B. PIOLINE
2008-09
M2.

0. Introduction

0.1. Le Modèle standard

A l'exception de la force de gravitation et de sa particule médiatrice le "graviton", toutes les interactions et particules fondamentales sont décrites par une théorie quantique des champs cohérente et amplement vérifiée par les expériences aux accélérateurs :

- les interactions fortes, faibles et électromagnétiques sont décrites par un groupe de jauge $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$
- les champs de matière sont décrits par des fermions de Weyl gauches, dans la représentation <u>chirale</u>

$$\underset{Q_L:\ u,d}{(3,2)_{1/6}} + \underset{d^c}{(\bar{3},1)_{1/3}} + \underset{u^c}{(\bar{3},1)_{-2/3}} + \underset{e,\nu}{(1,2)_{-1/2}} + \underset{e^c}{(1,1)_1}$$

dupliqué trois fois (ie en 3 générations)

$$\begin{matrix} u, & d, & e, & \nu_e \\ c, & s, & \mu, & \nu_\mu \\ t, & b, & \tau, & \nu_\tau \end{matrix}$$

- La symétrie $SU(2)_W \times U(1)_Y$ est brisée en $U(1)_{elec}$ spontanément, par la valeur moyenne d'un champ de Higgs $\phi : (2,1)_{-1/2}$, résultant d'un potentiel $V = -m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4$

- les fermions n'ont pas de masse de Dirac, mais reçoivent une masse par l'intermédiaire des couplages de Yukawa :

$$\underset{1/6}{Q_L}\ \underset{1/3}{D}\ \underset{-1/2}{\phi} + \underset{1/6}{Q_L}\ \underset{-2/3}{U}\ \underset{1/2}{\phi^*} + cc.$$

- Cette théorie est bien définie à très haute énergie, et très bien vérifiée expérimentalement jusqu'à environ 200 GeV. Seul le Higgs n'a pas encore été observé directement.

- le contenu en champs semble arbitraire, les valeurs des Yukawa sont disparates

$$\begin{matrix} m_\nu & \ll & m_{e^-} & \ll & m_t \\ 10^{-10}\,\text{GeV} & & 10^{-4}\,\text{GeV} & & 10^{2}\,\text{GeV} \end{matrix}$$

$\uparrow$ requiert des champs droits singlets de jauge, $(1,1)_0$

- L'évolution des couplages sous le groupe de renormalisation, en l'absence d'autres particules à plus haute énergie, suggère une unification des couplages autour de 10^{16} GeV, $= m_U$

mais les divergences quadratiques à la masse du Higgs semblent requérir un réglage fin :

$$\underset{100\,\text{GeV}}{m_H^2(\text{Weak})} = m_H^2(\text{unif}) + \#\left(m_U^2 - m_W^2\right)$$

$\rightarrow$ problème de la "hiérarchie de jauge"

- le modèle standard présente des symétries exactes "accidentelles" :

conservation du nombre baryonique $\rightarrow$ assurent la stabilité du proton
leptonique e, μ, τ

mais ces symétries ne correspondent à aucun principe de jauge...

- Les interactions gravitationnelles sont décrites classiquement par la Relativité générale, basée sur l'hypothèse d'invariance sous les difféomorphismes et le principe d'équivalence :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{G_N} + \Lambda_c \right)$$

↑ constante cosmologique, longtemps supposée nulle, récemment mesurée à $\Lambda_c^{1/4} = 10^{-3}\,\mathrm{eV} = 10^{-12}\,\mathrm{GeV}$

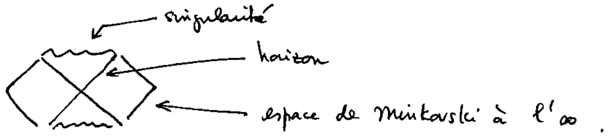
- On attend à ce que les effets quantiques de la gravitation se manifestent à des énergies de l'ordre de l'échelle de Planck

$$m_{P\ell} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 10^{19}\,\mathrm{GeV} = 10^{-35}\,\mathrm{m} = 2.10^{-8}\,\mathrm{kg}$$
$$= 10^{-44}\,\mathrm{s}$$

ou à des courbures $R \sim m_{P\ell}^2$

[Il ne serait pas consistant avec le principe d'incertitude de Heisenberg de garder la gravitation classique à haute énergie]

Ces énergies se rencontrent aux premiers instants de l'univers, ou au voisinage de la singularité au centre des trous noirs



- Cependant les tentatives de quantifier l'action d'Einstein Hilbert au voisinage de l'espace plat (ou de tout autre solution, eg. (anti) de Sitter) se heurtent au problème que la dimension de la constante de couplage $\kappa = \frac{1}{m_{P\ell}}$ est positive, i.e. les interactions gravitationnelles croissant à haute énergie.

la théorie de la RG est non renormalisable perturbativement, il faut ajuster un nombre infini de contre-termes pour éliminer les divergences UV à tous les ordres :

$$S = \int \sqrt{-g}\, d^4x \left(\frac{1}{\kappa^2} R + R^2 + \kappa^2 R^3 + \dots \right)$$

On peut néanmoins la traiter comme une théorie effective à basse énergie, mais il faut supposer l'existence d'une complétion UV, comme les bosons de jauge Z et W dans la théorie de Fermi.

Rk : d'autres approches sont possibles en principe :
- point fixe UV non trivial
- discrétisation : triangulations dynamiques : limite continue ?
- gravité de boucles et modèles de "quantum foam"

aucune n'est réellement convaincante...

0.2. Pourquoi le modèle Standard est incomplet :

- La gravité est traitée classiquement
- La masse du Higgs est quadratiquement instable
- la masse des neutrinos, $\sim 10^{-2}$ eV, n'est pas naturelle
- le contenu en champs semble arbitraire
- les valeurs des couplages de Yukawa aussi
- Pourquoi 3 générations ? pourquoi 4 dimensions ? etc.

préjugés esthétiques

Plus concrètement, les données récentes en cosmologie [fonds diffus, supernovae Ia, structures] pointent toutes vers la "recette cosmique"

4% matière hadronique visible
21% matière sombre, froide ← quel type de matière ?
[illegible] ← pourquoi $\Lambda^{1/4} \sim 10^{-3}$ eV [illegible]

0.3. Quelques idées théoriques pour la physique au delà du Modèle Standard

- Théories grande unifiées

le groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ provenant d'un groupe plus grand, spontanément brisé

ex $SU(5)$, matière dans $10 + \bar{5}$, Higgs dans 24

$SO(10)$ $\qquad 16 \qquad$ [compliqué]

les modèles "expliquent" le contenu en matière, prédisent l'unification des couplages $g_3 = g_2 = g_1$ à haute énergie, mais aussi une désintégration du proton souvent trop rapide

- Supersymétrie

C'est la manière la plus élégante d'expliquer / rendre techniquement naturelle la hiérarchie de jauge, en éliminant les divergences quadratiques scalaires.

C'est une symétrie globale dont les générateurs sont des variables de Grassmann (anti commutants)

l'exemple le plus simple : "SUSY N=1"

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sigma^\mu_{\alpha\beta} P_\mu$$

Q_α : spineur de Weyl gauche

$\sigma^\mu = (\mathbb{1}_2 ; \sigma^i)$

réalisé sur le lagrangien

$$S = \int d^4x \left(|\partial\phi|^2 + \psi \partial \psi \right)$$

ψ : fermion de Weyl

$$Q_\alpha \phi = \psi_\alpha$$

$$Q_\beta \psi_\alpha = i (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \phi \quad : \text{multiplet chiral}$$

Un autre exemple est celui du multiplet vectoriel (A_μ, λ)

Il est possible de dupliquer les supercharges pour obtenir une SUSY étendue, mais c'est en général incompatible avec la chiralité.

La SUSY relie le terme de masse du scalaire ϕ avec celui de ψ, mais si celui-ci est chiral, il ne peut recevoir de corrections !

(Plus généralement, les corrections quadratiquement divergentes sont éliminées, et ne restent que des corrections logarithmiques acceptables.)

De plus, l'énergie du vide est strictement 0 : $\Lambda_c = 0$!

La SUSY commute avec la sym de jauge :

fermion chiral $\longrightarrow$ multiplet chiral : squarks, sleptons

boson de jauge $\longrightarrow$ multiplet vectoriel : gaugino

Higgs $\longrightarrow$ multiplet chiral : higgsino

On obtient ainsi le MSSM : Minimal Supersym Standard Model.

Cependant, la SUSY doit être brisée car ces partenaires n'ont pas été vus :

~ spontanément

~ explicitement, mais par des termes de brisure douce qui preservent les bonnes propriétés UV

) autour de 1 TeV

Deux avantages :

- le partenaire supersymétrique le plus léger (LSP) est stable (dans les modèles avec R-symétrie) et un candidat naturel pour la matière noire
- l'unification des couplages devient beaucoup plus précise à 10^{16} GeV, dans le cas du MSSM.

Hélas :

- les paramètres du Lagrangien sont encore plus nombreux
- la constante cosmologique est de l'ordre de 10^3 GeV, bien trop grande !!

– La supergravité

Elle consiste à rendre locale la supersymétrie.

Il faut alors introduire une particule de spin $3/2$, le gravitino ψ^{μ} (ou particule de Rarita Schwinger), partenaire SUSY du graviton, et rajouter un couplage $\psi^{\mu} J_{\mu}^{S}$ où J_{μ}^{S} est le supercourant.

Les propriétés UV sont améliorées mais les divergences UV restent (sauf peut-être pour la SUGRA $N=8, D=4$, qui est la théorie la plus SUSY que l'on puisse écrire).

Une possibilité intéressante est la brisure de SUSY "médiée par la gravité" :

MSSM	$\oplus$	Secteur caché
secteur visible	couplage grav.	brisé SUSY spontanément.

La brisure de SUSY dans le secteur caché à $M \sim 10^{11}$ GeV (échelle intermédiaire) conduit à des termes de brisure douce dans le MSSM, d'ordre $m_{3/2} = \dfrac{M^2}{M_P} \sim 1$ TeV.

– Les dimensions supplémentaires, à la Kaluza Klein

Rela. Generale en $D=5$ sur $M_4 \times S_1$ $\longrightarrow$ Rel. generale en $D=4$
$\oplus$ electromag
$\oplus$ scalaire de masse nulle

+ tour d'état massifs, de masse $m = \dfrac{N}{R}$

Ou plus general^{t} sur $M_4 \times M_d$: chaque isométrie continue de M_d donne lieu à un boson de jauge.

Difficulté :
- pas de chiralité en dimension 4 en général.
- la gravité en dim > 4 n'est pas ~~plus~~ mieux définie qu'en $D=4$!

– Dimensions supplementaires et univers branaires

On peut supposer que la gravité se propage en dim. $4+d+d'$ mais que les champs du modèle Standard sont confinés en dimension $4+d$: la masse de Planck $M_P \sim 10^{19}$ GeV est reliée à la masse de Planck en dimension superieure par

$$M_P^2 = M^{2+d+d'} V_d V_{d'}$$

La limite sur $V_{d'}$ est maintenant beaucoup plus faible : $V_{d'} < (0{,}1\,\text{mm})^{d'}$

A courte distance, la gravité devient $4+d'$ dimensionnelle.

De telles dimensions supplémentaires seraient observables par des experiences de type Cavendish ...

Rk Il est même possible de localiser le graviton par le mécanisme de Randall et Sundrum, en utilisant des géométries tordues du type $(-dt^2 + dx^2) e^{-k|y|} + dy^2$

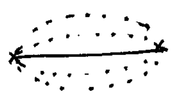
0.4. La théorie des cordes, en bref

- La théorie des cordes est une théorie quantique cohérente qui incorpore (et dans certains cas est à l'origine de) ces idées théoriques.
  Elle est essentiellement canonique (même si, comme la RG d'Einstein, elle admet une variété de solutions différentes) et ne contient aucun paramètre ajustable autre qu'une échelle de longueur ℓ_s.
- L'idée de base est de remplacer la notion de particule ponctuelle relativiste par une corde vibrante de tension $T = \frac{1}{2\pi \ell_s^2}$ dont les différents états d'excitations correspondent à autant de particules différents :

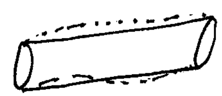
$$M^2 \sim \frac{N}{\ell_s^2}$$

N=0 N=1 N>1...

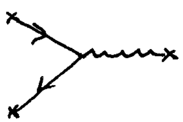
- Tout comme la particule décrit une ligne d'univers, la corde décrit une surface d'univers. En première quantification, on somme sur les surfaces d'univers, i.e. sur les plongements $X^\mu(\sigma,\tau)$ de la surface d'univers dans l'espace-cible :

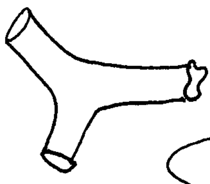


$$\int DX^\mu(\tau)\, e^{\int \left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)^2 d\tau}$$



$$\int DX^\mu(\tau\sigma)\, e^{\frac{1}{2\pi \ell_s^2}\int \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\tau}\wedge\frac{dX^\nu}{d\sigma}}\, d\tau d\sigma}$$



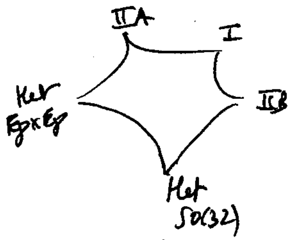


ou équivalent

- Plus généralement, l'action de feuille d'univers peut être remplacé par une théorie conforme bidimensionnelle. – CFT
  En particulier, on a intérêt à prendre une théorie SUSY $\longrightarrow$ supercorde.
- La théorie des (super) cordes prédit l'existence d'une particule de spin 2, et la dimension totale de l'espace temps $D=10$.
- Les amplitudes de diffusions sont finies dans l'UV, car il n'y a plus d'interaction ponctuelle [technique, ceci est dû à la propriété d'invariance modulaire de la CFT]
- Aux énergies $\ll \frac{1}{\ell_s}$, seuls les modes de masse nulle persistent, et peuvent être décrits par une "lagrangien effectif de basse énergie" qui prend en compte l'effet de la propagation / échange de tous les états massifs. Pour les supercordes en $D=10$, c'est une théorie de supergravité !
- La théorie des cordes en première quantification est formulé au voisinage d'un vide, qui peut être $\mathbb{R}^{1,D-1}$, ou $\mathbb{R}^{1,3}\times X_6$ pour un X_6 bien choisi : compactification à la Kaluza Klein
- Elle peut aussi être formulée aux voisinage de certains défauts appelés D-branes, où les extrémités des cordes ouvertes sont astreintes à s'attacher : univers branaires !
- Les symétries de jauge résultent directement des symétries globales sur la feuille d'univers : symétries à la Kaluza Klein, constructions hétérotiques, ...
- Une théorie de seconde quantification n'est toujours pas disponible : les questions de production de particules, effets non perturbatifs, brisure spontanée de sym / choix du vide sont difficiles à analyser.

- Néanmoins il ne fait pas de doute que la théorie existe indépendamment du choix de champ de fond : l'existence de gravitons permet de relier des vides différents

- la théorie effective de basse énergie et l'existence des D-branes donne un accès (limité) au régime non perturbatif, et suggère l'équivalence des 5 constructions perturbatives :



- la multiplicité des solutions compromet (à ce jour) la prédictivité de la théorie des cordes : – existence des modules (déterminant la forme de la variété X_6 interne) – paramètres discrets de flux sur X_6

Mais c'est peut-être un atout pour résoudre le pb de la constante cosmologique de manière anthropique.

- Indépt de son intérêt potentiel comme "théorie de tout" (ou de rien), la théorie des cordes est aussi un outil très puissant d'analyse des théories de jauge à fort couplage (et N grand) : via la correspondance AdS/CFT $\rightsquigarrow$ applications aux quarks gluons plasma / peut être en matière condensée...

$\longrightarrow$ Il faut s'atteler à la tâche maintenant !

Théorie des cordes – Introduction – exercices

1. Supersymétrie

On considère le lagrangien pour un boson complexe $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ et un fermion de Majorana ψ libres, de masse nulle :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi$$

Vérifier que l'action est invariante sous δ_ε agissant selon

$$\delta_\varepsilon \phi_1 = i\bar{\varepsilon}\psi$$
$$\delta_\varepsilon \phi_2 = \bar{\varepsilon}\gamma_5\psi$$
$$\delta_\varepsilon \psi = \gamma_\mu(\partial_\mu\phi_1 - i\gamma_5\partial_\mu\phi_2)\varepsilon$$

où ε est un spineur de Majorana (anticommutant, indépt de x^μ)

Calculer le supercourant $S^\varepsilon_\mu \equiv \bar{\varepsilon}_\alpha S^\alpha_\mu$ associé à cette symétrie, et la charge $S^\varepsilon = \bar{\varepsilon}_\alpha S^\alpha$ associée.

Montrer que
$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = -2i(\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2)\partial_\mu$$
ou, de manière équivalente,
$$\{S_\alpha, S_\beta\} = 2i\,(C\gamma)^\mu_{\alpha\beta}\,P_\mu$$
où $\{A,B\} = AB + BA$ est l'anticommutateur.

Indication : on utilisera l'identité de Fierz :
$$(\bar{\varepsilon}_1\psi)\varepsilon_2 = -\frac{1}{4}\sum_A(\bar{\varepsilon}_1\gamma_A\varepsilon_2)\gamma_A\psi$$
où $\gamma_A \in \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu}\}$ est une base orthonormée de l'alg de Clifford, $\mathrm{Tr}(\gamma^A\gamma^B) = 4\delta$