TD1 : Outils mathématiques pour la physique

1. **Dimensions.**

   (a) Donner les dimensions des grandeurs suivantes : un angle θ et son cosinus ; une vitesse $\overrightarrow{v}$; une accélération $\overrightarrow{a}$; une force $\overrightarrow{F}$; l'énergie cinétique $E_c = mv^2/2$ d'une masse m ; l'énergie potentielle d'une masse m à hauteur h, $E_p = mgh$, ou g est le module de l'accélération due à la gravité.

   (b) Montrer que les unités suivantes correspondent à une seule et même dimension : $N\,m$, kWh, $g\,cm^2\,s^{-2}$. Donner les noms des systèmes d'unités correspondants. Par quels facteurs passe-t-on d'un système d'unités à l'autre ?

2. **Homogénéité d'une expression.**

   (a) On exprime la vitesse d'un corps par l'équation $v = At^3 + Bt^2$ où t est un temps. Quels sont les dimensions de A et B ? Donnez ses unités SI.

   (b) Trois étudiants établissent les équations suivantes dans lesquelles x désigne la distance parcourue, a l'accélération, t le temps et l'indice 0 indique que l'on considère la quantité à l'instant initiel.

   $$\text{(a) } x = vt^2 \;, \qquad \text{(b) } x = v_0 t + at^2/2 \;, \qquad \text{(c) } x = x_0 + v_0 t + 2at^2 \;.$$

   Parmis ces équations, lesquelles sont possibles ?

   (c) La pulsation du mouvement d'un pendule simple de longueur ℓ est $\omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, celle du mouvement d'oscillation d'une masse attachée à l'extrème libre d'un ressort de raideur k est $\omega_2 = \sqrt{k/m}$. On utilisera que le module de la force exercée par le ressort est donnée par la loi de Hooke $F = kx$. Vérifier l'homogénéité de ces formules.

   (d) Dire pour chacune des formules suivantes si elles sont correctes ou fausses. Elles donneraient l'angle θ par rapport à la verticale, dont s'écarte un pendule conique de longueur ℓ, de masse m, tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical :

   $$\cos\theta = \frac{mg}{\omega^2 L} \;, \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \;, \qquad \sin\theta = \frac{mg}{\omega^2 L} \;,$$

   g étant l'accélération de la pesanteur.

3. **Analyse dimensionnelle.**

   Une force est homogène au produit d'une masse par une accélération et son unité SI est le Newton (N). Exprimez-le en fonction des unités fondamentales.

   (a) Force gravitationnelle.

   Le module de la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 distant de d est donnée par

   $$F = G\ \frac{m_1 m_2}{d^2}\ .$$

   Déduisez les dimensions de G ainsi que ses unités SI.

   Les planètes tournent au tour du soleil dans un temps τ. Ce temps est relié à la distance R de la planète au soleil, à la masse m_S du soleil et à la constante G. Trouvez la relation plus simple possible entre ces variables.

   L'altitude h d'un satellite sur une orbite circulaire de rayon R autour de la Terre en fonction de la période T et de l'intensité de l'accélération de la pesanteur g au niveau du sol est donnée par

   $$h = \frac{T^\alpha R^\beta g^\gamma}{(4\pi^2)^{3/2}} - R\ . \tag{1}$$

   Trouvez α, β, γ.

   (b) Le débit Q d'un fluide dans un tube cylindrique de longueur l et de rayon a, soumis à une différence de pression Δp, est donné par la loi de Poiseuille :

   $$Q = \frac{\pi}{8\eta}\Big(\frac{\Delta p}{l}\Big)a^4$$

   où η est la viscosité de ce fluide.

   Sachant que le débit est le volume de fluide qui traverse une section droite par unité de temps ($Q = dV/dt$), et que la pression est le rapport entre une force pressante (normale à la surface) et la surface sur laquelle cette force s'exerce ($p = F/S$), déterminer les dimensions d'un débit et d'une pression.

   Déduire la dimension de η et son unité.

   De combien augmente le débit si le rayon du tube est multiplié par 2 ?

   ρ désignant la masse volumique du fluide et v sa vitesse typique, trouver une combinaison simple $R_e = \rho^\alpha v^\beta a^\gamma \eta^\delta$ qui soit sans dimension (parmi les divers choix possibles, on prendra $\alpha = 1$). On obtient ainsi un nombre caractéristique appelé nombre de Reynolds.

4. **Ordres de grandeur.**

   La Terre est assimilée à une boule parfaite de rayon $R = 6378$ km.

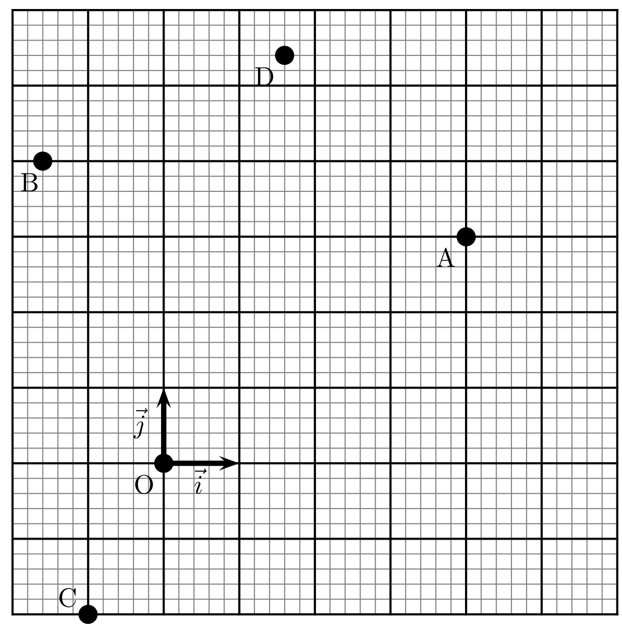
   (a) Sans utiliser la calculatrice donner une estimation de son périmètre P, de sa surface S et de son volume V (arrondir la valeur du rayon afin de faire des calculs simples).

(b) Calculer de même la masse volumique moyenne de la Terre ($\rho = M/V$) sachant que sa masse vaut $M = 5.98\,10^{24}$ kg.

(c) En utilisant la réponse à la dernière question de l'exercice 3 (a) de la partie « Analyse dimensionnelle » et en sachant que la Lune tourne autour de la terre en 28 jours, déterminer la distance Terre-Lune.

5. **Vecteurs et produit scalaire.**

(a) Soit le repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et 4 points A, B, C et D :



i. Déterminer les coordonnées de ces 4 points.

ii. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

iii. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

iv. Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Qu'en déduire du triangle (ACD) ?

(b) Propriétés du produit scalaire

i. Les positions des trois masses m_A, m_B et m_C dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont :

$$A : (-3, -2, -5) \qquad B : (1, 1, -2) \quad \text{et} \quad C : (6, -4, -15)\,.$$

Déterminer les positions des masses m_A et m_B relatives à la masse m_C

ii. Deux bateux se déplacent en ligne droite dans les directions specifiées par les vecteurs

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$$

Calculer l'angle formé par les deux trajectoires.

(c) On définit les vecteurs suivants dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé :

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{a}{2}\overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{OM_2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} - \frac{a}{2}\overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{OM_3} = -b\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + b\sqrt{2}\,\overrightarrow{j} \ ,$$

avec a et b deux réels positifs.

i. Tracer ces vecteurs dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

ii. Quels sont les angles qu'ils forment entre eux et avec l'axe Ox ?

iii. Quelles sont leurs normes ?

iv. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. Donner leurs composantes dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Etablir également l'expression de leur norme.

v. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.

(d) Dérivée d'un vecteur.
Un point M se déplace dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Ses coordonnées en fonction du temps sont données par les fonctions suivantes :

$$x(t) = 3t^2 + 4 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{1+t^2} \ .$$

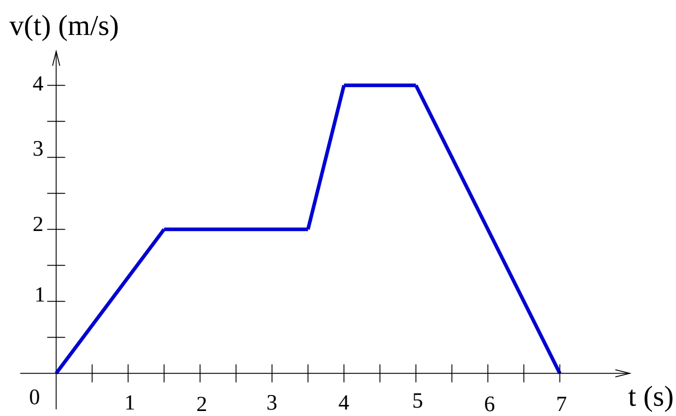
i. Donner l'expression du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps.

ii. Calculer la vitesse $\overrightarrow{v}$ du point M en fonction du temps.

TD2 : Cinematique

1. Un avion A vole vers le Nord à la vitesse $\vec{v}_A$, et un avion B vole vers le Nord-Est à la vitesse $\vec{v}_B$.
   (a) Faire un schéma.
   (b) Calculer la vitesse relative $\vec{v}_{A/B}$ de A par rapport à B.
   Application numérique : $v_A = 950$ km/h, $v_B = 700$ km/h.

2. La figure ci-dessous représente la vitesse $v(t)$ d'un point M en fonction du temps.



   (a) De quelle distance s'est-il déplacé pendant la troisième seconde de son parcours ?
   (b) À quels instants a-t-il la plus grande et la plus petite vitesse ?
   (c) A-t-il pendant un certain intervalle de temps une vitesse constante non nulle ?

3. On considère un navire immobile. On lâche sans vitesse initiale une bille du haut du mat de hauteur h : calculer où et quand la bille touche le pont du navire.
   Le navire a désormais une vitesse constante $\vec{v}_0$ horizontale. Même question (la Terre est considérée comme un reféntiel galiléen).

4. Un point matériel se déplace le long d'une droite avec une accélération de module $a = (4 - t^2/s^2)\, m/s^2$ où t est un temps mesuré en secondes (s). Déterminer l'expression de la vitesse et du déplacement en fonction du temps, sachant qu'à l'instant $t = 3\,s$, $v = 2\,m/s$ et $x = 9\,m$.

5. A l'instant $t = 0\ s$, un train démarre avec une accélération de module $a = 0.4\ m/s^2$. Ensuite l'accélération décroît linéairement et s'annule à l'instant t_1 où le train atteint une vitesse de module $v = 90\ km/h$. Déterminer la distance parcourue par le train dans l'intervalle $\Delta t = t_1$.

6. Un point matériel M de masse m est lancé à l'instant $t = 0$ de l'origine O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec le sol horizontal. On choisit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ galiléen.
   (a) Les frottements étant négligés, calculer les coordonnées de M à l'instant t.
   (b) Déterminer la trajectoire de M et la valeur de θ pour que la portée soit maximale.

7. De votre fenêtre vous voyez tomber un pot de fleurs. Vous extimez qu'il met un dixième de seconde pour passer devant la fenêtre haute de $1,40\ m$. Quelle est sa vitesse en bas de la fenêtre et de quelle hauteur provient-il ?

8. Une particule se déplace sur une trajectoire parabolique d'équation $y = x^2$ avec une vitesse $v_x = 3\,m/s$ constante. Calculer le module et la direction de la vitesse et de l'accélération de la particule quand elle se trouve au point $x = 2/3\,m$.

9. Un projectile est lancé à l'instant $t = 0$ du point origine O avec une vitesse initiale faisant un angle de $35°$ avec le sol horizontal. Il frappe le sol à une distance $d = 4\,km$ de l'origine O. Calculer
   (a) sa vitesse initiale ;
   (b) le temps de vol du projectile ;
   (c) l'altitude maximale atteinte par le projectile ;
   (d) la vitesse du projectile au point d'altitude maximale.

10. Un fusil lance un projectile avec une vitesse de $650\,m/s$. Déterminer l'angle avec lequel le projectile frappe une cible placée à une distance de $450\,m$ du fusil et à une hauteur de $18\ m$.

11. Une pierre est lâchée depuis le haut d'un immeuble. On entend le bruit de la pierre frappant le sol $5\,s$ plus tard. La vitesse du son étant de $341\,m/s$, calculer la hauteur de l'immeuble.

12. Un bombardier vole horizontalement à une altitude de $1.2\,km$ avec une vitesse de $180\,km/h$.
    (a) Combien de temps avant d'être à la verticale de son objectif doit-il lâcher sa bombe ?
    (b) Quelle est la vitesse de la bombe quand elle touche le sol ?

(c) Quel angle la vitesse de la bombe fait-elle lorsqu'elle touche le sol ?

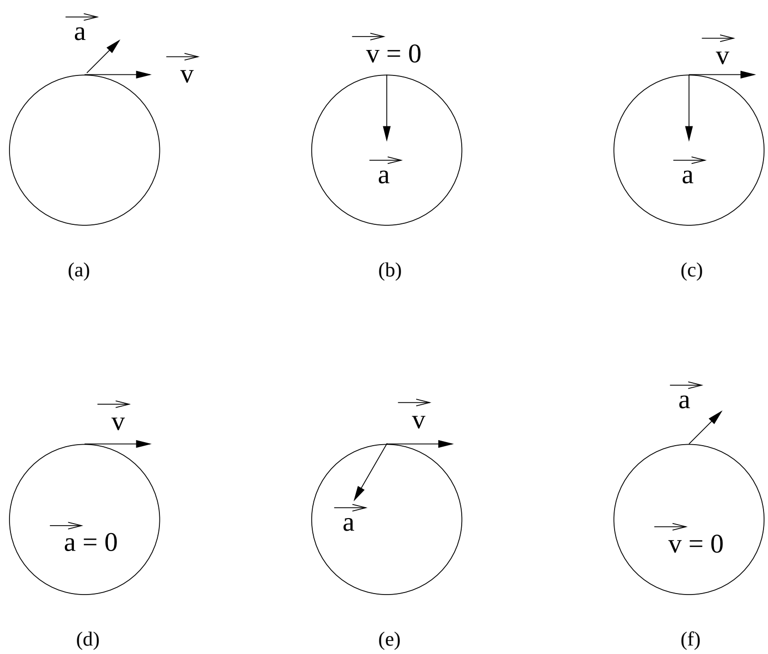
(d) Quelle est la distance horizontale couverte par la bombe ?

13. Un point matériel se déplace sur une trajectoire circulaire avec la loi horaire

$$S(t) = [(t/s)^3 + 2(t/s)^2]\ m\,,$$

où $S(t)$ est l'arc de cercle parcouru au temps t. S a les dimensions d'une distance et il est mesuré à partir de l'axe des x positifs. Sachant que à l'intant $t = 2\ s$ le module de l'accélération vaut $a = 16\sqrt{2}\ m/s$, calculer le rayon du circle.

14. Sur la figure ci-dessous on a représenté, pour divers mouvements circulaires, les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$, *au même instant*. Quels sont les cas possibles et ceux impossibles ? Pourquoi ?



15. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la trajectoire du point M est donnée par

$$x = a\cos(\omega t)$$
$$y = b\sin(\omega t)$$

avec ω positif.

(a) Donner l'équation cartésienne de la trajectoire. Tracer son allure et donner le sens de parcours. Comment s'appelle une telle courbe ?

(b) Calculer les coordonnées de la vitesse $\overrightarrow{v}$ et de l'accélération $\overrightarrow{a}$ du point M dans la base cartésienne $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et dans la base polaire $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta)$. Montrer que l'accélération est centrale, c'est à dire qu'à tout instant $\overrightarrow{a}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

(c) Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles l'accélération est normale à la trajectoire ?

TD3 : Dynamique

1. Équilibre

(a) Un point matériel est soumis aux forces :

$$\vec{F}_1 = 2\vec{i} + a\vec{j} - 3\vec{k}\,, \qquad \vec{F}_2 = 5\vec{i} + c\vec{j} + b\vec{k}\,,$$
$$\vec{F}_3 = b\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}\,, \qquad \vec{F}_4 = c\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}\,.$$

Déterminer les constantes a, b, c, telles que le point soit en équilibre.

(b) Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, que peut-on dire de la force totale sur une charge $(+q)$, placée sur l'axe des y, exercée par deux charges égales $(-q)$, situées sur l'axe des x symétriquement par rapport à O ?

(c) Une charge de masse m est portée par deux cordes. Quelle est la tension de chaque corde ?

(d) Une charge de masse m est soutenue par une corde qui passe par 4 poulies comme dans la figure. Quelle force doit-t-on exercer pour maintenir le système à l'équilibre ?

2. Dynamique

(a) Un corps de masse $m = 1\ kg$ est lâché à l'instant $t = 0$ d'une hauteur $h = 24\ m$ du sol, avec une vitesse initiale, verticale, dirigée vers le bas, de module $v = 20\ m/s$. Le corps arrive au sol au bout d'une seconde. Calculer le module de la force moyenne dûe à la résistance de l'air.

(b) Une masse de 0.2 kg monte sur un plan qui forme un angle de 30° avec l'horizontale. En bas du plan sa vitesse est $\vec{v}_0 = 12\ \vec{i}\, m/s$. Le coefficient de frottement entre le plan et la masse est 0.16. Déterminer

i. la distance parcourue par la masse le long du plan incliné avant de s'arréter ;

ii. si la masse reviens en bas du plan et, dans ce cas, sa vitesse.

(c) Une pierre de masse $0.4\,kg$ est liée à l'extrémité d'une corde de $0,8\,m$ de long. La pierre tourne sur une trajectoire circulaire dans le plan horizontal avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta} = v/R = 8\,rad/s$.

i. Déterminer la force que la corde exerce sur la pierre.

ii. La corde se casse quand sa tension est supérieure à $50\,N$. Quelle est la vitesse angulaire maximum de la pierre ?

(d) Une courbe d'une autoroute est conçue pour un trafic avec vitesse de 60 km/h.

i. Quel est le coefficient de frottement minimal pour que les voitures ne dérapent pas à cette vitesse ?

ii. Si on veut pouvoir négliger les frottements, quel est l'angle minimal dont on doit surélever la courbe ?

(e) Dans les musées des sciences on trouve souvent une attraction appelée rotor. Il s'agit d'un grand cilindre où les gens peuvent entrer. Une fois dédans, ils restent débout avec leur dos appuyé sur la parois du cilindre, comme dans la Fig. 1. Le cilindre est alors mis en rotation et, une certaine vitesse atteinte, le sol disparait. Pour un cilindre de rayon $r = 2\ m$, si le coefficient de frottement statique entre la parois du cilindre et les tissus des vétements est $\mu_s = 0.40$, quelle doit être la vitesse du rotor pour que les gens ne tombent pas ?

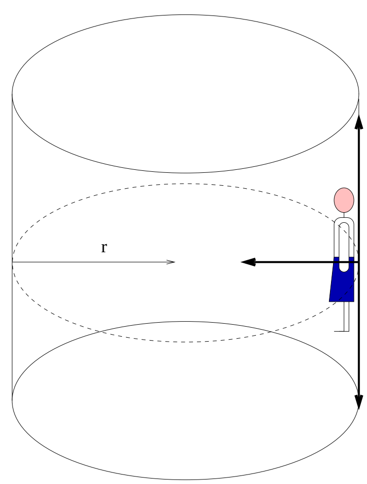


FIGURE 1 – Schéma pour l'ex. 2e.

(f) Une masse m, attachée à l'extrémité d'une corde, est faite tourner sur une trajectoire circulaire, de rayon R, dans le plan vertical. Déterminer la valeur du module de la vitesse en dessous de laquelle la tension de la corde est nulle quand la masse se trouve au sommet du circle.

3. Oscillations

(a) Un point matériel oscille sur une droite, avec un mouvement harmonique simple, autour du point $x = 0$. A $t = 0$, son déplacement est $x = 0.4\ cm$ et sa vitesse est nulle. Si la fréquence du mouvement est 25 Hz, déterminer

i. la période et la pulsation,

ii. le déplacement et la vitesse du point matériel en fonction du temps,

iii. l'amplitude maximale de l'oscillation,

iv. la vitesse et l'accélération maximales.

(b) Le module de la force d'interaction entre deux atomes dans une molécule biatomique peut être répresenté par

$$F(r) = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}$$

où a et b sont deux constantes positives et r est la distance entre les atomes.

i. Tracer le graphe de F en fonction de r.

ii. Montrer que la distance d'équilibre est $r_0 = b/a$.

iii. Pour des petites oscillations autour de la position d'équilibre, le mouvement est harmonique simple. Montrer que la constante élastique est a^4/b^3 et déterminer la période du mouvement.

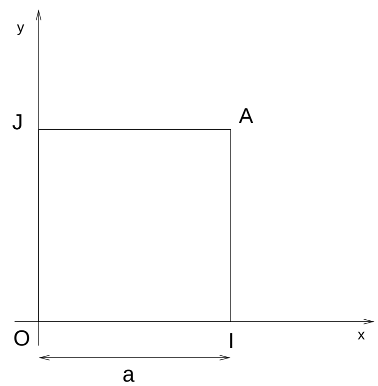
(c) Un ressort de masse négligéable et constante de raideur $k = 100\ N/m$ est suspendu par une des extrémités. A l'autre bout est fixée une masse $m = 4\ kg$. Quand la longueur du ressort coincide avec celle à repos, la masse m a une vitesse dirigée vers le haut et module $v_0 = 1.5\ m/s$. Déterminer l'amplitude $x_{\max}$ du mouvement oscillatoire de la masse m sous l'action du poids et de la force de rappel élastique du ressort.

TD4 : Travail et énergie

1. Soient les forces

$$\vec{F}_1 = b(x\,\vec{i} + y\,\vec{j})\ , \qquad \vec{F}_2 = b(-y\,\vec{i} + x\,\vec{j})\ .$$

où b est une constante réele. Calculer le travail le long les chemins suivants :
   (a) Un cercle de rayon R et de centre O décrit dans le sens positif.
   (b) Les chemins OIA, OJA et OA, où OIAJ est un carré de coté a comme dans la figure ci-dessous.



Déterminer si les deux forces sont conservatives.

2. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la trajectoire du point M est donnée par

$$x = a\cos(\omega t)\ , \qquad y = b\sin(\omega t)\ .$$

   (a) Calculer l'énergie cinétique E_c du mobile M aux points A et B où il se trouve respectivement aux instants $t = 0$ et $t = \pi/(2\omega)$.
   (b) Calculer le travail W fourni par la force qui génère le mouvement quand le point M passe de A à B. Dans quel cas ce travail est-il moteur ou résistant ?
   (c) Que se passe-t-il lorsque $a = b$?
   (d) Montrer que le travail total effectué en faisant faire au point M une fois le tour complet de l'ellipse est nul.

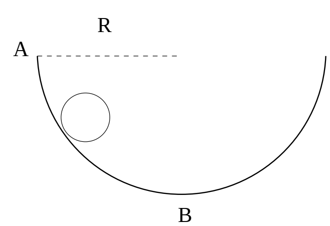
3. Un palet de masse $m = 3\ kg$ est tiré à une vitesse constante pour une distance $d = 4\,m$ le long d'un plan horizontal par une corde qui exerce une force constante de module $F = 7\ N$, formant un angle de $30°$ avec l'horizontale. Calculer

(a) le travail total fait sur le palet ;
(b) le travail fait sur le palet par la corde ;
(c) le travail fait sur le palet par la force de frottement ;
(d) le coefficient de frottement.

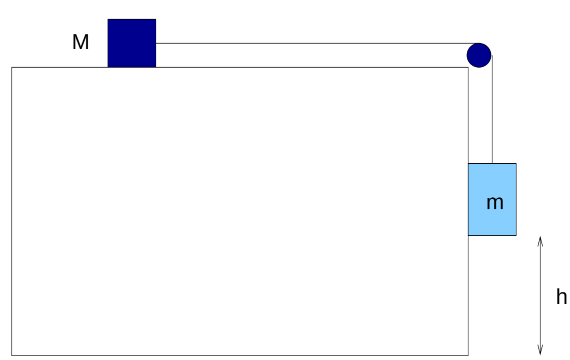
4. Une luge de masse $m = 20\,kg$ descend une colline, partant d'une altitude de $20\,m$ et avec une vitesse initiale nulle. Quand elle atteint le bas de la colline sa vitesse est de 16 m/s. Calculer la perte d'energie due au frottement.

5. Une bombe de masse $m = 10\,kg$ est lancée d'un avion qui a une vitesse $\vec{v} = 270\,km/h$ et qui se trouve à une hauteur de $100\,m$. Calculer
   (a) l'énergie cinétique et potentielle initiales de la bombe ;
   (b) l'énergie cinétique et potentielle $10\,s$ aprés le lancement ;
   (c) sa vitesse quand elle arrive au sol.

6. Une bille assimilable à un point matériel de masse m, peut se déplacer à l'intérieur d'une demi-sphère de rayon $R = 1\ m$. On lâche la bille sans vitesse initiale du point A et elle parvient en B avec une vitesse de module $v = 4\ m/s$. Montrer que la bille est soumise à des forces de frottement. Calculer le travail de ces forces et en déduire la valeur du coefficient de frottement μ (le coefficient de frottement solide est le rapport de la force de frottement à la réaction de la piste sur l'objet). On prendra $g = 9,8\ m/s^2$.



7. Un palet de masse M est posé sur un support horizontal. Il est attaché par un fil (via une poulie) à une bouteille de masse m, suspendue au-dessus du sol à une hauteur h (voir figure).



(a) On lâche le palet. Quelle sera sa vitesse au moment où la bouteille touche le sol ? On fera l'hypothèse que pendant le déplacement du palet, la composante horizontale de la force exercée par le support sur le palet (force de frottement) est proportionnelle à la composante verticale de cette même force. Le coefficient de proportionalité, dit coefficient de frottement dynamique, sera noté k.

(b) Une fois la bouteille au sol, quelle distance d va parcourir le palet avant de s'arrêter ?

(c) En déduire que le rapport d/h est constant. Exprimer cette constante en fonction de m, M et k.

8. Une masse ponctuelle m est soumise à une force associée à l'énergie potentielle

$$E_p(x) = 3x^2 - x^3 \,.$$

(a) Tracer le graphe de $E_p(x)$.

(b) Quelles sont les positions d'équilibre possibles pour m ? Sont-elles stables ou instables ?

(c) Discuter les possibles mouvements de la masse en fonction de son énergie totale.

(d) Déterminer la direction de la force sur la masse dans chaque intervalle de x où le mouvement est possible.

9. Un point matériel de masse m est soumis à une force centrale de centre O. Cette force dérive de l'énergie potentielle définie par

$$E_p(r) = A\,\frac{r^2}{a^2}\,e^{-\frac{r}{a}}$$

où a et A sont deux constantes positives et r la distance entre O et M.

(a) Donner les dimensions des constantes a et A.

(b) Déterminer la force associée à cette énergie potentielle. Quelle est la symétrie de cette force ?

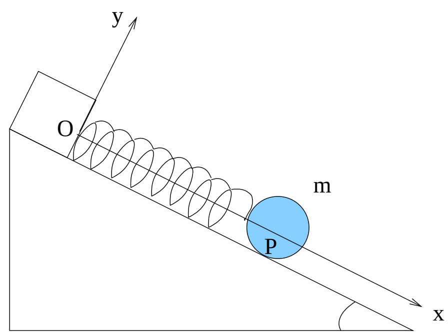
(c) Que vaut l'énergie potentielle pour les valeurs limites $r = 0$ et $r = +\infty$? En déduire l'allure de la courbe de l'énergie potentielle en fonction de r. Déterminer graphiquement les points d'équilibre et discuter leur stabilité.

(d) Le point matériel est lâché en $r = 0$ avec la vitesse initiale v_0. Décrire l'évolution de son mouvement en fonction de v_0. Représenter les trajectoires possibles sur la courbe d'énergie potentielle. En déduire l'existence d'une vitesse critique v_c.

(e) Expliciter la valeur de la force au voisinage de $r = 0$. En utilisant la seconde loi de Newton, écrire l'équation du mouvement pour $v_0 << v_c$.

(f) Le point matériel est maintenant lâché en $r = +\infty$ avec une vitesse initiale inférieure à v_c. Décrire son mouvement. Représenter sur un même graphe son énergie potentielle, son énergie cinétique et son énergie mécanique.

10. Un solide de masse m est relié au point fixe O par un ressort de raideur k et de longueur à repos x_0 ; le solide peut être considéré comme une masse ponctuelle au point P pouvant glisser sans frottement sur un plan incliné formant un angle θ avec le plan horizontal (voir figure).



A tout instant, m est repéré par $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i}$ dans le référentiel (xOy) de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

(a) Montrer qu'il existe une position d'équilibre notée x_e et déterminer s'il s'agit d'une une position d'équilibre stable ?

(b) Déterminer l'énergie potentielle du systéme, $E_p(x)$. On prend x_0 comme origine du référentiel et, pour simplifier les expressions, on pose : $u = (x - x_0)$.

(c) Tracer le graphe de $E_p(u)$, calculer la position d'équilibre, discuter sa stabilité.

(d) Montrer que $E_p(u)$ peut être mis sous la forme : $E_p(u) = a(u-b)^2 + c$. Déterminer a, b et c. Que peut-on en déduire sur le mouvement $u(t)$?

(e) A un instant $t = 0$, on a $\overrightarrow{OP}_0 = x_0\,\overrightarrow{i}$ et le solide est lâché sans vitesse initiale. Calculer l'énergie cinétique E_c du système, à une position $u = (x - x_0)$ et tracer $E_c(u)$ sur le graphe précédent.

(f) Calculer la valeur maximale v_{max} de la vitesse de la masse m en fonction de g, m, k, et θ. Quelle est alors la position de la masse m ?

(g) Calculer la vitesse v de la masse m pour une position u quelconque. Quelles sont les positions où $v = 0$?

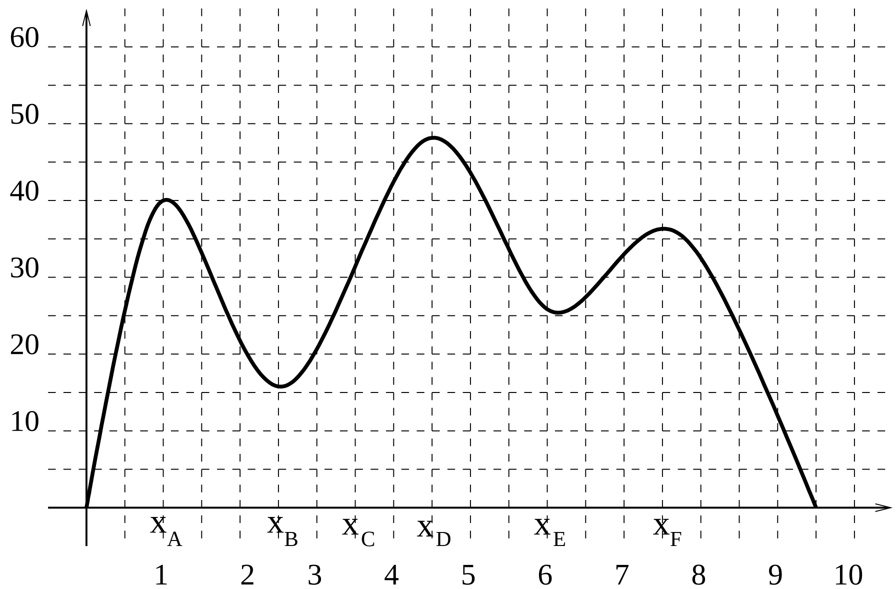
(h) Indiquer sur le graphe, le sens de l'accélération de la masse m pour les différents domaines de la variation de u.

11. On considère un point matériel de masse de $m = 2\ kg$, contraint de se déplacer sur un axe. Son vecteur position est $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i}$. La masse est soumise à plusieurs

forces extérieures dont la résultante est notée

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F} + \vec{f} = [F(x) + f(x)]\,\vec{i}\,, \tag{1}$$

où $F(x)$ est une force conservative qui dérive de lénergie potentielle $E_p(x)$ représentée ci-dessous et $f(x)$ est une force dissipative (c'est-à-dire non conservative).



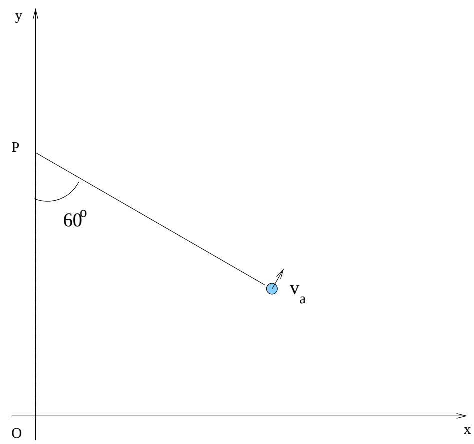
(a) On considère d'abord le cas où $f(x) = 0$.

1. Dans quel sens est dirigée la résultante des forces lorsque le point M est en C ($x_C = 3,5\ m$) ?
2. La masse m part du point B ($x_B = 2,5\ m$) vers les x décroissants. Déterminer la valeur minimale de l'énergie cinétique initiale pour que la masse puisse atteindre le point A ($x_A = 1\ m$). Pour cette valeur de l'énergie cinétique initiale minimale, quelle sera la vitesse de la masse en A ?
3. La masse m part maintenant du point B vers les x croissants. Déterminer la valeur minimale de l'énergie cinétique initiale pour que la masse puisse atteindre le point E ($x_E = 6\ m$). Pour cette valeur de l'énergie cinétique initiale, quelle sera la vitesse de la masse en E ?

(b) On considère le cas où $f(x) \neq 0$.

1. La masse m part du point B vers les x croissants, avec une énergie cinétique $E_c(B) = 40\ J$. Elle arrive au point E avec une énergie cinétique $E_c(E) = 10\ J$. Quel est le travail de la force f entre B et E au cours du déplacement de la masse ? L'intensité de la force peut-elle être constante au cours de ce déplacement ?
2. La masse part du point A vers les x croissants. La force f a une intensité constante et est dirigée dans le sens opposé au mouvement. Lorsque la masse se déplace de $1\ m$, le travail de f vaut $W = J$. Représenter l'énergie mécanique de la masse au cours de son mouvement.

12. Un pendule est constitué d'une masse ponctuelle $m = 2\ kg$ fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et longueur $l = 4\ m$. Quand le fil forme un angle de $60°$ avec la verticale, la masse est lancée vers le haut. On observe qu'elle repasse par la position la plus basse avec une vitesse $v_0 = 8\ m/s$.

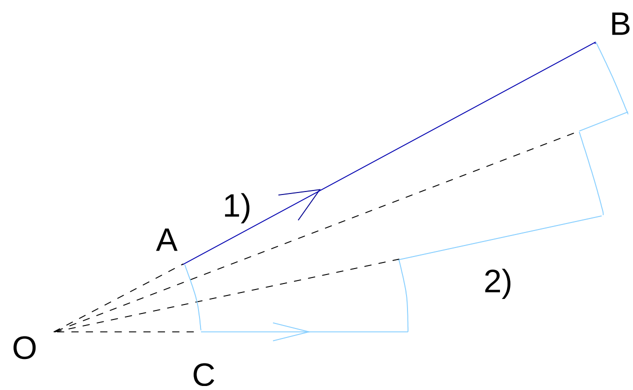


   (a) On suppose que le pendule oscille dans un milieu dans lequel les forces de frottement sont négligeables.
      1. Quel est l'angle le plus grand que le fil peut former avec la verticale ?
      2. Calculer l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ de la masse, en prenant comme zero de l'énergie potentielle le point le plus bas de l'oscillation.
      3. Ecrire l'énergie mécanique du système.
      4. Avec quelle vitesse la masse a été lancée ?

   (b) On suppose maintenant que le milieu dans lequel oscille le pendule exerce une force de frottement dont la norme, $f = 4\ N$, ne dépend pas de la position.
      1. Calculer le travail de la force de frottement lorsque le pendule se déplace de la position initiale repérée par $\theta = 60°$ à la position $\theta = 0$.
      2. En déduire la vitesse de la masse lors de son premier passage par la position $\theta = 0$.

TD4 : Interactions gravitationnelle et électrostatique

1. Soient deux masses M et m. La masse M est placée en O et la masse m se trouve en A dans la figure ci-dessous. On considère la force gravitationnelle exercée sur la masse m par M. Montrer que le travail de la force pour déplacer la masse m de A à B est le même sur les deux chemins 1 et 2 dans la figure ci-dessous :



2. Vitesse de libération. Soit une planète de masse M et de rayon R.
   (a) Quel travail minimum doit-on fournir pour déplacer un objet de masse m de l'altitude z au dessus de la surface de la planète jusqu'à l'infini ?
   (b) On appelle vitesse de libération la vitesse minimale que doit avoir un corps de masse m à l'altitude z pour échapper à l'attraction de la planète, c'est-à-dire atteindre l'infini avec une vitesse nulle. Calculer cette vitesse de libération.
   (c) Application numérique : calculer cette vitesse à la surface de la terre ($M_T = 5,98 \times 10^{24}\,kg$ et $R_T = 6400\,km$), à la surface du soleil ($M_S = 1,99 \times 10^{30}\,kg$ et $R_S = 6.96 \times 10^8\,m$) et à la surface d'une étoile à neutrons ($M_E = 5 \times 10^{30}\,kg$ et $R_E = 50\,km$).

3. La force gravitationnelle exercée par une masse M sur une autre masse m est

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r\,, \tag{1}$$

où r est la distance entre les deux masses et $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire sur la droite joignant M et m. On définit *champ gravitationnel* dû à la masse M en $\vec{r}$, la grandeur

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\,. \tag{2}$$

On peut interpreter $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r})$ comme la force exercée par M sur une masse sonde unitaire, placée en $\overrightarrow{r}$, mesuré par rapport à M. Le champ gravitationnel est une fonction de la position dans l'espace.

On sait que le champ gravitationnel crée par une sphère pleine homogène, à l'extérieur de son volume est le même que celui généré par un point matériel, de même masse, situé en son centre.

(a) Calculer le champ $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r})$ exercée par la Terre en un point M situé à une distance $r > R_T$, où R_T est le rayon de la Terre.

(b) Exprimer le champ gravitationnel exercé par la Terre en un point M en fonction de la distance z entre M et la surface de la Terre. Montrer que pour $z \ll 1$, $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r})$ se réduit à l'accélération de pesanteur. Faire la même chose pour la force exercé par la Terre sur une masse m placée au point M, ci-dessus.

(c) Donner l'énergie potentielle de gravitation aux points $r = R_T$ et $r > R_T$. En posant $r = z + R_t$, calculer l'énergie potentielle de gravitation en r en fonction de z pour $z \ll 1$. Montrer que, en première approximation, celle-ci correspond a l'énergie potentielle du poids en z relative à la surface de la Terre. On utilisera le devéloppement limité de $(1+\epsilon)^{\alpha}$ à l'ordre 2. Jusqu'à quelle altitude l'énergie potentielle de gravitation et l'énergie potentielle du poids varient-elles de moins d'un pour cent et de moins d'un pour mille ?

4. On considère une masse m soumise à l'attraction de la Terre et à celle de la Lune. La distance Terre-Lune est $380000\,km$. Soit M_T la masse de la Terre et M_L celle de la lune, on a $M_T = 81 M_L$ et $M_T = 5.98 \times 10^{24}\,kg$ ($G = 6.67 \times 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$).

   (a) Déterminer l'énergie potentielle de la masse m à une distance r du centre de la Terre.

   (b) En quel point le champ gravitationnel dû à la Terre et à la Lune est-il nul ?

   (c) Écrire le champ gravitationnel agissant sur m à la surface de la Terre et à la surface de la Lune.

5. Soit q et q_0 deux charge électriques ponctuelles. La force de Coulomb de q sur q_0 est

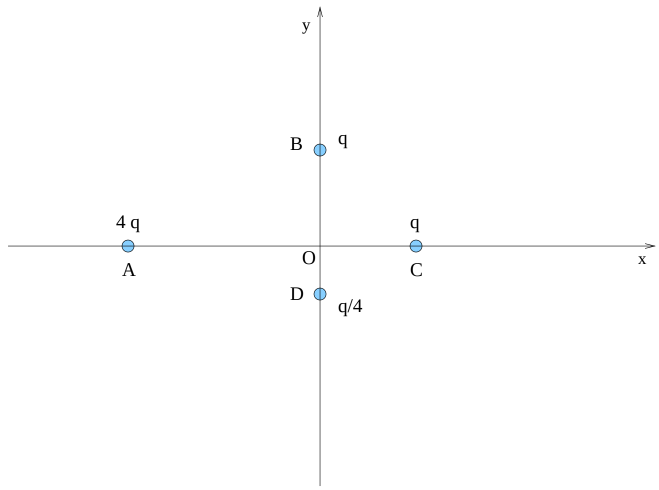
$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{qq_0}{r^2}\overrightarrow{u}_r\,, \tag{3}$$

où r est la distance entre les deux charges et $\overrightarrow{u}_r$ est le vecteur unitaire sur la droite joignant q et q_0. On appelle *champ électrique* dû à la charge q en $\overrightarrow{r}$, la grandeur

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}(\overrightarrow{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}_r\,. \tag{4}$$

On peut interpreter $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\overrightarrow{r})$ comme la force exercée par q sur une charge sonde unitaire, placée en $\overrightarrow{r}$. Le champ électrique est une fonction de la positon dans l'espace.

Soient quatres charges électriques ponctuelles positives, $q_1 = 4q$, $q_2 = q$, $q_3 = q$ et $q_4 = q/4$ placées comme dans la figure ci-dessous



où $A = (-2, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ et $D = (0, -1/2)$.
Déterminer la direction et le module du champ électrique en

(a) $O = (0, 0)$

(b) $P = (\pm\infty, 0)$

6. Deux protons immobiles sont situés dans un plan, sur l'axe des x en deux points A et B, d'abscisse $x_A = -a$ et $x_B = a$. Un proton se déplace le long de l'axe des ordonnées, depuis l'infini, avec une vitesse v_0. A partir d'une certaine distance y, il est sous l'influence unique des champs électriques provenant des deux protons en A et B. On négligera l'influence de la force de pesanteur.

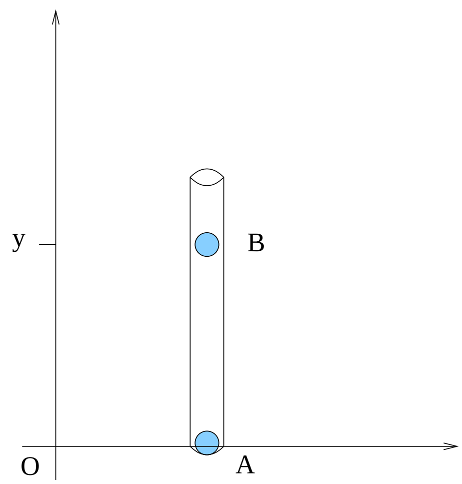
   (a) On considère la situation générale où le proton se trouve en $z > 0$. Exprimer l'énergie potentielle $E_p(y)$ du proton. La référence de l'énergie potentielle sera pour le proton à l'infini.

   (b) Quelle est la position d'équilibre du proton ?

   (c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer l'énergie cinétique initiale minimale à communiquer au proton pour qu'il traverse le segment AB.

   (d) Que vaut l'énergie mécanique du système ? Représenter l'énergie potentielle, l'énergie cinétique, ainsi que l'énergie mécanique en fonction de y. Retrouver le résultat de la question (c) en utilisant l'énergie mécanique.

7. Soit un long tube vertical isolant, fermé à ses deux extrémités, et dans lequel on a fait le vide. Le tube contient deux billes métalliques A et B identiques, de masse m et charge électrique $+q$. La bille A est scellée à la base du tube à l'altitude $y = 0$. La bille B est libre de se déplacer sur le demi-axe Oy dans la direction du repére terrestre supposé galiléen.



(a) Déterminer les forces agissant sur la bille B à une altitude y quelconque. La bille B peut-elle être en équilibre à une altitude donnée ? Si oui, donner la valeur y_0 correspondante.

(b) On amène la bille B à l'altitude $y_1 > y_0$, et on la lâche sans vitesse initiale. Montrer que B va descendre jusqu'à une altitude minimum y_1' avant de remonter jusqu'à y_1. Que peut-on dire de la suite du mouvement ?

(c) On peut étudier le mouvement de la bille aussi en utilisant la conservation de l'énergie mécanique. Montrer à l'aide de l'énergie potentielle E_p générale du système qu'il existe bien une position d'équilibre pour la bille B en un point $y = y_0$.

(d) Dessiner la courbe $E_p = f(y)$. Justifier avec cette courbe que l'équilibre y_0 est stable et placer sur cette courbe le point $y = y_1$.

TD6 : Hydrostatique

1. Un tube en U contient du mercure. Dans l'une des branches on ajoute de l'huile, dans l'autre une solution aqueuse. Les deux interfaces liquide-air sont dans le même plan horizontal. Si l'huile occupe une hauteur $h = 20\ cm$, quelle est la hauteur de la solution aqueuse ? La pression atmosphérique vaut $p_0 = 10^5\ Pa$, et les masses volumiques du mercure, de l'huile et de la solution aqueuse sont $\rho_m = 13.6\, g/cm^3$, $\rho_h = 0.85\, g/cm^3$, $\rho_s = 1.15\, g/cm^3$.

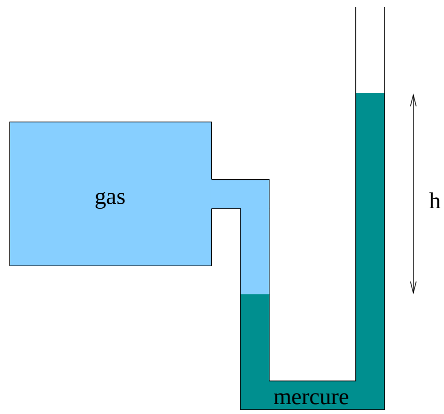
2. Une piscine rectangulaire de cotés $a = 24\, m$ et $b = 10\, m$ est remplie d'eau ($\rho_e = 1000 kg/m^3$) jusqu'à une hauteur $h = 3\, m$.
   (a) Calculer la résultante des forces pressantes s'exerçant sur le fond et sur les parois verticales.
   (b) Si vous devez vérifier que les parois ne s'écroulent pas, est-il nécessaire de considérer la pression atmosphérique ?

3. Une montgolfière est constituée d'une enveloppe sphérique inextensible supportant une nacelle de 120 kg. L'enveloppe présente dans sa partie inférieure un orifice relativement petit par lequel l'air, chauffé par un chalumeau, peut entrer ou sortir librement. La densité superficielle de masse de l'enveloppe est de 100 g/m^2 et son rayon est de 6 m. A quelle température doit-on chauffer l'air (supposé parfait) contenu dans l'enveloppe pour que la montgolfière décolle si l'air extérieur a une masse volumique de 1.29 kg/m^3 et si sa température est de 20° C ?

4. Une balle de masse $m = 5\ kg$ et masse volumique $\rho = 0.6\ g/cm^3$ est maintenue entièrement sous l'eau par une ficelle attachée au fond. Déterminer la tension de la ficelle.

5. On place au centre d'un bloc de glace d'épaisseur $d = 0.3\, m$ une voiture de masse $m = 1100\, kg$. Déterminer la surface minimum du bloc pour qu'il flotte. La masse volumique de la glace est $\rho_g = 0.92\ g/cm^3$.

6. Un manomètre consiste d'un tube en U dont une branche est ouverte et l'autre connectée à un réservoir contenant un gaz dont on veut mesurer la pression (voir figure).



Le tube est rempli de mercure ($\rho_{Hg} = 1.36 \times 10^4\, kg/m^3$). Le niveau de mercure dans la colonne de droite du tube dépasse celui dans la colonne de gauche de $h = 40\, cm$.

(a) Déterminer la pression absolue du gas.

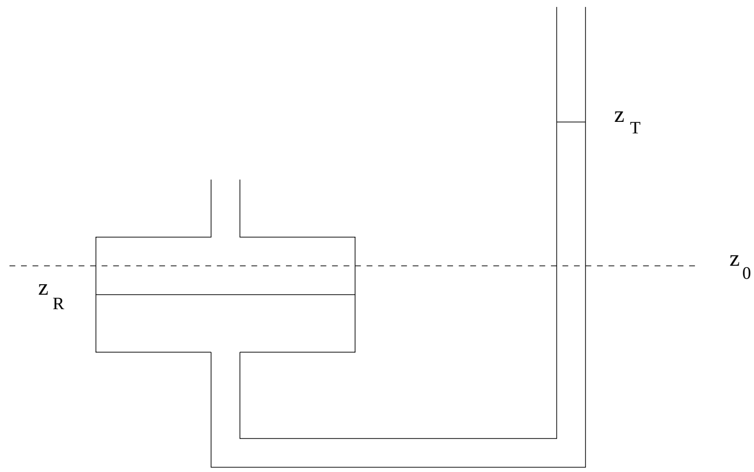
(b) Déterminer la pression différentielle, $p - p_0$, du gaz.

7. Un solide homogène, cubique, flotte sur la surface de séparation de deux liquides non miscibles : l'eau et un hydrocarbure de densité relative à l'eau de 0.75. Le bloc est complètement immergé et sa base inférieure se trouve à une profondeur $z/5$ au dessous de la surface de séparation des deux liquides.

   (a) Donner la masse volumique du bloc en fonction de z et de ρ_e, masse volumique de l'eau.

   (b) Montrer qu'un bloc cubique, de mêmes dimensions mais dont la densité relative à l'eau est inférieure à 0.75, ne peut pas être à l'équilibre sur la surface de séparation des deux liquides.

8. Dans un bac de plusieurs dizaines de centimètres de hauteur, et contenant un liquide incompressible, une balle pleine légère de volume $V = 5\ cm^3$, de masse volumique $\rho_b = 0.6\ g/cm^3$, est attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à repos l_0, l'autre extrémité du ressort étant fixée au fond du bac (voir figure). On dénote par V_L et M_L le volume total du liquide et sa masse. La balle accrochée au ressort est immobile à la cote z_{eq}. (On suppose le rayon de la balle négligeable devant la longueur du ressort).



(a) Si les masses volumiques de la balle et du liquide étaient identiques, que vaudrait z_{eq} ?

(b) La masse volumique du liquide ρ_L est supposée toujours supérieure ou égale à celle de la balle. Le ressort est-il alors allongé ou comprimé ?

(c) Le volume V_L du liquide varie avec la température selon la loi

$$V_L(T) = V_L(20^\circ)[1 + \beta(T - 20^\circ)] \,, \tag{1}$$

où la température T est exprimée en degrés Celsius et $\beta \sim 2 \cdot 10^{-3}(^\circ C)^{-1}$. Pour $T = 20^\circ C$, la densité du liquide est 0.8. Que vaut sa masse volumique ? Exprimer la masse volumique du liquide en fonction de la température T , $\rho = \rho(T)$.

(d) Ecrire à toute température T la condition d'équilibre de la balle.

(e) Donner l'expression de la variation de l'allongement du ressort en fonction de la température. Est-elle positive ou négative ?

(f) Application numérique : quelle doit être la valeur de la raideur k du ressort pour qu'à la température de 20 $^\circ C$, le ressort soit allongé de 5 cm ? On prendra g, l'accélération de la pesanteur, égale à environ 10 N/kg.

TD6 : Hydrodynamique

1. Il y a thrombose lorsqu'une artère est partiellement obstruée à cause d'un épaississement de sa paroi. La carotide a normalement un diamètre moyen $d_1 = 1\ cm$ et le sang circule avec une vitesse moyenne $v_m = 20\ cm/s$; la pression hydrostatique relative régnant dans cette artère est $p_1 - p_0 = 100\ mmHg$, où p_0 est la pression autour de l'artère. La masse volumique du sang vaut $\rho = 10^3\ kg/m^3$. (On supposera l'artère horizontale.) Calculer le diamètre minimal d_2 compatible avec un écoulement permanent, au deçà duquel la pression hydrostatique absolue p_2 devient inférieure à p_0.

2. Une seringue de section $S = 1\ cm^2$ et possédant un orifice de section $s = 1\ mm^2$ est remplie d'eau. Quelle est l'intensité de la force F qu'on doit execercer sur le piston pour que la vitesse de sortie de l'eau soit de 10 m/s ?

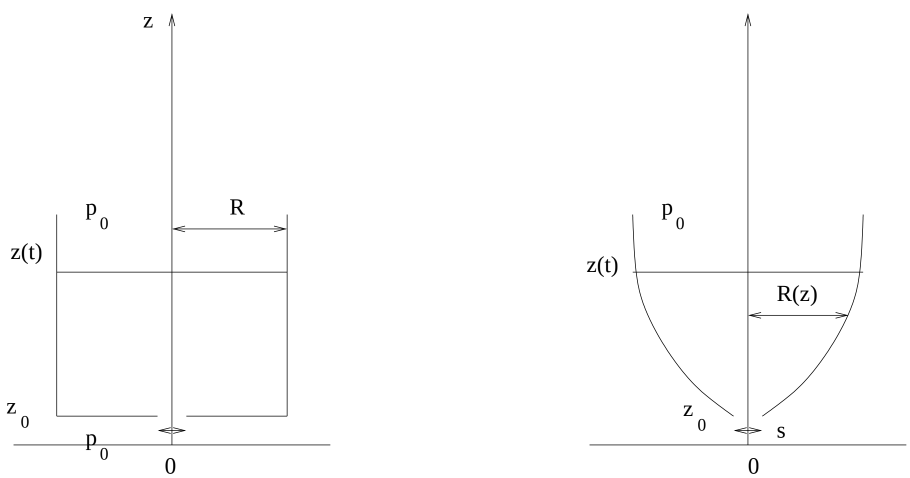
3. Une citerne est remplie d'eau jusqu'à une hauteur H. Un trou est percé dans la paroi de la citerne à une profondeur h de la surface libre de l'eau. La citerne est suffisamment grande pour que la vitesse de l'eau à la surface soit nulle.
   (a) Déterminer la vitesse d'écoulement de l'eau à la sortie du trou.
   (b) Déterminer la distance, x, entre la citerne et le point où l'eau touche le sol en terme de h, H.
   (c) À quelle profondeur h doit on percer le trou pour que la distance x soit maximale ?

4. On considère un récipient cylindrique de section S rempli d'eau à la pression $p = 1,4\,atm$. Sur le fond est percé un trou de section $s = 1\,cm^2$ ($s \ll S$). Déterminer
   (a) la vitesse d'écoulement de l'eau à la sortie du trou ;
   (b) la section S_h du jet d'eau quand il est descendu d'une distance $h = 20\,cm$ au dessous du fond du récipient.

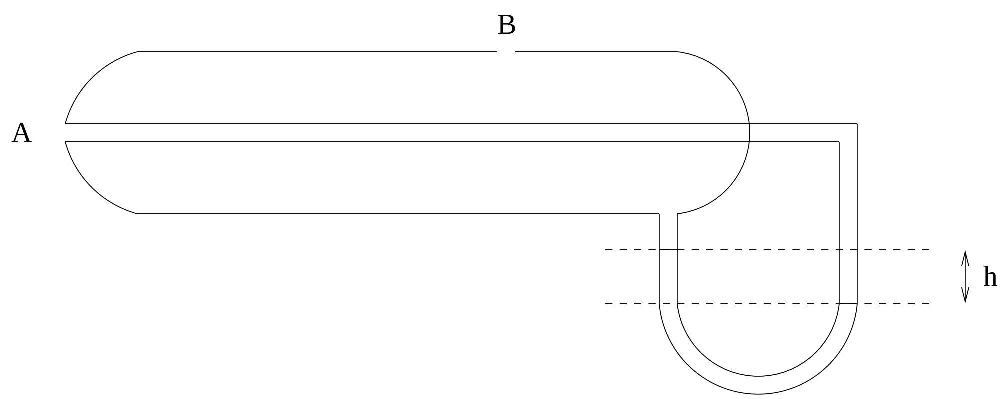
5. Vidange d'un réservoir. On considére deux récipients cylindriques, un de section constante et l'autre de section variable (clepsydre). Dans les deux cas, le fond du récipient est situé à l'altitude $z = 0$ et est percé (sur l'axe de symétrie) d'un petit trou de section s. Pour $z > 0$, la section est notée S et le rayon correspondant r. Le récipient est initialement rempli d'eau jusqu'à l'altitude h et le volume intial d'eau est V_0. La pression atmosphérique p_0 règne au dessus de l'eau. A l'instant t, le niveau de l'eau dans le récipient est $z(t)$.

(a) Cylindre droit. Déterminer la loi d'évolution $z(t)$. Ce récipient est-il une bonne horloge à eau ? Combien de temps faut-il pour vider entièrement le récipient ?
Application numérique : $r = 20\ cm$, $s = 15\ mm^2$ et $V_0 = 80\ l$.

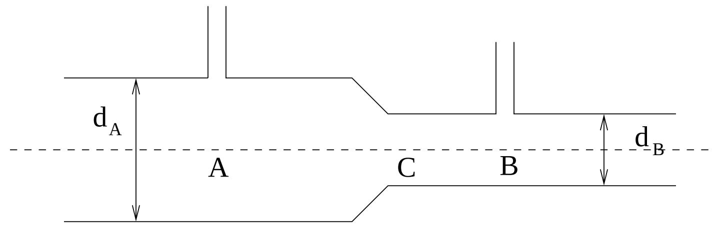
(b) Clepsydre. Le rayon du récipient varie l'altitude selon la loi $R(z) = az^n$. Déterminer les valeurs de a et n pour lequelles que le niveau d'eau dans le récipient baisse à une vitesse constante v.
Application numérique : $s = 1\ cm^2$ et $v = 6\ cm/min$.



6. Tube de Pitot. Un tube de Pitot est utilisé pour mesurer la vitesse v d'un écoulement d'air dans lequel il est plongé, en particulier pour mesurer la vitesse des avions en vol. Il comporte un orifice A face à l'écoulement et un autre, B, sur la paroi latérale parallèle aux lignes de courant. A et B communiquent avec les deux branches d'un tube manométrique à mercure. Déduire la vitesse de l'air lorsque la dénivellation est $h = 50\ mm$. Masse volumique de l'air 1.3 g/l, du mercure 13.6 g/cm^3.

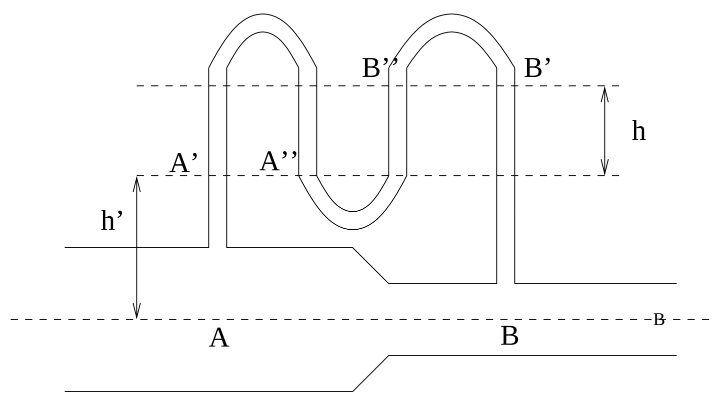


7. Tube de Venturi. Soit un tube de Venturi horizontal, avec des prises de pression A et B.



   (a) Déterminer l'expression de la différence de pression $(p_A - p_B)$ due à l'air (supposé non visqueux et incompressible) qui s'écoule dans le tube, en fonction de sa masse volumique ρ, du débit Q et des diamètres d_A et d_B.

   (b) Pour mesurer $(\ p_A - p_B \ )$ on utilise un manomètre à eau : h' et h sont des grandeurs positives et ρ_e est la masse volumique de l'eau. Le tube du manomètre descend jusqu'en A et B et ne perturbe pas l'écoulement. L'air est supposé statique dans le manomètre. Donner les expressions de $(p_A - p_{A'})$, $(p_B - p_{B'})$ et $(p_{A''} - p_{B''})$. En déduire l'expression de $(p_A - p_B)$ en fonction de h, ρ_e, ρ et g.



   (c) Le coté de diamètre d_B est ouvert à l'air libre où règne la pression atmosphérique $p_0 = 10^5 \ Pa$. On admettra que $p_B = p_0$. Calculer la pression p_A en A et la vitesse v_B de sortie de l'air.

   A. N. : $\rho = 1.3 \ kg/m^3$; $Q = 1 \ m^3/h$; $d_A = 2 \ cm$ et $d_B = 2 \ mm$; $g = 10 \ m/s^2$ et $\rho_e = 10^3 \ kg/m^3$.

8. Les ailes d'un petit avion ont une surface de 9.3 m^2 chacune. La vitesse de l'air sur la surface supérieure de l'aile est de 50 m/s et sur la surface inférieure de 40 m/s. Quel est le poids de l'avion ? Supposons que l'avion ait une vitesse constante et que la poussée soit due aux ailes seulement. La masse volumique de l'air est 1.2 kg/m^3. Déterminer comment varie la poussée, si

   (a) l'avion vole horizontalement ;

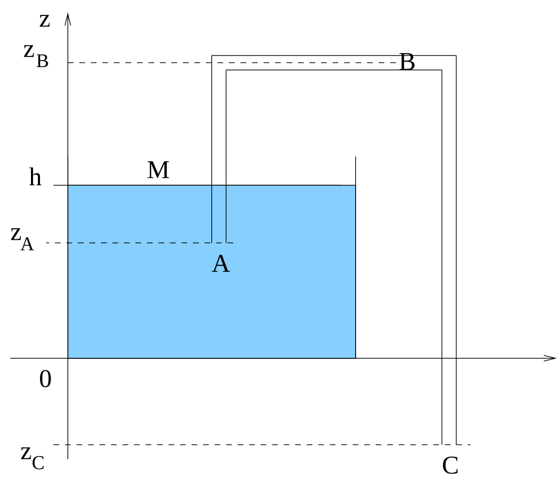
   (b) l'avion monte avec une inclinaison de 15° ;

(c) l'avion déscend avec une inclinaison de 15°.

9. Un siphon, constitué d'un tube coudé de section s, permet la vidange d'une citerne de section S remplie d'une hauteur h d'eau. On assimile l'eau à un fluide parfait et incompressible et l'on suppose que $S >> s$. On note ρ la masse volumique de l'eau, p_0 la pression atmosphérique et g l'accélération de pesanteur.

   Le siphon n'est pas amorcé (il n'y a pas d'eau dans le coude du siphon), l'eau de la citerne est donc à repos.

   (a) Déterminer p_A la pression au point A.



   Une fois amorcé, le siphon est rempli d'eau et la citerne se vide. On considère que l'écoulement de l'eau dans le siphon est stationnaire. On appelle v la vitesse de vidange de la citerne, c'est-à-dire la vitesse de l'eau en un point M de la surface libre dans la citerne, et v_s la vitesse d'écoulement dans le siphon.

   (a) Expliquer pourquoi la norme de la vitesse v_s est la même en tout point du siphon. Déterminer la relation entre les vitesses v et v_s et comparer ces deux vitesses.

   (b) Représenter l'allure des lignes de courant dans la citerne et le siphon.

   (c) Exprimer la pression p en un point quelconque du siphon de cote z, en fonction de z, h, v_s, p_0, ρ et g. Appliquer cette relation au point C et en déduire v.

   (d) Quel est le débit volumique Q_v du siphon ?

   (e) On s'intéresse au point B. On admet que la valeur minimale de la pression en ce point est $p_B = 0$. Déterminer alors la valeur maximale de v_s ainsi que le débit volumique maximal du siphon.

   (f) Quelle doit alors être la cote z_C du point C ? Estimer numériquement z_C si $z_B = 8\ m$.