

# Histoire et actualité à propos du problème de la réduction dimensionnelle dans les systèmes désordonnés

Julian Perez Alzueta  
(reçu le 8 juin 2007)

Nous revoyons, pour certains systèmes désordonnés, l'histoire du problème dit de la « réduction dimensionnelle » en définissant ses propos ainsi que son contenu. Grâce à une méthode perturbative du Groupe de Renormalisation Fonctionnel, il peut être montré sur un exemple relativement simple (variétés aléatoires) pourquoi la réduction dimensionnelle ne s'applique pas. Nous mentionnons, enfin, les dernières avancées visant à construire une approche, à travers une méthode non perturbative du F.R.G, permettant de traiter la problématique du modèle  $O(N)$  en champ aléatoire.

## I. Introduction

Qu'est ce que la réduction dimensionnelle (R.D) ? Ce n'est autre chose que la propriété reliant le comportement critique de certains systèmes désordonnés et celui du système pur correspondant en dimension inférieure ( $d-2$ ). Cette propriété peut être démontrée rigoureusement à tout ordre dans le développement perturbatif (cette notion sera précisée plus loin). Néanmoins, des résultats exacts et heuristiques, montrent qu'elle est fautive en dimension suffisamment basse. Les raisons de l'échec de la R.D sont restés une énigme pendant des longues années.

## II. Contexte et historique des théories

Les premiers articles sur les champs aléatoires [1-2] ont montré que la dimension critique à partir de laquelle on obtient les exposants critiques de type « champ moyen » était 6 au lieu de 4 (pour un système pur). Ensuite, vers 1977, on a pu montrer que les développements perturbatifs « exact » (i.e un développement en puissance à tous les ordres) des fonctions thermodynamiques, vérifient le résultat prédit par la R.D[3-4]. En 1979, Parisi et Sourlas ont montré que l'équation stochastique gouvernant le comportement du modèle d'Ising en champ aléatoire à température nulle contient une supersymétrie cachée [5]. La théorie quantique des champs semblait donc démontrer formellement la R.D..

Quelles sont les conséquences ? Puisque dans le modèle d'Ising, les dimensions critiques inférieure et supérieure sont 1 et 4 respectivement, dans un modèle d'Ising en champ aléatoire (R.F.I.M.) elles deviennent 3 et 6 respectivement. Le résultat de la R.D est qu'il n'y a de transition de phase que si  $d > 3$ . Cependant, des arguments qualitatifs (Imry et Ma) ont montré qu'une transition à  $d=3$  devait exister. Les arguments théoriques forts en faveur de la R.D ont fait que le doute a subsisté pendant de nombreuses années. Il s'est avéré, plus tard vers 1993, que la R.D contredisait des résultats exacts et que le développement perturbatif ne prenait pas correctement en considération la multiplicité des états métastables.

## III. Un problème bien étudié : les variétés aléatoires.

Le nom « variétés aléatoires » est une abréviation pour le modèle décrivant une variété élastique en champ aléatoire. C'est un des sujets aujourd'hui les mieux compris de la physique statistique des milieux désordonnés et il est donc utile pour présenter le sujet.

On définit ici une variété est définie par sa dimension  $d$  ainsi que par la dimension  $N$  du paramètre du déplacement  $\mathbf{u}$ . Ce modèle s'applique aux problèmes très divers comme celui des interfaces de spins [7] ou bien celui du polymère orienté ( $d=1$ ) [8]. Afin de simplifier le problème, nous allons prendre par la suite  $N=1$ . La température n'étant pas pertinente pour ce type de système désordonné, nous allons traiter uniquement le cas du point  $T=0$ .

L'énergie du système est constituée d'une partie élastique et d'une partie liée au désordre [10]:

$$\mathbf{H}[u] = \int d^d x \frac{1}{2} (\nabla u(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad \overline{V(u, \mathbf{x})V(u', \mathbf{x}')} = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')R(u - u')$$

La distribution initiale du désordre est choisie gaussienne par simplicité

L'observable la plus intéressante (par son accès expérimental) est l'exposant de raideur  $\zeta$  défini à partir de la fonction de corrélation par :  $C(x - y) = \overline{[u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})]^2} \propto |x - y|^{2\zeta}$ .

### a. Prévisions de la R.D.

Dans un système thermique pur on a que :  $C(x - y) = k_B T G(|x - y|)$ ,  $G$  étant la fonction de Green de l'opérateur Hamiltonien. Pour un système pur (Hamiltonien quadratique/Gaussien),  $G$  s'écrit :  $G(|x - y|) = |x - y|^{2-d} Y\left(\frac{|x - y|}{\xi}\right)$ , ce qui nous permet d'établir que :  $C(x - y) \propto |x - y|^{2-d}$ .

Selon la R.D, pour le système désordonné en dimension  $d$ , tout est donné par la correspondance au modèle pur en dimension  $d-2$ . Ceci implique que  $C(x - y) \propto |x - y|^{4-d}$  pour un système dominé par le désordre. D'après la définition de  $\zeta$ , on pourrait alors conclure que :

$$\zeta = \frac{4 - d}{2}$$

Or ce résultat est faux pour les faibles dimensions ( $d < 4$ ). Il prédit pourtant bien la dimension critique ( $d=4$ ) en dessous de laquelle cette prédiction est fautive à cause des perturbations liées au désordre qui deviennent non négligeables pour des faibles dimensions.

### b. Explication qualitative : un paysage énergétique complexe

Avec tant d'arguments en faveur de la R.D., comment expliquer qu'elle ne soit pas en accord avec la réalité ? Aussi bien la méthode de renormalisation perturbative usuelle que l'argument de supersymétrie, négligent le même phénomène : la présence d'un grand nombre d'états métastables [9]. Le paysage énergétique complexe que provoque le désordre du système contient un très grand nombre de minima dans lesquels le système peut très bien se retrouver piégé et qui peuvent modifier le comportement à grande distance.

Existent-il des situations pour lesquelles les arguments de la R.D sont valables ? La réponse est oui, et on peut l'exposer en faisant appel à la longueur de Larkin  $L_L$ . On peut déterminer cette dernière en égalisant l'énergie liée au désordre  $E_{DO} \propto \bar{f} \left(\frac{L}{r}\right)^{\frac{d}{2}}$  et l'énergie élastique  $E_{EL} \propto L^{d-2}$  où  $r$  est la longueur de corrélation lié au désordre et  $\bar{f}$  est une énergie potentielle caractéristique. On trouve donc que :

$$L_L = \left(\frac{c^2}{\bar{f}} r^d\right)^{\frac{1}{4-d}}$$

On voit que pour  $L < L_L$  et/ou  $d > 4$  le système n'est plus contrôlé par le désordre mais qu'au contraire l'énergie élastique domine, ce qui signifie que les arguments de type « champ moyen » sont désormais valables (utilisation du théorème de la limite centrale sur l'Hamiltonien effectif,

équivalent à un Hamiltonien gaussien), et donc les prédictions de la réduction dimensionnelle sont valables.

**c. Explication théorique. Le Groupe de Renormalisation Fonctionnel.**

À la différence des systèmes purs, la physique à grande distance des systèmes désordonnés ne peut pas être généralement décrite par un nombre réduit de paramètres. Puisque toutes les théories, utilisant un développement perturbatif à tous les ordres, échouent, il nous faut une théorie qui puisse tenir compte de la distribution du désordre dans sa totalité. Une théorie répondant à ce critère est la Groupe de Renormalisation Fonctionnel. Techniquement, on peut coupler le groupe de renormalisation et la « méthode des répliques » pour considérer, par exemple, le second cumulant du désordre. qui permet de considérer dans sa totalité, à travers les interactions entre les répliques, toute la distribution du désordre  $R''(u)$ .

Il est possible d'organiser un développement perturbatif, mais fonctionnel, autour de  $d=4$ . Après calcul, en posant  $\epsilon = 4 - d$ , le flot de renormalisation pour le second cumulant du désordre est le suivant [10]:

$$\partial_l R(u) = (\epsilon - 4\zeta)R(u) + \zeta uR(u) + \frac{1}{2}R''(u)^2 - R''(u)R''(0) \quad (1)$$

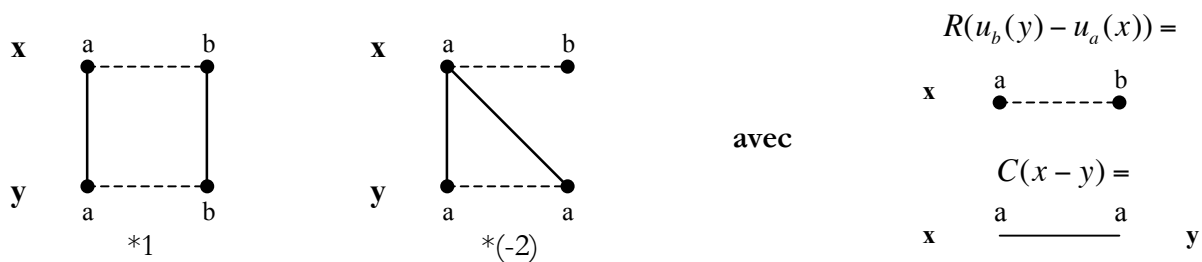
Analyse de l'origine des différents termes apparaissant dans l'équation (1)

Les deux premiers termes proviennent d'une mise à l'échelle de  $R$  et de  $u$ . Cette étape est très importante car elle nous permettra de trouver la valeur des exposants caractérisant le voisinage du point fixe. Précisons cette étape: à partir de l'équation de flot non normalisé on pose  $R(u) = l^\beta \bar{R}(\bar{u})$  et  $u = l^\alpha \bar{u}$ . On arrive à l'équation suivante:

$$l^\beta \partial_l \bar{R}(\bar{u}) = ((\epsilon - \beta)\bar{R}(\bar{u}) + \beta \bar{u} \bar{R}'(\bar{u}))l^\beta + (\frac{1}{2} \bar{R}''(\bar{u})^2 - \bar{R}''(\bar{u})\bar{R}''(0))l^{2\beta-4\alpha}$$

Pour « dédimensionner » le système il faut égaliser les exposants provenant du « scaling ». On obtient  $\beta=4\alpha$ .

D'après la définition du coefficient de raideur  $\zeta$ , on déduit que  $\zeta=\alpha$  et donc que  $\beta=4\zeta$ . En remplaçant ces expressions dans l'équation non normalisée, on retrouve bien l'équation (1).



**Figure 1** Expression diagramatique des termes 1 particule irréductible provenant contribuant à la renormalisation de  $R(u)$  dans un calcul à une boucle.

Maintenant intéressons nous aux deux derniers termes. Ceux-ci proviennent de la combinaison des propagateurs « nus » de la théorie gaussienne,  $C(x-y)$ , et des vertex d'interaction à deux répliques obtenue en développant  $R(u_a(x) - u_b(x))$  autour de la configuration uniforme  $u_a(x) = U_a + \delta u_a(x)$ .

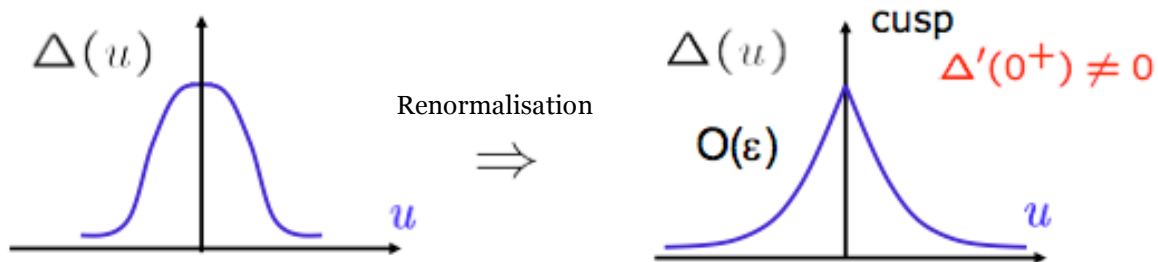
Ceci donne lieu à deux termes explicités dans la Figure 1. Le terme de gauche de la figure s'écrit  $\int_q C(q)^2 R''(U_a - U_b)^2$  et le deuxième vaut  $\int_q C(q)^2 R''(U_a - U_b) R''(0)$  où  $C(q) = \frac{T}{q^2 + m^2}$  (en Fourier) et avec  $\int_q C(q)^2 = \frac{m^\epsilon}{\epsilon}$ ,  $m$  étant la « masse » ajoutée au terme élastique pour éviter une divergence aux petits vecteurs d'onde (infrarouge).

Calcul explicite mettant en évidence l'influence du désordre à longue distance

En dérivant l'équation (1) deux fois par rapport à  $u$ , nous obtenons, en se plaçant sur 0, une équation différentielle à une seule variable. Afin de bien garder à l'esprit l'approximation de la R.D (laquelle ne prend pas en considération les deux derniers termes de l'équation (1)), écrivons les deux équations :

$\partial_t R''''(0) = \epsilon R''''(0) + 3R''''(0)$  (F.R.G.)  $\longrightarrow$   $R''''(0)$  diverge après un nombre fini de renormalisations.

$\partial_t R''(0) = (\epsilon - 2\xi)R''(0)$  (R.D.)  $\longrightarrow$  équation de flot triviale :  $\epsilon = 2\xi$   
 (résultat de la R.D. présenté au III.a.)



**Figure 2** Visulisation de l'évolution de la courbure de la distribution du désordre.  
 Notation consacrée:  $\Delta(u) = -R''(u)$

L'équation obtenue avec le F.R.G. nous montre que la dérivée seconde de  $R''(u)$  diverge. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 2, ceci se traduit par la formation d'une crête au point 0 de  $R''(u)$ . Cette prise en compte de la non analyticité de la distribution  $R(u)$  dans la F.R.G. nous montre qu'on ne peut pas résoudre ce problème de façon perturbative (c'est l'erreur que commet la R.D.). La bonne méthode est donc de traiter l'équation (1) de façon fonctionnelle.

Pourquoi ce raisonnement n'est-il pas valable pour  $L < L_C$ ? Lorsqu'on est à des échelles plus petites que la longueur de Larkin, le système ne ressent plus le désordre et l'Hamiltonien effectif est purement quadratique. La réduction dimensionnelle est donc valable dans cette région.

La résolution exacte de l'équation (1) donne comme résultat  $\xi = \frac{\epsilon}{3} = \frac{4-d}{3}$ . Ce résultat n'est pas en accord avec les études expérimentales. Une approche récente, tenant compte des facteurs provenant des diagrammes à 2 boucles [11], permet d'avoir une estimation plus précise de la raideur et on arrive, après calcul, à des valeurs qui s'approchent de la valeur expérimentale.

## IV. Conclusion

Le postulat de la réduction dimensionnelle, c'est à dire le fait que le comportement à grande distance d'un système désordonné en dimension  $d$  est identique à celui du système pur correspondant en dimension  $d-2$ , a généré de nombreuses controverses au cours des trente dernières années. Ce résultat fut confirmé par tous les raisonnements qui s'appuyaient sur la théorie de la perturbation. Or il a été démontré que la R.D. ne s'applique pas pour des systèmes désordonnés aux dimensions inférieures à 4. Nous avons vu que cet échec de la R.D. provenait de l'existence d'un grand nombre d'états métastables. Ceci nous a mené à introduire la théorie du Groupe de Renormalisation Fonctionnel (F.R.G.). En combinant la méthode du Groupe de Renormalisation et la « méthode des répliques », cette théorie permet de tenir compte des effets dus au rôle à grande échelle que joue désordre autour du point fixe de température nulle.

Les variétés aléatoires est un des seuls domaines concernant les systèmes en champ aléatoire, où la méthode perturbative de la F.G.R. donne des résultats satisfaisants. Actuellement, des méthodes non perturbatives, conduisant des solutions analytiques, ont été développées pour traiter des problèmes plus complexes, comme celui du Modèle d'Ising en Champ Aléatoire (R.F.I.M.) et ont permis de délimiter précisément la région d'application de la réduction dimensionnelle [12].

## Remerciements

Je tiens à remercier Gilles Tarjus ainsi que Mathieu Tissier pour toute l'aide apportée à la compréhension et à l'approfondissement des sujets traités.

## Bibliographie

- [1] Y.Imry et S.-k.Ma, *Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **35** 1399, (1975)
- [2] A.Aharony et Y.Imry, *Lowering of dimensionality in phase transitions with random fields*, Phys. Rev. Lett **37** 1364, (1976)
- [3] G.Grinstein, *Ferromagnetic Phase Transitions in Random Fields: The Breakdown of Scaling Laws*, Phys. Rev. Lett. **37** 944, (1976)
- [4] A.P. Young, *Lower critical dimension of the Random Field Ising Model in phase transitions with random fields*, J.Phys C**10**, L257 (1977)
- [5] J.Z.Imbrie, *On the lowering of dimensionality in phase transitions with random fields*, Phys Rev. Lett., **53** 1747, (1984)
- [6] G.Parisi et N.Sourlas, *Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and negative dimensions*, Phys. Rev. Lett. **43** (1979)
- [7] T.Nattermann, *Theory of Random Field Ising Model*, in A.P.Young, editor, *Spin Glasses and Random Fields*, World Scientific, Singapore, 1997
- [8] M.Kardar, *Lectures on directed paths on random media*, Session LXII de Les Houches, école d'été de physique théorique 1994, Elsevier Science, Amsterdam, 1996
- [9] G.Parisi, in *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, Session XXXIX de Les Houches 1982, editeur, J.B.Zuber and R.Stora, Amsterdam, 1984, p.473
- [10] K.J.Wiese, *Why one needs a functional RG to survive in a disordered world*, PRAMANA **64** 5, 817-827, 2005.
- [11] Pascal Chauve, Pierre Le Doussal et K.J.Wiese, *Renormalisation of pinned elastic systems :how does it work beyond one loop ?*, Phys. Rev. Lett **86** Vol.9 (2001).
- [12] Gilles Tarjus et Mathieu Tissier, *Nonperturbative Functional Renormalization Group for Random-Field Models: the way out of Dimensional Reduction*, Phys. Rev. Lett **93** 267008, (2004).