

Nom :

Examen de Statistiques Septembre 2005

1 Premier problème

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières strictement positifs, telle que

$$\begin{aligned} P(X = x) &= 1/a - 1/b & \text{si } 1 \leq x \leq ab \\ P(X = x) &= 0 & \text{si } x > ab \end{aligned}$$

1. Quelle(s) condition(s) doivent vérifier a et b pour que la suite de terme général $p(x) = P(X = x)$ puisse être considérée comme la loi de probabilité de X ?
2. Déterminer $F(Y) \equiv P(X \leq Y)$.
3. Donner une expression pour la valeur d'expectation de X en fonction de a et b .

2 Deuxième problème

Une compagnie d'assurances envisage de créer des polices d'assurances individuelles contre un certain type d'accident. Une enquête préalable du service statistique a permis d'estimer qu'au cours d'une année chaque personne a une chance sur cinq mille environ d'être victime d'un accident couvert par ce type de police, et que la compagnie pourra vendre en moyenne dix mille polices d'assurances de ce type par an.

1. Déterminer la probabilité que le nombre d'accidentés ne dépasse pas trois par an (Chiffre au-delà duquel l'opération n'est pas considérée comme rentable.)
2. Donner un résultat numérique approché. Explique l'approximation utilisée. (On donne $e^{-3} = 0.135$.)

3 Troisième problème

Soient $X_i, i = 1, \dots, n$, n variables aléatoires continues indépendantes et distribuées selon la même loi traingulaire :

$$\begin{aligned} p(X_i) &= a + bX_i && \text{si } X_i \in [0, 1] , \\ p(X_i) &= 0 && \text{autrement .} \end{aligned}$$

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
2. Calculer la valeur d'expectation de Y .
3. Calculer la variance de Y .

4 Quatrième problème

Le directeur d'une chaîne de supermarchés suppose qu'une marque de café est vendue de la même façon dans cinq magasins appartenant à la chaîne.

On constate que pendant une semaine, dans chaque magasin, qu'on appelle 1, 2, ... 5, on vend les nombres des boîtes donnés dans le tableau ci-dessous :

Le magasin	1	2	3	4	5	(1)
Le nombre de boîtes vendues	43	29	52	34	48	

Déterminer si, à un niveau de confiance de 90%, le directeur peut accepter son hypothèse.

Expliquer le raisonnement utilisé pour arriver à la conclusion.