

Master Physique Théorique des Systèmes Complexes

*Quelques aspects sur le vieillissement des  
systèmes physiques*

Camilla Barbetta

## Résumé

Le vieillissement est un phénomène présent en systèmes qui n'arrivent pas à équilibrer. Il est caractérisé par un changement de la réponse du système en fonction de l'instant où on le perturbe. Dans le cadre d'une introduction au sujet, on présente le vieillissement dans un système bien connu, le modèle d'Ising. Ensuite, on étudie un cas avec désordre. Dernièrement, on présente le *trap model*, une façon de comprendre pourquoi un système vieillit.

# 1 Introduction

Quand un système est à l'équilibre, les paramètres qui le caractérisent, comme la température, n'évoluent pas. En plus, la réaction du système à une perturbation au temps  $t_w$  dépend seulement de l'intervalle de temps  $t - t_w$  entre la mesure et la perturbation.

Pour certains systèmes hors-équilibre qui n'arrivent pas à équilibrer (son temps de relaxation dépend de la taille du système, divergent pour la limite thermodynamique), la situation est totalement différente : l'état macroscopique évolue et la réponse aux perturbations dépend non seulement de  $t - t_w$ , mais du instant  $t_w$  où la perturbation a été faite. Le système réagit alors différemment avec son âge : il vieillit.

Expérimentalement, cela peut être vu dans le temps de relaxation d'un système désordonné. Initialement, le système est à  $T > T_c$  et soumis à un champ magnétique : il est alors ferromagnétique. Le système est refroidi à  $T < T_c$  sous ce champ magnétique : il est alors hors-équilibre. Après un intervalle de temps  $t_w$ , ce champ est éteint. Dans ce cas, la perturbation est justement éteindre le champ magnétique. Il se mesure alors comment la magnétisation diminue (car le système est désordonné) jusqu'à son valeur d'équilibre. Le résultat peut être vu sur la fig.(1).

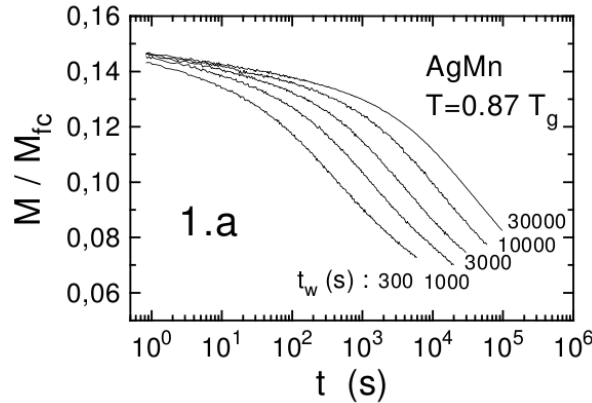


FIG. 1 – Évolution de la magnétisation d'une alliage Ag : Mn<sub>2,6%</sub> en fonction du temps  $t$ . Le champ a été éteint à  $t = 0$ . Le temps  $t_w$  indique le temps que le système a resté sous le champ magnétique à  $T < T_c$ .

Les courbes montrent le résultat pour de temps d'attente croissante. Tout d'abord, on voit que l'évolution dépend du temps qu'on a laissé le système sous le champ magnétique : le système vieillit. Ensuite, on voit que la relaxation vers l'équilibre est de plus en plus lente : le plus âgé le système, le plus lentement il évolue.

On peut voir aussi le vieillissement à travers de l'étude de la fonction de corrélation  $C(t, t_w)$  entre le système à l'instant  $t$  et à l'instant où on applique une perturbation  $t_w$ . À l'équilibre, le théorème de fluctuation dissipation assure que  $\chi(t, t_w) = (1 - C(t, t_w))/T$ , où  $\chi(t, t_w) = \int_{t_w}^t R(t, t') dt'$  est l'intégrale de la réponse linéaire. Cette relation ne doit pas être observée a priori hors équilibre. Dans la fig.(2) on voit l'évolution de la courbe  $\chi$  versus  $C$  pour un système qui arrive à équilibrer. Dans la fig.(3) on voit le comportement des systèmes qui vieillissent.

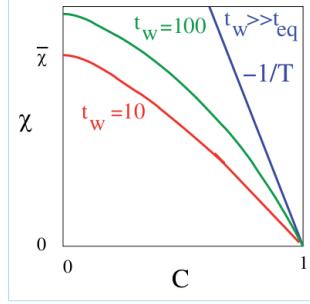


FIG. 2 – Courbes pour un système hors-équilibre qu’après un temps  $t_{eq}$  arrive à équilibrer. La courbe asymptotique est alors la droite donnée par le théorème de la fluctuation-dissipation, notée par la pente  $-1/T$ .

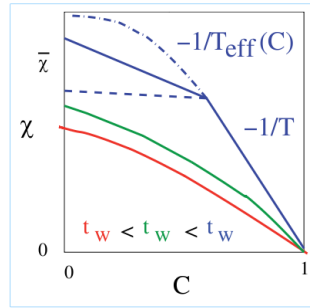


FIG. 3 – Courbes pour un système hors-équilibre qui présente vieillissement. Quelques types de courbes asymptotiques pour  $t_w$  très long sont montrées (courbes notées par  $-1/T$ , continuant en  $-1/T_{eff}$ ). On voit en particulier la courbe correspondant au problème de croissance des domaines en ligne pointillée.

Dans la fig.(2), le système s’approche de l’équilibre : pour  $t_w$  très grand, la courbe asymptotique correspond à celle du Théorème Fluctuation-Dissipation. Dans l’autre cas, la courbe asymptotique est très différente.

On a choisi alors dans ce rapport d’examiner d’abord le cas de croissance des domaines en détail. C’est un exemple simple basé sur le modèle d’Ising où on pourra voir l’évolution de plus en plus lente et on pourra expliquer la forme de la courbe asymptotique montrée dans fig.(3). On verra la suggestion d’une loi d’échelle pour la fonction de corrélation. Ensuite, on verra qu’une loi d’échelle apparaît aussi pour le cas du modèle d’Ising sous champ aléatoire à  $1d$ . Finalement, on présentera le *trap model*, une façon d’expliquer le vieillissement montrant que ce phénomène a lieu dès que le système a des nombreux états métastables profonds.

## 2 Exemple sans désordre : modèle d’Ising

Dans cette section, on s’intéresse à un exemple très simple où on voit déjà le vieillissement. On regarde le bien connu modèle d’Ising en dimension trois sans désordre. On s’intéresse à une formulation continue du problème. Pour cela, on définit un champ correspondant à la moyenne des spins contenus dans un cercle de rayon  $L$  :

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_i^N s_i .$$

On considère la situation suivante : initialement, le système est dans sa phase paramagnétique ( $T > T_c$ ). À l’instant  $t=0$ , on met le système à  $T < T_c$ . On voudrais alors savoir comment le champ

$\phi(\vec{x}, t)$  évolue en fonction du temps. La dynamique dans ce cas est considérée très amortie et donc respecte l'équation de Langevin

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\vec{x}, t)} + \xi(\vec{x}, t), \quad (1)$$

où  $F[\phi]$  est l'énergie libre de Landau-Ginzburg

$$F[\phi] = \int d\vec{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g}{4} \phi^4 \right],$$

et  $\xi(\vec{x}, t)$  est un bruit blanc gaussien avec variance réglée par la température.

Comme nous partons de l'état paramagnétique, la longueur de corrélation entre les spins est finie. Pour une taille suffisamment grande du rayon de coarse-graining  $L$ , la condition initiale est alors

$$\langle \phi(\vec{x}, 0) \phi(\vec{x}', 0) \rangle = \Delta \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Quand le système est dans la phase ferromagnétique, la température joue un rôle secondaire, introduisant seulement des fluctuations dans les amas d'une certaine phase. Son comportement est essentiellement le même, dès que  $T < T_c$ . On décide alors de mettre  $T = 0$  pour  $t > 0$ . Cela permet de simplifier la dynamique, une fois qu'il n'y a plus de bruit  $\xi$  et l'évolution se fait suivant une simple descente gradiente :

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = (\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}, t) - g \phi(\vec{x}, t)^3.$$

Dans cet état, on peut voir que les solutions d'équilibre sont  $\phi = \pm \sqrt{m^2/g}$ . Le problème reste cependant non-linéaire. On fera l'approximation de Hartree, qui consiste à remplacer  $\phi(\vec{x}, t)^3 = \langle \phi(\vec{x}, t)^2 \rangle \phi(\vec{x}, t)$ . On note que comme le problème est invariante par translation,  $\langle \phi(\vec{x}, t)^2 \rangle$  ne dépend pas de  $\vec{x}$ . On définit  $a(t) = m^2 - g \langle \phi(\vec{x}, t)^2 \rangle$ . Le problème étant invariant par translation, il peut facilement être résolu dans l'espace de Fourier

$$\phi(\vec{k}, t) = \phi(\vec{k}, 0) e^{-k^2 t + \int_0^t a(t') dt'}. \quad (2)$$

Pour que  $a(t)$  soit auto-consistante, ce résultat doit être substitué dans la définition de  $a(t)$ , ce qui donne en utilisant les conditions initiales

$$a(t) = m^2 - g \Delta \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-2k^2 t + 2 \int_0^t a(t') dt'}. \quad (3)$$

On s'intéresse maintenant au cas où il a passé un temps très grand après le changement de température. Nous sommes alors proche de la solution ferromagnétique et  $\langle \phi(\vec{x}, t)^2 \rangle = m^2/g$ . Cette condition appliquée à (3) implique pour  $t \gg 1$

$$2 \int_0^t a(t') dt' \approx 3/2 \log(t/t_0)$$

avec  $t_0 = (m^2 \Delta / g)^{2/3} / 8\pi$ .

Nous avons alors une expression fermée pour  $\phi(\vec{k}, t)$  dans la limite de  $t$  très grand. On peut alors calculer la fonction de corrélation dans le temps et dans l'espace :

$$\langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') \rangle = \frac{m^2}{g} \left( \frac{4tt'}{(t+t')^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{x}')^2}{4(t+t')}} \quad (4)$$

pour  $t' \leq t$ .

De cette fonction, on voit que

- pour  $t$  et  $t'$  fixes, la fonction de corrélation décroît exponentiellement sur une distance  $|\vec{x} - \vec{x}'| \propto \sqrt{t+t'}$ . La taille typique alors des amas de magnétisation  $\pm \sqrt{m^2/g}$  au temps  $t$  est proportionnel à  $\sqrt{t}$
- pour  $\vec{x} - \vec{x}'$  aussi grand qu'on veut, mais fixé et pour  $t$  très grand, l'exponentielle tend vers l'unité. La corrélation est alors une fonction de  $t'/t$ .

- on garde  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  fixe. Si  $t = t' + c$ , avec  $c \ll t'$ ,  $t'/t \rightarrow 1$  dans la limite des grands temps. La fonction de corrélation tends alors vers  $m^2/g$ . Ce la veut dire que même si la distance entre deux points est très grand, si on regarde cette région pendant un temps fini les deux points auront typiquement la même magnétisation
- on garde  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  fixe. Si cependant  $c \gg t'$ ,  $t'/t \rightarrow 0$  dans la limite des grands temps. La fonction de corrélation tends vers zéro. Cela veut dire que chaque point appartient à des amas différents.

Des deux dernières observations, on conclue alors qu'à l'instant  $t'$  le mouvement des parois entre amas est observable à partir d'un temps  $\gg t'$  : la dynamique du système vers l'équilibre dépends alors de l'âge  $t'$  du système. L'évolution vers l'équilibre est alors de plus en plus lente.

On peut voir cette évolution comme la descente d'un potentiel qui devient de plus en plus plan : la descente se fait de plus en plus lentement. Il est d'abord facile à voir que le système arrive à l'équilibre avec vitesse nulle :  $-\left(\frac{dF}{dt}\right) = -\frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$ . Or, à l'équilibre nous sommes sur un minimum de  $F$  et donc  $dF/dt = 0$ , ce qu'implique  $\partial \phi / \partial t = 0$ .

Plus en détail, on peut voir l'évolution du système proche du minima de  $F$ . Cela revient à évaluer l'hessienne de  $F$  et ses valeurs propres. Utilisant l'approximation de Hartree, on arrive à  $\lambda_{min} \approx -3/4t$ . Cela veut dire que pour les temps longs, la descente vers l'équilibre se fait suivant une direction avec valeur propre qui tends vers zéro : de plus en plus lentement.

On peut maintenant aussi comprendre la courbe asymptotique bleue pointillée (fig.(3)) : pour  $t - t' < t'$ , la dynamique se passe seulement dans les domaines et c'est une dynamique d'équilibre, d'où la pente  $-1/T$ . Pour  $t - t' > t'$ , c'est le mouvement des parois qui domine et la corrélation tombe a zéro.

Dernièrement, on voit que les résultats ici obtenus sont bien décrits par une loi d'échelle

$$\langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') \rangle = f \left( \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{L(t)}, \frac{L(t)}{L(t')} \right), \quad (5)$$

où  $L(t)$  est la taille caractéristique des amas à l'instant  $t$  (dans notre cas,  $L(t) = \sqrt{t}$ ). On note que cette description est possible seulement dans le cas  $L(t)/L(t') \neq 1$ . Pour  $L(t) \approx L(t')$ , on aura une simple relaxation des amas vers l'équilibre. Cette description en loi d'échelle est aussi valable pour d'autres systèmes, comme on verra dans la suite.

### 3 Cas désordonné

Dans cette section, on a choisi de traiter un cas très particulier de système désordonné qui vieillit : le modèle d'Ising sous champ aléatoire à une dimension. Dans ce cas simple, la loi d'échelle présentée dans (5) est retrouvée analytiquement.

Le modèle consiste en une chaîne de spins couplés par une interaction ferromagnétique et soumise à un champ aléatoire indépendant de moyenne zéro et variance  $h^2$ . L'hamiltonienne est

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} - \sum_{i=1}^N h_i s_i.$$

Quand la température est nulle, on peut évaluer la taille typique des amas avec l'argument d'Imry-Ma. On fait un bilan énergétique : initialement, comme le système est à  $T = 0$ , il est entièrement aligné. On applique alors le champ aléatoire. Si on reverse tous les spins d'un amas de taille  $l$ , le gain d'énergie sera typiquement  $-\sqrt{l}h$ . Le coût dû aux frontières sera  $2J$ . Les deux contributions s'annulent pour  $L_{typ} = 4J^2/h^2$ .

De ce résultat, on voit bien qu'à une dimension la phase ordonnée n'est stable ni à  $T = 0$ . La taille caractéristique des amas est cependant une fonction de la température : pour  $T > 0$ , elle vaut  $L \ll L_{typ}$ . On s'intéresse alors à l'évolution d'un système qui passe d'une température  $T > 0$  vers  $T = 0$  à  $t = 0$ .

Pour cela, il est utile de réécrire l'hamiltonienne en fonction du nombre de parois. On appellera  $a$  les frontières entre spins  $\pm$  et  $b$  les frontières  $\mp$ . Le nombre de chaque type de frontière sera noté  $N_a$  et  $N_b$  respectivement et la position de la  $i$ -ème frontière sera  $a_i$  et  $b_i$ . L'hamiltonienne sera alors donnée par

$$H = -J(N-1) - \sum_{i=1}^N h_i + 2J(N_a + N_b) + \sum_i^{N_a} V(a_i) - \sum_i^{N_b} V(b_i),$$

où  $V(x) = -2 \sum_{i=1}^x h_i$ . Un pair de parois a un coût  $4J \pm h_i$ , changer la position d'une paroi a un coût  $\pm 2h_i$  et l'annihilation de deux parois a un coût  $-4J \pm h_i$ .

Si on a  $L_{typ}$  petit, on aurait  $L_{typ}/L = 1$ . Or, dans cet cas on a une simple relaxation. On impose alors  $L_{typ} \gg 1$ , ce qui revient au cas de faible désordre  $h^2 \ll J$ . Dans ce cas, la dynamique vers l'équilibre est la suivante : les parois diffusent dans un potentiel  $V(x)$  pour le type  $a$  et  $-V(x)$  pour le type  $b$ . Si elles se rencontrent, elles s'annihilent. Elles ne sont jamais créées, car c'est trop coûteux.

Comme dans la section précédente, on s'intéresse à la limite où  $t$  est très grand. Dans ce cas, les parois proches ont été déjà annihilées : il ne reste que la diffusion des parois. Celles qui restent ont diffusé librement pendant un temps  $t$  : on voit alors apparaître une distance typique entre parois  $d_S(t)$  donnée par la distance typique sur laquelle diffuse une particule dans un potentiel aléatoire  $V$  sur un temps  $t$ . La distance entre parois définit la taille d'un amas et on a alors  $L(t) = d_S(t)$ .

Le problème de la diffusion d'une particule dans un potentiel aléatoire est bien connu. Pour le cas où le potentiel est donné par la somme de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle, comme dans notre cas, il est appelé la diffusion de Sinai.

On peut estimer  $d_S(t)$ . Pour  $t' < t$ , la paroi passe la plus part du temps piégée dans le puits le plus profond. Sur une distance  $d_S(t)$ , le plus profond puits trouvé par la paroi sera de l'ordre de  $h\sqrt{d_S(t)}$ , car  $V$  est donné par la somme de variables aléatoires. Le temps de sortie de ce puits est donné par la loi d'Arrhenius  $t = e^{\frac{h\sqrt{d_S(t)}}{k_B T}}$ . On conclue alors que  $L(t) = d_S(t) \propto (T \log t)^2$ .

Il nous reste maintenant seulement relier ce résultat avec la loi d'échelle (5). Dans la section précédente, sans désordre, on pouvait dire que la barrière d'énergie typique qu'une frontière devait surmonter pour bouger était de l'ordre de sa surface. On fera une hypothèse similaire dans le cas avec désordre, en disant que l'ordre de grandeur typique d'une barrière d'énergie est  $L^\psi$ . Si on utilise la loi d'Arrhenius pour estimer le temps de sortie de ce puits, on arrive à  $L(t) \propto (T \log t)^{1/\psi}$ . Or, on vient de trouver le même résultat pour  $\psi = 1/2$ . On conclue alors que dans la limite de faible désordre et des temps longs, la fonction de corrélation pour ce modèle respecte la même loi d'échelle (5).

## 4 Trap model

Le *trap model* est un modèle simplifié de l'évolution d'un système dans son espace de phase. Ce modèle présente du vieillissement et donne donc une façon de voir pourquoi ce phénomène a lieu dans des vrais systèmes.

Tout d'abord, on s'intéresse à un système quelconque. Son énergie libre possède des nombreux minima locaux. Les microétats correspondants à ces minima d'énergie sont appelés états métastables. Dans nombreux modèles avec désordre, il s'avère que l'énergie libre est très rugueuse. On considérera alors que les minima sont des puits profonds. Le système passe alors très peu de temps non piégé.

Le modèle consiste alors à ne considérer que ces états. On néglige en plus la position relative de ces puits dans l'espace de phase. On a alors  $N$  puits, chacun de profondeur  $\Delta E_i$ . Le temps que le système prends pour sortir de ce puits est donné par la loi d'Arrhenius  $\tau_i = \tau_0 e^{-\Delta E_i/T}$ . Une fois sorti d'un puits, le système tombe immédiatement au hasard dans un des autres.

La question maintenant est attribuer une distribution de probabilité à  $\Delta E$  et par conséquent à  $\tau$ . On s'inspire du modèle des énergies aléatoire. Dans ce modèle, l'énergie de chaque configuration est tirée au hasard selon une distribution gaussienne de moyenne nulle et variance  $J^2$ . Ce modèle présente une transition de phase pour  $T < T_g$ . Dans cette phase, le comportement est dominé par quelques états qui se distribuent selon un processus de Poisson  $e^{\Delta E/T_g}$ . Dans d'autres modèles, par exemple le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, on retrouve une forme similaire pour la densité d'états. Cela nous suggère alors

$$P(\Delta E) = \frac{A}{T} e^{\frac{x\Delta E}{T}},$$

où  $A$  est une constante et  $x$  est une fonction de la température.

La distribution des temps de sortie  $\tau$  peut être dérivée de  $P(\Delta E)d\Delta E = \psi(\tau)d\tau$ . On obtient

$$\psi(\tau) = \kappa\tau_0^x\tau^{-(1+x)}.$$

Cette distribution ne présente pas de moyenne finie pour  $x \leq 1$ . Appelons  $t$  le temps qu'on a laissé le système évoluer. Comme le système passe de piège en piège, on a  $t = \sum_i^{n(t)} \tau_i$ , où  $n(t)$  est le nombre de pièges que le système a visité jusqu'à  $t$ . Comme le premier moment de la distribution de  $\psi(\tau)$  n'est pas fini, le théorème du limite central n'est plus valable. On peut en effet montrer que l'ordre de grandeur de  $t$  est le plus grand temps de sortie des pièges que le système a visité  $\tau_{max}$ . La profondeur typique du plus profond puits visité en  $n(t)$  mouvements est donnée par

$$n(t_w) \int_{\tau_{max}}^{infy} \psi(\tau)d\tau \approx 1.$$

En même temps, on a

$$t_w = \sum_{i=1}^{n(t_w)} \tau_i \approx n(t_w) \int_0^{\tau_{max}} \tau\psi(\tau)d\tau.$$

On peut alors résoudre ces deux équations en éliminant  $n(t)$  pour le cas  $x < 1$ . On obtient  $\tau_{max} \approx t$ . Cela veut dire qu'à  $t$ , les puits avec un temps de sortie plus petit que  $t$  sont visités, tandis que les autres non. Il y a alors une brisure d'ergodicité. Pour le cas  $x > 1$ , on trouve  $\tau_{max} \propto (t)^{1/x} \ll t$ . Cela veut dire que le système ne reste pas piégé, il visite plusieurs états.

Finalement, on voit que pour  $x < 1$  le système vieillit : le système passe la plus parte du temps piégé, tous les observables physiques sont dominés par les propriétés du plus profond puits visité jusqu'à  $t$ . Il atteint l'équilibre seulement si le nombre de puits est fini.

## 5 Conclusion

Dans ce rapport on a abordé quelques aspects liés au vieillissement. On a vérifié explicitement qu'il y a du vieillissement dans deux exemple, avec et sans désordre. Dans ces deux cas, on voit que l'hypothèse d'une loi d'échelle pour la fonction de corrélation se tient. On a aussi présenté le *trap model* pour essayer d'avoir une vision de pourquoi le vieillissement a lieu.

Des exemples montrés dans ce rapport, on voit que le vieillissement est présent en plusieurs systèmes désordonnés, une fois que ceux ci possèdent un grand nombre d'états métastables. On a vu aussi qu'il est fondamental faire des hypothèses à propos de l'évolution des systèmes hors-équilibre (modèle A, dans notre cas). Les résultats suggèrent aussi d'autres développements dans le domaine hors-équilibre, comme la définition d'une température effective. En effet, d'après les fig. (2) et (3), on se demande s'il n'est pas possible de dériver une température effective pour des systèmes hors-équilibre comme la dérivée de la courbe  $\chi(C)$ , par analogie avec le cas d'équilibre. Il s'agit d'un sujet actuel de recherche [3].

## Références

- [1] G. Biroli. *Journal of Statistical Mechanics*, 2005.
- [2] J-P Bouchaud. *J. Physique I*, 2 :1705, 1992.
- [3] L. Cugliandolo. *Images de la physique*, 2007.