Boris PIOLINE
Mai 2007

Supercordes et supersymétrie

La corde bosonique (ouverte ou fermée) est insatisfaisante, en raison
1) de la présence d'un tachyon, qui montre que le vide est instable
2) de l'absence de particules fermioniques dans le spectre.

Pour ce qui concerne 2), on ~~a vu~~ verra dans le chap. sur les théories conformes que la présence de D fermions de surface d'univers ψ^μ, dans le secteur de Ramond, entraîne que le vide de la théorie conforme est dégeneré, et se transforme comme un spineur sous $SO(D-1,1)$.

Comme dans le cas des bosons X^μ, la signature lorentzienne entraîne que l'espace de Hilbert des fermions ψ^μ possède des états de norme négative. Il faut donc une symétrie locale supplémentaire, analogue à la symétrie de Virasoro, qui permette d'éliminer ces fantômes.

De plus, le mode zéro de cette symétrie doit imposer l'équation de couche de masse pour les fermions, ie l'équation de Dirac $\not{k}=0$.
Comme $k\sim\partial X$ et $\gamma^\mu\sim\psi$, le générateur doit être $G\sim\psi^\mu\partial X^\mu$.
Puisque ∂X^μ est le moment conjugué à X^μ, cette symétrie doit donc transformer $\delta X^\mu=\varepsilon\psi^\mu$: SUPERSYMETRIE DE FEUILLE D'UNIVERS

Pour ce qui est de 1) on verra qu'il est possible d'éliminer le tachyon par une projection appropriée dite GSO (Gliozzi, Scherk, Olive).

Au final, on obtient 5 théories des supercordes différentes en dimension $D=9+1$:

Type IIA, IIB, Type I, Hétérotique $E_8\times E_8$, Hétérotique $SO(32)$
avec $\mathcal{N}=2$ (Type II) ou $\mathcal{N}=1$ (I, Het) supersymétries dans l'espace-cible.

* **Free fermion CFT (Rappel)**

Majorana-Weyl fermions in 2D : $\gamma^1=\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\gamma^2=\sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$

Dirac operator $\not{\partial}=\begin{pmatrix}0&\partial_1-i\partial_2\\\partial_1+i\partial_2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\partial\\2\bar\partial&0\end{pmatrix}$ $\chi=\begin{pmatrix}\psi\\\bar\psi\end{pmatrix}$

$\bar\chi=(\bar\psi\,\psi)\sigma_1$

$$S=-\frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\bar\chi\not{\partial}\chi$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,(\psi\bar\partial\psi+\bar\psi\partial\bar\psi)$$

$\Rightarrow\ \psi(z),\ \bar\psi(\bar z)$

$$\psi(z)\psi(w)=\frac{1}{z-w}\qquad \bar\psi(\bar z)\bar\psi(\bar w)=\frac{1}{\bar z-\bar w}$$

$T(z)=-\frac12:\psi\partial\psi:$

$$T(z)T(w)=\frac14\frac{1}{(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w T(w)+\text{reg}$$

$\Rightarrow\ c=\frac12$

$$T(z)\psi(w)=\frac12\frac{\psi(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial\psi(w)}{(z-w)}+\text{reg}$$

$\Rightarrow\ \psi(z)$ is a primary field of dimension $(\frac12,0)$

Its mode expansion on the plane is

$$\psi(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac12}\psi_n\,z^{-n-\frac12}$$

but in order that $\psi(z)$ be well defined under $z\to e^{2\pi i}z$, we need $n\in\mathbb{Z}+\frac12$!

On the cylinder, the field $\psi(w)$ is now antiperiodic : NS sector.

$$\psi^{cyl}(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac12}\psi_n\,e^{-nw}\qquad w=\tau+i\sigma$$

$\{\psi_n,\psi_m\}=\delta_{m+n}$ acting on vacuum

$\psi_{1/2},\psi_{3/2},\dots$ are annihilation, $\psi_{-1/2},\psi_{-3/2},\dots$ are creation

The vacuum energy in NS sector is

However, it is also possible to take periodic boundary conditions on the cylinder, ie $n \in \mathbb{Z}$: the Ramond sector

The propagator has now to be odd under $z \to e^{2\pi i} z$ and $w \to w e^{2\pi i}$

$$\Rightarrow \quad \langle \psi(z)\psi(w)\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{z/w}+\sqrt{w/z}}{z-w} = \frac{1}{z-w} + \text{reg}$$

The modes $\psi_{-1}, \psi_{-2}, \ldots$ are creation, but ψ_0 is a zero-mode giving rise to degeneracy 2.

The vacuum energy is $\quad -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) = \frac{1}{24}$

i. $1/16$ higher than the NS vacuum

$\Rightarrow$ there is a doublet of "spin fields" $S_\pm$ of $\Delta = 1/16$ which create the R sector out of the NS, ie. introduce a branch cut at the origin: these are the disorder operators of the Ising model

<u>More generally, take N Majorana Weyl fermions:</u>

$$\psi^i_{(z)}\psi^j_{(w)} = \frac{\delta^{ij}}{z-w} \qquad \text{in NS sector} \qquad \Delta(\psi) = 1/2$$

In the R sector, $\quad \{\psi_0^i, \psi_0^j\} = \delta^{ij}$ generates a Clifford algebra. The vacuum is 2^N-fold degenerate, and transforms as a <u>spinor of $O(N)$</u> (for N = even, 2 irreducible representations):

$$\psi^i_{m>0}\,|S_\alpha\rangle = 0 \qquad \psi^i_0\,|S_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\gamma^i_{\alpha\beta}\,|S_\beta\rangle$$

S_α is created from the NS vacuum by a spin field with $\Delta = \frac{N}{16}$:

$$\psi^i(z)\;S_\alpha(w) = \frac{\gamma^i_{\alpha\beta}}{\sqrt{2}}\,\frac{S_\beta(w)}{\sqrt{z-w}} + \text{reg}.$$

$$S_\alpha(z)\,S_\beta(w) = \frac{C_{\alpha\beta}}{(z-w)^{N/8}} + \frac{\gamma^i_{\alpha\beta}}{\sqrt{2}}\,\frac{\psi^i(w)}{(z-w)^{N/8-\frac{1}{2}}} + \text{more polar terms}$$

The fact that the spectrum organises itself in $SO(N)$ representations reflects the existence of conserved currents $\quad (\Delta = 1)$

$$J^{ij} = i :\psi^i\psi^j:(z) \qquad \bar{\partial}J = 0 \qquad + \text{c.c.}$$

$$J^{ij}_{(z)}J^{kl}_{(w)} = \frac{\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk}}{(z-w)^2} + i\,\underbrace{f^{ij,kl}{}_{mn}}_{\substack{\text{structure constants}\\ \text{of } SO(N)}}\,\frac{J^{mn}(w)}{z-w} + \ldots$$

which is an example of an affine algebra.

$$J^{ij}(z)\;\hat{S}_\alpha(w) = \frac{i}{4}[\gamma^i,\gamma^j]_{\alpha\beta}\,\frac{\hat{S}_\beta(w)}{z-w} + \text{reg}$$

These exist for any group:

$$C_G = \frac{k\,\dim G}{k+\hat{k}} \qquad \Delta_R = \frac{C_R}{k+\hat{k}} \qquad R = \text{representation of } G \text{ (among the "integrable" ones)}$$

$\hat{k}$ = dual Coxeter (N for $SU(N)$, $N-2$ for $SO(N)$) $\quad C_R$ = quadratic Casimir

$$T_G = \frac{1}{2(k+\hat{k})} : J^a(z)\,J^a(z): \qquad \text{"Sugawara construction"}$$

$$J^a(z)\,J^b(w) = \frac{G^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{i f^{ab}{}_c J^c}{z-w} + \text{reg}$$

$$[J^a_m, J^b_n] = m\,\underset{\substack{\downarrow\\ = k\,\delta^{ab}}}{G^{ab}}\,\delta_{m+n} + i f^{ab}{}_c\,J^c{}_{m+n}$$

$= k\,\delta^{ab}$ for a simple group, in an irrep.

k is called the level of the representation.

$$J^a(z)\,R_i(w,\bar{w}) = \frac{(T_R^a)_{ij}\;R_j(w,\bar{w})}{z-w} + \text{reg}$$

Integrable representations of $SU(N)$ are those with at most k columns in their Young tableau. Eg $SU(2)$: $\quad 0 \le j \le k/2$.

Il est utile d'introduire l'opérateur "parité fermionique" $(-1)^F$ (1''')

tel que
$$\{(-1)^F, \psi^i_n\} = 0$$
$$(-1)^F |0\,NS\rangle = |0\,NS\rangle \qquad "\gamma_5" = i^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^{N} (\sqrt{2}\,\psi^i_0)$$
$$\left.\begin{array}{l}(-1)^F |S\rangle = |S\rangle \\ (-1)^F |C\rangle = -|C\rangle\end{array}\right\} \text{ selon la chiralité du spineur}$$

$$\mathrm{Tr}_{NS}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = q^{-\frac{N}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n-\frac{1}{2}})^N = \left[\frac{\theta_3}{\eta}\right]^{N/2}$$
$$\mathrm{Tr}_{NS}\left[(-1)^F q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = q^{-\frac{N}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{n-\frac{1}{2}})^N = \left[\frac{\theta_4}{\eta}\right]^{N/2}$$
$$\mathrm{Tr}_{R}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = 2^{\frac{N}{2}} q^{\frac{N}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n})^N = \left[\frac{\theta_2}{\eta}\right]^{N/2}$$
$$\mathrm{Tr}_{R}\left[(-1)^F q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = 0 \qquad \left(= [\theta_1/\eta]^{N/2}\right)$$

où les θ_i sont les séries theta de Jacobi évaluées à $z=0$

$$\theta_1 = \theta\left[{1 \atop 1}\right] \quad \theta_2 = \theta\left[{1 \atop 0}\right] \quad \theta_3 = \theta\left[{0 \atop 0}\right] \quad \theta_4 = \theta\left[{0 \atop 1}\right]$$
$$\theta\left[{a \atop b}\right](z;\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n-\frac{a}{2})^2} e^{2\pi i (z-\frac{b}{2})(n-\frac{a}{2})}$$

Rk: Plus généralement, on pourrait considérer les fonctions de partition
$$\mathrm{Tr}\left(q^{L_0-\frac{c}{24}} e^{2\pi i \sum_a z_a J_0^a}\right)$$
(dans les secteurs NS ou R, avec insertion de $(-1)^F$ ou non)
où J_0^a, $a=1..N/2$ sont les modes zéros des courants
$J^{ij} = :\psi^i\psi^j:(z) \qquad (i,j) \in \{(1,2), (3,4), \dots (N-1,N)\}$
dans la sous-algèbre de Cartan de $SO(N)$

Les fonctions de partition correspondantes sont alors $\displaystyle\prod_{a=1}^{N/2} \frac{\theta_\alpha(z_a;\tau)}{\eta(\tau)}$
avec $\alpha = 1, 2, 3$ ou 4

(1''') (8)

Les fonctions de partition à parité fixée sont donc

$$\chi^{\pm}_{NS} = \mathrm{Tr}_{NS}\left[\frac{1\pm(-1)^F}{2} q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3}{\eta}\right)^{N/2} \pm \left(\frac{\theta_4}{\eta}\right)^{N/2}\right]$$
$$\chi^{\pm}_{R} = \mathrm{Tr}_{R}\left[\frac{1\pm(-1)^F}{2} q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}} \pm \left(\frac{\theta_1}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}}\right]$$

Ces fonctions de partition correspondent à des caractères de représentations de l'algèbre de courant affine $\widehat{SO}(N)$ au niveau 1 :

$$\chi^{+}_{NS} = q^{-\frac{N}{48}}\left(1 + \frac{N(N-1)}{2} q + O(q^2)\right) \equiv \chi_0$$
$$\chi^{-}_{NS} = q^{\frac{1}{2}-\frac{N}{48}}\left(N + N(N^2-3N+8)\, q + O(q^2)\right) \equiv \chi_V$$
$$\chi^{\pm}_{R} = 2^{\frac{N}{2}} q^{\frac{N}{16}}\left(1 + \frac{N}{2} q + \dots\right) \equiv \chi_{S,C}$$

correspond to the representations obtained by acting with $J^{ij}_{n<0}$ on a ground state transforming as a singlet (0), vector (V), Spinor (S) or conjugate spinor (C) of $SO(N)$.

Ces fonctions de partitions seront les briques élémentaires pour construire l'amplitude à une boucle des supercordes.

<u>Algèbre superconforme $\mathcal{N}=1$: réalisation de champs libre.</u>

$$S = \int \frac{1}{2\pi \ell_s^2} \left(\partial X \bar\partial X - \psi \bar\partial \psi - \bar\psi \partial \psi \right)$$

est invariant sous la symétrie chirale

$$\delta X = \varepsilon(z)\psi + \bar\varepsilon(\bar z)\,\bar\psi$$
$$\delta\psi = \varepsilon(z)\,\partial X \qquad\qquad \varepsilon(z) \text{ anticommutant}$$
$$\delta\bar\psi = \bar\varepsilon(\bar z)\,\bar\partial X$$

les courants associés sont $G(z) = \frac{2i}{\ell_s^2}\psi\partial X$, $\bar G(\bar z) = \frac{-2i}{\ell_s^2}\bar\psi\bar\partial X$

Avec le tenseur énergie impulsion $T(z) = -\frac{1}{\ell_s^2} :\partial X \partial X: - \frac{1}{2\ell_s^2} :\psi\partial\psi:$

ils satisfont à l'algèbre superconforme $\mathcal{N}=1$ avec $c = 3/2$

$$T(z)\,T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w)$$
$$G(z)\,G(w) = \frac{\frac{2c}{3}}{(z-w)^2} + \frac{2\,T(w)}{(z-w)} + \dots$$
$$T(z)\,G(w) = \frac{3}{2}\frac{G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w} + \dots$$

In terms of modes $\quad G(z) = \sum_r G_r\, z^{-r-3/2}$

$$T(z) = \sum_m L_m\, z^{-m-2} \qquad\qquad \boxed{\hat c \equiv \frac{2}{3}c}$$

$$\{G_r, G_s\} = \frac{\hat c}{2}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s} + 2L_{r+s}$$
$$[L_m, G_r] = \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r}$$
$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\,\delta_{n+m}$$

- le secteur NS correspond à $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$; G est univalué sur la sphère

$$G_{r \geq \frac{1}{2}}|0\rangle = 0 \qquad\qquad |0\rangle = \text{vide } SL(2,\mathbb{C}) \text{ invariant.}$$

- le secteur R correspond à $r \in \mathbb{Z}$. le mode G_0 vérifie

$$G_0^2 = L_0^R - \frac{\hat c}{16} \qquad \Rightarrow \quad L_0^R - \frac{\hat c}{16} \geq 0 \text{ dans une théorie unitaire superconforme}$$

$$G_{r \geq 1}|0\rangle = 0 \qquad\qquad L_0^R - \frac{\hat c}{16} = L_0^R - \frac{c}{24} = L_0^{R;\,cyl}$$

Rq : la supersymétrie du système $X, \psi, \bar\psi$ peut être rendue manifeste en utilisant la formulation de superespace :

En plus des coordonnées $z, \bar z$ sur la feuille d'univers, on introduit deux coordonnées anticommutantes $\theta, \bar\theta$, et les dérivées covariantes

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\,\partial_z \qquad D_\theta^2 = 2\partial_z \qquad \{D_\theta, \bar D_{\bar\theta}\} = 0$$
$$\bar D_{\bar\theta} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} + \bar\theta\,\partial_{\bar z} \qquad \bar D_{\bar\theta}^2 = 2\,\partial_{\bar z}$$

Une fonction $\hat X$ de $z, \bar z, \theta, \bar\theta$ se développe en

$$\hat X(z,\bar z,\theta,\bar\theta) = X(z,\bar z) + \theta\psi + \bar\theta\bar\psi + \theta\bar\theta F$$

L'action de $X, \psi, \bar\psi$ se réécrit

$$S = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}\int d^2z\, d\theta\, d\bar\theta\; D_\theta \hat X\, \bar D_{\bar\theta}\hat X$$

après avoir éliminé le champ auxiliaire F, égal à 0 par les eq du mvt.

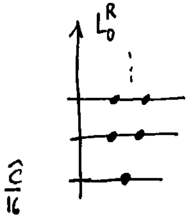
De la même manière, on peut construire des opérateurs de vertex

$$D_\theta \hat X\, e^{ip\hat X} = (\psi + \theta\partial X)(1 + ip\theta\psi)\, e^{ipX}$$
$$= \psi\, e^{ipX} + \theta\left[\left(\partial X + i(p\psi)\psi\right)e^{ipX}\right]$$

qui seront utiles pour représenter les particules externes dans les calculs de diffusion de supercordes

$[L_0^R, G_0] = 0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi\rangle$ et $G_0|\varphi\rangle$ sont dégénérés.

Si $L_0^R = \frac{\hat{c}}{16}$ alors $G_0|\varphi\rangle = 0$, et $|\varphi\rangle$ n'est en général pas dégénéré.



On introduit l'opérateur "nombre fermionique" $(-1)^F$ tel que $\{(-1)^F, G_r\} = 0$:

$\mathrm{Tr}_R (-1)^F q^{L_0 - \frac{c}{24}}$ ne reçoit de contributions que des états tels que $L_0^R = \frac{\hat{c}}{16}$: c'est le "genre elliptique" de la théorie superconforme.

Pour le cas du boson libre + fermion de Majorana, $c = 3/2$, $\hat{c} = 1$, et l'état du vide Ramond est doublement dégénéré, car $L_0^{R,\,cyl} = 1/24 > 0$

La théorie superconforme de D bosons et fermions de Majorana, combinée avec les contraintes $T(z)$ et $G(z)$, provient du fixage de jauge $g_{\alpha\beta} = e^{\phi}\delta_{\alpha\beta}$, $\chi_\alpha = \gamma_\alpha \xi$ de l'action de "Super-Polyakov"

$$S = \frac{1}{4\pi \ell_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\nu + \frac{i}{2} \psi^\mu \not{\partial} \psi^\mu \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2} \left(\chi_\alpha \gamma^\kappa \gamma^\beta \psi^\mu\right)\left(\partial_\beta X^\mu - \frac{i}{4} \chi_\beta \psi^\mu\right) \right.$$

invariante sous la sym. locale

$$\delta g_{\alpha\beta} = i\varepsilon \left(\gamma_\alpha \chi_\beta + \gamma_\beta \chi_\alpha \right)$$

ε = left moving fermion

$$\delta \chi_\alpha = 2 D_\alpha \varepsilon \quad ; \quad \delta X^\mu = i\varepsilon \psi^\mu$$
$$\delta \psi^\mu = \gamma^\alpha \left(\partial_\alpha X^\mu - \frac{i}{2} \chi_\alpha \psi^\mu \right) \quad ; \quad \delta \bar{\psi} = 0$$

Classiquement, les modes de "super-Liouville" ϕ et ξ découplent (pour ξ, on le voit en utilisant $\gamma_a \gamma^b \gamma^a = 0$ en $D=2$)

Quantiquement, il faut vérifier qu'il n'y a pas d'anomalie dans l'algèbre superconforme ; de manière équivalente, vérifier que $Q_{BRST}^2 = 0$

où

$$Q_{BRST} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \, j_{BRST}$$

$$j_{BRST} = c\, T_{matter} + \frac{1}{2} c\, T_{ghost} + \gamma\, G_{matter} + \frac{1}{2} \gamma\, G_{ghost}$$

où on inclut les superfantômes β, γ, de dimension $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$, commutants, associés à la supersymétrie locale :

$$T_{ghost} = -2\, b\partial c - (\partial b) c - \frac{3}{2} \beta \partial \gamma - \frac{1}{2} (\partial \beta) \gamma$$

$$\Rightarrow j_{BRST} = j_{BRST}^{matter} + \frac{3}{4}(\beta\gamma\partial c - \beta c \partial \gamma) + b c \partial c + \frac{1}{4} c (\partial\beta)\gamma - b\gamma^2$$

$$G_{ghost} = c\,\partial\beta - 2\gamma b + \frac{3}{2} \partial c\, \beta$$

Exercice : vérifier que la théorie conforme des fantômes b, c, β, γ satisfait bien à l'algèbre superconforme $\mathcal{N}=1$ avec $\hat{c} = -10$

On montre que $\boxed{Q_{BRST}^2 = 0 \iff D = 10}$

Le spectre physique s'obtient en calculant la cohomologie de Q_{BRST}, restreinte par la condition de "super" Siegel

$$b_0 |phys\rangle = 0, \ \beta_0 |phys\rangle = 0 .$$

secteur de Ramond

+ PROJECTION GSO, voir plus loin.

Pour rester simple, nous allons déterminer le spectre dans la jauge du cône de lumière

$$X^+ = x^+ + p^+ \tau$$
$$\psi^+ = \bar{\psi}^+ = 0$$

En raison des périodicités possibles des fermions ψ^μ, il y a 4 secteurs : $\underbrace{NS\,NS \;,\; R\text{-}R}_{\text{bosons d'espace-temps}} \;,\; \underbrace{R\text{-}NS \;,\; NS\text{-}R}_{\text{fermions d'espace-temps}}$

Considérons tout d'abord les modes gauches :

- secteur de NS :

$$L_0^{\perp cyl, NS} = \frac{\ell_s^2 m^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^i_{-k}\alpha^i_k + \sum_{k=1/2} \psi^i_{-r}\psi^i_r - a_{NS}$$

La constante d'ordre normal a provient de 8 oscillateurs bosoniques et 8 oscillateurs fermioniques antipériodiques sur le cylindre :

$$a_{NS} = 8\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{48}\right) = \frac{1}{2} \qquad [\text{ou encore : } c_1 \gamma_{-1/2} |0\rangle]$$

Les seuls états de masse nulle sont donc $\psi^i_{-1/2}|0\rangle$, se transformant en un vecteur de $SO(D-2)$.

De plus, l'état $|0\rangle$ est tachyonique, de masse $m^2 = -2/\ell_s^2$. Pour l'éliminer, on introduit la $\boxed{\text{projection GSO}}$ (Gliozzi, Scherk, Olive) et demande que les états physiques aient un nombre fermionique impair, $\frac{1+(-1)^F}{2}|phys\rangle = 0$

- secteur de Ramond :

$$L_0^{\perp cyl, R} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^i_{-k}\alpha^i_k + \sum_{k=1}^{\infty} \psi^i_{-k}\psi^i_{+k} - a_R \equiv \frac{\ell_s^2 m^2}{4}$$

$$a_R = 8\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{24}\right) = 0$$

L'état du vide se transforme comme un spineur de Dirac de $SO(1,D-1)$

$$G_0 = \psi_0^\mu \alpha_0^\mu + 2\sum_{n=1}^{\infty} \psi^i_n \alpha^i_{-n}$$

Les états de masse nulle correspondent aux combinaisons linéaires de vides de Ramond annihilés par G_0

Soit $|phy\rangle = \varepsilon^\alpha |R_\alpha\rangle$

tel que $k_\mu \gamma^\mu_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta = 0$: équation de Dirac !

On montrera plus loin que la condition d'invariance modulaire requiert que l'on applique la projection GSO dans le secteur R également :

$$\Gamma^{D+1}\varepsilon = \pm\,\varepsilon$$

deux signes possibles, selon la chiralité du spineur de $SO(D-1,1)$ que l'on souhaite garder, $|S\rangle$ ou $|C\rangle$

(Rq : la relation $\{G_0, G_0\} = 2\left(L_0^R - \frac{D-2}{16}\right) = 2L_0^{R\,cyl}$ n'est compatible avec G_0 que pour $a_R = 0$, et donc $a_{NS} = \frac{1}{2}$

Il faut maintenant prendre le produit tensoriel des modes gauches et droits. Seul le choix relatif de projection GSO dans les secteurs Ramond gauche et droit, compte, donnant lieu à deux types différents de supercordes, dites IIA (non chirale) ou IIB (chirale

droit \ gauche	NS	R
NS	$\psi^i_{-1/2}\bar\psi^j_{-1/2}\,\zeta_{ij}\,\|p\rangle$ graviton, Kalb Ramond, dilaton	$\bar\psi^i_{-1/2}\,\|p,S\rangle$ gravitino + dilatino
R	gravitino' + dilatino' $\psi^i_{-1/2}\,\|p, \bar S : \text{IIB} \text{ ou } \bar C : \text{IIA}\rangle$	IIB : $\|S\rangle\otimes\|\bar S\rangle$ 0-forme, 2-forme, 4 forme autoduale IIA : $\|S\rangle\otimes\|\bar C\rangle$ 1-forme, 3-forme

Pour discuter le secteur RR, rappelons qq propriétés des matrices de Dirac en dimension $D = 9+1$:

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \qquad \eta^{\mu\nu} = (-+++\cdots+)$$

Γ^μ are 32×32, réelles, symétriques pour $\mu \neq 0$, antisymétriques $\mu = 0$

La matrice de conjugaison de charge est $C = \Gamma^0$:

$$\Gamma^0 \Gamma_\mu \Gamma^0 = \Gamma_\mu^T = \Gamma_\mu^+$$

$$\Gamma_{11} = \Gamma_0 \Gamma_1 \cdots \Gamma_9 \quad ; \quad \Gamma_{11} \text{ est réel et symétrique}$$

$$(\Gamma_{11})^2 = 1 \quad ; \quad \{\Gamma_{11}, \Gamma^\mu\} = 0$$

La condition de Majorana, $S_\alpha^* = S_\alpha$ est compatible avec la condition de Weyl, $\Gamma_{11} S = \pm S$

Considérons les produits antisymétrisés $\qquad \varepsilon^{012\ldots9} = 1$

$$\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{1}{k!}\left(\Gamma^{\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_k} \pm \text{perm}\right)$$

Alors

$$\left\{\begin{aligned}
\Gamma_{11}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_k} &= \frac{(-1)^{[\frac{k+1}{2}]}}{(10-k)!}\,\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,\Gamma_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{10}} \\
\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\Gamma_{11} &= \frac{(-1)^{[\frac{k}{2}]}}{(10-k)!}\,\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,\Gamma_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{10}} \\
\Gamma^\mu\,\Gamma^{\nu_1\cdots\nu_k} &= \Gamma^{\mu\nu_1\cdots\nu_k} + k\,\eta^{\mu[\nu_1}\,\Gamma^{\nu_2\cdots\nu_k]} \\
\Gamma^{\nu_1\cdots\nu_k}\,\Gamma^\mu &= \Gamma^{\nu_1\cdots\nu_k\mu} + k\,\eta^{[\mu\nu_k}\,\Gamma^{\nu_1\cdots\nu_{k-1}]}
\end{aligned}\right.$$

Les états non massifs de RR sont des combinaisons linéaires de bispineurs

$$F_{\alpha\beta} \cdot S_\alpha (\Gamma^0)_{\beta\gamma} \tilde{S}_\gamma$$

satisfaisant aux projections GSO et conditions d'état physique

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma_{11}F = F \;;\; F\Gamma_{11} &= -\xi F \\ p_\mu \Gamma^\mu F = F p_\mu \Gamma^\mu &= 0 \end{aligned}} \quad \begin{cases} \xi = 1 & \text{IIB} \\ \xi = -1 & \text{IIA} \end{cases}$$

Pour décomposer le produit tensoriel de deux spineurs, on développe F sur la base des produits antisymétrisés de matrices Γ,

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{k!} F_{\mu_1\cdots\mu_k} \left(\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\right)_{\alpha\beta}$$

(les dimensions s'accordent bien : $\sum_{p=0}^{D} \binom{D}{p} = (1+1)^D = \left[2^{\frac{D}{2}}\right]^2$)

Alors

$$\Gamma_{11}F = F \;\Rightarrow\; F^{\mu_1\cdots\mu_k} = \frac{(-1)^{[\frac{k+1}{2}]}}{(10-k)!}\,\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,F_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{10}}$$

$$F\Gamma_{11} = -\xi F \;\Rightarrow\; F^{\mu_1\cdots\mu_k} = \frac{\xi\,(-1)^{[\frac{k}{2}]+1}}{(10-k)!}\,\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}\,F_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{10}}$$

On voit facilement que ces conditions sont compatibles si

$k =$ impair $\quad$ IIB $\quad \xi = 1$

ou $k =$ pair $\quad$ IIA $\quad \xi = -1$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\frac{k+1}{2}]$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$[\frac{k}{2}]+1$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B

En terme de la forme différentielle $F = \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{k!} F_{\mu_1\cdots\mu_k}\, dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_k} = \sum_{k=0}^{10} F_k$

les conditions d'état physique $\not{p}F = F\not{p} = 0$ deviennent

$$dF_k = d{*}F_k = 0$$

qui généralisent les identités de Bianchi et Maxwell pour une 1-forme, à une $(k-1)$ forme, $\quad F_k = dA_{k-1}$, $\quad A_{k-1} \approx A_{k-1} + d\lambda_{k-2}$

Ainsi, la supercorde de type IIA décrit, au niveau non massif,

- NSNS : graviton $g_{\mu\nu}$, dilaton ϕ, Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$
- RNS et NS-R : deux gravitino de Dirac ψ^ρ_α et un dilatino de Dirac λ_α
- RR : une 1-forme A_ρ et 3-forme C_ρ

soumis à leurs invariances de jauge respectives.

A basse énergie, ces particules sont décrites par le lagrangien de supergravité de type IIA, donné uniquement par, dans le "référentiel des cordes",

$$S^{\text{cordes}}_{IIA} = \frac{1}{2K^2}\int d^{10}x\sqrt{g}\left[e^{-2\varphi}\left(R+4(\nabla\phi)^2-\frac{1}{12}H_3^2\right) - \frac{1}{2.4!}F_4^2 - \frac{1}{4}F_2^2\right] + \frac{1}{4K^2}\int B_2\wedge dC_3\wedge dC_3$$

$$H_3 = dB_2\ ,\quad F_2 = dA_1\ ,\quad F_4 = dC_3 - A_1\wedge H_3$$

⚠ les champs de RR ont un couplage inhabituel au dilaton, un terme F^{2m} à l'ordre de k boucles est multiplié par $e^{(2k-2)\phi}\cdot e^{2m\phi}$. On peut le démontrer en considérant la condition d'état physique en présence d'un gradient linéaire de dilaton).

Pour rendre le terme cinétique du graviton canonique, on passe dans le "référentiel d'Einstein", $g^{\text{cordes}}_{\mu\nu} = e^{\phi/2}g^E_{\mu\nu}$,

$$S^E_{IIA} = \frac{1}{2K^2}\int d^{10}x\sqrt{g}\left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{e^{-\phi}}{12}H_3^2 - \frac{e^{\phi/2}}{2.4!}F_4^2 - \frac{e^{3\phi/2}}{4}F_2^2\right] + \frac{1}{4K^2}\int B_2\wedge F_4\wedge F_4$$

Ce lagrangien est invariant sous les supersymétries

$$\delta\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}\nabla_\mu\Phi\Gamma^\mu\Gamma^{11}\epsilon + \frac{3}{16\sqrt{2}}e^{\frac{3\Phi}{4}}F^{(2)}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon + \qquad \text{(H.18)}$$

$$+\frac{i}{24\sqrt{2}}e^{-\frac{\Phi}{2}}H_{\mu\nu\rho}\Gamma^{\mu\nu\rho}\epsilon - \frac{i}{192\sqrt{2}}e^{\frac{\Phi}{4}}F^{(4)}_{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon$$

$$\delta\psi^\mu = \nabla^\mu\epsilon + \frac{1}{64}e^{\frac{3\Phi}{4}}F^{(2)}_{\nu\rho}\left(\Gamma^{\mu\nu\rho} - 14g^{\mu\nu}\Gamma^\rho\right)\Gamma^{11}\epsilon + \qquad \text{(H.19)}$$

$$+\frac{1}{96}e^{-\frac{\Phi}{2}}H_{\nu\rho\sigma}\left(\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma} - 9g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho\sigma}\right)\Gamma^{11}\epsilon + \frac{i}{256}e^{\frac{\Phi}{4}}F^{(4)}_{\nu\rho\sigma\tau}\left(\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau} - \frac{20}{3}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho\sigma\tau}\right)\Gamma^{11}\epsilon\ .$$

La théorie de type IIB décrit quant à elle

- NS-NS : graviton $g_{\mu\nu}$, dilaton ϕ, Kalb Ramond $B_{\mu\nu}$
- NS-R et R-NS : deux gravitini de Majorana $\psi^{\mu A}_\alpha$, dilatini λ^A_α $A=1,2$
- RR : un scalaire a, une 2-forme $C_{\mu\nu}$, et une 4-forme C_4 dont la courbure est auto duale : $F_5 = *F_5$

Cette théorie a une invariance $Sl(2,\mathbb{R})$ agissant comme

$$S \to \frac{aS+b}{cS+d} \qquad \begin{pmatrix}B_2\\C_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}d & -c\\-b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2\\C_2\end{pmatrix} \qquad S \equiv C_0 + ie^{-\phi}$$

L'action effective à basse énergie est donnée par la SUGRA de type IIB, donnée dans le référentiel d'Einstein par

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}\frac{\partial S\partial\bar{S}}{S_2^2} - \frac{1}{12}|G_3|^2 - \frac{1}{2\cdot 5!}F_5^2\right] + \qquad \text{(H.22)}$$

$$+\frac{1}{2i}\int C_4\wedge G_3\wedge\bar{G}_3\ ,$$

$$H_3 = dB_2\ ,\quad F_3 = dC_2\ ,\quad G_3 = i\frac{F_3+SH_3}{\sqrt{S_2}}\ ,\quad F_5 = dC_4 - C_2\wedge H_3\ . \qquad \text{(H.23)}$$

$$\delta\lambda = i\Gamma^\mu\epsilon^* P_\mu - \frac{i}{24}e^{\frac{\Phi}{2}}\Gamma^{\mu\nu\rho}\epsilon(G_3)_{\mu\nu\rho}\ , \qquad \text{(H.26)}$$

$$\delta\psi^\mu = \nabla^\mu\epsilon - \frac{i}{1920}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\Gamma^\mu\epsilon(F_5)_{\mu_1\cdots\mu_5} + \frac{1}{96}\left(\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma} - 9g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho\sigma}\right)\epsilon^*(G_3)_{\nu\rho\sigma}\ , \qquad \text{(H.27)}$$

where

$$P_\mu = \frac{i}{2}e^\Phi\partial_\mu S\ . \qquad \text{(H.28)}$$

Opérateurs de vertex covariants

* Dans le secteur de NS , les excitations de masse nulle sont données par $\xi_\mu\, c_1\, \gamma_{-1/2}\, \psi^\mu_{-1/2}\, |\vec{p}\rangle$, $\vec{p}^2=0$

Ignorant pour un moment les fantômes, l'opérateur de vertex associé est $V^\mu_{-1} = \xi_\mu \psi^\mu e^{ipX}$

C'est la première composante du superchamp

$$\xi_\mu D_\theta \hat{X}^\mu e^{ip\hat{X}} = \underbrace{\xi_\mu \psi^\mu e^{ipX}}_{V_{-1}} + \theta \xi_\mu \underbrace{\left(\partial X^\mu + i(p\cdot\psi)\psi^\mu\right) e^{ipX}}_{V_0}$$

L'opérateur V_0 est approprié pour construire un opérateur de vertex intégré, puisqu'il a dimension 1, et $\int dz\, d\theta\, \hat{V}(z,\theta) = \int dz\, V_0(\theta)$.

On vérifie en effet que V_0 est Q_{BRST} - fermé pour $p^2=0$ et $p\cdot\xi=0$, sans contribution supplémentaires de fantômes. On y reviendra plus loin.

* Dans le secteur de R, les excitations de masse nulle sont données par $\xi_\alpha\, c_1\, \gamma\ |S_\alpha\rangle \otimes |\vec{p}\rangle$

où S_α est le champ de spin du fermion ψ^μ, de dimension $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

L'opérateur $\gamma_{3/8}$ est nécessaire pour obtenir une dimension totale 0, et sera construit plus loin.

Pour construire plus explicitement les opérateurs S_α, il est utile d'introduire la notion de <u>bosonisation</u> :

Considérons un champ scalaire $H(z)$: alors les opérateurs

$$J(z) = \frac{i\sqrt{2}\,\partial H}{\ell_s} \;;\quad \psi = :e^{i\sqrt{2}\frac{H}{\ell_s}}: \;;\quad \bar{\psi} = e^{-\frac{i\sqrt{2}H}{\ell_s}}$$

de dimension conforme 1, 1/2, 1/2 et charge 0, 1, -1 ont une algèbre d'OPE isomorphe à celle de <u>deux</u> fermions de Majorana Weyl $\psi^i(z)\,\psi^j(w) = \frac{\delta^{ij}}{z-w}$:

$$\psi \equiv \frac{\psi^1 + i\psi^2}{\sqrt{2}} \qquad \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 - i\psi^2) \qquad J = :\psi\bar{\psi}:$$

En effet

$$J(z)\,\psi(w) = \frac{\psi(w)}{z-w} + \dots$$

$$J(z)\,\bar{\psi}(w) = -\frac{\bar{\psi}(w)}{z-w} + \dots$$

$$J(z)\,J(w) = \frac{1}{(z-w)^2}$$

⚠ ψ et $\bar{\psi}$ sont tous deux chiraux !

On montre que les espaces de Hilbert sont aussi isomorphes, pourvu que $H(z)$ soit un boson compact de rayon $R = \ell_s/\sqrt{2}$.

Pour un nombre pair D de fermions, on introduit de même $\frac{D}{2}$ bosons $H_i(z$

En terme des H_i, il est aisé de construire le champ de spin S_α, satisfaisant

$$\psi^i(z)\, S_\alpha(w) = \frac{\gamma^i_{\alpha\beta}}{\sqrt{2}} \frac{S_\beta(w)}{(z-w)}$$

$$S_\alpha(z) S_\beta(w) = \frac{C_{\alpha\beta}}{(z-w)^{D/8}} + \dots$$

il suffit de prendre

$$S_\alpha = :\exp \frac{i}{\sqrt{2}\,\ell_s} \sum_{i=1}^{D/2} \varepsilon_i H_i : \qquad \text{où } \varepsilon_i = \pm 1$$

le nombre de tels champs est $2^{D/2}$ = dimension du spineur de SO(D

la chiralité du spineur est donnée par la parité du nombre de signes $\oplus$.

CFT of ghosts (rappel)

The b,c ghosts of diffeomorphism invariance have $\Delta = 2, -1$, resp.
Soon we will encounter the β, γ superghosts of local supersymmetry, with $\Delta = 3/2, -1/2$, resp.

We can treat both uniformly by taking $b : \Delta = \lambda$, $c : \Delta = 1-\lambda$

and $\varepsilon = 1$ (anticommuting)
$\quad -1$ (commuting)

Then $S = \frac{1}{\pi}\int d^2z \; b\bar{\partial}c$ is independant of λ,

but $T = -\lambda\, b\,\partial c + (1-\lambda)\,\partial b . c$

$$c(z)\,b(w) = \frac{1}{z-w} + \text{reg} \qquad c(z) = \sum_n z^{-n-(1-\lambda)}\, c_n$$

$$b(z)\,c(w) = \frac{\varepsilon}{z-w} + \text{reg} \qquad b(z) = \sum_n z^{-n-\lambda}\, b_n$$

$$c_n^+ = c_{-n}, \quad b_n^+ = \varepsilon\, b_{-n}$$

$$c_m b_n + \varepsilon\, b_n c_m = \delta_{m+n}$$

NS sector ( ): $b_n : n \in \mathbb{Z} - \lambda$
$\quad c_n : n \in \mathbb{Z} + \lambda$

R sector : $b_n : n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} - \lambda$
$\quad c_n : n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} + \lambda$

$$c = -2\varepsilon\,(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) = \varepsilon\,(1 - 3Q^2) \qquad Q \equiv \varepsilon(1-2\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda = 2, \varepsilon = 1 : & c = -26 \\ \lambda = 3/2, \varepsilon = -1 : & c = 11 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Q = -3 \\ Q = 1 \end{matrix}$$

$J(z) = - :b(z)\,c(z):$ is anomalous :

$$T(z)\,J(w) = \frac{Q}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J}{z-w}$$

or, in commutator form,

$$[L_m, J_n] = -n\, J_{m+n} + Q/2 \; m(m+1)\,\delta_{m+n}$$

This implies that the only non vanishing correlators are those for which

$$\#c - \#b = -\frac{\varepsilon}{2} Q\, \chi = +\varepsilon\, Q\,(2g-2)$$

In NS sector, the vacuum is annihilated by

$$b_{n>-\lambda}\,|0\rangle = c_{n>\lambda-1}\,|0\rangle = 0$$

In particular, for $\lambda = 2$, $c_1|0\rangle \neq 0$
and has $L_0 = -1$.

For $\lambda = 1/2$, $\varepsilon = 1$: $\quad Q = 0$, $c = 1$
This is just a free complex fermion.

<u>Bosonization</u> : $J = -:bc:$ may be represented as
$J = -\partial\phi \qquad \langle\phi(z)\,\phi(w)\rangle = -\log(z-w)$

Add a fermionic system with $\lambda = 1$: $\big(\underset{\Delta=1}{\eta}\,;\,\underset{\Delta=0}{\xi}\big)$

$$c(z) = e^{\phi}\,\eta$$
$$b(z) = e^{-\phi}\,\partial\xi$$
reproduces all OPE's.

Note that ϕ has a background charge $Q = 2\lambda - 1$
so $:e^{q\phi}:$ has dimension $-\frac{q(q+Q)}{2}$, charge q.
$e^{\pm\phi/2}$ $(\Delta = -(1 \pm 2Q)/8)$ take the NS sector to the R.

* Revenons maintenant à la contributions des superfantômes :

Là aussi, il est utile de "bosoniser" :

on introduit un boson chiral $\phi(z)$, avec une charge de fond $Q = 2\lambda - 1$ et un système fermionique (η, ξ) de dimension $(1,0)$.

$$\hat{T} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Q}{2}\partial^2\phi - \eta\partial\xi \qquad \lambda = \frac{3}{2}$$

est équivalent à $T = -\frac{3}{2}\beta\partial\gamma - \frac{1}{2}\partial\beta\,\gamma$

en identifiant

$$\boxed{\beta = e^{-\phi}\partial\xi} \, , \quad \boxed{\gamma = e^{\phi}\eta}$$

$[e^{-\phi}] = 1/2$, $[e^{\phi}] = -3/2$, $[\beta] = 3/2$, $[\gamma] = -\frac{1}{2}$

les champs de spin de (β,γ) sont maintenant

$[e^{-\phi/2}] = 3/8$ et $[e^{\phi/2}] = -5/8$

* Nous avons maintenant les ingrédients pour construire les opérateurs de vertex covariants :

$$V_0 = \xi_\mu[\partial X^\mu + i(p\cdot\psi)\psi^\mu] \; e^{ipX}$$

$$V_{-1} = e^{-\phi} \quad \xi_\mu \psi^\mu \; e^{ipX}$$

$$V_{-1/2} = e^{-\phi/2} \quad u^\alpha S_\alpha(z)\, e^{ipX}$$

$$V_{1/2} = e^{\phi/2} \quad u^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\beta} S^\beta(z)\, \partial X^\mu(z) \; e^{ipX} + \dots$$

termes qui ne contribuent pas à l'amplitude à 4 pts

L'indice, correspondant à la charge sous $J = \partial\phi$, est appelé "ghost picture". La charge totale doit être égale à $-Q\chi/2 = 2g-2$ pour obtenir un résultat non nul. La charge de "ghost picture" peut être changée en appliquant une "fausse transformation BRST",

$$V_{q+1} = [\,Q_{BRST}\, , \, \xi V_q\,]$$

: BRST non trivial, car le mode 0 de ξ est hors de l'espace de Hilbert [...]

Amplitudes à une boucle

- **Rappel (corde bosonique fermée) :**

En théorie des champs, l'amplitude du vide pour des champs libres de masse m_i, spin s_i (et donc nombre fermionique $F_i \equiv 2s_i [1]$, par le thm spin-statistique) est donnée par

$$\ln Z_{vide} = \frac{-i}{2} V_D \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \sum_i (-1)^{F_i} \log\left(p^2+m_i^2\right)$$

- En utilisant $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}} \exp\left(-\pi t M^2\right) = \left(\pi M^2\right)^s \Gamma(-s)$

$$\sim -\frac{1}{s} - \left(\log(\pi M^2)+\gamma\right) + O(s)$$

on déduit

$$\ln Z_{vide} = \frac{+i}{2} V_D \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \sum (-1)^{F_i} \exp\left[-\pi t\left(p^2+m_i^2\right)\right]$$

$$= \frac{i}{2} \frac{V_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \cdot \frac{1}{t^{D/2}} \sum_i (-1)^{F_i} \exp\left(-\pi t m_i^2\right)$$

- En théorie des cordes fermées, dans la jauge du cône de lumière,

$$m_i^2 = \frac{2}{\ell_s^2}\left(L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp\right)$$

De plus, on a la condition de "level matching" $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp = 0$, que l'on peut imposer par un multiplicateur de Lagrange θ :

$$\ln Z_{vide} = \frac{i}{2} \frac{V_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \cdot t^{-D/2} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} d\theta \; \mathrm{Tr}'(-1)^F \exp\left[-\frac{2\pi t}{\ell_s^2}\left(L_0^\perp+\bar{L}_0^\perp\right) + 2\pi i \theta\left(L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp\right)\right]$$

trace sur les modes zero

On définit $\tau = \theta + \frac{it}{\ell_s^2} = \tau_1 + i\tau_2$: , $q = \exp(2\pi i \tau)$

- $$\ln Z_{vide} = \frac{i}{2} \frac{V_D}{\left(4\pi^2 \ell_s^2\right)^{D/2}} \int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^{1+D/2}} \mathrm{Tr}'\left[(-1)^F q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}\right]$$

$$= \frac{i}{8\pi^2 \ell_s^2} V_D \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\left(4\pi^2 \ell_s^2 \tau_2\right)^{\frac{D-2}{2}}} \mathrm{Tr}'\left[(-1)^F q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}\right]$$

où $\mathcal{F} = \left\{ \tau_2 > 0,\ -\frac{1}{2} \le \tau_1 \le \frac{1}{2} \right\}$

- En théorie des cordes, on obtient un résultat analogue, où le domaine d'intégration $\mathcal{F}$ est remplacé par le domaine fondamental de l'action du groupe modulaire $SL(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan supérieur, et où l'intégrand est invariant modulaire. $\mathcal{F}_0 = \left\{\tau_2 > 0, |\tau| > 1, |\tau_1| \le \frac{1}{2}\right\}$

Eg, pour la corde bosonique en dimension 26,

$$\ln Z_{vide} = \frac{i V_{26}}{8\pi^2 \ell_s^2} \int_{\mathcal{F}_0} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\left[2\pi \ell_s \sqrt{\tau_2}\, \eta \bar{\eta}\right]^{24}}$$

- $\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^2}$ et $\sqrt{\tau_2}\, \eta\bar{\eta}$ sont séparément invariants modulaires :

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\, \eta(\tau) \quad ; \quad \eta(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{12}} \eta(\tau)$$

Du point de vue de l'intégrale fonctionnelle,

$$\ln Z_{vide} = \underbrace{i \int_{\mathcal{F}_0} d\tau_1 d\tau_2}_{\text{intégrale sur les modules de}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau_2}}_{\text{volume du groupe Killing conforme}} \cdot \underbrace{\frac{V_{26}}{\left(2\pi \ell_s \sqrt{\tau_2}\, \eta\bar{\eta}\right)^{26}}}_{\text{fonction de partition des 26 bosons } X^\mu} \cdot \underbrace{\eta^2 \bar{\eta}^2}_{\text{fantômes } b,c}$$

- Rk : on note $d^2\tau = d\tau\, d\bar{\tau} = 2 d\tau_1 d\tau_2$!

la restriction du domaine d'intégration au domaine fondamental $\mathcal{F}_0$ implique que les divergences UV de la théorie des champs (provenant de la région $t \to 0$) sont absentes.

Les divergences IR sont les mêmes qu'en théorie des champs ordinaires.
Pour la corde bosonique fermée, lorsque $t \to \infty$

$$\eta(\tau) \sim q^{\frac{1}{24}} \left(1 - q + O(q^2) \right)$$

soit

$$\ln Z_{vide} \sim \frac{i\, V_{26}}{2 \cdot (2\pi \ell_s)^{26}} \int^{\infty} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^2} \cdot \frac{1}{\tau_2^{12}} \cdot \frac{(1+24q)(1+24\bar{q})}{q\bar{q}}$$

$$\sim \frac{i}{2} \frac{V_{26}}{(2\pi \ell_s)^{26}} \int^{\infty} \frac{d\tau_2}{\tau_2^{14}} \Big(\underbrace{\exp(4\pi\tau_2)}_{\text{divergence due au tachyon}} + \underbrace{(24)^2}_{\text{contribution IR-finie des états de masse nulle}} + O(\exp(-4\pi\tau_2)) \Big)$$

Physiquement, $\dfrac{\ln Z_{vide}}{V_{26}}$ représente la densité d'énergie du vide, ie la constante cosmologique Λ dans le référentiel des cordes (dans le référentiel d'Einstein, elle correspond à un potentiel en $\exp\left(\frac{2D}{D-2}\varphi\right)$:

$$\int \sqrt{G}\, d^D x \left(R\, e^{-2\varphi} + \Lambda_D \right) \to \int \sqrt{G_E}\, d^D x \left(R_E + e^{\frac{2D}{D-2}\varphi} \Lambda_D \right)$$

qui déstabilise le vide à l'ordre des arbres, à moins que $\Lambda = 0$.

Dimensionnellement, $\Lambda_D \sim (1/\ell_s)^D \sim m_P^D$
à comparer avec la valeur observée $\Lambda_4 \sim (10^{-2} eV)^4 \ldots$

Dans les supercordes de type II :

Il faut maintenant inclure la contribution des fermions, et imposer la projection GSO.

Pour rappel, la fonction de partition pour N fermions est

$$\mathrm{Tr}_{NS}\left[q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right] = q^{-\frac{N}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}}\right)^N = \left[\frac{\theta_3}{\eta}\right]^{N/2}$$

$$\mathrm{Tr}_{NS}\left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right] = q^{-\frac{N}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{n-\frac{1}{2}}\right)^N = \left[\frac{\theta_4}{\eta}\right]^{N/2}$$

$$\mathrm{Tr}_{R}\left[q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right] = 2^{\frac{N}{2}} q^{\frac{N}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n}\right)^N = \left[\frac{\theta_2}{\eta}\right]^{N/2}$$

$$\mathrm{Tr}_{R}\left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right] = 0 \qquad \left(= [\theta_1/\eta]^{N/2} \right)$$

où les θ_i sont les séries théta de Jacobi évaluées à $z=0$

$$\theta_1 = \theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \theta_2 = \theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \theta_3 = \theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \theta_4 = \theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z;\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n-\frac{a}{2})^2}\, e^{2\pi i (z-\frac{b}{2})(n-\frac{a}{2})}$$

Rk : Plus généralement, on pourrait considérer les fonctions de partition

$$\mathrm{Tr}\left(q^{L_0 - \frac{c}{24}}\, e^{2\pi i \sum_a z_a J_0^a} \right)$$

(dans les secteurs NS ou R, avec insertion de $(-1)^F$ ou non)
où J_0^a, $a = 1 .. N/2$ sont les modes zéros des courants
$J^{ij} = :\psi^i \psi^j:(z) \qquad (i,j) \in \{(1,2), (3,4), \ldots (N-1, N)\}$
dans la sous-algèbre de Cartan de $SO(N)$
les fonctions de partition correspondantes sont alors $\displaystyle\prod_{a=1}^{N/2} \frac{\theta_\alpha(z_a;\tau)}{\eta(\tau)}$
avec $\alpha = 1, 2, 3$ ou 4

les fonctions de partition GSO-projetées sont donc

$$\chi^{\pm}_{NS} = \mathrm{Tr}_{NS}\left[\frac{1\pm(-1)^F}{2}\, q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3}{\eta}\right)^{N/2} \pm \left(\frac{\theta_4}{\eta}\right)^{N/2}\right]$$

$$\chi^{\pm}_{R} = \mathrm{Tr}_{R}\left[\frac{1\pm(-1)^F}{2}\, q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}} \pm \left(\frac{\theta_1}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-i\pi}{4}}\right]$$

Ces fonctions de partition correspondent à des caractères de représentations de l'algèbre de courant affine $\widehat{SO}(N)$ au niveau 1 :

$$\chi^{+}_{NS} = q^{-\frac{N}{48}}\left(1 + \frac{N(N-1)}{2}\, q + \mathcal{O}(q^2)\right) \equiv \chi_0$$

$$\chi^{-}_{NS} = q^{\frac{1}{2}-\frac{N}{48}}\left(N + N(N^2-3N+8)\, q + \mathcal{O}(q^2)\right) \equiv \chi_V$$

$$\chi^{\pm}_{R} = 2^{\frac{N}{2}}\, q^{\frac{N}{16}}\left(1 + \frac{N}{2}\, q + \dots\right) \equiv \chi_{S,C}$$

correspond to the representations obtained by acting with $J^{ij}_{n<0}$ on a ground state transforming as a singlet (0), vector (V), Spinor (S) or conjugate spinor (C) of $SO(N)$.

Les amplitudes à une boucle des supercordes de type II s'écrivent donc

$$\Lambda_{IIA} = \frac{i\, V_{10}}{2(2\pi l_s)^{10}} \int_{\mathcal{F}_0} \frac{d^2\tau}{2\tau_2^2}\, \frac{\left(\chi^-_{NS} - \chi^-_R\right)\left(\bar\chi^-_{NS} - \bar\chi^+_R\right)}{\left(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar\eta\right)^8}$$

$$\Lambda_{IIB} = \frac{i\, V_{10}}{2(2\pi l_s)^{10}} \int_{\mathcal{F}_0} \frac{d^2\tau}{2\tau_2^2}\, \frac{\left(\chi^-_{NS} - \chi^-_R\right)\left(\bar\chi^-_{NS} - \bar\chi^-_R\right)}{\left(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar\eta\right)^8}$$

où $\chi^{\pm}_{NS,R}$ sont les caractères décrits plus haut pour $N=8$ fermions transverses (comme pour la corde bosonique, les fantômes et superfantômes compensent la contribution des modes X^μ et ψ^μ $\mu=0,1$)

Il est facile de vérifier que ces amplitudes sont invariantes modulaires :

$\tau \to \tau+1$:

$$\theta_3(\tau+1) = \theta_4(\tau)$$
$$\theta_4(\tau+1) = \theta_3(\tau)$$
$$\theta_2(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{4}}\,\theta_2(\tau)$$
$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{12}}\,\eta(\tau)$$

$$\frac{\theta_3^4-\theta_4^4-\theta_2^4}{\eta^{12}} \to \frac{\theta_4^4-\theta_3^4+\theta_2^4}{-\eta^{12}} \quad : \text{invariant}$$

$\tau \to -1/\tau$:

$$\theta_3(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\;\theta_3(\tau)$$
$$\theta_4(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\;\theta_2(\tau)$$
$$\theta_2(-1/\tau) = -\sqrt{-i\tau}\;\theta_4(\tau)$$
$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\;\eta(\tau)$$

$$\frac{\theta_3^4-\theta_4^4-\theta_2^4}{\eta^4} \to \frac{\theta_3^4-\theta_2^4-\theta_4^4}{\eta^4}\,\frac{(\sqrt{-i\tau})^4}{(\sqrt{-i\tau})^4} \quad : \text{invariant}$$

Mieux, elles sont strictement égales à 0 !

$$\theta_3^4-\theta_4^4-\theta_2^4\pm\theta_1^4 = 0 \qquad \text{(identité de Riemann)}$$

Ceci reflète la dégénérescence entre bosons et fermions à tous les niveaux d'excitation, et donc la supersymétrie d'espace-temps des théories de type IIA et IIB.

Rk : comme $\theta_1=0$, l'amplitude du vide n'est pas suffisante pour différencier les spectres des cordes IIA et IIB...

Rk : on peut écrire les fonctions de partition de IIA et IIB uniformément :

$$\left\{\begin{matrix}\chi^-_{NS} - \chi^-_R \\ \chi^-_{NS} - \chi^+_R\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=0,1} (-1)^{a+b+\varepsilon ab}\,\frac{\theta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}}{\eta^4}\,, \quad \left\{\begin{matrix}\varepsilon=0\\ \varepsilon=1\end{matrix}\right\}$$

Cordes hétérotiques

A priori, l'élimination des fantômes dues aux composantes temporelles de X^μ et ψ^μ s'effectue de manière indépendante du côté gauche et du côté droit.

Il est donc possible de construire une "chimère" telle que les modes gauches soient purement "bosoniques", avec une algèbre de Virasoro $T(z)$ éliminant ∂X^0, tandis que les modes droits sont "fermioniques", avec une algèbre superconforme $\mathcal{N}=1$ $\bar{T}(\bar{z})$, $\bar{G}(\bar{z})$ éliminant $\bar{\partial} X^0$ et $\bar{\psi}^0$.

Ceci requiert deux charges centrales $c_L = 26$ et $c_R = 15$ différentes !

On peut séparer $c_L = 10 + 16$ correspondant à 10 bosons chiraux ∂X^μ, s'associant à $\bar{\partial} X^\mu$ pour donner le moment k^μ en $D=10$ dimensions, et une théorie conforme quelconque de charge centrale $c=16$, consistante avec l'invariance modulaire.

Considérons par exemple 32 fermions libres : on peut montrer qu'il n'existe que deux choix de conditions de bord menant à une fonction de partition invariante modulaire :

$$Z_{SO(32)} = \chi_0^{N=32} + \chi_S^{N=32} = \frac{1}{2} \frac{\theta_3^{16} + \theta_4^{16} + \theta_2^{16} + \theta_1^{16}}{\eta^{16}}$$

$$Z_{16}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = Z_4(\tau) = Z_{16}(\tau+1)$$

$$Z_{E_8\times E_8} = \left(\chi_0^{N=16} + \chi_S^{N=16}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{\left(\theta_3^8+\theta_4^8+\theta_2^8+\theta_1^8\right)^2}{\eta^{16}}$$

Remarque : en utilisant l'identité de Riemann $\theta_3^4 - \theta_4^4 - \theta_2^4 = 0$, on peut voir que $Z_{SO(32)} = Z_{E_8\times E_8}$. Mais cette dégénérescence peut être levée en allumant des générateurs de Cartan $\psi^{2i}\psi^{2i+1}$

Ces 32 fermions chiraux peuvent être bosonisés en 16 bosons chiraux, de telle manière que la fonction de partition s'écrit

$$Z_\Lambda(\tau) = \frac{\sum_{p\in\Lambda} q^{\frac{1}{2}p^2}}{\eta^{16}}$$

où Λ est un réseau euclidien de dimension 16, pair (ie $p^2 \in 2\mathbb{Z}$ pour tout vecteur du réseau) et selfdual de manière à avoir l'invariance modulaire (en effet, on montre par resommation de Poisson que $Z_\Lambda(-1/\tau) = Z_{\Lambda^*}(\tau)$.

Pour $Z_{SO(32)}$: $\Lambda = \Lambda_r^{SO(32)} \oplus \left(\Lambda_r^{SO(32)} + \lambda_s^{SO(32)}\right)$

réseau des racines de $SO(32)$

réseau des racines translaté par le poids correspondant au spineur :

Pour $Z_{E_8\times E_8}$: $\Lambda = \Lambda_r^{E_8} \oplus \Lambda_r^{E_8}$

$\Lambda_r^{E_8}$: réseau des racines de E_8
$= \Lambda_r^{SO(16)} \oplus \left(\Lambda_r^{SO(16)} + \lambda_s^{SO(16)}\right)$

le spectre consiste en

- secteur NS : $\partial X^\mu . \bar{\psi}^\nu e^{ikX}$: graviton, dilaton, 2-forme $B_{\mu\nu}$
  $\psi^i\psi^j . \bar{\psi}^\mu e^{ikX}$: champs de jauge $A_\mu^{ij} \in SO(32)$ ou $E_8\times E_8$

- secteur R : $\partial X^\mu \bar{S}_\alpha e^{ikX}$: gravitino
  $\psi^i\psi^j . \bar{S}_\alpha e^{ikX}$: dilatino } Majorana Weyl

La théorie a une supersymétrie $N=1$ dans l'espace-cible.
Dans le référentiel d'Einstein, l'action effective de basse énergie est

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\,\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{e^{-\phi}}{12}\hat{H}^2 - \frac{\kappa^2 e^{-\phi/2}}{2g^2}\mathrm{Tr}F^2\right]$$

+ fermions

avec

$$F = dA - i[A,A]$$

$$\hat{H} = dB - \frac{\kappa^2}{g^2}\mathrm{Tr}\left(AdA - \frac{2i}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$

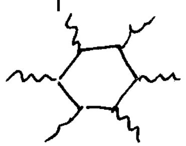
terme de Chern-Simons ; provient en réalité d'une correction à une boucle

invariance de jauge

$$\delta A = d\Lambda - i[A,\Lambda]$$

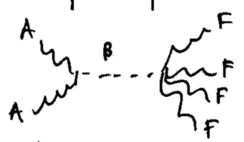
$$\delta B = \frac{\kappa^2}{g^2}\mathrm{Tr}(\Lambda dA)$$

Remarque : cette théorie est potentiellement anormale, dû au diagramme d'hexagone



(qui joue un rôle analogue au diagramme  dans les théories à 4 dimensions)

Heureusement, la partie "réductible" (ou factorisable) de l'anomalie est compensée par un diagramme



combinant les effets du terme $dB\wedge(*AdA)$ et $B\wedge(\mathrm{Tr}F^2)^2$ dans l'action. La partie "non factorisable" quant à elle s'annule lorsque

$G = SO(32)$
ou $E_8\times E_8$ } les deux théories hétérotiques !
ou $E_8\times U(1)^{248}$
ou $U(1)^{496}$ } pas d'exemple connu

également réalisé dans la supercorde de type I.

Calculons maintenant l'amplitude à une boucle dans la corde hétérotique :

$$\Lambda_{Het} = \frac{i}{2}\frac{V_{10}}{(2\pi l_s)^{10}}\int_{\mathcal{F}_0}\frac{d^2\tau}{2\tau_2^2}\frac{(\bar{\chi}^-_{NS} - \bar{\chi}^-_R)}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}Z_{16}$$

$= 0$ par l'identité de Riemann $\theta_3^4 - \theta_4^4 - \theta_2^4 = 0$

Remarque : Si on s'autorise à briser la SUSY d'espace-cible, on peut construire une autre théorie des cordes consistante à $D=10$ dimensions, sans tachyon et avec sym de jauge $SO(16)\times SO(16)$: c'est un "orbifold" de la corde hétérotique $E_8\times E_8$ par la symétrie $(-1)^{F_L}.S_1.S_2$

→ change le signe des fermions de $SO(16)$
- - - de l'autre $SO(16)$

→ change le signe $\tilde{S}_\alpha \to -\tilde{S}_\alpha$ des fermions de $SO(1,9)$

La construction est résumée par l'amplitude à 1 boucle :

$$Z_{Het}^{O(16)\times O(16)} = \frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\frac{\left(Z_{E_8}\left[{h \atop g}\right]\right)^2}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}\cdot\frac{1}{2}\sum_{a,b}(-1)^{a+b+ab+ag+bh+gh}\frac{\bar{\theta}^4\left[{a \atop b}\right]}{\bar{\eta}^4}$$

avec

$$Z_{E_8}\left[{h \atop g}\right] = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta=0}^{1}\frac{\theta^8\left[{\gamma \atop \delta}\right]}{\eta^8}$$

SuperCordes de Type I

Ce sont des cordes ouvertes non orientées, couplées aux cordes fermées non orientées, avec supersymétrie $\mathcal{N}=1$ et symétrie de jauge $SO(32)$ dans l'espace cible.

On introduit l'opérateur de "parité de feuille d'univers"

cordes fermées
$$\begin{cases} \Omega\, \alpha_k^\mu\, \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_k^\mu & \Omega\, \tilde{\alpha}_k\, \Omega^{-1} = \alpha_k \\ \Omega\, \psi_r^\mu\, \Omega^{-1} = \tilde{\psi}_r^\mu & \Omega\, \tilde{\psi}_r\, \Omega^{-1} = -\psi_r^\mu \\ \Omega\, |p^\mu\rangle_{NSNS} = |p^\mu\rangle_{NSNS} & \\ \Omega\, |p^\mu\rangle_{RR} = -|p^\mu\rangle_{RR} & \\ \Omega\, |NS\, R\rangle = |R\, NS\rangle & \end{cases}$$

↑ for convenience.

+ projection GSO de type IIB

cordes ouvertes 'Neumann-Neumann'
$$\begin{cases} \Omega\, \alpha_k^\mu\, \Omega^{-1} = (-1)^k \alpha_k^\mu \\ \Omega\, \psi_r^\mu\, \Omega^{-1} = (-1)^r \psi_r \\ \Omega\, |p\,;\, ij\rangle_{NS} = -i\, |p\,;\, ji\rangle_{NS} \\ \Omega\, |p\,;\, ij\rangle_R = -\, |p\,;\, ji\rangle_R \end{cases}$$

(ij) : facteur de Chan-Paton

On projette sur les états invariants sous Ω : $\quad \Omega|\text{phys}\rangle = |\text{phys}\rangle$

- secteur de cordes fermées : le dilaton et le graviton restent, le $B_{\mu\nu}$ est éliminé ; dans le secteur RR : seuls restent la 2-forme $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ et la 6-forme $\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma\tau\kappa}$, duales l'une de l'autre.
- secteur de cordes ouvertes : on obtient $\frac{N(N-1)}{2}$ champs de jauge A_μ^{ij} dans l'adjoint de $SO(N)$, et autant de dilatino

L'absence d'anomalies, ou la "cancellation des tadpoles", requiert $N=32$, ce qui donne le même spectre de masse nulle que la corde hétérotique $SO(32)$!

* Cordes fermées non orientées :

Les cordes fermées que nous avons considérées jusqu'à présent étaient orientées : les modes "left moving" et "right-moving" étaient distinguables.

La symétrie $\sigma \to 2\pi - \sigma$, $\tau \to \tau$ échange ces modes. Elle est représentée par un opérateur unitaire Ω dans l'espace de Fock, tel que

$$\Omega\, \alpha_k^\mu\, \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_k^\mu \qquad \Omega^2 = 1$$
$$\Omega\, \tilde{\alpha}_k\, \Omega^{-1} = \alpha_k^\mu$$

On peut montrer que le tachyon $|p^\mu\rangle$ doit être invariant :
$$\Omega\, |p^\mu\rangle = |p^\mu\rangle$$

La corde fermée non-orientée est définie en ne gardant que les états invariants sous Ω, $\quad \Omega|\text{phys}\rangle = |\text{phys}\rangle$.

On voit que le premier niveau excité ne contient plus que le graviton et le dilaton ; le champ de Kalb-Ramond est éliminé.

* Cas des cordes ouvertes

On considère ici des conditions "NN" (Neumann aux 2 bouts). Les mêmes considérations que plus haut avec $p^\mu \to 2p^\mu$ montrent que le spectre de la corde ouverte est donné par

$$l_s^2\, m^2 = \left(N^\perp - a\right) \qquad \begin{cases} N^\perp = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i \\ a = \frac{D-2}{24} \end{cases}$$

Ici encore, la consistance impose $a=1$, $D=26$.

le niveau fondamental est toujours tachyonique, de masse $\ell_s^2 m^2 = -1$ (2 fois moins que celui de la corde fermée!)

le premier niveau excité $\alpha_{-1}^i |p\rangle$ est un boson transverse de masse nulle ; la théorie effective n'est autre que Maxwell :

$$S_{eff}^{ouv.} = \int d^{26}x \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dilaton} \\ \text{de corde fermé}}}{e^{-\varphi}} \left[(\partial t)^2 + t^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right]$$

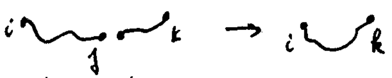
⚠ Deux cordes ouvertes peuvent toujours se combiner en une corde fermée

Remarques :

* Il est possible d'attacher un indice de "couleur", à chaque extrémité de la corde ouverte, $i, j = 1..N$: <u>indices de Chan-Paton</u>

On obtient ainsi N^2 copies du spectre ci-dessus : $|p^\mu; i, j\rangle$

Si on demande que les seules interactions possibles sont du type



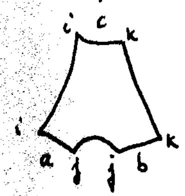
, on voit que les interactions seront invariantes sous une symétrie de jauge $U(N)$:

Pour cela, changeons de base : $|p^\mu; a\rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij}^a |p^\mu; i, j\rangle$

où λ_{ij}^a, $a = 1..N^2$ sont les générateurs de l'algèbre de Lie de $U(N)$:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{ab}{}_c \lambda^c \qquad \lambda^+ = \lambda$$

Les amplitudes sont ainsi proportionnelles à des traces de produits de λ



$\mathrm{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c)$

invariantes sous $\lambda \to U \lambda U^{-1}$, $U^+ U = 1$

On verra que la théorie effective est alors une théorie de Yang-Mills, analogue à celle qui décrit les interactions fortes !

* Comme pour les cordes fermées, il est possible de définir une version <u>non-orientée</u> des cordes ouvertes :

Pour les cordes NN, l'action de Ω : $\begin{matrix}\sigma \to \pi - \sigma \\ \tau \to \tau\end{matrix}$

dans l'espace de Fock est

$$\Omega \, \alpha_k^\mu \, \Omega^{-1} = (-1)^k \, \alpha_k^\mu$$

En l'absence de facteurs de Chan-Paton, le premier niveau excité est donc éliminé : plus de boson de jauge !

Mais si $N > 1$, il y a de nouvelles possibilités :

Supposons

$$\Omega \, |p; ij\rangle = \varepsilon \, (\gamma_\Omega)_{ii'} \, |p; j'i'\rangle \, (\gamma_\Omega^{-1})_{j'j}$$

où γ_Ω est une matrice unitaire $N \times N$ $\quad \uparrow$ Ω échange les 2 bouts !

La condition $\Omega^2 = 1$ impose

$$\gamma_\Omega = \xi \, \gamma_\Omega^t \, , \qquad \varepsilon^2 \xi^2 = 1$$

Comme $\det(\gamma_\Omega) = \det(\gamma_\Omega^t)$, $\xi^N = 1$.

Les états du 1er niveau $\quad A^{i,a} = \sum \lambda_{ij}^a \, \alpha_{-1}^i |p; i, j\rangle$

sont invariants ssi $\quad \lambda = -\varepsilon \, \gamma_\Omega \lambda^T \gamma_\Omega^{-1} \quad (*)$

On en déduit $\quad \varepsilon^2 = 1, \; \xi^2 = 1$.

Enfin, il est nécessaire que si λ_1, λ_2 vérifient $(*)$, $[\lambda_1, \lambda_2]$ aussi. Cela fixe $\varepsilon = 1$. Il reste donc 2 possibilités :

$\xi = 1$: γ_Ω est diagonalisable $\rightsquigarrow$ $\gamma_\Omega = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N}\end{pmatrix}$

$\lambda_{ii} = 0$, $\lambda_{ij} = i R_{ij} \, e^{\frac{i}{2}(\theta_i - \theta_j)}$

On trouve que l'on peut toujours se ramener à $\gamma_\Omega = \mathbb{1}$,

et donc $\boxed{G = SO(N)}$

$\xi = -1$: $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ \ldots & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \ldots & \end{pmatrix}$, $\boxed{G = Sp(N)}$

Amplitudes du vide des cordes ouvertes bosoniques

Dans le cas des cordes ouvertes orientées, le diagramme à une boucle correspond à la topologie du cylindre, équivalente à celle de l'anneau.

Dans la jauge du cône de lumière, la condition d'état physique est

$$m_i^2 = \frac{L_0^\perp}{\ell_S^2} \qquad \text{(pas de « level matching »)}$$

On a donc, en théorie des champs,

$$\ln Z_{vide} = \frac{i}{2} \frac{V_D}{(2\pi)^D} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \cdot t^{-D/2} \sum_i (-1)^{F_i} \exp(-\pi t m_i^2)$$

$$= \frac{i}{2} V_D \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} (4\pi^2 t)^{-D/2} \sum_i (-1)^{F_i} \exp\left(-\pi \frac{L_0^\perp t}{\ell_S^2}\right)$$

$$= \frac{i}{2} V_D \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} (8\pi^2 \ell_S^2 t)^{-D/2} \operatorname{Tr} (-1)^F \exp(-2\pi t L_0^\perp)$$

C'est aussi le résultat de l'intégrale fonctionnelle pour les cordes ouvertes, aux facteurs de Chan Paton près ; pour la corde ouverte bosonique

$$\Lambda = \ln Z_{vide} = \frac{i}{2} V_D \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \frac{1}{(8\pi^2 \ell_S^2 t)^{13}} \frac{1}{\eta^{24}(it)}$$

L'amplitude diverge dans l'IR, en raison du tachyon :

$$\Lambda \sim N^2 \frac{i V_D}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \frac{1}{(8\pi^2 \ell_S^2 t)^{13}} \cdot e^{2\pi t} \left(1 + 24 e^{-2\pi t} + \dots\right)$$

Contrairement aux cordes fermées, les divergences UV en $t \to 0$ persistent, mais elles sont interprétées comme des effets infrarouges dans le "canal transverse", ie le secteur des cordes fermées :

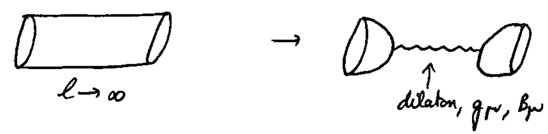
$$\ell = \frac{\pi}{t} \qquad \eta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}} \eta\left(i\frac{\ell}{\pi}\right)$$

$$\Lambda = \frac{i N^2 V_{26}}{2\pi (8\pi^2 \ell_S^2)^{13}} \int_0^\infty d\ell \left[\eta\left(\frac{i\ell}{\pi}\right)\right]^{-24}$$

Pour $t \to 0$, $\ell \to \infty$, $\left[\eta\left(\frac{i\ell}{\pi}\right)\right]^{-24} \sim e^{2\ell} + 24 + O(e^{-2\ell})$

Le premier terme correspond au tachyon de corde fermée, qui sera éliminé dans la corde de type I.

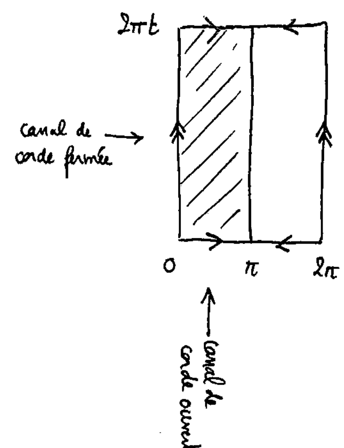
Le second terme donne une divergence physique, due à un couplage non zéro à l'ordre du disque de cordes fermées de masse nulle



$\to$ terme $\int d^{26}x \sqrt{-G}\, e^{-\Phi}$ dans l'action effective, qui déstabilise le vide

On en verra plus loin l'interprétation en termes de D-branes et orientifolds.

Rk Géométriquement, le cylindre peut être vu comme le quotient du tore par l'application antiholomorphe $z \to -\bar{z}$



module du tore : $\tau = it$

longueur du cylindre pour circonférence $= 2\pi$:

$$\ell = \frac{\pi}{t}$$

On obtient donc

$$\Lambda_{\text{moebius}} = i\xi N\, V_{26} \int_0^\infty \frac{dt}{4t} \frac{1}{(8\pi^2 \ell_s^2 t)^{13}} \frac{1}{[\theta_3(2it)\,\eta(2it)]^{12}}$$

$$= 2i\xi N \cdot \frac{2^{13} V_{26}}{4\pi (8\pi^2 \ell_s^2)^{13}} \int_0^\infty d\ell \left[\theta_3\left(\frac{2i\ell}{\pi}\right) \eta\left(\frac{2i\ell}{\pi}\right)\right]^{-12}$$

qui diverge dans la limite $\ell \to \infty$ comme

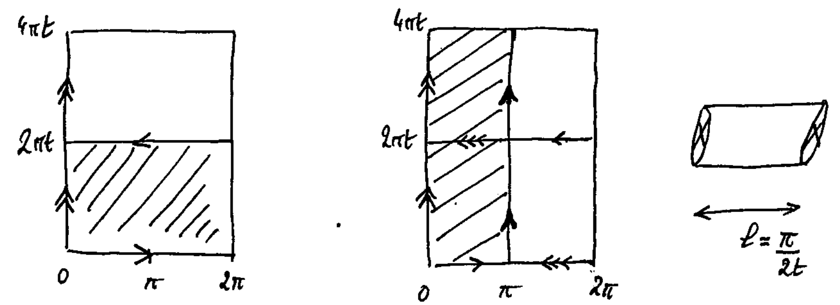
$$-48\, i\xi N \cdot \frac{2^{13} V_{26}}{4\pi (8\pi^2 \ell_s^2)^{13}} \int_0^\infty d\ell \qquad (+\text{ tachyon})$$

Cordes fermées non orientées

Dans le secteur des cordes fermées, $\Omega : \begin{matrix} \sigma \to 2\pi - \sigma \\ \tau \to \tau \end{matrix}$ agit sur les oscillateurs bosoniques par

$$\Omega\, \alpha_k^\mu\, \Omega^{-1} = \bar{\alpha}_k^\mu$$
$$\Omega\, \bar{\alpha}_k^\mu\, \Omega^{-1} = \alpha_k^\mu$$

Géométriquement, la surface d'univers a la topologie d'une bouteille de Klein : quotient d'un tore de module $\tau = 2it$ par l'involution $z \to -\bar{z} + 2\pi i t$:



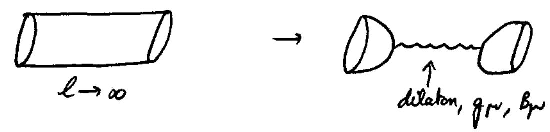
Boson libre : $\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, \Omega\, e^{-2\pi t (L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12})} = \dfrac{V}{4\pi \ell_s \sqrt{t}\, \eta(2it)}$

$$\Lambda = \frac{i N^2 V_{26}}{2\pi (8\pi^2 \ell_s^2)^{13}} \int_0^\infty d\ell \left[\eta\left(\frac{i\ell}{\pi}\right)\right]^{-24}$$

Pour $t \to 0$, $\ell \to \infty$, $\left[\eta\left(\frac{i\ell}{\pi}\right)\right]^{-24} \sim e^{2\ell} + 24 + O(e^{-2\ell})$

Le premier terme correspond au tachyon de corde fermée, qui sera éliminé dans la corde de type I.

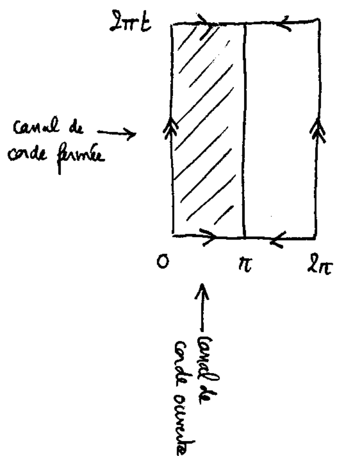
Le second terme donne une divergence physique, due à un couplage non zéro à l'ordre du disque de cordes fermées de masse nulle



$\to$ terme $\int d^{26}x \sqrt{-G}\, e^{-\Phi}$ dans l'action effective, qui déstabilise le vide

On en verra plus loin l'interprétation en termes de D-branes et orientifolds.

Rk Géométriquement, le cylindre peut être vu comme le quotient du tore par l'application antiholomorphe $z \to -\bar{z}$



module du tore : $\tau = it$

longueur du cylindre pour circonférence $= 2\pi$:

$$\ell = \frac{\pi}{t}$$

Cordes ouvertes non orientées

L'opérateur de parité Ω : $\begin{matrix}\sigma \to \pi-\sigma \\ \tau \to \tau\end{matrix}$

agit sur les oscillateurs bosoniques par

$$\Omega \alpha_k^\mu \Omega^{-1} = \begin{cases} (-1)^k \alpha_k^\mu & \text{conditions de N-N} \\ (-1)^{k+1} \alpha_k^\mu & \text{conditions de D-D} \\ \text{échange secteurs N-D et D-N} & \end{cases}$$

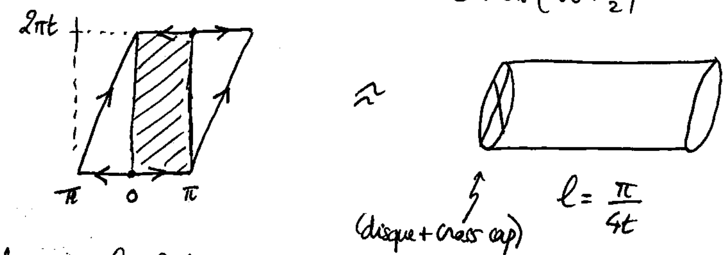
L'insertion de Ω dans la trace conduit donc à

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \Omega\, e^{-2\pi t L_0} = \frac{N}{2\pi l_s \sqrt{2t}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-(-1)^n e^{-2\pi n t}}$$

$$= \text{"} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-4\pi n t}} \cdot \frac{1}{1+e^{2\pi(2n+1)t}}$$

$$= \frac{N}{2\pi l_s \sqrt{2t}} \frac{1}{\sqrt{\theta_3(2it)\,\eta(2it)}}$$

Géométriquement, la topologie de la feuille d'univers est donnée par le quotient d'un tore de module $\tau = 2it$, par les involutions antiholomorphes $\begin{cases} z \to -\bar{z} : \\ z \to z + 2\pi(it+\frac{1}{2}) \end{cases}$ = ruban de Moebius



L'action sur les facteurs CP est donnée par $\Omega|ij\rangle = \varepsilon(\gamma_\Omega)_{ii'} (\gamma_\Omega^{-1})_{jj'} |j'i'\rangle$

$$\sum_{i,j} \langle ij|\Omega|ij\rangle = \operatorname{Tr}\left(\gamma_\Omega^T \gamma_\Omega^{-1}\right) = \xi N$$

$\gamma_\Omega = \xi \gamma_\Omega^T$, $\quad \xi = 1 \quad (SO(N))$

ou $\xi = -1 \quad (USp(2N))$

On obtient donc

$$\Lambda_{\text{moebius}} = i\xi N V_{26} \int_0^\infty \frac{dt}{4t} \frac{1}{(8\pi^2 l_s^2 t)^{13}} \frac{1}{[\theta_3(2it)\,\eta(2it)]^{12}}$$

$$= 2i\xi N \cdot \frac{2^{13} V_{26}}{4\pi (8\pi^2 l_s^2)^{13}} \int_0^\infty dl \left[\theta_3\left(\frac{2il}{\pi}\right) \eta\left(\frac{2il}{\pi}\right)\right]^{-12}$$

qui diverge dans la limite $l \to \infty$ comme

$$-48\, i\xi N \cdot \frac{2^{13} V_{26}}{4\pi (8\pi^2 l_s^2)^{13}} \int_0^\infty dl \qquad (+\text{ tachyon})$$

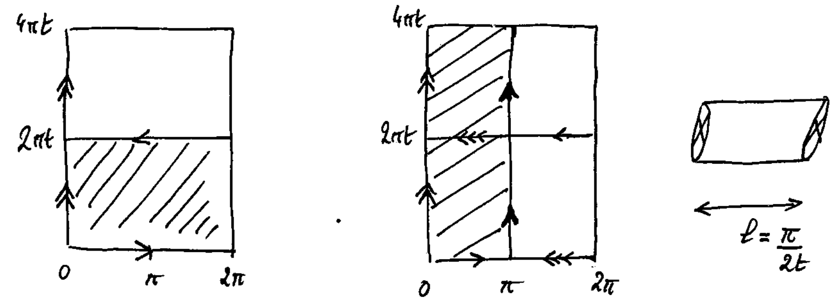
Cordes fermées non orientées

Dans le secteur des cordes fermées, Ω : $\begin{matrix}\sigma \to 2\pi-\sigma \\ \tau \to \tau\end{matrix}$ agit sur les oscillateurs bosoniques par

$$\Omega \alpha_k^\mu \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_k^\mu$$

$$\Omega \tilde{\alpha}_k^\mu \Omega^{-1} = \alpha_k^\mu$$

Géométriquement, la surface d'univers a la topologie d'une bouteille de Klein : quotient d'un tore de module $\tau = 2it$ par l'involution $z \to -\bar{z} + 2\pi i t$:



Boson libre : $\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \Omega\, e^{-2\pi t (L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12})} = \dfrac{V}{4\pi l_s \sqrt{t}\, \eta(2it)}$

Pour la corde bosonique fermée,

$$\Lambda_{Klein} = \frac{i V_{26}}{(2\pi l_s)^{26}} \int_0^\infty \frac{dt}{4t} \frac{1}{t^{13}\eta^{24}(2it)}$$

$$= \frac{i\, 2^{26} V_{26}}{4\pi (8\pi^2 l_s^2)^{13}} \int_0^\infty \eta^{-24}\left(\frac{il}{\pi}\right) dl$$

$$\sim 24 i \cdot \frac{2^{26} V_{26}}{4\pi (8\pi^2 l_s^2)^{13}} \int_0^\infty dl \qquad (+\text{ tachyon})$$

Compensation des tadpoles pour la corde bosonique non orientée :

$$\Lambda_{Klein} + \Lambda_{moebius} + \Lambda_{cylindre}$$

$$= i \frac{12 V_{26}}{2\pi (8\pi^2 l_s^2)^{13}} \left(2^{13} - \xi N\right)^2 \int_0^\infty dl$$

Ainsi, pour $\xi = 1$, $N = 2^{13}$ les tadpoles de cordes fermées de masse nulle se compensent ! On obtient une théorie de cordes ouvertes + fermées non orientées avec symétrie de jauge $SO(8192)$

Evidemment, cette théorie n'est pas viable en raison des tachyons de cordes ouvertes et fermées, mais on verra une manifestation du même phénomène pour la corde de type I.

Supercordes de type I :

$$\Lambda_{tore} = \frac{1}{2}\Lambda_{IIB} = \frac{iV_{10}}{8(2\pi l_s)^{10}} \int_{\mathcal{F}_0} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar\eta)^8} \cdot \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{1}{2}\sum_{\bar a,\bar b=0}^{1} (-1)^{\bar a+\bar b} \frac{\theta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \bar\theta^4\begin{bmatrix}\bar a\\\bar b\end{bmatrix}}{\eta^4\bar\eta^4}$$

$$\Lambda_{Klein} = \frac{iV_{10}}{(2\pi l_s)^{10}} \int_0^\infty \frac{dt}{8t} \frac{\sum_{a,b} (-1)^{a+b}\, \theta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(2it)}{t^5\,\eta^{12}(2it)}$$

$$\Lambda^{NS}_{Möbius} = -i\xi N V_{10} \int_0^\infty \frac{dt}{8t} \frac{\sum_{b=0,1} (-1)^b\, \hat\theta^4\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}(it)}{(8\pi^2 l_s^2 t)^5\, \hat\eta^{12}(it)}$$

where the $\wedge$ flips the signs in q expansion :

$$q^{\frac{\Delta - c}{24}} \sum_{n=0}^\infty a_n q^n \longrightarrow q^{\frac{\Delta-c}{24}} \sum_{n=0}^\infty a_n (-1)^n q^n$$

$$= -i\xi N V_{10} \int_0^\infty \frac{dt}{8t} \frac{\theta_2^4(2it)\,\theta_4^4(2it)}{(8\pi^2 l_s^2 t)^5\, \eta^8(2it)\,\theta_3^4(2it)}$$

$$\Lambda^{R}_{Möbius} = -i\varepsilon_R \xi N V_{10} \int_0^\infty \frac{dt}{8t} \frac{\sum_{b=0,1} (-1)^b\, \hat\theta^4\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix}(it)}{(8\pi^2 l_s^2 t)^5\, \hat\eta^{12}(it)}$$

$$= -i\varepsilon_R \xi N V_{10} \int_0^\infty \frac{dt}{8t} \frac{\theta_2^4(2it)\,\theta_4^4(2it)}{(8\pi^2 l_s^2 t)^5\, \eta^8(2it)\,\theta_3^4(2it)}$$

Les tadpoles de cordes fermées de masse nulle sont au total

$$T^{NS} = \left[N^2 - 2^6\xi N + (2^5)^2\right] \frac{iV_{10}}{16\pi(2\pi l_s)^{10}} \int_0^\infty dl$$

$$T^{R} = -\left[N^2 + 2^6\varepsilon_R\xi N + (2^5)^2\right] \frac{iV_{10}}{16\pi(2\pi l_s)^{10}} \int_0^\infty dl$$

Ils s'annulent pour $N=32$, $\xi = 1$, $\varepsilon_R = -1$ $\Rightarrow$ théorie de type I,

Exercices 6. Conformal field theory

1. Using the mode expansion and canonical commutation relations, compute the two-point function of fermions in the Ramond sector, on the sphere. Answer: $\langle S | \psi^i(z) \psi^j(w) | S \rangle$
$$= \delta^{ij} \frac{z+w}{2\sqrt{zw}} \cdot \frac{1}{z-w} .$$
Extract the vev of the stress energy tensor $\langle S | T(z) | S \rangle$ and conclude that the conformal dimension of S is $N/16$.

2. Consider a free massless scalar field X, with deformed stress energy tensor
$$T = -\frac{1}{\ell_s^2} :\partial X \partial X: + \frac{Q}{\ell_s \sqrt{2}} \partial^2 X$$
and usual propagator
$$\langle X(z,\bar z) X(w,\bar w) \rangle = -\frac{\ell_s^2}{2} \log |z-w|^2$$
Compute the central charge and dimension of the vertex operator $:e^{ipX}:$
Answers: $\quad c = 1 + 3Q^2 , \qquad \Delta(p) = \frac{\ell_s^2}{4} p^2 + iQ \frac{\ell_s p}{2\sqrt{2}}$

[Optional: show that the $u(1)$ symmetry associated to $J = \frac{i\sqrt{2}}{\ell_s} \partial X$ is anomalous, in the sense that
$$T(z) J(w) = \frac{iQ}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} + \text{reg.}$$
Conclude that $\langle \prod_{i=1}^{n} V_{p_i} \rangle = 0$ unless $i\sqrt{2}\ell_s \sum_{i=1}^{n} p_i = Q\chi$ on a Riemann surface of genus g.]

avec des bosons de jauge $SO(32)$ + partenaires fermioniques au niveau de masse nulle, avec susy $\mathcal{N}=1$

⚠ C'est le même spectre de masse nulle que la corde hétérotique $SO(32)$! on verra plus loin que les deux théories sont en fait équivalentes non perturbativement, $\quad g_s^{I} = 1/g_s^{het}$

Rk: on peut aussi choisir $\xi = 1 = \varepsilon_R$, $N=32$: les tadpoles de RR sont toujours annulés, mais $T^{NS} \neq 0$ et susy est brisée : bosons sont dans l'adjoint de $Sp(32)$, tandis que les fermions forment la rep. antisymétrique.

La cancellation des tadpoles de RR est quant à elle obligatoire ; le potentiel de 10 forme de type IIB aurait un couplage $\int T^{RR} C_{10}$ et pas de terme cinétique, ce qui impose $T^{RR} = 0$.

Exercices 7. cours " Supercordes et supersymétrie "

1. Vérifier que les fantômes b, c, β, γ satisfont à l'algèbre superconforme avec $\hat{c} = -10$.

2. Déterminer les premiers états excités dans les secteurs NS NS et RR des cordes de type IIA et IIB.

3. Déterminer la structure du lagrangien de SUGRA de type IIB dans le référentiel des cordes (les termes cinétiques suffisent). Vérifier que le couplage du dilaton aux champs de RR est comme attendu.

4. Calculer la fonction de partition $\mathrm{Tr}\, q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}$ d'un boson compact de rayon $l_s/\sqrt{2}$, et montrer qu'elle reproduit la fonction de partition de deux fermions de Majorana.

5. Calculer l'amplitude de diffusion de 3 gravitons en théorie de type II (A ou B), à l'ordre de la sphère. Attention : il faut choisir deux vertex dans la ghost picture -1, et un dans la "ghost picture" 0. Comparer (qualitativement) au développement de l'action de Einstein-Hilbert à l'ordre $O(h^3)$.

Exercices 8 : Amplitudes à 1 boucle

1. Les théories 0A et 0B sont décrites par l'amplitude à 1 boucle

$$\Lambda_{0B} = \frac{i V_{10}}{2 (2\pi l_s)^{10}} \int \frac{d^2\tau}{2\tau_2^2} \; \frac{|\chi_0|^2 + |\chi_v|^2 + |\chi_c|^2 + |\chi_s|^2}{(\sqrt{\tau_2}\, \eta \bar{\eta})^8}$$

$$\Lambda_{0A} = \quad " \qquad " \quad \frac{|\chi_0|^2 + |\chi_v|^2 + \chi_c \bar{\chi}_s + \bar{\chi}_c \chi_c}{(\sqrt{\tau_2}\, \eta \bar{\eta})^8}$$

Vérifier l'invariance modulaire, déterminer le spectre de masse nulle, montrer l'existence d'un tachyon

2. On donne la fonction de partition

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^{1} \frac{\bar{Z}_{E_8}\left[{h \atop g}\right]}{(\sqrt{\tau_2}\, \eta \bar{\eta})^8} \cdot \frac{1}{2} \sum (-1)^{a+b+ab+ag+bh+gh} \frac{\theta^4\left[{a \atop b}\right]}{\eta^4}$$

avec

$$\bar{Z}_{E_8}\left[{h \atop g}\right] = \frac{1}{2} \sum_{\gamma,\delta=0}^{1} (-1)^{\gamma g + \delta h} \frac{\bar{\theta}^8\left[{\gamma \atop \delta}\right]}{\bar{\eta}^8}$$

Montrer qu'elle décrit une corde hétérotique, de groupe de jauge $O(16) \times O(1$ sans tachyon.

Appendix C

Theta and other elliptic functions

In this appendix we will give definitions and various useful formulae pertaining to elliptic functions.

C.1 ϑ and related functions

Definition

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{a}{2}\right)^2} e^{2\pi i\left(v-\frac{b}{2}\right)\left(n-\frac{a}{2}\right)}\,, \tag{C.1}$$

where a, b are real and $q = e^{2\pi i\tau}$.

Periodicity properties

$$\vartheta\begin{bmatrix}a+2\\b\end{bmatrix}(v|\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v|\tau) \quad , \quad \vartheta\begin{bmatrix}a\\b+2\end{bmatrix}(v|\tau) = e^{i\pi a}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v|\tau)\,, \tag{C.2}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}-a\\-b\end{bmatrix}(v|\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(-v|\tau) \quad , \quad \vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(-v|\tau) = e^{i\pi ab}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v|\tau) \quad (a, b \in \mathbb{Z})\,. \tag{C.3}$$

In the usual Jacobi/Erderlyi notation we have $\vartheta_1 = \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\vartheta_2 = \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vartheta_3 = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\vartheta_4 = \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Behavior under modular transformations

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v|\tau+1) = e^{-\frac{i\pi}{4}a(a-2)}\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\a+b-1\end{bmatrix}(v|\tau)\,, \tag{C.4}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\left(\frac{v}{\tau}\Big| -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\; e^{\frac{i\pi}{2}ab + i\pi\frac{v^2}{\tau}}\,\vartheta\begin{bmatrix}b\\-a\end{bmatrix}(v|\tau)\,. \tag{C.5}$$

Product formulae

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}}\sin[\pi v]\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n e^{2\pi i v})(1-q^n e^{-2\pi i v})\,, \tag{C.6}$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}}\cos[\pi v]\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n e^{2\pi i v})(1+q^n e^{-2\pi i v})\,, \tag{C.7}$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-1/2}e^{2\pi i v})(1+q^{n-1/2}e^{-2\pi i v})\,, \tag{C.8}$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1/2}e^{2\pi i v})(1-q^{n-1/2}e^{-2\pi i v})\,. \tag{C.9}$$

We define the Dedekind η-function:

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,. \tag{C.10}$$

It is related to the v derivative of ϑ_1:

$$\frac{\partial}{\partial v}\vartheta_1(v)|_{v=0} \equiv \vartheta_1' = 2\pi\,\eta^3(\tau) \tag{C.11}$$

and satisfies

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\;\eta(\tau)\,. \tag{C.12}$$

v-periodicity formula

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\left(v + \frac{\epsilon_1}{2}\tau + \frac{\epsilon_2}{2}\Big|\tau\right) = e^{-\frac{i\pi\tau}{4}\epsilon_1^2 - \frac{i\pi\epsilon_1}{2}(2v-b) - \frac{i\pi}{2}\epsilon_1\epsilon_2}\,\vartheta\begin{bmatrix}a-\epsilon_1\\b-\epsilon_2\end{bmatrix}(v|\tau)\,. \tag{C.13}$$

Useful identities

$$\vartheta_2(0|\tau)\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau) = 2\,\eta^3\,, \tag{C.14}$$

$$\vartheta_2^4(v|\tau) - \vartheta_1^4(v|\tau) = \vartheta_3^4(v|\tau) - \vartheta_4^4(v|\tau)\,. \tag{C.15}$$

Duplication formulae

$$\vartheta_2(2\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\vartheta_3^2(\tau) - \vartheta_4^2(\tau)} \quad , \quad \vartheta_3(2\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\vartheta_3^2(\tau) + \vartheta_4^2(\tau)}\,, \tag{C.16}$$

$$\vartheta_4(2\tau) = \sqrt{\vartheta_3(\tau)\vartheta_4(\tau)} \quad , \quad \eta(2\tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_2(\tau)\,\eta(\tau)}{2}}\,. \tag{C.17}$$

Jacobi identity

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\prod_{i=1}^{4}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v_i) = -\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i')\,, \tag{C.18}$$

where

$$v_1' = \frac{1}{2}(-v_1+v_2+v_3+v_4) \quad , \quad v_2' = \frac{1}{2}(v_1-v_2+v_3+v_4)\,, \tag{C.19}$$

$$v_3' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3 + v_4) \quad , \quad v_4' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 - v_4)\,. \tag{C.20}$$

Using (C.18) and (C.13) we can show that

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\prod_{i=1}^{4}\vartheta[^{a+h_i}_{b+g_i}](v_i) = -\prod_{i=1}^{4}\vartheta[^{1-h_i}_{1-g_i}](v_i')\,. \tag{C.21}$$

The Jacobi identity (C.21) is valid only when $\sum_i h_i = \sum_i g_i = 0$. There is also a similar (IIA) identity

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b}\prod_{i=1}^{4}\vartheta[^a_b](v_i) = -\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i') + \prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i) \tag{C.22}$$

and

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b}\prod_{i=1}^{4}\vartheta[^{a+h_i}_{b+g_i}](v_i) = -\prod_{i=1}^{4}\vartheta[^{1-h_i}_{1-g_i}](v_i') + \prod_{i=1}^{4}\vartheta[^{1+h_i}_{1+g_i}](v_i)\,. \tag{C.23}$$

C.4 Poisson Resummation

A very useful tool to handle modular series on the torus is Poisson resummation. Consider a function $f(x)$ and its Fourier transform $\tilde{f}$ defined as

$$\tilde{f}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx\,. \tag{C.53}$$

Then, the Poisson resummation formula states that:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n)\,. \tag{C.54}$$

Choosing as f an appropriate Gaussian function we obtain:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi a n^2 + \pi b n} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{a}\left(n + i\frac{b}{2}\right)^2}, \tag{C.55}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\ e^{-\pi a n^2 + \pi b n} = -\frac{i}{\sqrt{a}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\left(n + i\frac{b}{2}\right)}{a}\ e^{-\frac{\pi}{a}\left(n + i\frac{b}{2}\right)^2}, \tag{C.56}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\ e^{-\pi a n^2 + \pi b n} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2\pi a} - \frac{\left(n + i\frac{b}{2}\right)^2}{a^2}\right]\ e^{-\frac{\pi}{a}\left(n + i\frac{b}{2}\right)^2}. \tag{C.57}$$

The multidimensional generalization is (repeated indices are summed over):

$$\sum_{m_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m_i m_j A_{ij} + \pi B_i m_i} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(m_k + iB_k/2)(A^{-1})_{kl}(m_l + iB_l/2)}\,. \tag{C.58}$$