des TBA SU(N):

$$\log(1 + (\eta_j^r(\zeta))^{-1}) - (C^{-1})^{qr} \star C_{jk} \star \log(1 + \eta_k^q(\zeta)) = \frac{\tilde{g}_j^r(\zeta)}{T} \qquad 1 \le r \le N - 1, \ 1 \le j < \infty$$
(3.19)

où les \tilde{g}_i^r sont des fonctions analytiques dans la bande Im $\zeta \in [-\pi/N - \epsilon, +\pi/N + \epsilon]$ et qui satisfont $\tilde{g}_j^r(\zeta + i\pi/N) + \tilde{g}_j^r(\zeta - i\pi/N) - \tilde{g}_j^{r+1}(\zeta) - \tilde{g}_j^{r-1}(\zeta) = 0$ pour tout j. Le Y-système permet alors de démontrer un certain nombre de propriétés formelles des solutions des TBA (3.19). Inversement, la donnée des équations de fusions (3.16) et des comportements asymptotiques des \mathbf{T}_{i}^{r} permet de "remonter" du Y-système à des équations du type de (3.19). Ceci a été fait dans le cas SU(2) dans [73], et généralisé au cas SU(N) (mais avec des erreurs dans la dérivation – misprints?) dans [71]. Evidemment, les équations ainsi obtenues ne sont pas réellement des TBA, puisque le système considéré n'est pas à température finie mais dans un des états excités au-dessus du vide. On les appelle équations "TBA-like". Pour des modèles relativistes⁴⁶, pour lesquels $\tilde{g}_j^r = \sin(\pi r/N)(\alpha_j^+ e^{+\zeta} + \alpha_j^- e^{-\zeta})$, le lien avec les vraies TBA est le suivant: dans une limite d'échelle appropriée, les TBA-like décrivent le modèle correspondant sur un espace compactifié de longueur finie; grâce à l'invariance modulaire, on voit donc que les TBA-like pour l'état du vide sont en fait les TBA usuelles après transformation modulaire $\tau \rightarrow -1/\tau$; quant aux TBA-like pour les états excités, elles correpondraient à d'éventuelles "TBA pour les états excités", qui n'ont pas d'interprétation physique directe. De telles TBA ont effectivement été introduites récemment [74].

Remarquons que la dérivation des TBA-like n'utilise jamais l'hypothèse de corde; et pourtant on obtient la même structure des équations à deux indices que dans les TBA. Ceci est bien sûr directement lié à la remarque faite au 2.3.1 sur l'interprétation de l'hypothèse de corde en termes de fusion. En un certain sens, les TBA-like justifient donc *a posteriori* l'usage de l'hypothèse de corde dans les TBA.

Passons maintenant aux équations de fusion modifiées. Celles-ci proviennent de la remarque suivante: ni le Y-système ni les équations de fusion usuelles ne peuvent contenir toute la physique d'un modèle, puisque par rapport aux TBA, on a perdu le second membre. Cependant il existe une manière de définir des caractères modifiés, qui vérifient des équations de fusion modifiées: celles-ci n'ont pas de signification algèbrique profonde, mais par contre elles incorporent le second membre des TBA.

Les équations de fusion modifiées apparaissent naturellement dans le modèle de Kondo (voir [III.3.3]), puisqu'elles correspondent à l'idée intuitive que l'on peut obtenir

 $^{^{46}}$ L'invariance relativiste n'est en fait pas indispensable, mais nous nous limiterons à ce cas.
des impuretés de spin supérieur en fusionnant plusieurs impuretés⁴⁷. Les caractères modifiés sont définis par l'équation (III.3.13), qui, dans le cas SU(2), diffère de la relation entre matrices de transfert (ou caractères non-modifiés) et fonctions Y utilisée dans [73] par des facteurs scalaires. En tenant compte du fait que toutes les fonctions $\log(1 + \eta(\zeta))$ sont *bornées*, on peut prolonger les caractères sur une bande du plan complexe, et inverser (III.3.13), ce qui aboutit à l'équation (III.3.15). On peut alors montrer que les caractères χ_i^r vérifient des équations de fusion modifiées du type:

$$\chi_{j}^{r}(\zeta + i\pi/N)\chi_{j}^{r}(\zeta - i\pi/N) = \chi_{j}^{r+1}(\zeta)\chi_{j}^{r-1}(\zeta) + \chi_{j+1}^{r}(\zeta)\chi_{j-1}^{r}(\zeta)\exp\left(\sin(\pi r/N)(\alpha_{j}^{+}e^{+\zeta} + \alpha_{j}^{-}e^{-\zeta})\right)$$
(3.20)

c'est-à-dire que le second membre des TBA apparaît de telle sorte que l'on peut représenter les équations de fusion modifiées par les mêmes diagrammes de BAE physiques que les TBA. Les liens entre noeuds correspondent aux liens entre caractères dans les équations de fusion, et les noeuds cochés voient le terme qui les connecte à leurs voisins horizontaux modifié.

Les équations de fusion modifiées, à la différence des TBA, ne sont pas des équations ne faisant intervenir que des fonctions réelles, et elles ne se prêtent donc pas bien aux simulations numériques ou à certains types de calculs analytiques. Par contre, elles permettent des calculs à un niveau formel qui peuvent s'avérer intéressants: ainsi, dans [III.4], de nombreuses quantités thermodynamiques sont obtenues de manière élémentaire grâce aux équations de fusion.

Les équations de fusion modifiées permettent également d'interpréter les valeurs limites dans les TBA (cf fin du [III.3]). En effet, on voit que dans la limite $\zeta \to \pm \infty$, on peut négliger les décalages du paramètre spectral, de sorte que les équations de fusion modifiées se résument à de simples équations pour les caractères de SL(N). Cependant, le facteur $\exp(\sin(\pi r/N)\alpha_j e^{\zeta})$ (nous considérons un modèle à une chiralité), qui tend soit vers 1 soit vers 0, restreint l'intervalle des indices des équations de fusion. Dans les cas les plus simples, ces restrictions correspondent simplement à remplacer les relations de caractères de SU(N) par les relations de caractères de l'algèbre des représentations tronquée

 $^{4^{7}}$ Cette idée intuitive est déjà exprimée dans [75], mais l'analyse perturbative de [75] ne leur permet pas d'obtenir les équations de fusion modifiées qui contiennent des informations non-perturbatives.

de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ avec $q = -e^{-i\pi/(f+N)}$. De manière générale, on peut affirmer que la modificiation des équations de fusion fait passer des équations de fusion du groupe quantique nu ($\zeta = -\infty$) aux équations de fusion du groupe quantique physique ($\zeta = +\infty$).

Dans les TBA, la condition de positivité des η impose le choix de la valeur propre de Perron-Frobenius des matrices d'adjacence, c'est-à-dire la dimension pour SU(N) et la q-dimension pour $U_q(\mathfrak{sl}(N))$. On reconstitue finalement les valeurs limites $\eta_j^r(\pm \infty)$ grâce aux équations du type (3.17).

Prenons un exemple: les valeurs limites (3.13) s'obtiennent facilement à partir des q-dimensions des trois groupes quantiques $U_{e^{i\pi/(a+2)}}(\mathfrak{sl}(2))$, $U_{e^{i\pi/(b+2)}}(\mathfrak{sl}(2))$ et $U_{e^{i\pi/(a+b+2)}}(\mathfrak{sl}(2))$ (on a $\eta_j = d_{j+1}d_{j-1}$ où d_j est la q-dimension de la représentation de spin j/2: $d_j = \lfloor j+1 \rfloor$). On remarque alors que les sommes dilogarithmiques qui apparaissent dans (3.14) sont encore calculables si l'on remplace la q-dimension d_j par un autre caractère [76], et font apparaître les poids conformes du modèle, indiquant que pour les "TBA pour les états excités", les valeurs limites sont données par les différents caractères et non la seule q-dimension.

3.3. Une alternative aux TBA: les Equation Non-Linéaires Intégrales (NLIE)

Nous avons vu dans la section précédente qu'il est possible de considérer, par invariance modulaire, des théories sur un espace compactifié de longueur finie, et d'obtenir des équations similaires aux TBA. Nous appellerons génériquement les équations correspondant à un espace fini des Equations Non-Linéaires Intégrales (NLIE), du fait de leur forme. Ici, nous ne intéresserons pas aux NLIE "TBA-like" comme dans la section précédente, mais au contraire à des NLIE qui ont une structure plus simple que les TBA: nous verrons que nos NLIE ne reproduisent que la structure du diagramme de Dynkin de l'algèbre de symétrie correspondante, sans qu'il y ait de second indice de corde. Des équations de ce type ont été écrites pour les modèles à 6 vertex et à 19 vertex (spin 1) dans [77] et ont été obtenues indépendamment dans le cadre de la théorie des champs relativiste (Sine–Gordon) dans [78]. Des références plus complètes sont données dans [IV], qui traite de la généralisation de ces NLIE à une algèbre de Lie simplement lacée quelconque, et qui utilise les méthodes de [79].

Les NLIE que nous allons voir maintenant se démarquent notablement des TBA: tout d'abord, l'hypothèse de corde n'y est pas applicable, les états excités pouvant contenir des racines situées n'importe où dans le plan complexe; par contre, l'étude d'un seul état (l'état fondamental) donne autant d'information que les TBA (et en particulier, dans l'UV, la charge centrale), tandis que l'étude des états excités fournit des informations inaccessibles par les TBA (dans l'UV, les poids conformes).

3.3.1. Les NLIE de Toda affine en couplage imaginaire

Le modèle de Toda affine est présenté brièvement dans [IV.1,9.1]. Reprenons cette présentation. Si ϕ est un champ bosonique appartenant à la sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} de rang n, α_s , $1 \leq s \leq n$ sont les racines simples de \mathfrak{g} , et $-\alpha_0$ est la racine la plus haute de \mathfrak{g} , alors l'action de Toda affine avec une constante de couplage imaginaire est donnée par

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 x \left[(\partial_\mu \Phi)^2 + M^2 \sum_{s=0}^n e^{-i\langle \alpha^s, \Phi \rangle/R} \right]$$
(3.21)

Cette action pose plusieurs problèmes: tout d'abord, elle n'est pas réelle, ce qui est lié au fait que la théorie n'est pas unitaire. Ensuite, elle n'est pas renormalisable telle quelle, puisque la perturbation engendre tous les opérateurs du type $e^{-i\langle\alpha,\phi\rangle}$ où α parcourt le réseau des racines. Ces opérateurs apparaissent d'ailleurs quand on bosonise le modèle NJL SU(N) [80]: en effet, celui-ci est équivalent à la théorie bosonique

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 x \left[(\partial_\mu \Phi)^2 + M^2 \sum_{a,b=1}^N \cos((\Phi^a - \Phi^b)/R) \right]$$
(3.22)

avec $R = 1/\sqrt{2}$. (3.22) se distingue de (3.21) par le fait que l'action est réelle et contient des opérateurs perturbants supplémentaires qui rendent la théorie renormalisable. Pour $R > 1/\sqrt{2}$, la perturbation ne produit pas d'opérateurs plus pertinents que ceux de (3.21), et il est concevable, par extension du cas isotrope, que le modèle de Toda affine en couplage imaginaire soit équivalent au modèle NJL anisotrope associé à la même algèbre \mathfrak{g} , dont la bosonisation produit les opérateurs manquants qui assurent la renormalisabilité. Nous allons donc écrire des Equations Non-Linéaires Intégrales non pas pour Toda affine, mais pour le modèle NJL anisotrope.

Nous supposerons dorénavant que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est simplement lacée. Le point de départ des NLIE est la donnée des Equations d'Ansatz de Bethe qui sont la généralisation à $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ des équations (1.29) pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ (Eq. (IV.2.4)). Les inhomogénéités sont alternées $\theta_k = \pm \theta, \ \theta \to \infty$: ce sont celles du modèle NJL anisotrope. On peut donner une autre interprétation à ces inhomogénéités alternées en termes de régularisation sur réseau de la théorie des champs que l'on obtient dans la limite d'échelle: c'est l'approche dite du cône de lumière [81]. Le réseau est tourné de 45 degrés par rapport à l'ordinaire, c'est-à-dire que l'on considère une matrice de transfert *diagonale à*

diagonale. Les $e^{-iE^{\pm}} = e^{-i(E\pm P)}$ donnés par l'Eq. (IV.2.5)⁴⁸, en particulier, sont les translations des deux pas élémentaires du réseau, qui sont dans les deux directions du cône de lumière. Dans cette approche, on peut, dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, démontrer que certains opérateurs, obtenus par une transformation du type Jordan–Wigner, vérifient les équations du mouvement du modèle de Thirring massif, ce qui justifie le lien avec ce modèle. Cependant, comme il est expliqué dans [82], ceci ne permet pas de distinguer entre les différents modèles "équivalents" à Sine–Gordon. Nous éluciderons ce point lors du calcul des poids conformes UV (3.3.2).

Partons donc des fonctions de comptage Z_s (Eq. (IV.3.1)) pour un état excité audessus du vide (qui contient un nombre fini d'excitations physiques), et distinguons deux types de racines des BAE: les racines réelles qui constituent le vide de la théorie, et les racines complexes – on ne parle plus de cordes puisque l'hypothèse de corde ne s'applique pas. On utilise alors une intégrale de contour pour récrire la contribution aux fonctions de comptage de racines réelles. Notons que cette astuce ne fonctionne que pour les modèles non-fusionnés, pour lesquels le vide n'est constitué que de racines réelles. On parvient alors, après une série de transformations, et le passage à la limite d'échelle, aux NLIE (IV.3.17), que nous récrivons ici dans les notations de cette thèse:

$$Z^{s}(\zeta) = M^{s}L \sinh \zeta + X^{st} \star Q^{t}(\zeta) + \sum_{\alpha=1}^{M_{H}^{t}} \chi^{st}(\zeta - \eta_{\alpha}^{t}) - \sum_{\alpha=1}^{M_{C}^{t}} \chi^{st}(\zeta - \xi_{\alpha}^{t})$$
(3.23)

où nous avons supposé pour simplifier qu'il n'y a pas de racines/trous spéciaux. La fonction réelle Q^s est définie par $Q^s(\zeta) \equiv Z^s(\zeta) \mod 2\pi$ (là aussi, nous simplifions en supposant $\delta^s = 0$), et $|Q^s(\zeta)| < \pi$. Les X^{st} sont des noyaux donnés dans (IV.3.15-16), et χ^{st} sont les primitives de $2\pi X^{st}$. Enfin les M^s sont les masses des différentes excitations physiques.

Pour interpréter les NLIE (3.23), et en particulier les X^{st} , regardons tout de suite la limite $L \to \infty$. On voit facilement que les termes non-linéaires $X^{st} \star Q^t$ sont exponentiellement petits (en e^{-ML} , où M est une échelle de masse de l'ordre des M_s , typiquement la plus petite masse). Une fois ces termes retirés, les NLIE (3.23) peuvent alors être considérées tout simplement comme le fait que les $Z^s(\zeta)$ sont des fonctions de

 $^{^{48}}$ Notons qu'ils diffèrent par des signes des expressions (Eq. (1.30)) que nous avons utilisés jusqu'ici. Ce signe peut être absorbé dans le choix de conditions aux bords (périodiques ou anti-périodiques) pour les fermions nus.

comptage "physiques" pour les trous et racines complexes. En effet, on a bien: $Z^s(\eta_k^s)$ et $Z_s(\xi_k^s)$ égaux à 2π fois des demi-entiers, ce qui est la définition d'une fonction de comptage. En particulier, en considérant des configurations sans racines complexes, les χ^{st} s'identifient au déphasage des trous lors de la diffusion de plus haut poids. Ainsi, dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$, la matrice S^{11} (Eq. (IV.6.4)) se récrit explicitement:

$$\widehat{S}^{11}(\zeta) = \exp\left(i\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\kappa \,\frac{\sin(N\kappa\zeta/\pi)}{\kappa} \frac{\sinh((p+1-N)\kappa)\sinh\kappa}{\sinh(p\kappa)\sinh(N\kappa)}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(1+i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{N}-i\frac{\zeta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{N}+i\frac{\zeta}{2\pi}\right)} \tag{3.24}$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{np}{N}+1+i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{np+1}{N}-i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{np-1}{N}+1-i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{np}{N}+i\frac{\zeta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{N}+1-i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{np+1}{N}+i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{np-1}{N}+1+i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{np}{N}-i\frac{\zeta}{2\pi}\right)}$$

On conclut donc que le passage de (IV.3.1) à (IV.3.17), dans la limite $L \to \infty$, s'identifie à la dualité particule-trou entre ondes de spin et spinons.

Cette interprétation montre aussi la différence essentielle entre les fonctions de comptage des pseudo-particules, qui sont celles dont nous sommes partis (Eq. (IV.3.1)), et les fonctions de comptage physiques données par (3.23) sans la non-linéarité. Pour ce qui est de la première expression, elle est exacte à toute longueur L, ce qui provient en dernière analyse du fait que les interactions entre pseudo-particules sont ponctuelles⁴⁹; la seconde expression, en revanche, n'est valide qu'à $L \to \infty$, puisqu'il y a des corrections en $\exp(-ML)$, qui correspondent au fait que, lorsque le rayon L devient trop faible, de sorte que les particules deviennent trop rapprochées (par rapport à l'échelle de distance du système, qui est 1/M), la notion d'état asymptotique (composé de particules libres) n'est plus valable. La non-linéarité modifie alors la quantification des rapidités, et permet ainsi d'avoir une limite ultra-violette non-triviale, que nous allons maintenant examiner.

3.3.2. Limite ultra-violette et poids conformes

Dans la limite $L \to 0$, les NLIE (3.23) exhibent un comportement similaire aux TBA, c'est-à-dire le découplage des chiralités [IV.7-8]. Cependant, le découplage n'est total que pour l'état fondamental: pour les états excités, il reste un *couplage résiduel* que constitue le "twist" des équations chirales l'une sur l'autre. Ce "twist" apparaît explicitement

⁴⁹ comme celles entre particules nues; on peut le voir en utilisant l'Ansatz de Bethe en Coordonnées, et non l'Ansatz de Bethe Algébrique, pour la diagonalisation de la matrice de transfert.

dans les fonctions de comptage Z_s comme des constantes qui traduisent l'interaction entre particules de chiralités différentes (et donc de différence de rapidités divergentes). Il conduit à une valeur non-triviale de $Z^{s\pm}(\mp\infty)$; génériquement, on a (Eq. (IV.7.8)):

$$Z^{s+}(-\infty) = Z^{s-}(+\infty) \equiv \gamma \Delta r^s \mod 2\pi$$

où $\Delta r^s = r^{s+} - r^{s-}$ est la différence des nombres quantiques \mathfrak{g} des particules droites et gauches.

On peut alors calculer le terme en 1/L de l'énergie d'un état excité pour $L \to 0$, ce qui par définition nous fournit le poids conforme UV correspondant (ainsi que la charge centrale, bien sûr, puisque les poids conformes sont décalés de c/24 sur le cylindre). Le calcul [IV.8] est assez complexe, mais le résultat, lui, est simple: la charge centrale vaut le rang de l'algèbre, et, génériquement, on trouve que le poids conforme est donné par:

$$\Delta^{\pm} = \frac{\sum_{s,t} (C^{-1})^{st} \left[r^s \pm (1 - \gamma/\pi) \Delta r^s \right] \left[r^t \pm (1 - \gamma/\pi) \Delta r^t \right]}{8(1 - \gamma/\pi)} + p^{\pm}$$
(3.25)

où $(C^{-1})^{st}$ est l'inverse de la matrice de Cartan *avec la normalisation usuelle*, c'est-à-dire $C^{st} = 2\delta^{st} - A^{st}$ (A^{st} est la matrice d'adjacence du diagramme de Dynkin de \mathfrak{g}). p^{\pm} sont des entiers positifs. Les nombres quantiques r^s sont liés au groupe $U(1)^{N-1}$ (charges topologiques pour le champ ϕ de Toda affine) qui est une symétrie de la théorie tout le long du flot de groupe de renormalisation, tandis que les Δr^s n'ont de sens qu'au point fixe UV (la notion de particules gauche et droite n'a de sens qu'au point fixe UV), et correspond à une nouvelle symétrie chirale $U(1)^{N-1}$ qui est brisée par la perturbation hors du point fixe UV.

On trouve dans [IV.A] une analyse générale de ces poids conformes. Nous allons nous limiter ici à quelques remarques sur le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$, avant d'examiner plus en détail le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Rappelons qu'en posant $p^{\pm} = 0$ dans (3.25), on obtient les poids conformes primaires pour l'algèbre de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{u}(1)}^{N-1} \oplus \widehat{\mathfrak{u}(1)}^{N-1}$.

Supposons d'abord $\gamma = 0$. On a alors la formule particulièrement simple:

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{s,t} (C^{-1})^{st} r^{s\pm} r^{t\pm}$$
(3.26)

Les deux chiralités sont donc totalement découplées. Vérifions que ces résultats décrivent bien le point fixe UV du modèle NJL SU(N), qui n'est autre (d'après la liberté asymptotique) que N fermions de Dirac libres. Dans une théorie de N fermions de Dirac libres, les deux chiralités sont effectivement complètement découplées, et pour une chiralité donnée (N fermions de Weyl), on sait que les poids conformes primaires pour l'algèbre de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{u}(1)}^N$ sont donnés par

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} (\mu^a)^2$$

où μ^a est le poids du $a^{\text{ème}}$ générateur de $U(1)^N$ (matrice avec un 1 à la ligne a, colonne a). En utilisant la relation $r^s = \mu^s - \mu^{s+1}$, on obtient:

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{s,t} (C^{-1})^{st} r^s r^t + \frac{1}{2N} \left(\sum_a \mu^a\right)^2$$
(3.27)

 $\sum_{a} \mu^{a}$ est la charge U(1) globale qui est liée au secteur U(1) découplé; si l'on retire le terme correspondant dans (3.27), on obtient (3.26). On en déduit que dans l'UV, la NLIE (3.23), à $\gamma = 0$, décrit N fermions de Dirac libres (soit la fermionisation [83] de la théorie conforme de WZW U(N) au niveau 1), auxquels on a retiré un secteur U(1). Bien sûr, l'opération qui consiste à retirer le secteur U(1) est quelque peu artificielle, car du fait que $U(N) = (SU(N) \times U(1))/\mathbb{Z}_N$, les secteurs SU(N) et U(1) restent couplés par des relations modulo N; explicitement, dans (3.27), on voit que la charge $U(1) \sum_{a} \mu^{a}$ est congrue à $\sum_{s} sr^{s}$ modulo N. En particulier, les propriétés modulaires de la fonction de partition sur le tore, dans laquelle a été retiré le secteur U(1), sont détruites.

Pour $\gamma > 0$, au contraire, du fait des twists, les deux chiralités restent couplées (dans (3.25), r^+ apparaît dans Δ^- et vice versa) par ce qu'on interprète comme les *modes zéros* de la théorie. Nous allons à présent procéder à la troncation à $\gamma = \pi/(p+1)$ [48].

On a vu au 3.1.4 qu'en introduisant un champ magnétique imaginaire approprié dans les TBA, on reproduisait la troncation de groupe quantique. Quelle est la procédure analogue pour la NLIE? C'est la question qui est éclaircie au [IV.9.1]. Reprenons ce raisonnement sous une forme légèrement différente. Pour cela, partons de la fonction de partition (sur un espace infini) à température finie $T = 1/\beta$ en présence du champ magnétique imaginaire: $Z(\beta) = \text{tr}(e^{-\beta H}\Omega)$, où **H** est le Hamiltonien de la théorie fermionique (modèle NJL anisotrope), et $\Omega = e^{-B/T} = q \sum_{\alpha>0} H_{\alpha}$ est l'effet du champ magnétique. $Z(\beta)$ est essentiellement la quantité que l'on calcule par les TBA. En termes d'intégrale fonctionnelle,

$$Z(\beta) = \int_{\psi(x,t=\beta)=-\Omega\psi(x,t=0)} [\mathrm{d}\psi \mathrm{d}\psi^{\dagger}] \,\mathrm{e}^{-\mathcal{S}[\psi,\psi^{\dagger}]} \tag{3.28}$$

où \mathcal{S} est l'action, dont nous n'avons pas besoin explicitement car nous travaillons à un niveau formel.

Effectuons alors la transformation modulaire $x \leftrightarrow t$ dans (3.28): on trouve que $Z(\beta)$ est maintenant la fonction de partition sur un espace compactifié de longueur β , avec des *conditions aux bords twistées* par Ω . Ceci nous indique donc la marche à suivre: il suffit d'introduire un "twist" dans la NLIE (3.23), qui jouera le même rôle que le champ magnétique imaginaire.

On refait alors le calcul des corrections de taille finie en tenant compte du twist [IV.9.2-9.3]; si celui-ci est suffisamment petit, il a pour seul effet de rajouter un terme inhomogène dans les formules de corrections de taille finie, d'où la charge centrale et les poids conformes (IV.9.13-9.14) qui sont, dans le secteur pair de la théorie (r^s et Δr^s pairs) ceux des Théories Conformes Rationnelles avec la symétrie conforme étendue $W(\mathfrak{g})$. *Remarque:* Les poids conformes UV (3.25) sont très voisins des poids conformes IR de la chaîne de spins XXZ SU(N) correspondante. Cependant, ils sont distincts, puisque ces derniers sont exactement donnés par (3.25), mais après échange de $r^s \leftrightarrow \Delta r^s$, où les r^s sont toujours les nombres quantiques $U(1)^{N-1}$, et les Δr^s sont les nombres quantiques d'un $U(1)^{N-1}$ chiral qui apparaît au point fixe IR. Cette différence est bien sûr liée à la manière différente dont sont définies les deux chiralités dans les deux modèles, ce qui au final est dû aux inhomogénéités différentes ($\theta_k \to \pm \infty$ dans un cas, $\theta_k = 0$).

Une autre manière d'expliquer cette dualité est la suivante: appelons r^s les charges magnétiques de Toda affine, et Δr^s les charges électriques. On voit que la dualité électromagnétique $r^s \leftrightarrow \Delta r^s$ revient à échanger $1-\gamma/\pi$ et $1/(1-\gamma/\pi)$. Dans le cas de Toda affine, pour que la charge magnétique soit conservée tout le long du flot, il faut que les opérateurs perturbants soient purement électriques. De plus, comme on est au point fixe UV, ils doivent être pertinents. Au contraire, au point fixe IR de la chaîne de spins, les opérateurs doivent être non-pertinents, et ils sont essentiellement les duaux de ceux de Toda affine, qui sont eux non-pertinents (puisque $\gamma = 0$ est le point de transition de type Kosterlitz– Thouless, et si $1 - \gamma/\pi < 1$, alors $1/(1 - \gamma/\pi) > 1$). Ceux-ci sont purement magnétiques, donc les charges conservées tout le long du flot sont les charges électriques, ce sont donc elles qu'on appelle r^s dans la chaîne de spins, d'où finalement l'échange $r^s \leftrightarrow \Delta r^s$.

3.3.3. Retour sur le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$

Pour discuter des subtilités qui existent entre les différents modèles bosoniques et fermioniques équivalents, il est plus simple de revenir au cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Celui-ci présente l'originalité de posséder trois modèles équivalents: en plus du modèle NJL anisotrope et du modèle de Sine-Gordon (cas particulier de Toda affine complexe), on a le modèle de Thirring massif, que nous allons définir ci-dessous.

Ces trois modèles sont équivalents au sens où leurs fonctions de partition sur un cylindre (mais pas sur un tore) sont égales, ou encore au sens où on peut établir des identifications entre certains opérateurs des différents modèles. Cependant, ceci ne suffit pas à assurer que les Hilberts des différents modèles sont identiques, et, de fait, il est montré dans [82] que ceux de Sine–Gordon et Thirring massif sont distincts. L'idée de cet article, que nous allons reprendre ici, consiste à analyser la destinée des différents états du Hilbert dans la limite ultra-violette: ils doivent alors s'apparenter à des états de la théorie conforme ultra-violette, que l'on sait classifier explicitement. Ceci nous permettra de plus une comparaison directe avec les résultats du *3.3.2*.

• Modèle de Sine-Gordon.

L'analyse de Sine–Gordon et de sa limite ultra-violette n'est qu'un cas particulier de celle qui est effectuée pour Toda affine complexe dans [IV 9,A], mais nous allons tout de même la reprendre rapidement.

L'action de Sine–Gordon est:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \left[(\partial_\mu \Phi)^2 + M^2 \cos(\Phi/R) \right]$$

La constante de couplage M fixe, après renormalisation appropriée, l'échelle de masse du système, et ne nous intéresse donc pas dans l'UV. Le champ bosonique Φ appartient a priori à la droite réelle.

Le modèle possède les quantités conservées suivantes: \diamond Du fait de la symétrie $\Phi \rightarrow \Phi + 2\pi R$, on a un opérateur T: $T\Phi T^{-1} = \Phi + 2\pi R$ dont les valeurs propres sont de module 1.

On peut donc le diagonaliser, ce qui correspond à la décomposition suivante du Hilbert \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathcal{H}_{\theta}$$

 \mathcal{H}_{θ} ($\theta \neq 0$) est le secteur "twisté" de valeur propre $e^{i\theta}$. \mathcal{H}_{0} est le secteur non-twisté de la théorie (le Hilbert de Sine-Gordon habituel), il correspond à *compactifier* le boson Φ : $\Phi \equiv \Phi + 2\pi R$. Nous verrons que tous les modèles équivalents à Sine-Gordon ont leur Hilbert inclus dans le "grand" Hilbert \mathcal{H} , c'est-à-dire dans des secteurs twistés appropriés.

Dans la limite UV, la symétrie $\Phi \to \Phi + 2\pi R$ est étendue en une symétrie $\Phi \to \Phi + \text{cst}$, d'où une nouvelle quantité conservée \mathcal{N} , la *charge électrique* (dans le langage des cordes, \mathcal{N}/R constitue l'impulsion dans l'espace cible). On fixe la normalisation de \mathcal{N} par la relation: $T = e^{2\pi i \mathcal{N}}$, de sorte que dans un secteur \mathcal{H}_{θ} , les valeurs propres n de \mathcal{N} vérifient: $n \in \mathbb{Z} + \frac{\theta}{2\pi}$. En particulier, dans le secteur non-twisté, la charge électrique est entière. \diamond Supposons que nous considérons la théorie sur un espace compactifié de longueur L, et faisons tendre L (plus précisément ML, où M est l'échelle de masse renormalisée) vers l'infini. Du fait que le potentiel $\cos(\Phi/R)$ a pour minima $\Phi = 2\pi m R$ (m entier), on a nécessairement $\Phi(x = +\infty) - \Phi(x = -\infty) = 2\pi m R$, où m est la valeur propre entière de la charge \mathcal{M} associée au courant topologique $\partial_x \Phi$. Par extension, il est naturel (mais non obligatoire) d'imposer, même pour $ML < \infty$, la condition de quantification: $\Phi(x + L) = \Phi(x) + 2\pi m R$ de la charge \mathcal{M} . Insistons sur le fait que ceci est un choix de conditions aux bords, et non de compactification de Φ . Dans le secteur non-twisté \mathcal{H}_{sG} , ce sont des conditions aux bords périodiques pour Φ . \mathcal{M} est nommée charge magnétique (ou, pour les cordistes, nombre d'enroulement).

Dans la limite ultra-violette, on aboutit à la théorie d'un simple boson libre. Digressons un instant: on appelle aussi parfois cette théorie gaz de Coulomb conforme, mais cette appellation est un peu trompeuse, car le gaz de Coulomb proprement dit, c'est-à-dire le gaz de particules électriques (ou magnétiques) en interaction coulombienne n'apparaît que grâce à la perturbation (les opérateurs de vertex $e^{\pm i\Phi(x)/R}$ créent des sources d'impulsion au point x qui sont les charges électriques, tandis que les opérateurs "duaux" – voir plus loin – créent des vortex qui sont les charges magnétiques). Nos charges magnétique et électrique ne sont pas des vraies charges ponctuelles, mais des effets de topologie globale de type instantonique.

Revenons au boson libre: la théorie est conforme, elle se scinde en ses deux chiralités; la solution des équations du mouvement est

$$\Phi(x,t) = \phi^+(x^+) + \phi^-(x^-)$$

avec $x^{\pm} = t \pm x$, et on a deux courants chiraux $j^{\pm}(x^{\pm}) = \partial^{\pm}\phi^{\pm}$ qui forment deux copies de l'algèbre de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{u}(1)}$. Les opérateurs primaires pour ces deux algèbres sont les opérateurs de vertex

$$\mathcal{O} = e^{i(\alpha^+ \phi^+ + \alpha^- \phi^-)}$$

dont les charges U(1) chirales α^{\pm} se recombinent pour former les charges électrique n et magnétique m selon la formule:

$$\alpha^{\pm} = \pm \frac{mR}{2} + \frac{n}{R} \tag{3.29}$$

Les poids conformes sont alors donnés par

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{2} (\alpha^{\pm})^2 \tag{3.30}$$

Rappelons que dans le secteur non twisté, le réseau des charges électrique/magnétique est: $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On remarque alors la dualité électromagnétique qui consiste en la transformation: $R \to 2/R$ et $m \leftrightarrow n$. Au point self-dual $R = \sqrt{2}$, il est bien connu que l'on a une symétrie plus grande: l'algèbre de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{u}(1)}$ est aggrandie en $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$, les générateurs supplémentaires étant les opérateurs de vertex: $m = n = \pm 1$ pour la chiralité droite, $m = -n = \pm 1$ pour la chiralité gauche. Cette symétrie $\mathfrak{sl}(2)$ est importante pour nous puisqu'elle doit être liée à la limite isotrope de Sine-Gordon (point de Kosterlitz-Thouless).

Pour mieux comprendre ce point, discutons des opérateurs perturbants $e^{\pm i\Phi/R}$, qui sont purement électriques de charge $\pm 1^{50}$: leur dimension vaut $\Delta^{\pm} = \frac{1}{2R^2}$. Ils sont donc pertinents pour $R > 1/\sqrt{2}$. On identifie le point $R = 1/\sqrt{2}$ au point de transition de Kosterlitz-Thouless: on voit qu'il est distinct du point self-dual $R = \sqrt{2}$.

Plaçons-nous alors à un rayon double R' = 2R, et perturbons avec les mêmes opérateurs $e^{\pm i\Phi/R} = e^{\pm 2i\Phi/R'}$, qui sont maintenant de charge électrique ± 2 : nous appellerons cette théorie Sine-Gordon(2). La dimension vaut toujours $\Delta^{\pm} = \frac{2}{R'^2}$, de telle sorte que le point de Kosterlitz-Thouless est au point self-dual $R' = \sqrt{2}$. Cependant, la condition de quantification de la charge magnétique n'est plus correcte: en effet, le nouveau potentiel $\cos(2\Phi/R')$ possède des minima en $m\pi R'$, mais seules les configurations telles que $\Phi(x+L) - \Phi(x) = 2\pi m R'$ sont admises: dans la limite IR, ceci signifie que l'on n'obtient que les états qui contiennent *un nombre pair* de solitons. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

• Modèle de Thirring massif.

Par souci de complétude, nous introduisons également le modèle de Thirring massif, bien qu'il ne nous soit pas utile. Son action vaut:

$$S = \int \mathrm{d}^2 x \left[i \bar{\Psi} \partial \bar{\Psi} - \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2 - M \bar{\Psi} \Psi \right]$$

où Ψ est un fermion de Dirac. Ce modèle possède une invariance U(1). Dans la limite UV, comme pour le modèle de Sine-Gordon, le terme de masse tend vers 0, et on est ramené

⁵⁰ Ils brisent donc la dualité électro-magnétique de la théorie UV.

au modèle de Thirring non-massif, caractérisé par sa constante de couplage g. Ce modèle possède une invariance supplémentaire $U(1)_{\chi}$ chirale, c'est-à-dire qu'il y a invariance séparée des deux chiralités $U(1)_{+} \times U(1)_{-}$, que l'on recombine en $(U(1) \times U(1)_{\chi})/\mathbb{Z}_{2}$.

On montre [84] que le modèle de Thirring massif est équivalent au modèle de Sine-Gordon; avec les conventions standard, la correspondance entre constantes de couplage est: $R^2 = 1 + g/\pi$. Dans l'ultra-violet, si l'on prend des conditions aux bords spatiales anti-périodiques pour le fermion, alors les poids conformes primaires (pour Kac-Moody $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$) de Thirring non-massif sont donnés par les mêmes formules (3.29)-(3.30), où m est la charge U(1) (donc un entier), mais où n est la moitié de la charge U(1) chirale⁵¹. Le réseau des charges électrique/magnétique n'est donc pas celui de Sine-Gordon (non twisté), mais plutôt, en tenant compte du fait que les charges U(1) et U(1) chirale sont congrues modulo 2: $(m, n) \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z} + 1) \times (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. Le fait que les réseaux de charges ne coïncident pas est bien connu des cordistes, puisqu'on passe de l'un à l'autre par une projection GSO. Celle-ci assure que la fonction de partition du boson libre sur un tore est invariante modulaire, alors que celle de Thirring non-massif a des propriétés modulaires caractéristiques d'une théorie fermionique⁵².

Observons que le réseau des charges possède cette fois une dualité $R \to 1/R$, $m \leftrightarrow 2n$, qui n'a pas de signification directe pour nous, à part que le point self-dual est le point bien connu du fermion de Dirac libre.

Enfin, on vérifie que les opérateurs perturbants $M\bar{\Psi}_{\mp}\Psi_{\pm}$ sont bien les mêmes que ceux de Sine-Gordon, c'est-à-dire électriques de charge ± 1 . Nous renvoyons le lecteur à [82] pour une analyse plus minutieuse de la relation entre Sine-Gordon et Thirring massif. • Modèle NJL anisotrope.

Terminons par le modèle qui nous intéresse le plus directement. Nous avons déjà donné son action, que nous reproduisons ici:

$$S = \int d^2x \left[i \bar{\psi}^a \partial \!\!\!/ \psi^a - g j^3_\mu j^{3\mu} - f(j^1_\mu j^{1\mu} + j^2_\mu j^{2\mu}) \right]$$

⁵¹ De manière plus générale, avec des conditions aux bords twistées $\Psi(x+L) = -e^{i\theta}\Psi(x)$, $|\theta| < \pi$, on aurait: $n = \frac{p}{2} + \frac{\theta}{2\pi}$, p charge U(1) chirale.

⁵² Remarquons que pour notre théorie massive il y a deux projections GSO possibles puisqu'il y a deux combinaisons invariantes modulaires: PP et AA + AP + PA; elles correpondent en fait aux deux choix de rayons R et R' pour la théorie de Sine–Gordon résultante (avec bien sûr les mêmes opérateurs perturbants $e^{\pm i\Phi/R} = e^{\pm 2i\Phi/R'}$).

où les ψ^a sont deux fermions de Dirac. On a cette fois une symétrie $U(1)^2$ (un U(1) par fermion), et une symétrie U(1) chirale qui s'étend en $U(1)^2$ chirale dans l'UV (quand $f \to 0$).

On montre que le modèle NJL anisotrope est équivalent à un boson (ou fermion de Dirac) libre découplé et à un modèle de Sine–Gordon. La relation entre constantes de couplage dépend là encore de choix de regularisation; avec nos conventions, le rayon de compactification du boson de Sine–Gordon est:

$$R^2 = \frac{1}{2(1 - g/\pi)}$$

Les poids conformes UV primaires $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$ sont paramétrisés par les 4 charges $r^{a\pm}$, a = 1, 2; du fait du découplage du secteur U(1), on les reparamétrise ainsi: $r_c^{\pm} = r_1^{\pm} + r_2^{\pm}$, $r^{\pm} = r_1^{\pm} - r_2^{\pm}$. Alors, les poids sont donnés par:

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{8} \left(\pm (r^{+} + r^{-})R + \frac{(r^{+} - r^{-})}{2R} \right)^{2} + \frac{1}{4} (r_{c}^{\pm})^{2}$$
(3.31)

En retirant la contribution du secteur U(1), on retrouve (3.29)-(3.30) à condition de poser: $m = r^+ + r^-$ et $n = (r^+ - r^-)/4$. Ceci est cohérent avec le fait que la perturbation est une interaction à 4 fermions, et doit avoir une charge électrique ±1. Le réseau des charges électriques est cette fois: $(m, n) \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2 \cup (2\mathbb{Z} + 1) \times (\mathbb{Z}/2 + \frac{1}{4})$. On a une dualité $R \to 1/2R, m \leftrightarrow 4n$ dont le point fixe est le point de transition de Kosterlitz–Thouless, comme pour le modèle de Sine–Gordon(2). Ceci suggère qu'il existe un lien direct entre ces deux modèles.

Nous avons représenté sur la figure 40 les réseaux des charges pour Sine-Gordon(2) et le modèle NJL anisotrope. Ceci permet de constater que le second est inclus dans le premier: les états de Sine-Gordon(2) correspondent exactement aux états tels que r (et donc Δr) est pair, ce qui est évident compte tenu des formules explicites: $m' = m/2 = (r^+ + r^-)/2$, $n' = 2n = (r^+ - r^-)/2$ des charges électrique et magnétique de Sine-Gordon(2). • Comparaison avec les résultats de l'Ansatz de Bethe.

Prenons maintenant n = 1 dans la formule (3.25) des poids conformes donnés par l'Ansatz de Bethe; on trouve:

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{16(1 - \gamma/\pi)} (\pm r + (1 - \gamma/\pi)\Delta r)^2$$
(3.32)

(3.32) coïncide avec (3.31) en faisant les identifications normales: $r = r^+ + r^-$, $\Delta r = r^+ - r^-$, $1 - \gamma/\pi = 1/(2R^2)$. De plus, si l'on se restreint au secteur pair (nombre



Fig. 40: Réseau des charges électro-magnétiques. Les abscisses/ordonnées sont les r^+/r^- . Les gros cercles forment le réseau de Sine-Gordon(2); complétés par les petits cercles, ils forment le réseau du modèle NJL. On a de plus entouré les points correpondant aux courants $\mathfrak{sl}(2)$ dans le cas isotrope $(R = 1/\sqrt{2}, R' = \sqrt{2})$.

pair de solitons), on retrouve exactement Sine–Gordon(2) avec $1 - \gamma/\pi = 2/R'^2$. C'est cette dernière identification qu'on retrouve le plus fréquemment dans la littérature.

Remarques:

- ★ Ces subtiles distinctions entre les différents modèles équivalents doivent être relativisées. Dans la limite où la taille L de l'espace compactifié tend vers l'infini, comme expliqué dans [IV.9.1], tous les secteurs twistés dégénèrent. Il y a donc dégénérescence dans l'IR de bon nombre d'états qui ont une destinée différente dans l'UV. La question non-triviale est de trouver quels sont exactement les différents états UV qui dégénèrent vers le même état IR; pour répondre à cette question, il faudrait une analyse détaillée des NLIE twistées (celle qui a été faite dans [85] est un premier pas dans ce sens).
- * Il existe, de manière analogue, trois représentations pour la chaîne de spins XXZ. Il faut evidemment faire attention que la situation est quelque peu différente, puisque, comme on l'a vu précédemment, il n'y a pas de limite d'échelle non-triviale vers une théorie continue: on va directement du réseau vers le point fixe IR (théorie conforme). Par une transformation de Jordan–Wigner, on passe de la chaîne de spins à un modèle de Thirring non massif discret (notons que cette transformation n'existe que dans le cas SU(2)). De même, l'analogue du modèle de NJL est le modèle de Hubbard avec un nombre d'électrons égal au nombre de sites (half-filling) dont on montre qu'il est équivalent à la chaîne XXX dans la région de couplage fort: l'interaction de Hubbard tue le mode U(1) mais est marginalement non-pertinente

dans le secteur de spin. On peut ensuite parcourir la ligne de points fixes IR en rendant anisotrope l'interaction. Ces deux modèles (Thirring, Hubbard) peuvent alors être bosonisés dans la limite du continu pour donner un boson libre compactifié.

- * Après avoir écrit cette section de ma thèse, un preprint [86] sur les NLIE de Sine-Gordon (équation de Destri-De Vega) est sorti. Les auteurs de [86], après avoir corrigé quelques erreurs sans conséquence dans [79] (qui avaient déjà été corrigées dans [IV] pour le cas plus général d'une algèbre simplement lacée quelconque), ont repris à leur compte un certain nombre d'idées qui avait déjà été exprimées dans [IV]:
 - Les racines/trous "immobiles" doivent être considérés comme des artefacts de la contruction par l'Ansatz de Bethe, car ils conduisent à des formules pour les poids conformes UV qui ne sont pas interprétables.
 - La valeur de M modulo 4 (de M_s modulo 2h pour les algèbres de rang supérieur, cf remarque de bas de page numéro 2 dans [IV]) influe sur les propriétés des états que l'on obtient par l'Ansatz de Bethe. Elle doit être choisie par des arguments physiques indépendants.
 - Les Equations de Destri–De Vega ne décrivent pas exactement Sine–Gordon (ou Thirring massif). Ce point est bien sûr à la base de mes travaux (on part du modèle NJL déformé). Cependant, du fait que dans [86], seuls les poids conformes des états de charge électrique nulle sont calculés explicitement, il ne leur est pas possible de conclure que l'on décrit vraiment le modèle NJL déformé. Remarquons que de toutes façons, les contraintes qu'ils imposent sur l'algèbre des opérateurs, sont, comme dans [82], trop fortes pour pouvoir trouver le modèle NJL déformé, qui n'apparaît pas dans ce cadre du fait du secteur U(1) découplé. L'existence de ce secteur U(1) peut pourtant être devinée sans recourir aux BAE nues du modèle NJL, par le raisonnement suivant: quand on définit l'énergie dans l'approche du cône de lumière, on définit réellement $e^{iL\epsilon^{\pm}}$ avec $E = M(\epsilon^+ + \epsilon^-)$. Quand on prend le logarithme de $e^{iL\epsilon^{\pm}}$, il apparaît naturellement une ambiguïté de $2\pi/L$ dans la définition de ϵ^{\pm} , qui s'interprète comme la contribution à l'énergie du secteur U(1). C'est d'ailleurs cette contribution qui permet d'éviter à la régularisation sur réseau de l'approche du cône de lumière le problème du doublement des fermions.

4. Les modèles σ principal, de Wess–Zumino– Witten et de Kondo.

Le modèle σ principal et sa généralisation, le modèle de Wess–Zumino–Witten (WZW) sont des modèles de théorie des champs à deux dimensions que nous allons introduire (section 4.1), avant de le résoudre grâce à l'Ansatz de Bethe (section 4.1.1). Nous utiliserons la technique des BAE physiques pour déduire le spectre des excitations physiques (sections 4.1.3, 4.1.4), et nous ferons quelques calculs thermodynamiques grâce aux TBA (sections 4.1.2, 4.1.5). Nous généraliserons en particulier les résultats obtenus dans [88] pour le modèle de WZW SU(2) niveau 1⁵³ à SU(N) et à un niveau quelconque.

Le modèle de Kondo généralisé est un modèle de matière condensée, dont on verra dans la section **4.3** qu'on peut le reformuler comme un problème de théorie quantique des champs à 2 dimensions. On pourra alors lui appliquer l'Ansatz de Bethe. Il existe un lien étroit entre le modèle de Kondo et la théorie conforme de WZW (point fixe infrarouge du modèle de WZW): on verra que le modèle de Kondo se ramène à placer une impureté dans une théorie conforme WZW, ou encore à considérer une théorie WZW à *bord*. C'est pourquoi nous traitons ces différents modèles ensemble. Nous reviendrons sur une partie du contenu de [III]: TBA, entropie à température nulle (4.3.2); mais nous obtiendrons également un certain nombre de résultats non-publiés, tels que la structure des excitations de basse énergie (4.3.1), ainsi qu'une étude complémentaire de la thermodynamique de Kondo (4.3.3). Tous ces résultats nouveaux confirmeront les hypothèses faites dans [III] sur la structure des excitations et sur la nature des différents points fixes infra-rouges. Enfin nous établirons succintement le lien entre l'approche de l'Ansatz de Bethe et l'approche de Théorie Conforme du modèle de Kondo (4.3.4); nous montrerons comment la première implique la seconde (et non l'inverse).

4.1. Les modèles σ principal et WZW

Le modèle de Wess–Zumino–Witten U(N) [59] est constitué d'un boson ϕ vivant dans U(N) et dont l'action est:

$$A = \frac{1}{4g^2} \int d^2 x \operatorname{tr}(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^{-1}) + f\Gamma \tag{4.1}$$

 $^{^{53}}$ Notons que le niveau 1 est un modèle très particulier puisque la structure solitonique y est "triviale", en un sens à définir – voir 4.1.4.

où Γ est le terme topologique de Wess–Zumino; f est nécessairement entier. Pour f = 0, on retrouve l'action du modèle σ principal.

L'action (4.1) est invariante par $U(N)_L \times U(N)_R$: $\phi \to g_L \phi g_R^{-1}$. Les équations du mouvement expriment la conservation des courants correspondants:

$$j_L^{\mu} = \frac{1}{2g^2} \partial^{\mu} \phi \, \phi^{-1} + \frac{f}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi \, \phi^{-1}$$
$$j_R^{\mu} = \frac{1}{2g^2} \phi^{-1} \, \partial^{\mu} \phi - \frac{f}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \phi^{-1} \, \partial_{\nu} \phi$$

L'action (4.1) est renormalisable; le flot de groupe de renormalisation est donné par la figure 41.



Fig. 41: Flot de groupe de renormalisation de WZW. Les points fixes infra-rouges sont situés sur les deux demi-droites données par $1/g^2 = |f/4\pi|$.

Pour tout f, la théorie est asymptotiquement libre (dans l'UV); au point fixe UV, il y a alors 4 courants conservés j_L^{\pm} , j_R^{\pm} , du fait des symétries chirales. Au contraire, au point fixe infra-rouge $1/g^2 = f/4\pi$ (on suppose dorénavant f > 0), on voit que: $\partial_{\mu}j_L^{\mu} = \partial_+j^$ et $\partial_{\mu}j_R^{\mu} = \partial_-j^+$ ($\partial_{\pm} = \partial/\partial x^{\pm}$, $x^{\pm} = x^0 \pm x^1$), où j^{\pm} sont les courants chiraux (c'està-dire que j^{\pm} ne dépend que de x^{\pm}) définis par $j^+ = \frac{1}{g^2}\phi^{-1}\partial^+\phi$, $j^- = \frac{1}{g^2}\partial^-\phi\phi^{-1}$.⁵⁴ Si l'on se débarrasse de la composante U(1), il reste deux courants chiraux SU(N) qui forment alors deux copies $\mathfrak{sl}(N)_f^{\pm}$ de l'algèbre de Kac–Moody $\mathfrak{sl}(N)$ au niveau f, dont les symétries $\mathfrak{sl}(N)_L$ et $\mathfrak{sl}(N)_R$ sont les sous-algèbres horizontales.

⁵⁴ Notons que $\partial_{-}j^{+} = \partial_{+}j^{-} = 0$ est équivalent au fait que $j^{\mu} = \partial^{\mu}\phi \phi^{-1}$ et son dual $\tilde{j}^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu}j_{\nu}$ sont conservés: $\partial_{\mu}j^{\mu} = \partial_{\mu}\tilde{j}^{\mu} = 0$. Par comparaison, à f = 0, seulement j^{μ} est conservé.

4.1.1. Equations d'Ansatz de Bethe

Les modèles σ principal et WZW sont intégrables, et on peut donc essayer de leur appliquer l'Ansatz de Bethe. Formellement, dans tout ce paragraphe, nous considérerons le modèle σ principal comme le cas particulier f = 0 du modèle de WZW, et ce bien que les propriétés physiques du modèle σ principal diffèrent de celles du modèle de WZW, ce qui nous obligera à les traiter séparément par la suite.

Nous allons rappeler brièvement par quelles méthodes les Equations d'Ansatz de Bethe peuvent être obtenues. Il y en a deux:

* La première méthode consiste à partir d'Equations d'Ansatz de Bethe nues [89]: par des raisonnements un peu heuristiques, on montre que le modèle de WZW U(N)niveau f doit être équivalent à un modèle fermionique invariant $U(N)^{55}$ dans lequel les fermions gauches appartiennent à une représentation symétrique à f_L boîtes, les fermions droits à une représentation symétrique à f_R boîtes, $f_R - f_L = f$, $f_L, f_R \to \infty$. On applique alors les techniques exposées aux chapitres **1-2**, et on obtient le diagramme de BAE nues donné par la figure 42. Dans ce chapitre, les diagrammes de BAE ne seront dessinés que dans le cas SU(2), pour éviter des figures trop volumineuses; les dessins SU(N) sont obtenus à partir des dessins SU(2) en plaçant plusieurs lignes de noeuds.



Fig. 42: Dans la limite $f_L, f_R \to \infty$, $f_R - f_L \equiv f$ fixé, ce diagramme de BAE représente le modèle de WZW SU(2) au niveau f.

L'inconvénient de cette méthode tient au fait que seule la symétrie $SU(N)_R \equiv SU(N)$ existe tant que $f_L, f_R < \infty$, la symétrie $SU(N)_L$ étant prétendument restaurée à $f_L, f_R = \infty$.

Il a été objecté à cette méthode [90] que l'on n'obtenait pas réellement le Hilbert complet du modèle de WZW: plus précisément, les auteurs de [90] ont fait un calcul explicite (dans le cas f = 0, mais le raisonnement est sans doute généralisable à f > 0) de

⁵⁵ Le modèle que nous résolvons par l'Ansatz de Bethe est donc réellement une fermionisation du modèle de WZW U(N), qui, lui-même, se scinde en un modèle de WZW SU(N) et un secteur U(1) découplé; cf la discussion du chapitre **3**.

la transformation de l'intégrale fonctionnelle du modèle fermionique en celle du modèle σ principal, en tenant compte des conditions aux bords pour les deux théories. Ils ont montré que l'on n'obtenait ainsi que le secteur singlet pour la symétrie $SU(N)_L$ du Hilbert du modèle σ principal. Avec les techniques développées au chapitre 2, nous pouvons à présent résoudre cette difficulté. Si l'on examine la figure 42, on se rend compte que pour $f_L < \infty$, la symétrie $SU(N)_L$ n'existe pas mais est remplacée par une symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ avec $q = -\exp(-i\pi/(f_L+2))$. Cependant, comme cela a été expliqué au 2.3.3, cette symétrie est "cachée" au sens où le Hilbert n'est réellement que le secteur singlet de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$. Dans la limite $f \to \infty$, la symétrie de groupe quantique redevient une symétrie de groupe standard, mais toujours cachée, et on aboutit bien à la même conclusion que [90] (mais pour tout f). Il est même remarquable que l'on puisse obtenir cette conclusion par un raisonnement indépendant des BAE. En fait, toujours en suivant la logique du 2.3.3, on pourrait modifier les conditions de bord pour obtenir toutes les "bonnes" représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, mais même cela serait tout-à-fait insuffisant, car le spin par unité de longueur s/L, qui est la quantité physique raisonnable dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, resterait nul⁵⁶.

Comment résoudre ce problème ? La solution passe par l'observation suivante: même si les solutions des équations à $f_L = \infty$ obtenues comme limite des solutions des équations à $f_L < \infty$ sont de spin nul, rien n'empêche les équations à $f_L = \infty$ d'avoir plus de solutions ! En fait, plusieurs arguments permettent de se convaincre que les solutions des BAE à $f_L = \infty$ recouvrent effectivement le Hilbert complet de WZW. Le premier est l'évidente isosymétrie $SU(N)_L \leftrightarrow SU(N)_R$ qui est restaurée à $f_L = \infty$. A toute solution de spin $SU(N)_R$ arbitraire, on peut, par retournement du diagramme de BAE, faire correspondre une solution de spin $SU(N)_L$ arbitraire. Un autre argument est que les BAE à $f_L = \infty$ sont aussi la limite $f_L \to \infty$ des BAE *non-tronquées* $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, puisque seuls les noeuds envoyés à l'infini sont modifiés par la troncation.

* Une deuxième méthode pour obtenir les BAE consiste à trouver les matrices S physiques par le bootstrap, et d'écrire alors des BAE physiques directement. Ceci a été effectivement réalisé pour le champ chiral principal (f = 0) et pour le modèle de WZW au niveau f = 1 dans le cas SU(2) [88], et les BAE ainsi obtenues sont effectivement équivalentes aux BAE nues de la figure 42. Le fait que les deux méthodes proposées donnent le même résultat dans les cas, certes très particuliers, où elles peuvent toutes deux

⁵⁶ Le problème se ramènerait alors à une question de non-commutativité des limites $f_L \to \infty$ et $L \to \infty$.

être appliquées, est un signe encourageant. Pour f > 1, il est difficile de deviner les matrices S physiques par le bootstrap, et il nous faut faire confiance à la méthode des BAE nues.

Nous allons maintenant écrire les TBA correspondantes, et analyser brièvement comment elles permettent de retrouver le flot de groupe de renormalisation.

4.1.2. TBA, limites ultra-violette et infra-rouge

Dans la limite d'échelle, et par des méthodes identiques à celles utilisées dans [III], on obtient les BAE du modèle de Wess–Zumino–Witten:

$$\rho_j^r + (C^{-1})^{qr} \star C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^q = \sin\left(\frac{\pi r}{N}\right) \frac{E}{2T} \left(\delta_{j0} \mathrm{e}^{-\zeta} + \delta_{jf} \mathrm{e}^{\zeta}\right) \tag{4.2}$$

et donc les TBA:

$$\log(1 + (\eta_j^r)^{-1}) - (C^{-1})^{qr} \star C_{jk} \star \log(1 + \eta_k^q) = \sin\left(\frac{\pi r}{N}\right) \frac{E}{2T} \left(\delta_{j0} e^{-\zeta} + \delta_{jf} e^{\zeta}\right)$$
(4.3)

E est une échelle d'énergie engendrée dynamiquement, caractéristique de la transition du point fixe UV vers le point fixe IR. Nous verrons au 4.1.4 que pour f > 0, E s'interprète plus précisément comme l'échelle d'énergie de l'interaction entre particules gauches et droites.

Nous avons représenté sur la figure 43 les TBA de WZW SU(2), ainsi que les limites UV et IR.



Fig. 43: TBA du modèle de WZW SU(2).

Dans l'ultra-violet, le terme topologique de Wess–Zumino ne peut pas jouer de rôle, et la situation est donc identique quel que soit f. Il y a alors 4 diagrammes semi-infinis qui correspondent à la symétrie $SU(N)_L^+ \times SU(N)_R^+ \times SU(N)_L^- \times SU(N)_R^-$.

Cherchons à calculer la charge centrale ultra-violette. On rencontre alors une difficulté: la contribution du diagramme "nu" est une chaîne de noeuds infinie aux deux bouts, et celle-ci ne figure pas dans la liste (figure 35) des sommes dilogarithmiques. En fait, on peut montrer qu'il n'existe pas de solutions aux équations (3.10) (équations vérifiées par les valeurs limites) pour le diagramme infini aux deux bouts; le problème provient du fait que les fonctions chirales $\eta_j^{r\pm}(\zeta)$ tendent vers l'infini quand $\zeta \to \mp \infty$; en particulier la valeur $\eta_j^r(\zeta = 0)$ diverge quand $m/T \to 0$, comme je l'ai vérifié par des simulations numériques. Pour le calcul de la charge centrale, ce n'est pas un problème, car on voit que la contribution du diagramme est nulle, de sorte que $c = N^2 - 1$: c'est la charge centrale d'un boson libre non-massif vivant dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(N)$. Par contre, le calcul du terme suivant dans le développement de haute température de l'énergie libre n'est pas accessible simplement; on peut seulement conclure qu'il est d'ordre $T^2/\log(T/m)$, mais sans pouvoir calculer le coefficient devant ce terme⁵⁷.

La charge centrale $c = N^2 - 1$ et les corrections logarithmiques sont bien sûr une conséquence de la liberté asymptotique dans l'ultra-violet; quand on fait un développement perturbatif de l'énergie libre à haute température, c'est-à-dire de la fonction de partition sur un cylindre très étroit⁵⁸, on obtient effectivement comme $0^{\text{ème}}$ ordre de la perturbation les bosons libres vivant sur l'algèbre de Lie, puis une série en puissance de la constante de couplage renormalisée à l'échelle T. On identifie donc $g(T) \sim 1/\log(T/m)$, ce qui est la relation attendue. Notons que le développement perturbatif brise la symétrie $SU(N)_L \times SU(N)_R$ en son sous-groupe diagonal, la symétrie complète étant donc restaurée au niveau non-perturbatif.

Passons maintenant à la limite infra-rouge. Pour f > 0 (voir la section 4.1.3 pour le cas f = 0), chacune des deux chiralités reproduit le diagramme que l'on avait déjà considéré au 3.1.3 (figure 36): on avait alors calculé la charge centrale, qui vaut $c = (N^2 - 1)^2$

 $^{5^{\}gamma}$ Une situation similaire est étudiée dans [91], pour des TBA plus simples. Malheureusement, il est difficile de généraliser le raisonnement de [91] aux TBA plus compliquées du modèle σ principal, afin de pousser plus loin le développement de $F(T), T \to \infty$.

 $^{^{58}}$ En fait, le premier ordre de la perturbation est exactement égal à la contribution nonperturbative du mode zéro par rapport à la direction compactifiée, soit en d'autres termes à l'énergie libre du modèle à 1 dimension.

1)f/(f+N), ce qui est caractéristique d'une symétrie $\mathfrak{sl}(N)_f$. De plus, il est remarquable que la forme des TBA dans l'infra-rouge illustre parfaitement la décomposition du champ $\phi(x^+, x^-)$ au point fixe IR: en effet, les équations du mouvement impliquent alors que

$$\phi^{ij}(x^+, x^-) = g^{ia}(x^-)h^{aj}(x^+) \tag{4.4}$$

où *i* est un indice de $SU(N)_L$, *j* est un indice de $SU(N)_R$ (les symétries $SU(N)_L$ et $SU(N)_R$ sont donc bien devenues des symétries chirales, comme indiqué plus haut), et *a* s'identifie tout naturellement à un indice de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ avec $q = -\exp(-i\pi/(f+N))$.

Comme pour le modèle NJL anisotrope, dans le modèle de WZW avec f > 1, les deux chiralités, au point fixe IR, ne sont pas "totalement" découplées au sens où elles restent couplées par les modes zéros (ainsi la fonction de partition sur un tore, même fermionisée, ne s'écrit que comme *somme* de produits d'un caractère de $\mathfrak{sl}(N)_f^+$ et d'un caractère de $\mathfrak{sl}(N)_f^-$). Evidemment, ceci ne peut pas se voir dans les TBA (il faudrait des "TBA pour les états excités" pour voir apparaître ce couplage), donc on peut dire que le diagramme IR des TBA associées à chaque chiralité décrit la théorie conforme de WZW chirale SU(N) niveau f.

4.1.3. Spectre et matrices S du modèle σ principal

Décrivons maintenant la nature des excitations physiques; on doit séparer les cas f = 0 et f > 0, puisque leur physique diffère sensiblement.

Le modèle σ principal (f = 0), à la différence du modèle de WZW, n'exhibe pas de restauration de la symétrie conforme au point fixe IR: il s'agit en effet d'une théorie massive, comme on le voit d'après le second membre $E \sin(\pi r/N) \delta_{j0} \cosh \zeta$ des TBA. Le spectre de masse est donc: $m^r = E \sin(\pi r/N)$.

On peut alors obtenir les matrices S des différentes particules, soit par le bootstrap [92], soit par la méthode des Equations d'Ansatz de Bethe Physiques.

On trouve qu'il y a N - 1 types de particules: la $r^{\text{ème}}$ particule, de masse $m^r = E \sin(\pi r/N)$, appartient à la $r^{\text{ème}}$ représentation fondamentale de $SU(N)_R$ (tableau de Young à une colonne de r boîtes), et à la $(N - r)^{\text{ème}}$ représentation fondamentale de $SU(N)_L$ (représentation conjuguée). Pourquoi une telle conjugaison ? Rien dans les BAE ne permet de distinguer cette hypothèse de celle qui est faite dans [92] et qui consiste à choisir la $m\hat{e}me$ représentation pour $SU(N)_L$ et $SU(N)_R$: en effet, par une redéfinition évidente $(g_L \to \bar{g}_L)$ de l'action de $SU(N)_L$, on passe d'une hypothèse à l'autre. Cependant, des arguments généraux montrent que la première hypothèse est la bonne; par

exemple, on remarque que pour le sous-groupe diagonal $SU(N) \subset SU(N)_L \times SU(N)_R$, le nombre de boîtes du tableau de Young d'un état quelconque est nécessairement congru à 0 modulo N, ce qui est le cas avec la première hypothèse mais pas avec la seconde. Ainsi, la dualité gauche/droite $SU(N)_L \leftrightarrow SU(N)_R$ échange particules et anti-particules.

Les matrices S sont données par:

$$S^{qr}(\zeta) = \widehat{S}^{qr}(\zeta) R_L^{qr}(\zeta) R_R^{qr}(\zeta)$$

avec des notations évidentes. Le facteur scalaire qui donne la diffusion de plus haut poids, obtenu par comparaison entre les BAE nues et les BAE physiques, vaut, conformément aux méthodes générales du **2.5**:

$$\widehat{S}^{qr}(\zeta) = \exp\left[-2i\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \,\frac{\sin(\omega\zeta)}{\omega} \left(2\frac{\sinh|\pi\omega(1-q/N)|\sinh|\pi\omega r/N|}{\sinh|\pi\omega|} - \delta^{qr}\right)\right] \quad (4.5)$$

qui n'est autre que la limite quand $f \to \infty$ de (2.58) ($\zeta = 2\pi\lambda/N$).

4.1.4. Les excitations du modèle de WZW

Du fait de l'absence de mass gap, la notion de particule est un peu ambiguë dans une théorie non-massive. De plus, la diffusion de deux particules de même chiralité (allant donc à la vitesse de la lumière dans la même direction) paraît dénuée de signification physique. Cependant, dans le cadre des modèles intégrables, on peut donner un sens à de tels concepts (voir par exemple l'introduction de [93]). Ainsi, à partir de l'Ansatz de Bethe, et par analogie avec le cas massif, il est naturel de considérer que les noeuds hachurés des BAE physiques correspondent à des excitations non-massives qui diffusent avec des matrices S que nous allons maintenant calculer.

D'après le diagramme des BAE physiques, nous conjecturons la structure suivante des excitations: tout d'abord, les particules gauches (resp. droites) de type r $(1 \le r \le N - 1)$ appartiennent à la $r^{\text{ème}}$ représentation fondamentale de $SU(N)_L$ (resp. $SU(N)_R$). Ensuite, les noeuds compris entre les deux noeuds hachurés $(1 \le j \le f - 1)$ suggèrent d'introduire une symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, avec $q = -\exp(-i\pi/(f+N))$. Si l'on poursuit dans cette logique, on doit alors effectuer un choix arbitraire: supposons que les particules gauches de type r (qui sont reliées aux noeuds j = 1) appartiennent à la $r^{\text{ème}}$ rep fondamentale de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$; les particules droites (qui sont reliées aux noeuds j = f - 1) sont alors au contraire dans la rep $r \times (f - 1)$ (tableau de Young rectangulaire). Nous aurions pu faire le choix inverse; dans tous les cas, les particules gauche et droite ne jouent pas des rôles symétriques, mais cette dissymétrie n'est qu'apparente, comme nous allons le voir plus loin.

Le Hilbert complet de la théorie est finalement construit comme un espace de Fock tronqué vis-à-vis de la symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(N))$. Les particules gauches diffusent entre elles avec une matrice S

$$S_{LL}^{qr}(\zeta) = \widehat{S}_{LL}^{qr}(\zeta) R_L^{qr}(\zeta) R'^{qr}(\zeta)$$

où on a utilisé les notations habituelles, et $\zeta = \log(E_1/E_2) - \alpha^{qr}$ est (à une constante $\alpha^{qr} = \log \sin(\pi q/N) - \log \sin(\pi r/N)$ près) le logarithme du rapport des énergies des deux particules. Il est important de remarquer que la rapidité ζ ne dépend d'aucune échelle d'énergie; en particulier dans la limite IR où les chiralités se découplent, les expressions que nous allons trouver pour les matrices S doivent rester valables. On a une formule strictement analogue pour $S_{RR}^{qr}(\zeta)$. Enfin, la matrice S entre particules de chiralités différentes est de la forme:

$$S_{LR}^{qr}(\zeta) = \widehat{S}_{LR}^{qr}(\zeta) R'^{q\hat{r}}(\zeta)$$

où $R'^{q\hat{r}}$ est la matrice R de $U_q(\mathfrak{sl}(N)$ entre les représentations $q \times 1$ et $r \times (f-1)$. Cette fois $\zeta = \log(E_1E_2/E^2) - \alpha^{qr}$, donc λ dépend de l'échelle d'énergie engendrée dynamiquement E.

Ensuite, la comparaison entre BAE physiques et BAE nues nous donne de manière standard les facteurs scalaires: \hat{S}_{LL}^{qr} est donné par (2.58), ce qui était évident puisque dans la limite infra-rouge, chaque chiralité prise séparément reproduit le modèle fusionné du 2.4.3; quant à \hat{S}_{LR}^{qr} , il est donné par: $(q \ge r)$

$$\widehat{S}_{LR}^{qr}(\zeta) = \exp\left(2i\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \,\frac{\sin(\omega\zeta)}{\omega} \frac{\sinh(\pi\omega(1/N+1))}{\sinh(\pi\omega(f/N+1))} \frac{\sinh(\pi\omega(1-q/N))\sinh(\pi\omega r/N)}{\sinh(\pi\omega/N)\sinh(\pi\omega)}\right)$$
(4.6)

Enfin, on peut calculer $\widehat{S}_{RR}^{qr}(\zeta)$, mais nous ne le donnerons pas explicitement, car \widehat{S}_{RR} n'a pas de signification physique pour nous: en effet, après la troncation de groupe quantique, il est impossible de faire diffuser deux particules de spin (f-1)/2 dans la représentation de plus haut poids.

Le fait qu'on puisse définir un déphasage S_{LL} qui ait un sens physique, tandis que S_{RR} en est dénué peut paraître surprenant, mais il est dû à la manière asymétrique dont nous avons traité les particules gauche et droite. Pour faire disparaître cette asymétrie, il faut passer à la formulation solitonique des matrices S. Nous ne traiterons en détail que le cas N = 2.

Tout d'abord, pour N = 2, on sait (cf Eq. (2.48)) que la matrice S_{LL} est exactement donnée par le produit tensoriel de la matrice

$$S(\zeta) = R(\zeta) \frac{\Gamma\left(1 + i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\zeta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(1 - i\frac{\zeta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\zeta}{2\pi}\right)}$$

de $Y(\mathfrak{sl}(2))$, et de la matrice S solitonique (2.32) (avec $\lambda = \zeta/\pi$).

Ensuite, on constate que la symétrie des Clebsch–Gordan: $s \otimes \varphi(s') = \varphi(s \otimes s')$ où $\varphi(s) = f/2 - s$, se répercute au niveau des matrices S (2.32), puisque celles-ci sont invariantes par $s \to \varphi(s)$. Il est alors possible de faire la transformation suivante: plutôt que de considérer les particules droites comme ayant un spin (f - 1)/2, on les prend de spin 1/2 comme les particules gauches, en effectuant la transformation φ après chaque transition associée à une particule droite. On calcule sans difficulté la matrice S_{RR} solitonique dans cette nouvelle base, et on la trouve égale à S_{LL} (Eq. (2.32)), avec le même préfacteur scalaire \hat{S}_{LL} . La symétrie est donc rétablie.

On peut alors effectuer la même transformation à S_{LR} (figure 44).



Fig. 44: Etats constitués d'une particule gauche et d'une particule droite.

Notons que le facteur scalaire (4.6) s'identifie alors au déphasage de la diffusion de spin 0, et non de spin 1 (on peut par exemple le voir sur la figure 44, diagramme b, s = 0).

Reprenant un instant la paramétrisation $\zeta = \pi \lambda$, on trouve le résultat:

$$S(a \to a) = S(d \to d) = \frac{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda - i))}{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda + i))} \widehat{S}_{LR}(\lambda)$$

$$S(b \to c) = S(c \to b) = \frac{\lfloor 2s + 2 \rfloor^{1/2} \lfloor 2s \rfloor^{1/2}}{\lfloor 2s + 1 \rfloor} \frac{\cosh(\tilde{\gamma}\lambda)}{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda + i))} \widehat{S}_{LR}(\lambda)$$

$$S(b \to b) = -\frac{1}{\lfloor 2s + 1 \rfloor} \frac{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda + i(2s + 1)))}{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda + i))} \widehat{S}_{LR}(\lambda)$$

$$S(c \to c) = \frac{1}{\lfloor 2s + 1 \rfloor} \frac{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda - i(2s + 1)))}{\cosh(\tilde{\gamma}(\lambda + i))} \widehat{S}_{LR}(\lambda)$$
(4.7)

avec $\tilde{\gamma} = \pi/(f+2)$. Ceci s'avère être essentiellement identique à la matrice S_{LR} conjecturée dans [38]⁵⁹, ce qui est normal puisque nous avons vu au **2.5** que les matrices S, pour N = 2, se factorisent exactement en matrices S associées aux différentes symétries, et la matrice S_{LR} ne fait intervenir que la symétrie $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ commune aux deux modèles.

Revenons à N quelconque, et discutons enfin du cas f = 1. Dans ce cas-là, la structure solitonique est triviale, au sens où, pour une quelconque diffusion (LL, LR, RR), il n'y a qu'une transition possible: on peut donc oublier entièrement la structure solitonique. En particulier, la matrice S_{LR} est une simple phase, donnée par (4.6) avec f = 1.

4.1.5. Calculs en champ magnétique

Nous allons présenter ici des calculs exacts du modèle de Wess–Zumino–Witten placé en champ magnétique à température nulle. Ces résultats seront d'un grand intérêt pour nous puisqu'on verra dans la section **4.3** qu'ils s'appliquent directement au modèle de Kondo.

Expliquons tout d'abord ce qu'il advient des TBA (4.3) dans la limite $T \to 0$, à champ magnétique B fixé. L'idée générale est que si l'on pose $\eta_j^r = e^{\epsilon_j^r/T}$, alors on a $\epsilon_j^r \sim B \gg T$, de sorte que $\log(1+\eta_j^r) \sim \frac{1}{T} \max(\epsilon_j^r, 0)$ et $\log(1+(\eta_j^r)^{-1}) \sim \frac{1}{T} \max(-\epsilon_j^r, 0)$.

Supposons donc que nous avons placé un champ magnétique B pour la symétrie $SU(N)_R$. Comme il est expliqué dans [III.3.4], le champ B a N-1 composantes, et nous nous restreindrons au cas où les composantes b^r (dans la même paramétrisation qu'au [III.3.4]) sont de la forme: $b^r \propto \sin(\pi r/N)$. Physiquement, il est clair que la présence de B favorise l'apparition de particules physiques droites (B joue le rôle de potentiel chimique positif pour celles-ci), mais défavorise au contraire l'apparition d'excitations isotopiques $SU(N)_R$ qui tendent à réduire le spin $SU(N)_R$ (B joue le rôle de potentiel

⁵⁹ Dans les notations de [38], $\widehat{S}_{LR}(\zeta) = \widetilde{Z}(\zeta) \cosh(\zeta + i\pi)/(f+2)$.

chimique négatif pour celles-ci). Quant aux excitations isotopiques $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, et aux particules gauches, elles ne sont pas affectées par B, et ces dernières doivent donc se trouver dans l'état du vide. Par conséquent, on est conduit aux conjectures suivantes pour les fonctions ϵ_i^r :

$$\begin{cases} \epsilon_j^r(\zeta) > 0 & j \neq 0, j \\ \epsilon_0^r(\zeta) < 0 \\ \epsilon_f^r(\zeta) < 0 & \zeta < \zeta_0 \\ \epsilon_f^r(\zeta) < 0 & \zeta > \zeta_0 \end{cases}$$

On a introduit le paramètre ζ_0 , qui est la limite entre la zone d'énergie dans laquelle des particules droites sont excitées ($\zeta < \zeta_0$) et la zone d'énergie qui reste vide de particules ($\zeta > \zeta_0$).

Du fait que le second membre des TBA est proportionnel au vecteur de Perron– Frobenius de la matrice d'adjacence du diagramme A_{N-1} : $\sin(\pi r/N)$, on peut projeter toutes les équations sur celui-ci. On pose donc: $\epsilon_f^r(\zeta) = \sin(\pi r/N)(\epsilon^+(\zeta) + \epsilon^-(\zeta))$, avec $\epsilon^+(\zeta) > 0$ et $\epsilon^-(\zeta) < 0$ de supports disjoints, et après quelques manipulations, les TBA à $T \to 0$ se récrivent:

$$\epsilon^{-} + K_0 \star \epsilon^{+} = -\frac{E}{2} \mathbf{e}^{\zeta} + b \tag{4.8}$$

où $b^r = b(1 - \cos(\pi/N)) \sin(\pi r/N)$, et K_0 est le noyau de convolution donné en transformée de Fourier par rapport à ζ^{60} :

$$K_0(\omega) = \frac{\sinh(\pi\omega/N)}{\cosh(\pi\omega/N) - \cos(\pi/N)} \frac{\mathrm{e}^{f\pi|\omega|/N}}{2\sinh(f\pi\omega/N)}$$
(4.9)

Par un décalage $\zeta \to \zeta - \zeta_0$, on peut supposer que ϵ^- est non nul sur $[-\infty, 0]$ et que ϵ^+ est non nul sur $[0, +\infty]$. Finalement, on agit avec l'opérateur différentiel $1 - \partial/\partial \zeta$ sur (4.8):

$$u + K \star \epsilon^+ = b \tag{4.10}$$

où $u = (1 - \partial/\partial\zeta)\epsilon^-$, $K(\omega) = (1 + i\omega)K_0(\omega)$, et on est ramené à un classique problème de Wiener-Hopf. La solution passe par l'introduction de deux fonctions $K^{\pm}(\omega)$ holomorphes dans le demi-plan $\pm \operatorname{Im} \omega \leq 0$, telles que $K(\omega) = K^+(\omega)/K^-(\omega)$; explicitement,

$$K^{+}(\omega) = \alpha \frac{N}{2\pi^{2}f} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+i\omega}{2N}\right)\Gamma\left(1 + \frac{-1+i\omega}{2N}\right)\Gamma\left(1 + \frac{i\omega f}{N}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{N}\right)} e^{-i\omega \frac{f}{N}\log\left(\frac{if}{Ne}(\omega-i0)\right)} e^{i\omega \frac{\log 2}{N}}$$
$$K^{-}(\omega)^{-1} = \alpha^{-1} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1+i\omega}{2N}\right)\Gamma\left(\frac{1-i\omega}{2N}\right)\Gamma\left(1 - \frac{i\omega f}{N}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{N}\right)} e^{i\omega \frac{f}{N}\log\left(-\frac{if}{Ne}(\omega+i0)\right)} e^{-i\omega \frac{\log 2}{N}}$$

⁶⁰ Rappelons que par rapport aux conventions du chapitre **1**, nous avons changé l'échelle des rapidités; donc de même, en transformée de Fourier, $\kappa = \pi \omega / N$.

Les fonctions K^+ et K^- ont été choisies de telle sorte que lorsque $|\omega| \to \infty$, $K^+(\omega) \sim |\omega|^{3/2}$ et $K^-(\omega) \sim |\omega|^{1/2}$. On prend de plus $\alpha = \Gamma(1 - 1/2N)\Gamma(1/2N)$, de façon que $K^-(\omega = 0) = 1$. On a alors les solutions de (4.10):

$$u(\omega) = ib \frac{K^{-}(\omega)^{-1}}{\omega + i0}$$

$$\epsilon^{+}(\omega) = -ib \frac{K^{+}(\omega)^{-1}}{\omega - i0}$$

En réintégrant, on obtient ϵ^- à partir de u, d'où finalement en calculant l'asymptotique de ϵ^- quand $\zeta \to +\infty$ (qui est directement reliée à $K^-(\omega = i)$), ζ_0 en fonction du champ b (et de E):

$$\zeta_0 = \log\left(\frac{b}{E}\right) + \log\frac{2N}{\Gamma(1-1/2N)\Gamma(1/2N)} + \log\Gamma\left(1+\frac{f}{N}\right) - \frac{f}{N}\left(\log\frac{f}{N} - 1\right) \quad (4.11)$$

Nous verrons la signification physique du paramètre ζ_0 quand nous appliquerons ces formules au modèle de Kondo (section 4.3.3). De fait, nous n'irons pas plus loin dans nos calculs (bien que la donnée des fonctions ϵ^+ et ϵ^- permette de calculer les quantités thermodynamiques physiquement intéressantes du modèle de WZW), car nous analyserons ces formules dans la limite $N \to \infty$ uniquement (cf section suivante), et en relation avec le modèle de Kondo.

Remarque: après avoir rédigé cette section de ma thèse, j'ai pris connaissance de l'article [94], qui effectue un calcul en champ magnétique assez similaire (quoique différent) pour une chaîne de spins dont le point fixe infra-rouge est la théorie conforme de WZW.

4.2. Limite de grand N des TBA

Avant d'aborder le modèle de Kondo, nous allons faire quelques remarques concernant la limite de grand N des équations de TBA SU(N). Celles-ci s'appliquent à tous les modèles intégrables relativistes invariants SU(N); nous nous intéresserons tout particulièrement à WZW SU(N) niveau f, pour lequel nous prendrons la limite $N \to \infty$, $\nu \equiv f/N$ fixé.

Partons des TBA générales SU(N) (cf Eq. (3.19)):

$$\log(1 + (\eta_j^r)^{-1}) - (C^{-1})^{qr} \star C_{jk} \star \log(1 + \eta_k^q) = \sin(\pi r/N)(\alpha_j^+ e^{+\zeta} + \alpha_j^- e^{-\zeta})$$
(4.12)

Prolongeons analytiquement les fonctions $\eta_j^r(\zeta)$ dans la bande $|\operatorname{Im} \zeta| \leq \pi/N$, et définissons les opérateurs \hat{C}^{qr} et \hat{C}_{jk} comme dans [III.3.3], qui sont tels que $\hat{C}^{qr} \star s = C^{qr}$ et $\hat{C}_{jk} \star s = C_{jk}$. En appliquant \hat{C}^{qr} à (4.12), on obtient:

$$\hat{C}^{qr} \star \log(1 + (\eta_j^r)^{-1}) - \hat{C}_{jk} \star \log(1 + \eta_k^q) = 0$$
(4.13)

Ces équations ne contiennent plus le second membre, annihilé par \hat{C}^{qr} ; elles doivent donc être suppléées par des conditions aux bords qui fixent le second membre de (4.12).

Dans la limite $N \to \infty$, on introduit des indices continus $x = \pi j/N$ et $y = \pi r/N$ ($0 < y < \pi$). On voit alors facilement que les opérateurs \hat{C}^{qr} et \hat{C}_{jk} , qui étaient des opérateurs de différences discrètes, deviennent dans cette limite des opérateurs différentiels du type de Laplace:

$$\hat{C}^{qr} \sim -\frac{\pi^2}{N^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right)$$
$$\hat{C}_{jk} \sim -\frac{\pi^2}{N^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right)$$

L'équation (4.13) devient donc une équation aux dérivées partielles à trois variables pour la fonction $\eta(x, y, \zeta)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\log(1+\eta^{-1}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\log(1+\eta) = 0$$
(4.14)

Cette équation aux dérivées partielles est intégrable au sens des systèmes intégrables classiques, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire comme une condition de courbure nulle; malheureusement, il est difficile d'en écrire des solutions explicites, et encore moins des solutions qui puissent avoir le bon comportement asymptotique pour les TBA. Or, toute la physique des différents modèles intégrables est contenue dans ces conditions aux bords. Signalons aussi que la validité des équations (4.14) n'est pas prouvée, car – à part pour les valeurs limites $\eta(\zeta = \pm \infty)$ que l'on sait calculer explicitement et dont on voit qu'elles ont une limite régulière à $N = \infty$ en termes des variables x et y – rien ne nous dit que les fonctions η ne vérifient pas une loi d'échelle compliquée en fonction de N, éventuellement dépendante de x, y et ζ .

On peut tout de même se servir de l'équation (4.14) dans la limite $T \to 0$, pour faire une étude en champ magnétique et à température nulle. Ainsi, les résultats de [95] sur le modèle σ principal à grand N peuvent être retrouvés de manière élémentaire à partir de (4.14). De manière similaire, on peut obtenir les résultats de la section 4.1.5 directement à N grand: on part de (4.14), qui se récrit à $T \rightarrow 0$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\epsilon^- + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\epsilon^+ = 0$$
(4.15)

On impose la condition: $\epsilon^{-}(x, y, \zeta) = \delta(x - \pi \nu)e^{-}(y, \zeta)^{61}$. Ceci ramène le problème à la recherche d'une fonction de Green (par rapport à x et ζ) qui s'annule en x = 0. Passant en double Fourier par rapport à ζ (variable conjuguée ω) et y (variable conjuguée – entière – l), la solution est:

$$K_0(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\pi\nu|\omega|}}{\sinh(\pi\nu\omega)} \frac{\omega}{\omega^2 + l^2}$$
(4.16)

Finalement, on se restreint au mode de Perron–Frobenius, ce qui revient à poser l = 1dans (4.16). On vérifie alors que (4.16) est bien le noyau limite de (4.9) à $N = \infty$. La suite du calcul est identique à ce que nous avons fait à $N < \infty$, mais les expressions sont nettement plus simples; ainsi, $\epsilon^+ \equiv \epsilon^+ (x = \pi \nu)$ vaut

$$\epsilon^{+}(\omega) = -iB\pi\nu B \frac{1}{\omega - i0} e^{i\nu\omega\log(i\nu/e(\omega - i0))} \Gamma(1 + i\nu\omega)^{-1}$$

où l'on a redéfini le champ magnétique: $B \equiv \pi b/N$. Les fonctions Γ supplémentaires à $N < \infty$ ne font que créer un développement régulier en 1/N autour de $N = \infty$. Ainsi, ces formules explicites permettent d'affirmer que les phénomènes physiques qualitatifs sont entièrement capturés par la limite $N \to \infty$, et ne dépendent que du rapport $\nu = f/N$, ce qui constitue une justification de cette hypothèse, utilisée par exemple dans [96].



Fig. 45: Courbe de $\epsilon^+(\zeta)/B$ à $N = \infty$, $\nu = 1/2$. Notons la singularité en racine carrée à $\zeta = 0$ qui n'existe qu'à $N = \infty$ (à $N < \infty$ elle est en puissance 3/2), due à la divergence des échelles: $\epsilon^- \sim N\epsilon^+$.

⁶¹ Remarquons que $\epsilon^-(x = \pi \nu)$ n'est pas définie du fait de la fonction δ ; ceci provient à N fini d'une divergence des échelles-types de ϵ^- et ϵ^+ : on a en effet: $\epsilon^- \sim N \epsilon^+$.

4.3. Le modèle de Kondo généralisé

Le modèle de Kondo décrit l'interaction entre des impuretés magnétiques en faible concentration dans un métal et les électrons de conduction. A basse température, on explore le voisinage du point fixe infra-rouge de la théorie, qui s'avère être dans une région de couplage fort: la physique y est non-triviale, et est dominée par un phénomène d'*écrantage* des impuretés par les électrons, de sorte que les impuretés voient leur spin effectif diminué. Le lecteur est renvoyé à [97] et à l'introduction de [III] pour plus de détails et pour les références historiques. Ici, notre objectif est d'effectuer une étude (par l'Ansatz de Bethe) du modèle de Kondo complémentaire de celle de [III], et qui utilise les résultats de la section **4.1** (en particulier du *4.1.4*) sur le modèle de WZW.

Dans le modèle de Kondo usuel, on part d'impuretés de spin s, qui interagissent avec les électrons (de spin 1/2) par un couplage spin-spin antiferromagnétique. Comme les impuretés sont en faible concentration, on peut supposer qu'il n'y a qu'une impureté. On se place en coordonnées radiales autour de ladite impureté, et on ne garde que les modes radiaux. On est alors ramené à un problème à 1 + 1 dimensions, avec la coordonnée spatiale sur une demi-droite: x > 0. Plutôt que de se restreindre à cette demi-droite, on peut identifier les électrons entrants avec des particules "droites" à x < 0, tandis que les électrons sortants sont aussi des particules "droites" avec x > 0. On est donc ramené à un problème avec $-\infty < x < +\infty$, une seule chiralité d'électrons, et une impureté localisée en x = 0. Essentiellement, les électrons arrivent de $x = -\infty$, interagissent avec l'impureté pour $x \sim 0$, puis repartent vers $x = +\infty$. Cependant, le modèle de Kondo reste un modèle de théorie des champs (et non de mécanique quantique), car l'impureté induit des corrélations non-triviales entre les électrons successifs qui diffusent sur elle.

Dans le modèle de Kondo multi-canal, il y a plusieurs bandes de conduction, de sorte que l'on peut attribuer un nombre quantique supplémentaire (la "saveur")⁶² aux électrons. On suppose pour simplifier que toutes les saveurs interagissent identiquement avec l'impureté: s'il y a f saveurs, le modèle est alors invariant $SU(2) \times SU(f)$.

Enfin, dans le modèle de Kondo généralisé, on remplace le groupe SU(2), qui provient originellement du spin à 3 dimensions, par le groupe SU(N); le modèle résultant est aussi appelé modèle de Coqblin–Schrieffer. On obtient finalement un modèle invariant

⁶² On peut également interpréter la saveur comme le nombre quantique orbital m, si l'on tient compte d'orbitales plus élevées (le nombre de saveurs est alors égal à 2l + 1).

 $SU(N) \times SU(f)$, avec des électrons dans une représentation fondamentale de $SU(N)^{63}$, et une impureté que l'on prendra dans une représentation de tableau de Young rectangulaire $n \times l$ vis-à-vis de SU(N).

Le Hamiltonien du modèle de Kondo généralisé est donné au [III.1.1] (avec une procédure de cutoff précise de façon à permettre la fusion dynamique), et diagonalisé grâce à l'Ansatz de Bethe emboîté. Ici, nous nous contenterons de quelques commentaires généraux qui éclairent la construction qui est faite.

Retirons provisoirement l'impureté du système. Les électrons sont alors des fermions libres U(Nf), qui constituent la fermionisation du modèle de WZW U(Nf) niveau 1. Comme l'interaction avec l'impureté va briser U(Nf) en $U(1) \times SU(N) \times SU(f)$ (la *charge*, le *spin* et la *saveur*), nous sommes amenés à considérer les électrons du point de vue de cette symétrie restreinte. Comme d'habitude, nous ne nous intéresserons pas à la symétrie U(1), qui sera reliée à un secteur de charge découplé. Pour ce qui est de SU(N), on voit que les courants associés forment une représentation de niveau f de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{sl}(N)$; en effet, chaque saveur contribue pour 1 au niveau, et il y a f saveurs. De manière analogue, on a une représentation de niveau N de l'algèbre $\mathfrak{sl}(f)$. Ceci nous conduit naturellement à l'hypothèse suivante: le Hilbert des électrons se décompose naturellement en trois secteurs, le secteur de charge, le secteur de spin qui est un WZW chiral SU(N) niveau f, et le secteur de saveur qui est un WZW chiral SU(f) niveau f. Cette hypothèse est justifiée par le fait qu'il y a un "plongement conforme" (les tenseurs énergie-impulsion des trois secteurs reconstituent le tenseur énergie-impulsion complet), résumé par l'égalité des charges centrales

$$c = (N^2 - 1)\frac{f}{N+f} + (f^2 - 1)\frac{N}{N+f} + 1 = Nf$$

Bien sûr, cette hypothèse néglige toutes les subtilités reliées aux "modes zéros". De fait, par une analyse plus détaillée [98], on montre que la fonction de partition (sur un tore) des fermions libres U(Nf) se décompose comme somme de produits d'un caractère de $\widehat{\mathfrak{u}(1)}$, d'un caractère de $\widehat{\mathfrak{sl}(N)}_f$ et d'un caractère de $\widehat{\mathfrak{sl}(f)}_N$, avec des coefficients déterminés dans [98]. Ces coefficients couplent les différents secteurs, ce qui est normal puisque la notion de "WZW chiral" est quelque peu ambiguë (cf remarque similaire à la fin du 4.1.2).

⁶³ Comme précédemment, le choix de la représentation fondamentale ne change rien à la physique (la taille verticale du tableau de Young ne fait que changer d'un facteur numérique l'énergie dynamiquement engendrée).

Les trois secteurs apparaissent naturellement dans la description de l'Ansatz de Bethe sous la forme de trois jeux de rapidités λ_j , ω_{α} , Λ_{α} (Eq. (III.1.16)). Si l'on réintroduit maintenant l'impureté, rien n'est changé dans l'analyse précédente, si ce n'est qu'il y a maintenant un secteur en interaction (qui n'est donc plus conforme): le secteur de spin, du fait du couplage spin-spin entre électrons et impureté. On peut donc se placer dans l'état du vide des deux autres secteurs, et on aboutit à des BAE effectives pour le secteur de spin (Eq. (III.1.19)), représentées par la figure 46.



Fig. 46: BAE nues du modèle de Kondo.

On remarque que si l'on retire la contribution de l'impureté, ces équations ont exactement la structure de celles du modèle de WZW chiral SU(N) niveau f, ce qui est conforme à la discussion ci-dessus. En particulier, le fait que l'on aboutisse à des BAE fusionnées provient de la *fusion dynamique* des électrons en des composites dans des représentations supérieures (de largeur du tableau de Young égale à f). Le nombres d'électrons originels n'étant pas nécessairement multiple de f, on peut supposer que quelques électrons fusionnent partiellement et assurent des conditions aux bords libres pour le nombre quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ (cf section 2.3.3).

La suite de l'article [III] consiste à étudier l'état fondamental, puis la thermodynamique du modèle via les TBA: après être passé à la limite d'échelle, qui, dans le modèle de Kondo, s'interprète comme l'envoi de la profondeur de la mer de Fermi à l'infini, on aboutit aux TBA que nous écrirons sous la forme:

$$\log(1 + (\eta_j^r)^{-1}) - (C^{-1})^{qr} \star C_{jk} \star \log(1 + \eta_k^q) = \delta_{jf} \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi r/N)}{\sin(\pi/N)} \frac{T_K}{T} e^{\zeta}$$
(4.17)

et qui s'avèrent être identiques aux TBA de la théorie conforme WZW SU(N) niveau f (figure 36), du fait que l'impureté ne contribue pas à l'énergie (à part à travers le champ magnétique). Cependant, on a tout de même une échelle engendrée dynamiquement:

même si on peut absorber l'échelle T_K du second membre par un décalage des rapidités (cf Eq. (III.3.8)), celle-ci réapparaît dans l'expression de l'énergie libre (Eq. (III.3.10)). Sans décalage des rapidités, l'échelle T_K (température de Kondo) apparaît explicitement dans les TBA (4.17); par contre, elle n'apparaît plus dans l'énergie libre d'une impureté habillée par son interaction avec les électrons, obtenue en soustrayant à l'énergie libre totale l'énergie libre des électrons en l'absence d'impuretés (et en divisant par le nombre d'impuretés):

$$F_l^n = -T \int d\zeta \, (\hat{C}^{-1})^{rn}(\zeta) \log(1 + \eta_l^r(\zeta)) \tag{4.18}$$

Plutôt que de continuer dans la même voie que [III] – déduire des TBA les équations de fusion modifiées, puis les comportements à haute et basse température des quantités thermodynamiques – nous allons reprendre les BAE nues de la figure 46, et montrer leur équivalence, dans la limite d'échelle, avec des BAE physiques appropriées. Ceci nous permettra de décrire le Hilbert de basse énergie, les excitations physiques, etc.

4.3.1. BAE physiques et spectre des excitations dans Kondo

Les BAE physiques du modèle de Kondo contredisent la règle générale admise jusqu'à présent, selon laquelle le diagramme des TBA et celui des BAE physiques sont identiques: en effet, bien que les TBA du modèle de Kondo soient les mêmes que celles de WZW, les BAE physiques, elles, en sont distinctes puisque l'impureté y apparaît explicitement (figure 47).



Fig. 47: BAE physiques du modèle de Kondo.

Ceci correspond aux équations suivantes, qui ne sont qu'une récriture des BAE nues:

$$(C^{-1})^{qr} \star C_{jk} \star \tilde{\rho}_k^q + \rho_j^r = \delta_{jf} \frac{T_K}{4\pi} \frac{\sin(\pi r/N)}{\sin(\pi/N)} e^{\zeta} + \delta_{jl} D^{imp} (C^{-1})^{rn} \star s(\zeta)$$
(4.19)

On a réintroduit dans (4.19) une densité linéique finie d'impuretés D^{imp} , pour éviter d'écrire une équation qui mélange différents ordres de 1/L (L taille du système). Ceci n'a

pas d'importance particulière puisque l'on suppose toujours que la densité d'impuretés est suffisamment faible pour qu'elles ne se "voient" pas les unes les autres.

Evidemment, les excitations physiques correspondant au noeud f sont les particules habituelles du modèle de WZW chiral (cf 4.1.4), c'est-à-dire des particules "droites" de type $1 \le r \le N - 1$, déterminées par une rapidité ζ ($p = E \propto e^{\zeta}$), et possédant deux nombres quantiques: SU(N) et $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ tronqué (on parlera aussi, suivant [III], de nombre quantique $SU_q(N)$ pour ce dernier), avec $q = -\exp(-i\pi/(f+N))$. Les matrices S de diffusion sont celles qui ont été données au 2.4.3 (Eq. (2.58)).

Il reste à se préoccuper des impuretés: chaque impureté *habillée* (comme nous le verrons, cette distinction est importante, car l'impureté est en général écrantée par les électrons) doit être considérée comme un "obstacle" fixe sur lequel diffusent les excitations physiques. Dans le cas N = 2, c'est-à-dire celui du modèle de Kondo usuel, les matrices S de diffusion sur l'impureté ont été trouvées dans [99]; cependant elles n'ont pas été démontrées par les BAE physiques, comme nous le faisons maintenant⁶⁴. On distingue trois cas de figures:

• f < l (sous-écrantage):

Sur le diagramme des BAE, cela signifie que le noeud associé aux impuretés est dans la partie droite du diagramme (par rapport aux noeuds f). Chaque impureté habillée constitue donc un spin SU(N), dans la représentation $n \times (l-f)$: par rapport à l'impureté nue qui était un spin $n \times l$, on voit que toutes les saveurs d'électrons ont écranté l'impureté de manière à diminuer son spin autant que possible.

Les excitations physiques diffusent sur l'impureté avec une matrice $S(\zeta)$ (l'impureté a par définition une rapidité nulle) qui est proportionnelle à la matrice R de $\mathfrak{sl}(N)$ dans les représentations de l'impureté et de l'excitation. Le facteur de proportionnalité constitue le déphasage de plus haut poids, qui est donné par:

$$\widehat{S}^{r/\operatorname{imp}}(\zeta) = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\mathrm{e}^{i\omega\zeta}}{\omega + i0} \frac{\sinh(\pi\omega(1 - r/N))\sinh(\pi\omega n/N)}{\sinh(\pi\omega)\sinh(\pi\omega/N)} \mathrm{e}^{-(l-f)|\pi\omega/N|}\right)$$
(4.20)

(où nous avons supposé $r \ge n$; sinon, il faut échanger r et n). Comme nos équations ne nous donnent \widehat{S} qu'à une constante près, nous avons défini S_1 de sorte que $\widehat{S}(\zeta = +\infty) =$ 1, ce qui est naturel d'après la liberté asymptotique UV.

 $^{^{64}}$ D'ailleurs, dans le cas surécranté, le facteur scalaire de la matrice S (Eq. (4.22)) diffère de celui proposé dans [99].
Examinons alors le déphasage $\phi = \frac{1}{i} \log \widehat{S}^{r/\text{imp}}$ à petite énergie $\epsilon \propto e^{\zeta}$:

$$\phi(\epsilon) \stackrel{\epsilon \to 0}{=} 2\pi \frac{n(N-r)}{N} + \frac{\alpha}{\log(\epsilon/T_K)} + \cdots$$

On trouve les corrections en $1/\log$ qui sont le signe de la liberté asymptotique IR. • f = l (écrantage):

Les impuretés sont totalement écrantées, donc leur spin résiduel est nul. La diffusion sur l'impureté est donc une phase pure, donnée par (4.20) avec f = l. Explicitement, pour n = 1, on trouve

$$\widehat{S}^{r/\text{imp}}(\zeta) = e^{i\pi r/N} \frac{\sinh\frac{1}{2}(\zeta - i\pi r/N)}{\sinh\frac{1}{2}(\zeta + i\pi r/N)}$$
(4.21)

Pour n > 1, on obtient un produit fini de termes du type de (4.21). Le développement à basse énergie est un développement en puissances entières de ϵ :

$$\phi(\epsilon) \stackrel{\epsilon \to 0}{=} 2\pi \frac{n(N-r)}{N} + \beta \frac{\epsilon}{T_K} + \cdots$$

• f > l (sur-écrantage):

C'est le cas de figure intéressant, où la symétrie de groupe quantique joue un rôle important; en effet, du fait que le noeud correspondant aux impuretés est dans la partie gauche du diagramme, on trouve que l'impureté est un spin $SU_q(N)$ (et non un spin SU(N); l'impureté est donc totalement écrantée au sens où le spin résiduel est nul) dans la représentation $n \times (f - l)^{65}$. La matrice S de diffusion avec les excitations physiques est donc celle de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, avec un facteur scalaire que l'on déduit des BAE:

$$\widehat{S}^{r/\mathrm{imp}}(\zeta) = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \,\frac{\mathrm{e}^{i\omega\zeta}}{\omega + i0} \frac{\sinh(\pi\omega(1 - r/N))\sinh(\pi\omega n/N)}{\sinh(\pi\omega)\sinh(\pi\omega/N)} \frac{\sinh(\pi\omega(l/N+1))}{\sinh(\pi\omega(f/N+1))}\right) \tag{4.22}$$

d'où finalement le développement à basse énergie:

$$\phi(\epsilon) \stackrel{\epsilon \to 0}{=} 2\pi \frac{n(N-r)}{N} \frac{l+N}{f+N} + \gamma \left(\frac{\epsilon}{T_K}\right)^{N/(f+N)} + \cdots$$

On trouve la même catégorisation que pour les calculs thermodynamiques de [III.4.2]. On obtient en particulier l'exposant critique dans le régime sur-écranté: $\Delta - 1 =$

⁶⁵ Il faut souligner que nous avons fait un choix différent de celui de l'article [III], dans lequel l'impureté est considérée comme ayant une représentation $(N - n) \times l$, mais ceci est en fait purement conventionnel.

N/(N+f), et on identifie en théorie conforme Δ avec la dimension de l'opérateur perturbant $\mathcal{O} = \vec{j}_{-1} \cdot \vec{\Phi}_{ad}$, où \vec{j} est le courant SU(N) et $\vec{\Phi}_{ad}$ est l'opérateur primaire de $\mathfrak{sl}(N)_f$ associé à la représentation adjointe. On remarque que dans le développement (III.4.14) apparaissent des termes en T/T_K et en $(T/T_K)^{2(\Delta-1)}$ (et non $(T/T_K)^{\Delta-1}$), d'où une compétition entre ces deux termes, et une subdivision supplémentaire entre f < N et f > N. Ceci suggère que lorsqu'on effectue le développement perturbatif de la fonction de partition en la constante de couplage g associée à l'opérateur \mathcal{O} , il ne démarre qu'en g^2 ; on peut effectivement s'en convaincre par des arguments de théorie conforme⁶⁶.

Concluons par une remarque sur le comportement dit de "non liquide de Fermi" (Non Fermi Liquid, NFL) qui est censé être présent dans le modèle de Kondo sur-écranté. On observe que dans le régime sur-écranté et seulement dans celui-ci, l'impureté est un spin de $SU_q(N)$, et donc il est raisonnable de considérer que le comportement NFL est directement lié à la symétrie de groupe quantique sous-jacente. L'impureté est alors le facteur "déclenchant" qui met en lumière la symétrie $SU_q(N)$ du secteur de spin des électrons. Nous définirons plus précisément ce que l'on entend par "déclenchant" au 4.3.4 (paragraphe théorie conforme avec bord et groupes quantiques).

4.3.2. TBA et interprétation de l'entropie à température nulle

Nous allons dans cette section revenir sur l'analyse faite au [III.5] de l'entropie de l'impureté à température nulle, et la justifier plus en détail.

La base de ce raisonnement est le principe selon lequel aussi bien les impuretés du système que les excitations physiques sont des "solitons" en un sens très général, c'est-àdire qu'un tel soliton fait transiter le système d'un "vide" initial vers un "vide" final, caractérisé par un certain jeu de nombres quantiques. Chaque soliton est alors représenté par une certaine matrice d'adjacence; notre seule hypothèse sera que ces matrices d'adjacence commutent.

Ce formalisme s'applique naturellement aux impuretés, car elles n'ont qu'un nombre quantique: SU(N) dans le cas sous-écranté, $SU_q(N)$ dans le cas sur-écranté (elles ont une rapidité fixe qui vaut 0). Donc leurs matrices d'adjacence sont précisément celles qui sont associées à la théorie de la représentation de ces deux groupes (quantiques). Nous noterons A cette matrice d'adjacence.

Considérons alors un état du système caractérisé par des nombres N_i de solitons de type *i* correspondant aux excitations physiques $(i = 1 \dots p)$, et *N* impuretés (habillées), et

⁶⁶ Je remercie O. Parcollet de m'avoir expliqué ce point.

cherchons que lest le nombre d'états accessibles au système. L'expression la plus générale que l'on obtient est:

$$\Omega = \sum_{R,R'} d_{R,R'} (A_1^{N_1} \dots A_p^{N_p} A^N)_{RR'}$$

où R et R' parcourent tous les "vides", et les $d_{R,R'}$ sont des coefficients qui décrivent combien d'états correspondent à une transition totale du vide R au vide R'.

Prenons un exemple concret: supposons que R soit une "bonne" représentation du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, de sorte que la structure solitonique qu'on a introduit ici s'identifie à celle que l'on a considérée dans la section 2.2.3. Alors, si $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ est une vraie symétrie de la théorie (comme dans le modèle NJL anisotrope), on aura: $d_{R,R'} = \delta_{R\emptyset} \dim R'$. Par contre, si la symétrie est cachée, alors on aura: $d_{R,R'} = \delta_{R\emptyset} \delta_{R'\emptyset}$. Cependant, on verra dans ce qui suit que ces coefficients, qui définissent dans l'optique solitonique les conditions de bords, n'ont pas d'effet sur le comportement dominant des quantités thermodynamiques. Nous n'avons donc pas besoin d'en tenir compte.

Continuons notre raisonnement. Le nombre d'impuretés est par définition: $N = D^{imp}L$, où la taille du système L est supposée grande, de sorte que $N \gg 1$. De même, si l'on se place à température finie T, comme les excitations physiques sont non-massives, on a: $N_i = \alpha_i TL \gg 1$ à petit T (les α_i sont de coefficients fixes). Les matrices d'adjacence sont donc dominées par leur valeur propre de Perron-Frobenius:

$$\Omega \sim \lambda_1^{N_1} \dots \lambda_p^{N_p} \lambda^N$$

Calculons maintenant l'entropie par unité de longueur S/L, à basse température: $(S = \log \Omega)$

$$S/L \sim D^{imp} \log \lambda + T \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \log \lambda_i$$

Dans la limite $T \to 0$, la contribution des excitations physiques disparaît, ce qui est normal (un gaz d'électrons n'a pas d'entropie à température nulle); par contre subsiste la contribution log λ par impureté, qui est celle que nous recherchions⁶⁷.

On conclut alors comme dans [III.5]: quand l'impureté est un spin SU(N) normal (sous-écrantage), λ est la dimension de la représentation de l'impureté, ce qui est

 $^{^{67}}$ Remarquons l'intérêt d'avoir supposé, à la différence de [III], qu'il y a une densité finie d'impuretés: ceci nous évite d'avoir à retirer explicitement la contribution des électrons à l'entropie, ce qui serait sinon rendu nécessaire par le fait que l'on mélange différents ordres de 1/L.

conforme au raisonnement naïf ("l'entropie à température nulle est le logarithme de la dégénerescence du vide"). Par contre, quand l'impureté est un spin $SU_q(N)$ (surécrantage), c'est maintenant la dimension quantique qui remplace la dimension usuelle de la représentation (comme valeur propre la plus grande de A), ce qui lui confère une signification physique intéressante.

4.3.3. Etude en champ magnétique

Plaçons-nous enfin à température nulle et en présence d'un champ magnétique: on peut alors résoudre exactement les TBA. Les informations que nous allons en extraire confirmeront les résultats obtenus à température non-nulle.

Pour faire les calculs, nous nous placerons à $N = \infty$, et nous reprendrons les calculs du **4.2**. Ceci n'est absolument pas indispensable, puisqu'on sait faire les calculs exactement à N fini (section 4.1.5), mais comme nous l'avons déjà affirmé au **4.2**, les corrections en 1/N ne changent pas la physique contenue dans le comportement dominant à $N \to \infty$, et les formules à $N = \infty$ sont nettement plus claires.

Les TBA du modèle de Kondo généralisé sont les mêmes que celles du modèle de WZW, et on peut donc reprendre les résultats obtenus précédemment: la fonction d'énergie $\epsilon^+ = \lim_{T \to 0} T \log(1 + \eta_f^r) / \sin(\pi r/N)$ vaut

$$\epsilon^{+}(\omega) = -iB\pi\nu \frac{1}{\omega - i0} e^{i\nu\omega \log(i\nu/e(\omega - i0))} \Gamma(1 + i\nu\omega)^{-1}$$

en transformée de Fourier ω de $\zeta - \zeta_0$, où le décalage ζ_0 est de la forme $\zeta_0 = \log(B/B_K)$ avec (cf Eq. (4.11))

$$B_{K} = T_{K} \frac{e^{\nu(\log \nu - 1)}}{\Gamma(1 + \nu)}$$
(4.23)

 B_K acquièrera pour nous la signification d'énergie de transition en champ magnétique: B_K est évidemment du même ordre que T_K , avec un facteur numérique donné par (4.23).

Ensuite, on a besoin de l'expression de $\epsilon^+(x, y, \zeta)$ pour tout x (rappelons que pour $x \neq \nu$, $\epsilon(x, y, \zeta) > 0$). Là encore, le formalisme d'opérateurs différentiels à $N = \infty$ nous permet d'exprimer la réponse de manière particulièrement élégante: $\epsilon^+(x, y, \zeta) = \sin y \, \epsilon^+(x, \zeta)$ avec (en transformée de Fourier)

$$\epsilon^{+}(x,\omega) = \begin{cases} \frac{\sinh(x\omega)}{\sinh(\pi\nu\omega)} \epsilon^{+}(\omega) & x \le \pi\nu \\ e^{-(x-\pi\nu)|\omega|} \epsilon^{+}(\omega) + B(x-\pi\nu)\delta(\omega) & x \ge \pi\nu \end{cases}$$
(4.24)

Finalement, on calcule l'énergie libre d'une impureté de tableau rectangulaire $(xN/\pi) \times (yN/\pi)$ grâce à la formule (4.18), soit dans la limite $N \to \infty$ et en Fourier,

$$F(x, y, \omega) \sim \frac{N^2}{\pi^2} \sin y \frac{1}{1 + \omega^2} \epsilon(x, \omega)$$

avec, en tenant compte du décalage, $\zeta = -\zeta_0 = \log(B_K/B)$. Le fait que $F \sim N^2$ est normal puisque l'on a affaire à un tableau de Young avec un nombre de boîtes de l'ordre de N^2 . Posons donc $f(x,\omega) \equiv \epsilon^+(x,\omega)/(1+\omega^2)$. Nous avons représenté sur la figure 48 la structure analytique de la fonction $f(\omega) \equiv f(x = \pi \nu, \omega) = \epsilon^+(\omega)/(1+\omega^2)$.



Fig. 48: Structure analytique de $f(\omega)$. Les zigzags représentent une coupure, les points des pôles.

Examinons séparément les différents régimes:

• Régime écranté.



Fig. 49: L'énergie libre f/B de l'impureté écrantée en fonction de $\zeta = -\log B$ $(B_K \equiv 1)$ et de B. $\nu = 1/2$, $x = \pi \nu$.

Supposons tout d'abord que $B < B_K$ (faible champ magnétique). Alors, $\zeta > 0$, et l'intégrale $f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \exp(-i\omega\zeta) f(\omega)$ n'attrape que le pôle en $\omega = -i$, d'où la valeur exacte: $f(\zeta) = -\frac{1}{2}\epsilon^+(\omega = -i)e^{-\zeta}$. En remplaçant ζ par sa valeur et en remarquant les compensations qui se produisent entre $\epsilon^+(\omega = -i)$ et la définition de B_K , on obtient:

$$f(B) = \frac{B^2}{T_K} \frac{\pi\nu}{2}$$
(4.25)

Cette expression est à comparer avec l'équation (III.4.8) (dont le domaine de validité est: $T \to 0, B \sim T$): en prenant T = 0 et $N \to \infty$ dans cette dernière, on retrouve $(4.25)^{68}$.

Notons que la forme particulièrement simple de (4.25) n'est valable qu'à $N = \infty$, puisque les corrections en 1/N font apparaître des pôles en -ni (*n* entier), donc des puissances (entières) supérieures de *B*.

Si $B > B_K$ (fort champ magnétique), au contraire, $\zeta < 0$ et on s'intéresse au demiplan complexe supérieur de la figure 48. Tout d'abord, on attrape le pôle en $\omega = i0$ qui correspond à la valeur limite $f(\zeta = -\infty) = \pi \nu B$; ensuite, on doit tenir compte de la coupure: on voit qu'on est ramené à calculer l'intégrale

$$B\nu \int_0^{+\infty} du \, \frac{\sin(\pi u)}{u} \frac{e^{u\zeta/\nu} e^{-u(\log u - 1)}}{\Gamma(1 - u)(1 - u^2/\nu^2)}$$

 $(u \equiv -i\nu\omega)$ avec une prescription pour éviter le pôle en $u = \nu$. Dans la limite $\zeta \to -\infty$, celui-ci ne nous intéresse pas car l'intégrale est bien évidemment dominée par le démarrage de la coupure à $u \sim 0$; en développant, on obtient:

$$B\pi\nu \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \,\mathrm{e}^{u\zeta/\nu} (1-u\log u + O(u))$$

d'où finalement

$$f(B) \stackrel{B \to \infty}{=} \pi \nu B \left[1 - \frac{\nu}{\log(B/B_K)} - \frac{\nu^2 \log[\log(B/B_K)]}{\log(B/B_K)^2} + O\left(\frac{1}{\log(B/B_K)^2}\right) \right]$$

L'interprétation de ce résultat est claire: le développement à $B \to \infty$ est celui de couplage faible, autrement dit la liberté asymptotique. Le premier terme $\pi\nu B$, soit plus explicitement $F \sim \frac{N^2}{\pi^2} \sin y \, \pi\nu B$, n'est autre, comme on le vérifie par un calcul explicite, que l'énergie d'un spin libre dans la représentation $f \times (yN/\pi)$ en champ magnétique B. Les deux termes suivants s'identifient au développement perturbatif au premier ordre en la constante de couplage renormalisée (à l'échelle B), elle-même développée à deux boucles.

⁶⁸ Il faut faire attention que les conventions de normalisation du second membre des TBA ne sont pas les mêmes (dans [III], elles ne sont pas adaptées à la limite de grand N). La correspondance est donnée par: $\sum (B^a)^2 = (N/2)B^2$, $T_K = 4T_0 \sin(\pi/N)$.



Fig. 50: L'énergie libre f/B de l'impureté sur-écrantée. $\nu = 1/2, x = \pi \nu/2$.



Fig. 51: L'énergie libre f/B de l'impureté sur-écrantée. $\nu = 2, x = \pi \nu/2$.

• Régime sur-écranté.

On a cette fois: $f(x, \omega) = \frac{\sinh(x\omega)}{\sinh(\pi\nu\omega)} f(\omega)$ avec $x < \pi\nu$.

En faible champ magnétique $(B < B_K)$, on a deux types de pôles: le pôle de $f(\omega)$ à $\omega = -i$ et les pôles de $1/\sinh(\pi\nu\omega)$ à $\omega = -in/\nu$ (*n* entier). Ceci correspond à la compétition entre les deux opérateurs perturbants au point fixe infra-rouge. De manière générale, on a un développement à petit *B* du type: ($\nu \neq 1$)

$$f(B)/B = c\frac{B}{B_K} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{B}{B_K}\right)^{n/n}$$

et selon que $\nu < 1$ ou $\nu > 1$, c'est le premier terme ou le second qui domine. Quand $\nu = 1$, on a un pôle double, d'où en transformée de Fourier un terme en $\zeta e^{-\zeta}$, soit finalement $f(B) \sim c \frac{B^2}{B_K} \log(B_K/B)$. Ce résultat confirme que, dans le régime dit sur-écranté, l'impureté est en fait exactement écrantée (au point fixe infra-rouge), puisque son aimantation à petit B est nulle. En termes de groupe de renormalisation, le point fixe infra-rouge n'est pas le point de couplage fort (couplage infini), où l'impureté serait réellement sur-écrantée par les fsaveurs d'électrons; en effet, ce dernier est instable, et le point fixe IR correspond à un point fixe non-trivial correspondant à une valeur finie du couplage impuretés/électrons.

Ce résultat montre aussi que les exposants critiques à B > 0, T = 0 sont distincts de ceux à T > 0, $B \sim T$: ceci s'explique [94] par le fait que, dans la limite $T \rightarrow 0$ à B fixé, on "tue" certains modes (ceux qui sont associés au nombre quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$) rendus massifs par le champ magnétique.

En fort champ magnétique $(B > B_K)$, on trouve des résultats identiques au cas écranté: le comportement dominant est $f(B) \sim xB$, correspondant à un spin libre $(xN/\pi) \times (yN/\pi)$; puis on a des corrections logarithmiques caractéristiques de la liberté asymptotique.

• *Régime sous-écranté.*



Fig. 52: L'énergie libre f/B de l'impureté sous-écrantée. $\nu = 1/2, x = 3\pi\nu$.

L'équation (4.24) montre que $f(x, \omega)$ a maintenant à la fois des pôles en $\omega = \pm i0$ (la fonction $\delta(\omega)$ contribue aux deux), et des coupures démarrant en $\omega = \pm i0$. On trouve facilement, par les mêmes méthodes que précédemment, que

$$f(B) \sim \begin{cases} (x - \pi\nu)B & B \to 0\\ xB & B \to \infty \end{cases}$$

plus les corrections logarithmiques de la liberté asymptotique (ultra-violette et infrarouge).

4.3.4. Lien avec l'approche de théorie conforme de Kondo

Nous allons terminer cette thèse par une comparaison des deux approches principales qui ont été développées pour étudier le modèle de Kondo: l'approche de l'Ansatz de Bethe et l'approche de Théorie Conforme avec bord (pour cette dernière, voir la revue [100]). Notons tout de suite que ces deux approches font appel à des mathématiques différentes: l'une est liée à l'intégrabilité, donc aux groupes quantiques, tandis que l'autre est liée aux algèbres de Kac–Moody. Le modèle de Kondo sur-écranté fournit un exemple concret de "dictionnaire" des correspondances entre ces deux approches et les objets mathématiques associés; nous allons donner certaines de ces correspondances. Ce qui suit se veut être une simple suite de remarques sur l'approche de théorie conforme de Kondo, dont certaines mériteraient sans doute d'être plus développées.

• Théorie conforme et groupes quantiques.

En dehors des modèles intégrables, les groupes quantiques jouent également un rôle important en théorie conforme. Ceci peut paraître naturel puisque toutes les théories conformes connues peuvent également être considérées comme des modèles intégrables. Cependant, la manière dont les groupes quantiques apparaissent dans les théories conformes (par exemple à travers les relations d'échange et de fusion) ne permet pas de les relier de façon évidente à ceux qui apparaissent dans les modèles intégrables. Nous allons à présent fournir quelques indications sur ce lien dans le cas de la théorie conforme de WZW SU(N) au niveau f.

Rappelons qu'une des données fondamentales d'une théorie conforme est constituée par les règles de fusion vérifiées par les opérateurs primaires pour l'algèbre de symétrie de la théorie. Ainsi, dans WZW SU(N) niveau f, l'algèbre de symétrie en question est constituée de deux copies (holomorphe et anti-holomorphe, ou gauche et droite) de (l'algèbre enveloppante de) l'algèbre de Kac-Moody SU(N) au niveau f, et les opérateurs primaires Φ_R , qui sont indexés par une représentation R de SU(N) dont le tableau de Young a moins de f colonnes, satisfont symboliquement:

$$\Phi_R \Phi_{R'} \sim A_{RR'}^{R''} \Phi_{R''}$$

où ~ signifie que l'on a gardé les opérateurs primaires qui apparaissent dans le Développement en Produit d'Opérateurs de Φ_R et $\Phi_{R'}$. La matrice $(A_R)_{R'}^{R''} \equiv A_{RR'}^{R''}$ se trouve être exactement égale à la matrice de produit tensoriel tronqué de la rep R de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ avec $q = -\exp(-i\pi/(f+N))$ [101]. Ceci suggère qu'il existe un groupe quantique sous-jacent qui détermine les règles de fusion de WZW. Dans l'esprit de la formule (4.4), on conjecture que les opérateurs primaires Φ_R , qui sont dans la représentation R pour les deux sous-algèbres horizontales $SU(N)_L$ et $SU(N)_R$ se décomposent en opérateurs chiraux qui sont eux, des multiplets de la même représentation R, mais à la fois pour SU(N) (gauche ou droit selon la chiralité) et pour le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$. Cette hypothèse est corroborée par la construction explicite des multiplets de groupe quantique associés aux opérateurs primaires (*opérateurs de vertex écrantés* [102]) dans un Hilbert un peu élargi, de façon à ce que la symétrie ne soit plus "cachée".

Une fois cette construction faite, il est tentant d'identifier le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ ainsi obtenu avec celui qui apparaît dans l'Ansatz de Bethe. Rappelons que ce dernier est la sous-algèbre horizontale d'un groupe quantique affine $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, et qu'il agit non pas sur les opérateurs de vertex mais sur les états asymptotiques de la théorie, qui est donc définie sur un espace non-compactifié. En particulier, dans les notations de la théorie conforme, on peut dire que l'action du groupe quantique affine commute avec les générateurs L_{-1} et \overline{L}_{-1} de l'algèbre de Virasoro (quantification "sur le plan"; voir [103] pour une remarque similaire sur les Yangiens), mais pas avec L_0 et \overline{L}_0 (qui reconstitueraient le Hamiltonien si l'on utilisait la quantification "sur le cylindre"). Heureusement, on constate que la sous-algèbre horizontale $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, a, de par la définition de la gradation (cf remarque sur gradation et "spin" au 2.1.3) un "spin" nul, c'est-à-dire qu'elle commute aussi avec L_0 et \overline{L}_0 , comme il se doit. Ceci revient encore à dire que la symétrie de groupe quantique (non affine) peut subsister sur un espace compactifié, comme on l'a déjà vu précédemment. Il n'y a donc pas d'obstacle de principe à identifier le groupe quantique de la théorie conforme et celui de l'Ansatz de Bethe.

• Théorie conforme avec bord et groupes quantiques.

Pour décrire le modèle de Kondo, nous avons besoin d'un type de théorie conforme légèrement différent de ce qui a été considéré ci-dessus: une théorie conforme avec bord [104]. Considérons donc la théorie de Nf fermions libres sur un cylindre de rayon $\beta = 1/T$ et de taille finie L (au final $L \to \infty$), les conditions aux bords du cylindre étant libres. Comme nous l'avons déjà vu, ces conditions aux bord nous permettent de considérer une théorie équivalente constituée d'une seule chiralité de fermions; ceci se répercute sur l'expression de la fonction de partition:

$$Z = \sum_{R,R',r} a_{R,R',r} \chi_R^{\widehat{\mathfrak{sl}(N)}_f} \chi_{R'}^{\widehat{\mathfrak{sl}(f)}_N} \chi_r^{\widehat{\mathfrak{u}(1)}}$$
(4.26)

(où R, R', r parcourent les représentations de $\mathfrak{sl}(N)_f, \mathfrak{sl}(f)_N, \mathfrak{u}(1)$) qui, au lieu d'être quadratique en les caractères, est linéaire en ceux-ci. Les caractères sont évalués en $e^{-\pi\beta/L}$. Les coefficents $a_{R,R',r}$ ont été calculés dans [98]: d'après le lien évoqué plus haut entre représentations de $\mathfrak{sl}(N)_f$ et de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, il est souhaitable de réinterpréter ces coefficients en termes de groupes quantiques. Pour cela, nous remarquons que le secteur de spin, lié à l'algèbre $\mathfrak{sl}(N)_f$, possède un groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N)), q = -e^{-i\pi/(f+N)}$, tandis que le secteur de saveur lié à $\mathfrak{sl}(f)_N$ possède un groupe quantiques ont la même théorie de la représentation, et nous pouvons identifier leurs représentations: ceci se reflète dans les coefficients $a_{R,R',r}$ par le fait que $a_{R,R',r} \neq 0$ implique $R' = R^T$ (tableaux de Young transposés l'un de l'autre). Ceci est un signe – mais pas une démonstration, bien sûr – que la recombinaison des secteurs de saveur et de spin, grâce aux coefficients $a_{R,R',r}$, reconstitue une symétrie de groupe quantique cachée, alors que si l'on considère le secteur de spin isolément, la symétrie n'est apparemment pas cachée.

• Point fixe infra-rouge de Kondo et hypothèse de fusion.

Continuons sur la voie du paragraphe précédent en essayant de faire le lien avec le modèle de Kondo. Rappelons que dans celui-ci, quand on se ramène de 3 dimensions d'espace à une seule, on se retrouve avec un système de fermions définis sur l'intervalle [0, L] $(L \to \infty)$, et l'impureté placée en x = 0. On voit donc que pour incorporer l'impureté dans le formalisme du paragraphe précédent, il suffit de modifier les conditions aux bords à l'un des bouts du cylindre. Ces dernières brisent l'invariance conforme du modèle, mais, aux points fixes ultra-violet et infra-rouge, elle est restaurée. Le seul point fixe non-trivial est le point fixe IR de Kondo sur-écranté, et c'est sur celui-ci que nous allons nous pencher à présent.

L'impureté sur-écrantée est, on l'a vu, un spin du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(N))$; d'après le lien évoqué plus haut entre opérateurs primaires et représentations de groupes quantiques, il est naturel de supposer que l'impureté, dans l'infra-rouge, va modifier la manière dont les différentes représentations de $\mathfrak{sl}(N)_f$ apparaissent dans la fonction de partition. Plus précisément, conformément à ce qu'on a vu au 2.3.3, au lieu d'avoir les conditions aux bords caractéristiques d'une symétrie cachée (spin $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ total nul, donc $R' = R^T$ dans la fonction de partition (4.26)), on va avoir un spin total égal à celui de l'impureté sur-écrantée (cf figure 26)⁶⁹. On aboutit donc à *l'hypothèse de fusion* suivante: au point fixe IR, la fonction de partition surécrantée est donnée par

$$Z = \sum_{R,R',R'',r} A_{R''}^{R} a_{R,R',r} \chi_{R''}^{\widehat{\mathfrak{sl}(N)_f}} \chi_{R'}^{\widehat{\mathfrak{sl}(f)_N}} \chi_{r}^{\widehat{\mathfrak{u}(1)}}$$
(4.27)

où A est la matrice d'adjacence de la rep de l'impureté. Ceci est exactement l'hypothèse de fusion conjecturée dans [105]. On montre qu'elle donne effectivement les résultats physiques que l'on attendait au point fixe infra-rouge sur-écranté, et en particulier l'entropie à température nulle.

Terminons sur un commentaire concernant l'hypothèse de fusion: dans tous les cas que nous avons considérés, la représentation de groupe quantique de l'impureté habillée (IR) s'avère être la même, modulo une symétrie de l'algèbre des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(N))$, que la représentation SU(N) de l'impureté nue (UV). C'est ce qui a permis de deviner l'hypothèse de fusion appropriée sans avoir à résoudre explicitement le modèle (par l'Ansatz de Bethe par exemple). Cependant, cette coincidence des représentations n'a pas de raison d'être maintenue dans le cas, par exemple, d'impuretés appartenant à des tableaux de Young non-rectangulaires. Dans ce cas-là, il paraît difficile de trouver l'hypothèse de fusion sans avoir déjà résolu le modèle de façon indépendante.

⁶⁹ C'est en ce sens que l'impureté est le facteur "déclenchant" qui met en lumière la symétrie cachée $U_q(\mathfrak{sl}(N))$.

Conclusion

Il est à présent temps de tirer quelques conclusions du travail effectué, et de dégager quelques idées sur les possibilités de développements ultérieurs.

Comme on a pu le voir, l'Ansatz de Bethe est un outil puissant, qui permet de sonder la physique non-perturbative de modèles de physique bidimensionnelle. Les modèles solubles ne sont bien sûr pas arbitraires, mais on peut espérer que bon nombre de propriétés que l'on observe chez eux, sont présents même dans des modèles non-intégrables. Citons également le fait que l'Ansatz de Bethe diagonalise le Hamiltonien de la théorie dans une base qui a une interprétation naturelle: dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, c'est celle des états asymptotiques, composés de (quasi-)particules dont la diffusion est factorisée. Dans la limite d'échelle relativiste, on retrouve ainsi la vision intuitive des théories des champs intégrables. Enfin, les Equations d'Ansatz de Bethe Thermodynamique et les Equations Non-Linéaires Intégrales permettent des calculs explicites de quantités thermodynamiques.

Cependant, il faut aussi constater les limitations de l'Ansatz de Bethe. Ainsi, le développement perturbatif usuel en diagrammes de Feynman, qui correpond par exemple au développement de haute température de l'énergie libre des théories asymptotiquement libres, est paradoxalement difficile voire infaisable par l'Ansatz de Bethe; de plus, l'identification exacte de la constante de couplage renormalisée, et donc de la fonction β exacte est généralement impossible, à cause des méthodes de régularisation spéciales employées pour l'Ansatz de Bethe. Il paraît également difficile d'en extraire les fonctions de corrélation des observables; ceci est d'ailleurs l'objet de recherches actives dans le domaine des modèles intégrables (facteurs de forme, etc).

Signalons enfin quelques extensions possibles des travaux contenus dans cette thèse. Tout d'abord, on peut considérer des généralisations supersymétriques des équations du chapitre 2: on a des familles de déformations des super-algèbres de Lie, qui donnent lieu à de nouvelles Equations d'Ansatz de Bethe. Bien que celles-ci aient déjà été largement étudiées, il serait intéressant de classifier de manière générale leurs propriétés, dans l'esprit de ce qui a été fait au chapitre 2.

Ensuite, les NLIE présentées au **3.3** (pour le modèle de Toda affine complexe) doivent pouvoir s'étendre aux modèles fusionnés; ainsi, le modèle à 19 vertex admet une NLIE, dont il serait intéressant de prendre la limite d'échelle relativiste. La structure des NLIE doit rester plus simple que celle des TBA correspondantes, mais tout de même plus compliquée que dans le cas non-fusionné: les NLIE sont-elles alors encore des sortes de "fonctions de comptage physiques"? Y a-t-il encore "resommation des magnons" associés à la symétrie \mathfrak{g} ? Il y a là une analyse qu'il reste à effectuer.

Venons-en finalement au modèle de Kondo généralisé. L'étude qui en a été faite au **4.3** est quelque peu incomplète. Tout d'abord, les résultats proposés ne sont pas tous sous une forme qui ait un sens physique direct: ainsi, il serait intéressant de relier les matrices S impureté/excitations physiques à la résistivité, qui est elle observable "expérimentalement". Dans le même ordre d'idées, il faudrait relier de manière plus précise les résultats de l'Ansatz de Bethe avec ceux obtenus par des méthodes de théorie conforme: ceci suppose de développer plus longuement les considérations du 4.3.4.

Ensuite, il serait intéressant de briser la symétrie SU(f), de façon à considérer des saveurs qui ont des couplages d'intensité inégale avec l'impureté. Ce problème n'est pas résolu à l'heure actuelle, car il n'est pas évident, si l'on considère des constantes de couplage générique pour chaque saveur, de préserver l'intégrabilité. Cependant, des travaux récents suggèrent que cela est possible, mais cela n'a pas été montré explicitement au niveau des Equations d'Ansatz de Bethe.

Il reste enfin un cas où le modèle de Kondo généralisé n'a pas été étudié: celui où les impuretés appartiennent à des tableaux de Young non-rectangulaires. Le cas non-rectangulaire présente un intérêt particulier; il devrait permettre de tester sur un cas non-trivial l'idée intuitive qui se dégage de la solution par l'Ansatz de Bethe (du cas rectangulaire): l'impureté, au point fixe infra-rouge, et quel que soit le régime, peut être considérée comme un complexe formé de l'impureté nue et d'un certain nombre d'électrons (figure 53).



Fig. 53: Impureté nue/impureté écrantée. Sur cette figure, N = 5, f = 4. A gauche, sous-écrantage d'une impureté 3×6 ; à droite, sur-écrantage d'une impureté 3×3 . Les boîtes en pointillé sont les boîtes des électrons qui vont se coller à l'impureté.

Dans le cas rectangulaire sur-écranté, cette vision est indistinguable⁷⁰ d'une autre vision plus naïve, qui consiste à dire que le spin SU(N) de l'impureté nue s'est "transformé" en le même spin $U_q(\mathfrak{sl}(N)$ de l'impureté habillée (et qui conduit à l'hypothèse de fusion). Le cas non-rectangulaire devrait permettre de trancher.

On peut encore utiliser l'Ansatz de Bethe pour résoudre le modèle avec impuretés non-rectangulaires, mais comme l'hypothèse de corde n'est alors plus valable, il est impossible d'appliquer le formalisme des BAE continues et des TBA. Cependant, rien n'empêche de court-circuiter les TBA et d'utiliser directement les équations de fusion. Pour cela, il est nécessaire de considérer des équations de fusion pour des tableaux non nécessairement rectangulaires. Ces équations existent, on peut même en écrire de toutes sortes: reste à déterminer lesquelles sont utiles, et comment y incorporer l'effet des électrons sur l'impureté, ce qui doit conduire aux équations de fusion modifiées. Il ne semble pas y avoir de difficulté particulière à cette approche, et elle paraît donc particulièrement prometteuse.

 $^{^{70}}$ modulo une conjugaison, comme on le voit sur la figure 53; ce qui est peut-être décelable dans le signe de certaines expressions.

Appendice

Dans cet appendice sont regroupés les cinq articles que j'ai écrits durant ma thèse. Le premier article [I] a été publié: sa référence est *Nucl. Phys.* B497 (1997), 725. Le second article [II], qui est la suite du premier, a été accepté pour publication dans *Commun. Math. Phys.* Le troisième [III], écrit en collaboration avec N. Andrei, a été accepté dans *Nucl. Phys.* B. Le quatrième [IV] a été accepté dans *J. Phys.* A. Enfin, le cinquième [V], écrit avec V. Kazakov, n'a pas encore été soumis.

Références

- [1] J.B. Mc Guire, J. Math. Phys. 5 (1964), 622;
 E. Brézin et J. Zinn-Justin, C. R. Acad. Sci. 263 (1966), 670;
 C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1312;
 R.J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972), 192.
- H.J. De Vega, H. Eichenherr et J.M. Maillet, Comm. Math. Phys. 92 (1984), 507; Nucl. Phys. B240 (1984), 377.
- [3] Y. Nambu et G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* 122 (1961), 345.
- [4] D. Gross et A. Neveu, *Phys. Rev.* D10 (1974), 3235.
- [5] N. Andrei et J.H. Lowenstein, *Phys. Rev. Lett.* 43 (1979), 1698.
- [6] E.H. Lieb et W. Liniger, *Phys. Rev.* 130 (1963), 1605;
 E.H. Lieb, *Phys. Rev.* 130 (1963), 1616.
- [7] A.B. Zamolodchikov et Al.B. Zamolodchikov, Annals Phys. 120 (1979), 253.
- [8] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin et L.A. Takhtajan, Theor. Math. Phys. 40 (1979), 194;
 L.D. Faddeev, Integrable models in 1+1 dimensional quantum field theory, dans Recent advances in field theory and statistical mechanics, Les Houches 1982 (Editeurs: J.B. Zuber et R. Stora), North-Holland (1984).
- [9] H. Bethe, Z. Phys. 71 (1931), 205.
- [10] C. Destri et J.H. Lowenstein, Nucl. Phys. B205 (1982), 369.
- [11] O. Babelon, H.J. De Vega et C.M. Viallet, Nucl. Phys. B220 (1983), 13.
- [12] A.N. Kirillov, Zap. Nauch. Semin. LOMI 131 (1984), 88.
- [13] D. Bernard et G. Felder, Nucl. Phys. B365 (1991), 98.
- [14] V. Chari et A. Pressley, A guide to quantum groups, Cambridge University Press (1994).
- [15] J. Fuchs, Affine Lie algebras and quantum groups, Cambridge monographs in mathematical physics, Cambridge University Press (1992).
- [16] C. Gómez, M. Ruiz-Altaba et G. Sierra, Quantum groups in two-dimensional physics, Cambridge monographs in mathematical physics, Cambridge University Press (1996).
- [17] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63; 11 (1986), 247.
- [18] P.P. Kulish et N.Yu. Reshetikhin, J. Sov. Math. 23 (1983), 2435.
- [19] E.K. Sklyanin, Uspehi Mat. Nauki 40 (1985), 214.
- [20] A.N. Kirillov et N.Yu. Reshetikhin, Zap. Nauch. Semin. LOMI 168 (1988), 68.
- [21] L. Alvarez-Gaumé, C. Gómez et G. Sierra, Nucl. Phys. B330 (1990), 347.
- [22] M. Jimbo et T. Miwa, Algebraic analysis of solvable lattice models, Regional Conference Series in Mathematics number 85, Conference Board of the Mathematical Sciences (1995).

- [23] V.G. Drinfel'd, Soviet. Math. Dokl. 36 (1988), 212.
- [24] D. Bernard, Commun. Math. Phys. 137 (1991), 191.
- [25] D. Bernard, Int. J. Mod. Phys. B7 (1993), 3517 [hep-th/9211133].
- [26] V. Chari et A.N. Pressley, Commun. Math. Phys. 142 (1991), 261.
- [27] V. Pasquier et H. Saleur, Nucl. Phys. B330 (1990), 523.
- [28] G.I. Japaridze, A.A. Nersesyan et P.B. Wiegmann, Nucl. Phys. B230 (1984), 511.
- [29] A.N. Kirillov et N.A. Liskova, J. Phys. A30 (1997), 1209 [hep-th/9403107].
- [30] M. Suzuki et M. Takahashi, Prog. Theor. Phys. 48 (1972), 2187.
- [31] E.K. Sklyanin, J. Phys. A21 (1988), 2375.
- [32] M. Karowski et A. Zapletal, Nucl. Phys. B419 (1994), 567 [hep-th/9312008].
- [33] G.E. Andrews, R.J. Baxter et P.J. Forrester, J. Stat. Phys. 35 (1984), 193.
- [34] G. Jüttner et M. Karowski, Nucl. Phys. B430 (1994), 615 [hep-th/9406183].
- C. Destri and H.J. De Vega, Nucl. Phys. B385 (1992), 361 [hep-th/9203065];
 H.J. De Vega, Lectures given at the Vth. Nankai Workshop (Tianjin, P. R. of China, June 1992) [hep-th/9308008].
- [36] V.V. Bazhanov et Yu.N. Reshetikhin, Int. J. Mod. Phys. A4 (1989), 115.
- [37] T. Klassen et E. Melzer, Nucl. Phys. B382 (1992), 441 [hep-th/9202034].
- [38] P. Fendley, H. Saleur et Al.B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A8 (1993), 5751 [hep-th/9304051].
- [39] N. Andrei et C. Destri, Nucl. Phys. B231 (1984), 445.
- [40] N. Reshetikhin, J. Phys. A24 (1991), 3299.
- [41] H.J. De Vega et F. Woynarovich, J. Phys. A25 (1992), 4499;
 H.J. De Vega, L. Mezincescu et R.I. Nepomechie, Int. J. Mod. Phys. B8 (1994), 3473
 [hep-th/9402053].
- [42] S.R. Aladim et M.J. Martins, J. Phys. A26 (1993), L529.
- [43] N. Andrei, M. Douglas et A. Jerez, [cond-mat/9502082], [cond-mat/9803134].
- [44] H. Saleur et P. Simonetti, [hep-th/9804080].
- [45] P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin et E.K. Sklyanin, Lett. Math. Phys. 5 (1981), 393.
- [46] P.P. Kulish et N.Yu. Reshetikhin, J. Phys. A16 (1983), L591.
- [47] M. Jimbo, Int. J. Mod. Phys. A4 (1989), 3759.
- [48] N.Yu. Reshetikhin et F. Smirnov, Commun. Math. Phys. 131 (1990), 157.
- [49] A. Kuniba, Nucl. Phys. B389 (1993), 209.
- [50] V.V. Bazhanov et N. Reshetikhin, J. Phys. A23 (1990), 1477.
- [51] P. Wiegmann, *Phys. Lett.* B142 (1984), 173.
- [52] C.N. Yang et C.P. Yang, J. Math. Phys. 10 (1969), 1115.
- [53] H.W.J. Blöte, J.L. Cardy et M.P. Nightingale, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), 742;
 I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), 746.

- [54] A.N. Kirillov et N. Reshetikhin, J. Phys. A20 (1987), 1587;
 T.R. Klassen et E. Melzer, Nucl. Phys. B338 (1990), 485.
- [55] Al.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B358 (1991), 497; Nucl. Phys. B366 (1991), 122.
- [56] A.N. Kirillov, Zap. Nauch. Semin. LOMI 164 (1987), 121.
- [57] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Phys. Lett.* B152 (1985), 88.
- [58] E. Frenkel et A. Szenes, [hep-th/9506215].
- [59] E. Witten, Commun. Math. Phys. 92 (1984), 455.
- [60] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, 3rd edition, Oxford University Press (1996).
- [61] P. Ginsparg, Applied Conformal Field Theory, dans Fields, strings and critical phenomena, Les Houches 1988 (éditeurs: E. Brézin et J. Zinn-Justin), North Holland.
- [62] P. Fendley et H. Saleur, Nucl. Phys. B388 (1992), 609 [hep-th/9204094].
- [63] H.J. De Vega et M. Karowski, Nucl. Phys. B285 (1987), 619.
- [64] A.A. Belavin, A.M. Polyakov et A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B241 (1984), 333.
- [65] V.S. Dotsenko et V.A. Fateev, Nucl. Phys. B240 (1984), 312.
- [66] V. Jones, Invent. Math. 72 (1983), 1.
- [67] H.N.V. Temperley et E.H. Lieb, Proc. Roy. Soc. A322 (1971), 251.
- [68] Al.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B342 (1990), 695;
 T.R. Klassen et E. Melzer, Nucl. Phys. B350 (1991), 635.
- [69] A. Kuniba, K. Sakai et J. Suzuki, [math/9803056].
- [70] A. Kuniba et T. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. (Proc. Suppl.) A3 (1993), 419.
- [71] Y.K. Zhou et P. Pearce, Int. J. Mod. Phys. B8 (1994), 3531 [hep-th/9405019].
- [72] Al. B. Zamolodchikov, *Phys. Lett.* B253 (1991), 391.
- [73] A. Klümper et P. Pearce, *Physica* A183 (1992), 304; A194 (1993), 397.
- [74] P. Dorey et R. Tateo, [hep-th/9706140].
- [75] P. Fendley et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. 75 (1995), 4492 [cond-mat/9506104].
- [76] A.N. Kirillov, [hep-th/9211137].
- [77] M. Batchelor, A. Klümper et P. Pearce, J. Phys. A24 (1991), 3111.
- [78] C. Destri and H.J. De Vega, Phys. Rev. Lett. 69 (1992), 2313
- [79] C. Destri and H.J. De Vega, Nucl. Phys. B504 (1997), 621 [hep-th/9701107].
- [80] T. Banks, D. Horn et H. Neuberger, Nucl. Phys. B108 (1976), 119.
- [81] C. Destri et H.J. De Vega, Nucl. Phys. B290 (1987), 363.
- [82] T.R. Klassen et E. Melzer, Int. J. Mod. Phys. A8 (1993), 4131 [hep-th/9206114].
- [83] P. Goddard et D. Olive, Int. J. Mod. Phys. A1 (1986), 303.
- [84] S. Coleman, *Phys. Rev.* D11 (1975), 2088;
 S. Mandelstam, *Phys. Rev.* D11 (1975), 3026.
- [85] T. Nassar et O. Tirkonnen, [hep-th/9707098].
- [86] G. Feverati, F. Ravanini et G. Takács, [hep-th/9805117].

- [87] A. Sokal, Soc. Text 46/47 (1996), 217.
- [88] A.B. Zamolodchikov et Al.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B379 (1992), 602.
- [89] A.M. Polyakov et P.B. Wiegmann, *Phys. Lett.* B141 (1984), 223.
- [90] C. Destri et H.J. De Vega, *Phys. Lett.* B201 (1988), 245.
- [91] Al.B. Zamolodchikov, preprint LPS-ENS 335 (1991).
- [92] E. Ogievietsky, N. Reshetikhin et P. Wiegmann, Nucl. Phys. B280 (1987), 45.
- [93] P. Fendley et H. Saleur, [hep-th/9310058].
- [94] S.V. Pokrovsky et A.M. Tsvelick, Nucl. Phys. B320 (1989), 696.
- [95] V.A. Fateev, V.A. Kazakov, P.B. Wiegmann, Nucl. Phys. B424 (1994), 505.
- [96] O. Parcollet et A. Georges, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), 4665 [cond-mat/9707337];
 O. Parcollet, A. Georges, G. Kotliar et A. Sengupta, [cond-mat/9711192].
- [97] N. Andrei, K. Furuya et J.H. Lowenstein, Rev. Mod. Phys. 55 (1983), 331.
- [98] D. Altschuler, M. Bauer et C. Itzykson, Commun. Math. Phys. 132 (1990), 349.
- [99] P. Fendley, [cond-mat/9304031].
- [100] I. Affleck, Acta Phys. Polon. B26 (1995), 1869 [cond-mat/9512099].
- [101] L. Alvarez-Gaumé, C. Gómez et G. Sierra, Phys. Lett. B220 (1989), 142.
- [102] C. Ramírez, H. Ruegg et M. Ruiz–Altaba, Phys. Lett. B247 (1990), 499.
- [103] D. Bernard, Z. Maassarani et P. Mathieu, Mod. Phys. Lett. A12 (1997), 535 [hep-th/9612217].
- [104] J.L. Cardy, Nucl. Phys. B324 (1989), 581.
- [105] I. Affleck et A.W.W. Ludwig, Nucl. Phys. B360 (1991), 641; Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 161.