TD1: Théorie des champs classique

1 Théorème de Noether

On considère une théorie des champs classique, dont la densité Lagrangienne $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$ est une fonction uniquement des champs ϕ^i et de leurs dérivées premières. On suppose le système invariant sous une symétrie continue globale, c'est-à-dire qu'il existe une transformation infinitésimale des champs ϕ^i,

$$\phi^i(x) \to \phi^i(x) + \epsilon \, \delta\phi^i(x) \ , \tag{1}$$

(où ϵ est un paramètre réel infinitésimal) sous laquelle la densité Lagrangienne est invariante à une dérivée totale près,

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \epsilon \, \partial_\mu k^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2}$$

(où k^μ est un courant fonction des champs ϕ^i et de leurs dérivées) de sorte que l'action $S = \int d^{n+1}x \mathcal{L}$, pour des conditions aux limites adéquates, est invariante sous cette transformation.

Exercice 1 *(Noether pour les gens pressés)*
En considérant une variation des champs $\phi^i(x)$ donnée par (1) où le paramètre ϵ a maintenant une dépendance arbitraire en la position x, montrer que le courant

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} \delta\phi^i - k^\mu \ , \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{(on shell)} \tag{3}$$

est conservé pour toute solution des équations du mouvement. (On utilisera le principe de moindre action, i.e. le fait que l'action est stationnaire sous une variation infinitésimale arbitraire des champs, dès lors que les équations du mouvement sont satisfaites). En déduire que la charge $Q = \int d^n x \ j_0$ associée à cette symétrie est conservée au cours du temps.

Exercice 2 *(boson de Goldstone)*
On considère un champ scalaire complexe ϕ, d'action (signature $+ - - - \dots$)

$$S[\phi, \bar{\phi}] = \int d^{n+1}x \ \left[|\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2) \right] \ , \quad \phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x) \tag{4}$$

1) Calculer la charge électrique Q associée à la symétrie globale $\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x)$.
2) On considère un potential quartique $V = \frac{1}{4}\lambda(|\phi|^2 - a)^2$. Discuter le spectre d'excitations élémentaires au voisinage de l´état fondamental du système en fonction du paramètre a. Que reste-t-il de la symétrie globale pour $a > 0$?

Exercice 3 *(symétrie de jauge et loi de Coulomb)*
On considère maintenant le champ de Maxwell,

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int d^{n+1}x \; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le champ électromagnétique associé au potentiel vecteur A_μ.
1) Vérifier que $S[A_\mu]$ est invariant sous la symétrie

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \tag{6}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction arbitraire de la position x (il s'agit donc d'une symétrie locale, ou *symétrie de jauge*).
2) Calculer le courant de Noether associé à une transformation (6) arbitraire, et en déduire qu'il existe une infinité de charges conservées. Les reconnaissez-vous ?

Exercice 4 *(couplage minimal, mécanisme de Higgs)*
On veut maintenant coupler le boson scalaire complexe $\phi(x)$ et le boson vectoriel de Maxwell $A_\mu(x)$.
1) Montrer que l'action naïve

$$S_{\text{naive}} = \int d^{n+1}x \; \left[|\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2) - \frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu\, j^\mu \right] \tag{7}$$

où on a couplé le courant j^μ du champ scalaire complexe au potentiel de jauge A_μ ne préserve pas la symétrie locale (6).
2) Montrer que l'on peut restaurer l'invariance de jauge en ajoutant un terme correctif à l'action (7), et écrire le résultat en termes des dérivées *covariantes* (expliquer ce terme) $(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ et $(\partial_\mu - ieA_\mu)\bar{\phi}$.
3) On considère à nouveau le potentiel quartique $V = \frac{1}{4}\lambda(|\phi|^2 - a)^2$. Montrer que pour $a > 0$, le boson de Goldstone obtenu dans l'exercice est une excitation non-physique, et que le champ de Maxwell devient massif. Comparer au cas $a < 0$, et vérifier que le nombre de degrés de libertés est bien le même.

2 Tenseur énergie-impulsion

On revient à une théorie des champs classique générale, définie par la densité Lagrangienne $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$.

Exercice 5 *($T_{\mu\nu}$ par Noether)*
On suppose que le système est invariant par translation, i.e. que $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de la position x^μ. Déterminer la variation infinitésimale du Lagrangien sous

la transformation $\phi(x) \to \phi(x^\mu + \epsilon\xi^\mu)$, et en déduire le courant de Noether j^μ_ξ associé à la translation de vecteur ξ^μ, ainsi que le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ tel que $j^\mu_\xi = \xi_\nu T^{\mu\nu}$.

Exercice 6 *(Tenseur de moment angulaire)*
On suppose maintenant que le système est également invariant sous les transformations de Lorentz, $x^\mu \to x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$ où $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ est un générateur infinitésimal du groupe de Lorentz $SO(1,n)$. On se restreint également au cas de champs de spin 0. Montrer que le courant de Noether associé à la transformations de Lorentz de générateur $\omega^{\mu\nu}$ est donné par $j^\mu_\omega = \omega_{\nu\rho} M^{\mu\nu\rho}$, où $M^{\mu\nu\rho}$ est le tenseur de moment angulaire,

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\rho T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\rho} \tag{8}$$

Exercice 7 *(Ambiguité du tenseur énergie-impulsion)*
1) Montrer qu'en général, on peut ajouter à $T^{\mu\nu}$ un terme $\partial_\rho U^{\mu\nu\rho}$ où $U^{\mu\nu\rho} = -U^{\rho\nu\mu}$ est un tenseur arbitraire antisymétrique en ses premier et dernier indices, sans compromettre l'équation de conservation $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, ni modifier l'impulsion $P^\mu = \int d^n x \; T_{0\mu}$.
2) Montrer que la conservation du tenseur de moment angulaire (8) requiert que le tenseur énergie-impulsion soit symétrique.

Exercice 8 *(Tenseur énergie-impulsion du champ scalaire)*
On considère un champ scalaire réel, d'action $S = \int d^{n+1}x \; \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)\right]$.
1) Calculer le tenseur d'énergie-impulsion par la formule de Noether (3).
2) On se restreint, pour des raisons de simplicité, au cas d'un champ scalaire de masse nulle. Montrer que l'on peut ajouter à $T_{\mu\nu}$ une combinaison linéaire particulière

$$\alpha \; \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \; + \; \beta \; \eta_{\mu\nu}\phi\Box\phi \; + \; \gamma \; \phi\partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{9}$$

sans compromettre l'équation de conservation $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Montrer qu'on peut ainsi obtenir en toute dimension n un tenseur énergie-impulsion de trace nulle, $T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0$.

Exercice 9 *(Tenseur énergie-impulsion du champ de Maxwell)*
1) Calculer le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ du champ de Maxwell (5) par la formule de Noether (3).
2) Montrer que l'on peut lui ajouter un terme $\partial_\rho U^{\mu\nu\rho}$ de sorte qu'il devienne symétrique et invariant de jauge.
3) Vérifier que le tenseur énergie-impulsion du champ de Maxwell en dimension 3+1 est de trace nulle, $T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0$. Pouvez-vous expliquer cette observation par une symétrie particulière du Lagrangien de Maxwell ?

3 Couplage à la gravitation

De la même façon que le couplage minimal entre le courant électromagnétique j^μ et le photon A_μ est déterminé par la symétrie de jauge, le couplage entre le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ et le graviton $h_{\mu\nu}$ est contrôlé par une symétrie locale, l'invariance sous les reparamétrisations générales (ou difféomorphismes). Dans cette section, nous explorons quelques aspects élémentaires du couplage à la gravitation.

Exercice 10 ♠ *(Symétrie sous les difféomorphismes)*

Comme dans le cas de l'électromagnétisme, on souhaite promouvoir la symétrie globale sous les translations $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ en une symétrie locale, où le vecteur ξ^μ devient une fonction arbitraire des coordonnées x^μ. Pour cela, on introduit un tenseur $g_{\mu\nu}$ généralisant la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, et se transformant sous les difféomorphismes infinitésimaux comme un tenseur covariant,

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu}\partial_\mu \xi^\rho + g_{\rho\mu}\partial_\nu \xi^\rho && (10)\\ \delta\phi &= \xi^\mu \partial_\mu \phi \ , && (11) \end{aligned}$$

1) Montrer que la norme $g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$, où $g^{\mu\nu}$ dénote la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$, se comporte comme ϕ sous l'action des difféomorphismes.
2) Montrer que l'action

$$S = \int d^{n+1}x \ \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right] \tag{12}$$

où $g := \det(g_{\mu\nu}) < 0$, est invariante sous (10),(11).

Exercice 11 *(Graviton et tenseur énergie-impulsion)*
Le graviton $h^{\mu\nu}$ correspond aux fluctuations de la métrique $g^{\mu\nu}$ au voisinage de l'espace de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{13}$$

1) Montrer que le couplage du champ ϕ au graviton au premier ordre en $h_{\mu\nu}$ est donné par $\int d^{n+1}x \ h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire obtenu par la méthode de Noether.
2) Plus généralement, on définit le tenseur énergie-impulsion par la variation de la densité Lagrangienne par rapport à la métrique,

$$T^{(grav)}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{14}$$

ce qui garantit les propriétés de symétrie et d'invariance de jauge. Calculer $T_{\mu\nu}^{(grav)}$ pour le champ de Maxwell,

$$S = -\frac{1}{4}\int d^{n+1}x\, \sqrt{-g}\, [F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}] \tag{15}$$

et comparer au tenseur obtenu par la méthode de Noether.
3) Montrer qu'en général le tenseur énergie-impulsion du système total (gravité + matière) est nul *on shell*. Quelle est l'affirmation analogue dans le cas de l'électromagnétisme ?

TD1: Exercices complémentaires

N'attaquez ces exercices que si le TD n'a plus de secrets pour vous, et ne cherchez pas à les faire tous !

Exercice 12 *(Crochets de Poisson et algèbre des charges)*
Pour éviter de surcharger les notations, on revient à un système à un degré de liberté, de Lagrangien $\mathcal{L}(q,\dot{q})$. Soit $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ le moment canonique conjugué à q, et $H = p\,\dot{q} - \mathcal{L}$ le Hamiltonien. A deux fonctions $f(p,q)$ et $g(p,q)$ sur l'espace des phases, on associe le crochet de Poisson

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} \tag{16}$$

de sorte que p,q satisfont les relations de commutation canoniques, $\{p,q\} = 1$.
1) Vérifier que le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi,

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \tag{17}$$

En déduire que si Q_1 et Q_2 sont deux charges conservées, alors $\{Q_1,Q_2\}$ est aussi conservée.
2) On suppose que le Lagrangien est invariant sous la symétrie $\delta q = \epsilon f(q)$ (sans terme de bord, i.e. $k = 0$). Montrer que la charge de Noether $Q = pf(q)$ associée à cette symétrie commute avec le Hamiltonien H et génère la transformation δ, au sens où

$$\{Q,H\} = 0\ , \quad \{Q,q\} = \delta q\ , \quad \{Q,p\} = \delta p \tag{18}$$

(NB: Pour démontrer la dernière relation ci-dessus, on montrera en revenant à la définition du moment p que $\delta p = -\epsilon f'(q)p$)

Exercice 13 (*Problème de Landau et géométrie non-commutative*)
On considère une particule non-relativiste chargée en 2+1 dimensions dans un champ magnétique uniforme $A_i = B\epsilon_{ij}x^j$. Dans la limite $m \to 0$, le Lagrangien devient du premier ordre en temps,

$$S = \int dt\ B\left(x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt}\right) \tag{19}$$

Calculer le Hamiltonien découlant de (19). Montrer que cette action est invariante sous les reparamétrisations générales du temps. Que disent les relations de commutation canoniques dans ce cas ?

Exercice 14 ♠♠ (*Mécanique quantique conforme*)
On considère une particule non-relativiste en 0+1 dimensions, de Lagrangien $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{g}{q^2}$.

Montrer que le système est invariant sous les transformations *conformes* du temps,

$$t' = \frac{at+b}{ct+d} \ , \quad q'(t') = (ct+d)^{-1} q(t) \ , \quad ad - bc = 1 \tag{20}$$

Calculer les charges générant les actions correspondant aux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$Q_+ : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad Q_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad Q_- : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

et montrer qu'elles vérifient les relations de l'algèbre $Sl(2)$,

$$[Q_+, Q_-] = 2Q_0 \ , \quad [Q_0, Q_\pm] = \pm Q_\pm \tag{22}$$

Ce système intervient en relativité générale pour décrire le mouvement au voisinage de l'horizon d'un trou noir, ou encore en cosmologie au voisinage du Big Bang...

Exercice 15 *(Trace de $T_{\mu\nu}$ et dilatations)*
Montrer que dans un système invariant sous les translations, la divergence du courant associé aux dilatations $\phi(x) \to \phi(\lambda x)$ est égale à la trace du tenseur énergie impulsion. Vérifier en particulier que le champ de Maxwell en 4 dimensions, ou le champ scalaire libre en 2 dimensions, ont un tenseur énergie-impulsion de trace nulle.

Exercice 16 (*Courants de Noether et dérivées supérieures*)
On considère un champ scalaire complexe d'action

$$S = \int d^{n+1}x \ \phi^* F(\Box) \phi \tag{23}$$

où $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ et $F(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Box^n$ représente formellement une somme d'interaction aux dérivées supérieures. Calculer le courant conservé associé à la symétrie $\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x)$ (Attention, la formule de Noether ne s'applique pas !)

Exercice 17 (*Condition d'énergie nulle et équation d'état*)
On définit la densité d'énergie $\rho = T_{00}$ et la pression $p = \eta^{ij} T_{ij}/n$.
1) Montrer que pour un champ scalaire de potentiel V quelconque, la relation dite "condition d'énergie nulle" $\rho + p \geq 0$ est satisfaite. (cette condition est une contrainte physique importante sur les composantes du tenseur d'énergie-impulsion).
2) Calculer l'équation d'état $p(\rho)$ pour le champ scalaire libre sans potentiel, en l'absence de gradient spatial.
3) Faire de même pour le champ de Maxwell.

Exercice 18 ♠♠ (*Ambiguités du tenseur énergie-impulsion et couplage à la gravitation*)
Etant donné le Lagrangien dans l'espace plat, le couplage à la gravitation est ambigu à des termes de courbure de l'espace près, par exemple on peut ajouter à l'action (12) un terme

$$S_R = \int d^{n+1}x \, \sqrt{-g} f(\phi) R \tag{24}$$

où R dénote la courbure scalaire de la métrique $g_{\mu\nu}$ (voir les références standard de relativité générale). En utilisant la formule de variation

$$\delta R = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu g_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma \nabla_\nu g_{\rho\mu}) \tag{25}$$

(où $R^{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure de Ricci et ∇_μ la dérivée covariante) calculer les corrections au tenseur énergie-impulsion du champ scalaire, et comparer à l'ambiguité (9).

Exercice 19 ♠♠ (*Action de Chern-Simons et théories topologiques*)
L'action de Chern-Simons joue un rôle important dans l'effet Hall quantique à 2+1 dimensions,

$$S = \int d^3x \, \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \tag{26}$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho} = \pm 1$ est le tenseur complètement antisymétrique à trois indices.
1) Montrer par analyse dimensionnelle que l'action de Chern-Simons domine à grande distance sur l'action de Maxwell à 2+1 dimensions.
2) Dériver les équations du mouvement pour le champ A_μ.
3) Calculer le courant de Noether associé łа symétrie de jauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$.
4) Montrer que le tenseur-énergie impulsion est identiquement nul.
5) Vérifier qu'en fait, , sans avoir besoin de la coupler à la gravitation, l'action est invariante sous les difféomorphismes généraux

$$\delta A_\mu = \xi^\nu \partial A_\mu + \partial_\mu \xi^\nu A_\nu \tag{27}$$

où $\xi^\mu(x)$ est le champ de vecteur générant infinitésimalement le difféomorphisme. L'action est pour cette raison dite topologique.
6) Connaissez-vous un terme topologique pour l'électrodynamique à 3+1 dimensions ?

Exercice 20 ♠ *(Q-balls)*
On considère un champ scalaire complexe ϕ en dimension 3+1, dans un potentiel $V(\phi)$ invariant sous les rotations $\phi \to e^{i\alpha}$, et présentant un minimum global à $|\phi| = 0$ et un minimum local à $|\phi| = \eta$ (comme c'est le cas par exemple au voisinage d'une transition de phase du premier ordre). On s'intéresse à
1) Montrer qu'il existe une configuration stable du champ ϕ correspondant à une boule

de l'état métastable $|\phi| = \eta$ immergée dans le vide $\phi = 0$, et déterminer le rayon R de cette boule en fonction de la charge Q (on négligera les contributions de surface).
2) Montrer que la configuration ci-dessus est stable vis-à-vis de la désintégration en un gaz de Q particules élémentaires de champ ϕ.

Problème 21 ♠♠ *(Vortex d'Abrikosov-Nielsen-Olesen et cordes cosmiques)*
1) On considère un champ scalaire complexe ϕ en dimension 2+1, dans le potentiel de "chapeau mexicain" $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(|\phi|^2 - \eta^2)^2$, et on s'intéresse aux solutions statiques satisfaisant la condition au limite $\phi(r \to \infty, \theta) \to \eta e^{in\theta}$. Montrer qu'il existe une solution régulière pour tout n, dont l'énergie diverge logarithmiquement avec la distance R. Le "nombre d'enroulement" n est une charge conservée, mais est-il associé à une symétrie continue du Lagrangien ?
2) On couple maintenant le champ scalaire complexe au champ de Maxwell en dimensions 2+1 de manière minimale. Montrer qu'il existe maintenant des solutions d'énergie finie telles que le champ de jauge $A_\theta(r \to \infty) \to -n/(e\ r)$. Montrer que $|\phi(r)|$ approche η^2 exponentiellement vite en $r \to \infty$, en accord avec l'existence d'un mass gap dans le spectre des excitations élémentaires.
Ces configurations de vortex apparaissent aussi bien en matière condensée, où elles décrivent des quasi-particules (supraconductivité) qu'en cosmologie, où elles décrivent des cordes cosmiques.

Problème 22 ♠♠♠♠ (*De la géométrie symplectique aux théories de jauge non-Abéliennes.*)
On peut se demander s'il existe des théories de jauge intéressantes associées à un sous-groupe du groupe des difféomorphismes. Dans ce problème, on construit une théorie des champs invariante sous le groupe des *symplectomorphismes*, i.e. les difféomorphismes qui préservent une forme symplectique donnée. Le problème ci-dessous est un bon entraînement à l'usage des formes différentielles, exposé par exemple pour les physiciens dans Nakahara, *Geometry Topology and Physics*, ch 5.

On appelle variété symplectique une variété $\mathcal{M}$ munie d'une 2-forme $\omega = \omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$ fermée, i.e

$$d\omega := \partial_{[\rho}\omega_{\mu\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = 0 \tag{28}$$

et non-dégénérée (i.e. $\omega_{\mu\nu}$ inversible en tout point). Cette notion généralise l'espace de phase canonique "plat" $\mathbb{R}^{2n}$ généré par les (p_i, q_i), de forme symplectique $\omega = \sum dp_i \wedge dq^i$.
0) Montrer que la dimension de $\mathcal{M}$ est nécessairement paire.
1) On considère un champ de vecteur $\xi = \xi^i \partial_i$ préservant ω, i.e. $\mathcal{L}_\xi \omega = 0$: ξ est appelé champ de vecteur Hamiltonien, ou difféomorphisme symplectique, ou symplectomorphisme. Ici $\mathcal{L}_\xi$ est la dérivée de Lie,

$$(\mathcal{L}_\xi \omega)_{\mu\nu} := \xi^\rho \partial_\rho \omega_{\mu\nu} + \xi^\rho \partial_\mu \omega_{\rho\nu} + \xi^\rho \partial_\nu \omega_{\mu\rho} \tag{29}$$

Montrer qu'il existe une fonction H sur $\mathcal{M}$, unique à une constante additive près, telle que $dH = i_\xi \omega$ (i.e, en composantes, $\partial_\mu H = \xi^\nu \omega_{\mu\nu}$). H est appelée la fonction moment, ou Hamiltonien, associé(e) au vecteur ξ (Rq: on pourra utiliser la relation standard $\mathcal{L}_\xi = di_\xi + i_\xi d$). On notera ξ_H ou H_ξ les champs de vecteurs et Hamiltoniens associés.
2) On définit le crochet de Poisson entre deux fonctions sur $\mathcal{M}$ par

$$\{H_1, H_2\} = \theta^{\mu\nu} \partial_\mu H_1 \partial_\nu H_2 \tag{30}$$

où $\theta^{\mu\nu}$ est la matrice inverse de $\omega_{\mu\nu}$. Vérifier que le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi

$$\{H_1, \{H_2, H_3\}\} + \{H_2, \{H_3, H_1\}\} + \{H_3, \{H_1, H_2\}\} = 0 \tag{31}$$

et que le crochet de Poisson est l'image du crochet de Lie sous l'association $\xi \to H$, ie

$$\{H_{\xi_1}, H_{\xi_2}\} = H_{[\xi_1, \xi_2]} \tag{32}$$

où le crochet de Lie de deux vecteurs n'est autre que la commutation des dérivations associées, i.e.

$$[\xi_1, \xi_2]^\mu := \xi_1^\nu \partial_\nu \xi_2^\mu - \xi_2^\nu \partial_\nu \xi_1^\mu \tag{33}$$

3) Le théorème de Darboux (qu'on ne cherchera pas à prouver ici) garantit l'existence d'un système de coordonnées sur $\mathcal{M}$ tel que la forme symplectique ω prenne la forme canonique $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Retrouver les relations canoniques $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Soit H une fonction arbitraire, montrer que le flot généré par le vecteur ξ_H n'est autre que l'équation du mouvement standard de la mécanique Hamiltonienne,

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ , \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{34}$$

En particulier, l'élément de volume de l'espace de phase $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ est préservé au cours du temps, ce qui n'est autre que le théorème de Liouville.
4) On considère une forme symplectique $\omega = \omega_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ constante, et un difféomorphisme $y(x)$ que l'on choisit de paramétriser en termes d'une 1-forme A_μ, selon $y^\mu(x) = x^\mu + \theta^{\mu\nu} A_\nu(x)$.
4a) montrer que sous un difféomorphisme infinitésimal $\xi_\epsilon = \theta^{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon)\partial_\nu$, le champ A_μ se transforme selon

$$\delta_\epsilon A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon + \{\epsilon, A_\mu\} \tag{35}$$

Vérifier aussi que le commutateur de deux transformations est $\delta_\epsilon \delta_{\epsilon'} - \delta_{\epsilon'} \delta_\epsilon = \delta_{\{\epsilon, \epsilon'\}}$.
4b) on définit par ailleurs $F_{\mu\nu} = \omega_{\mu\rho} \omega_{\nu\sigma} \{y^\rho, y^\sigma\} - \omega_{\mu\nu}$. Obtenir l'expression de F en termes de A et sa variation sous le difféomorphisme ξ selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\} \tag{36}$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \{\epsilon, F_{\mu\nu}\} \tag{37}$$

4c) montrer que l'action $\int d^n x (F_{\mu\nu})^2$ est invariante de jauge. On a ainsi obtenu une déformation de la théorie de Maxwell, telle que les transformations de jauge ne commutent pas. *C'est un exemple de théorie de jauge non abélienne, où le groupe de jauge G est le groupe des symplectomorphismes. Dans les théories de jauge non-abéliennes qui interviennent en physique des particules, le groupe de dimension infini G est remplacé par un groupe de Lie fini, comme $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ (Modèle standard). Le champ A_μ appartient alors à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, et le crochet de Poisson est remplacé par le commutateur.*

5) L'approche habituelle à la quantification d'un système classique consiste à choisir la moitié des coordonnées comme positions, q_i, et à représenter l'autre moitié comme dérivation, $p_i \equiv i\hbar\partial/\partial q_i$, agissant sur les fonctions d'ondes $\psi(q_i)$. Une autre approche moins standard est appelée quantification géométrique: elle consiste à garder les fonctions des $2n$ variables $f(p_i, q_j)$, mais à déformer le produit tout en conservant l'associativité (mais pas la commutativité). En particulier, si $\omega_{\mu\nu}$ est constant, on définit le star-produit de Moyal,

$$f \star g \ (p,q) \ := \ f(p,q) \exp\left[\frac{i}{2}\hbar \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\theta^{\mu\nu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^{\nu'}}\right)\right] g(p',q')|_{x=x'} \tag{38}$$

$$[f,g]_\star \ := \ f \star g - g \star f \tag{39}$$

Vérifier que l'on garde bien dans les coordonnées de Darboux $[p_i, q_j]_\star = i\hbar\delta_{ij}$, et que le produit est bien associatif (on pourra travailler dans l'espace des moments). *En remplaçant le crochet de poisson dans* (35),(36) *par le star-commutateur, on obtient une théorie de jauge dite non-commutative. Ces théories ont reçu beaucoup d'intérêt récemment, en raison de leur comportement ultraviolet amélioré.*