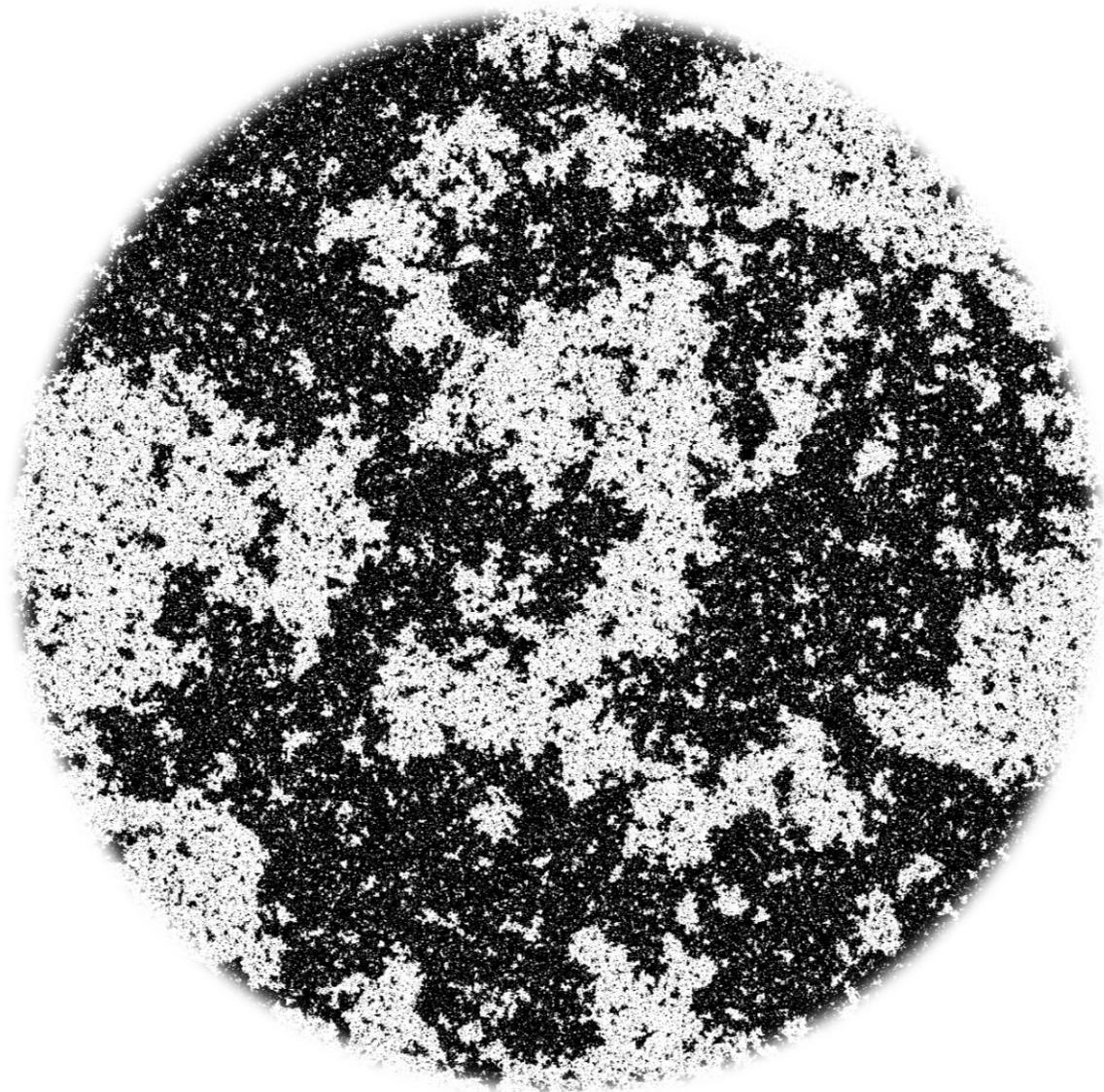


# Étude des corrélations à trois points du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE ET HAUTES ÉNERGIES



# Table des matières

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Sujet / Problématique .....</b>	<b>1</b>
<b>Outils.....</b>	<b>4</b>
<b>Travail réalisé / Analyse.....</b>	<b>6</b>
Magnétisation .....	7
Fonctions de corrélation .....	8
Constante du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions.....	10
<b>Conclusion.....</b>	<b>13</b>
<b>Bilan personnel et remerciements.....</b>	<b>13</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>14</b>
<b>Démarche bibliographique.....</b>	<b>14</b>

## Introduction

Le Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies (LPTHE) est une Unité Mixte de Recherche (UMR 7589) de Sorbonne Université, campus Pierre et Marie Curie, et de l'Institut de Physique (INP) du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). Il est composé de dix-neuf chercheurs du CNRS et de dix enseignants-chercheurs impliquant, ainsi, un taux élevé d'enseignants-chercheurs pour un même laboratoire comparé à celui dans la communauté française de physique théorique en général.

Le LPTHE est un laboratoire théorique mais, traite aussi des applications. La théorie quantique des champs en tant que principe unificateur est le cœur de leur étude. Il est composé de quatre groupes de recherche dont celui de *Physique Mathématique*, de *Cordes, Branes et Champs*, de *Physique des Particules et Cosmologie* et de *Matière Condensée et Physique Statistique (MSMC)* dans lequel j'effectue mon stage.

Mon groupe d'accueil a une activité de recherche scientifique étendue que nous détaillerons à titre indicatif. En physique de la matière condensée, ils étudient les qubits supraconducteurs, le transport dans les systèmes hybrides en relation avec la spintronique et les systèmes électroniques à basses dimensions. En physique statistique, ils traitent la majorité des thèmes de recherche tels que la théorie conforme des champs et ses applications pour les phénomènes hors d'équilibre, la dynamique quantique hors d'équilibre, les fluctuations dans les systèmes vitreux (composés amorphes) et la dynamique à travers les transitions de phases dont j'étudie une partie pendant ce stage sous la tutelle de Mme. Leticia F. Cugliandolo (enseignante-chercheuse de Sorbonne Université) et Mr. Marco Picco (chercheur du CNRS) avec l'aide de Mr. Alessandro Tartaglia (doctorant de Sorbonne Université).

## Sujet / Problématique

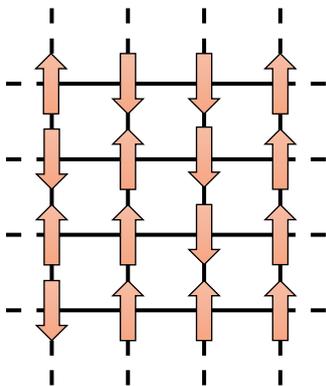


Figure 1 : Configuration aléatoire du modèle d'Ising bidimensionnel.

Le sujet de mon stage est l'*Étude numérique des corrélations à trois points du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions*. Le modèle d'Ising (MI) est un modèle clef de la physique statistique. En effet, il permet de modéliser l'émergence des effets collectifs étant au cœur de la physique statistique et engendrés par des interactions locales entre des particules à deux états (spin haut et bas). Le MI est la représentation de ces particules sur un réseau d'une à  $d$  dimensions. Historiquement, le MI à une dimension a été résolu analytiquement par Ernst Ising, physicien allemand, en 1925 pendant sa thèse qu'il effectua sous la tutelle de Wilhelm Lenz. Pour le MI à deux dimensions, il a été résolu analytiquement par Lars Onsager, physico-chimiste américain, en 1944. L'hamiltonien de notre système (pas de champ magnétique) est :

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

avec  $J_{ij}$  notre constante de couplage définie plus haut, ou coefficient d'interaction entre deux spins (interaction d'échange). Le symbole  $\langle i,j \rangle$  signifie que, pour le spin noté  $i$ , on ne s'intéresse qu'aux quatre premiers voisins  $j$  de ce spin. Nous allons étudier le MI à deux dimensions dont nous pouvons imaginer une configuration, cf. *Figure 1*, pour laquelle le spin des particules est représenté par des flèches. Le réseau à des conditions aux bords périodiques dans les deux directions du plan de la page mais, nous n'en avons représenté qu'une partie. La cinétique du modèle sera établie via l'algorithme du bain thermique en utilisant la méthode de Monte-Carlo en temps continu, cf. *Outils* et sera étudiée en prenant une température proche de zéro. Le but de notre étude est de considérer l'aspect cinétique de l'étude de ce modèle qui sera comparé plus loin à un phénomène géométrique (statique), la percolation.

Le MI a été généralisé au modèle de Potts composé d'un réseau aux nœuds duquel nous avons des spins pouvant prendre  $Q$  valeurs. Ainsi, le MI que nous étudions est le modèle de Potts pour  $Q = 2$ .  
Remarque : Le modèle de Potts à nombre d'états infini est le modèle de Kac.

Nous calculerons les fonctions de corrélation à deux et trois points par une démarche numérique que nous expliquerons plus loin. Elles sont comprises entre 0 et 1. Afin de mieux comprendre cette notion de fonction de corrélation, nous pouvons représenter notre configuration, cf. Figure 1, par des sites orangés (spin haut) et blanc (spin bas), cf. Figure 2. Une fonction de corrélation à  $n$  points est la probabilité que  $n$  sites aient le même spin. En effet, une fonction de corrélation entre deux spins situés à une distance donnée, corrélation à deux points, est une moyenne des configurations des deux spins. Un amas est l'ensemble des sites premiers voisins d'une même valeur de spin. Ainsi, si nous considérons que cette configuration est certaine et que nous prenons le site encadré en rouge inclus dans l'amas hachuré en gris alors nous avons les fonctions de corrélation à deux points :

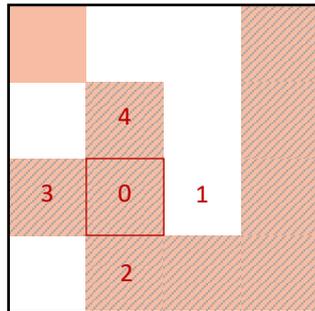


Figure 2 : Configuration aléatoire en représentation de site.

$$\begin{aligned} \langle \phi(0)\phi(1) \rangle &= 0 \\ \langle \phi(0)\phi(2) \rangle &= 1 & \langle \phi(0)\phi(3) \rangle &= 1 & \langle \phi(0)\phi(4) \rangle &= 1 \\ \langle \phi(1)\phi(2) \rangle &= 0 & \langle \phi(4)\phi(1) \rangle &= 0 \\ \langle \phi(2)\phi(3) \rangle &= 1 & \langle \phi(3)\phi(4) \rangle &= 1 \end{aligned}$$

En effet, nous sommes certain que les sites 0 et 3 ont le même spin mais, que ce n'est pas le cas des sites 0 et 1. Par exemple, pour cette dernière fonction de corrélation,  $\phi(0) = 1 \times \phi(1) = 0$  donne 0 si, à la place de la variable de spin, on travaille avec la variable « d'occupation »  $\phi(i) = \frac{1+s_i}{2}$  transformant  $s_i = 1$  en  $\phi(i) = 1$  et  $s_i = -1$  en  $\phi(i) = 0$ . Les  $\langle \phi(i) \times \phi(j) \rangle$  sont, en fait, des sommes normalisées sur un grand nombre de termes (= nombre de configurations). Nous étudierons ces fonctions à des distances différentes entre les sites. Remarques : Notre exemple correspond à une seule configuration ainsi, les  $\langle \dots \rangle$  sont des « moyennes » normalisées à un. Et, les sites à des positions diagonales entre elles ne sont pas des premiers voisins.

De même, nous avons les fonctions de corrélation à trois points suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \phi(0)\phi(2)\phi(3) \rangle &= 1 & \langle \phi(0)\phi(3)\phi(4) \rangle &= 1 \\ \langle \phi(0)\phi(1)\phi(2) \rangle &= 0 & \langle \phi(0)\phi(4)\phi(1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

En effet, pour les fonctions de corrélation 012 et 041, les trois sites considérés n'ont pas tous le même spin. Dans notre illustration, nous n'avons pas considéré les conditions périodiques du réseau mais, dans le cadre de notre projet, nous considérerons qu'un amas puisse être de taille infinie c'est-à-dire qu'il pourra traverser le réseau bidimensionnel, périodiquement infini, suivant une ou deux directions de l'espace, cf. Figure 3. Pour la figure 3, nous avons un amas infini horizontal, cf. Figure 3 (haut), et un amas infini diagonal, cf. Figure 3 (bas).

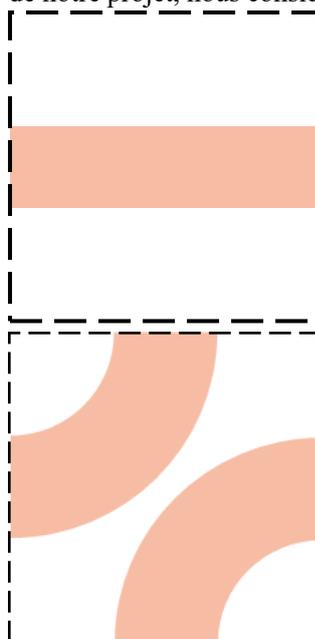


Figure 3 : Exemple d'amas infinis suivant une puis, deux directions.

Nous allons, maintenant, faire le *parallèle* entre la cinétique de ce modèle et le phénomène géométrique qu'est la *percolation*. Tout d'abord, nous pouvons visualiser la percolation en imaginant une configuration de sites. La différence entre ce site et le site du modèle précédent, cf. Figure 2, est que, pour la percolation, un site orangé représente un site existant et un site blanc représente l'absence de site, nous n'avons plus deux valeurs de spin mais, une valeur, non reliée au spin, signifiant l'existence d'un site, la percolation est le modèle de Potts pour  $Q = 1$ . En effet, le terme « percolation » a, sans doute, été utilisé pour généraliser et théoriser la notion commune de percolation désignant l'écoulement d'un fluide dans un milieu plus ou moins poreux. Comme le café s'écoule dans les pores d'un percolateur, l'information s'« écoule » également entre les sites d'un réseau. En effet, cette représentation théorique par des sites trouve des applications dans la représentation d'autres modèles naturels tels que la conduction à travers un échantillon désordonné, l'économie, une émulsion photographique, la propagation d'une épidémie et des feux de forêts. Nous considérons bien un phénomène géométrique pour la percolation car, nous ne considérons pas la dynamique d'un écoulement à travers un réseau de sites mais, bien le réseau lui-même qui n'évolue pas mais, dont les configurations pourront être étudiées

une à une de façon probabiliste. Pour notre projet, nous considérerons cette percolation de site cependant, il existe aussi une percolation de lien pour laquelle l'« écoulement » ne s'effectue plus de sites en sites premiers voisins mais, suivant des liens qui devront être connectés entre eux et que nous pouvons imaginer comme étant des bâtonnets.

La percolation est un *processus* d'un état vers un autre du réseau. Ce phénomène de seuil est caractérisé par un point critique  $p_c$  et un paramètre de contrôle  $p$  avec  $(p_c, p) \in [0, 1]^2$  ainsi, l'état de départ est ce réseau pour lequel il n'y a que des amas de taille finie (régime sous-critique ( $p < p_c$ )) et l'état d'arrivée correspondra à l'apparition d'au moins un amas infini (régime sur-critique ( $p > p_c$ )). Dans ce cas, un amas infini est un amas percolant, nous avons une percolation quand un amas infini traverse le réseau. Il existe également un régime critique ( $p = p_c$ ). Le point critique dépend de la géométrie du réseau (carré, triangulaire, kagomé...), de sa dimensionalité et du type de percolation (de site ou de lien). Historiquement, c'est John Hammersley qui étudie l'aspect critique de ce phénomène pour la première fois en 1957 cherchant à comprendre ce qui faisait que les masques à gaz des soldats deviennent inefficaces, il introduisit, ainsi, la *théorie de la percolation*. Au début des années 1980, Harry Kesten trouve  $p_{c\text{lien}}^{\text{carré}} = \frac{1}{2}$  pour la percolation de lien<sup>[1]</sup> du réseau carré, résultat qui sera numériquement confirmé. Pour la percolation de site du réseau carré, nous avons :  $p_{c\text{site}}^{\text{carré}} = 0,59$ .

Nous pouvons comparer la percolation de site et le MI au point critique. Un exemple principal d'une évolution du MI est le passage d'un matériau ferromagnétique (aimantation permanente) à basse température vers un matériau paramagnétique (aimantation induite par un champ magnétique) à haute température. Dans cet exemple, le point critique est la température de Curie  $T_C$  délimitant les deux états suivant la valeur du paramètre de contrôle étant la température du matériau ( $T < T_C$  ou  $T > T_C$ ). Nous avons un *phénomène critique* tout comme la percolation cependant, la percolation est un phénomène *non corrélé* au contraire du phénomène *corrélé* qu'est l'évolution du MI. En effet, la répartition probabiliste d'un site existant d'un réseau de la percolation est indépendante de celle des autres.. De même, le réseau du MI « percole » (il existe au moins un amas infini) pour  $T \lesssim T_C$  car, la température n'est pas assez élevée pour que l'agitation thermique prédomine sur les interactions entre les sites de façon certaine ainsi, les amas de taille finie pourront croître dû aux corrélations entre les sites.

Ce sont des transitions du second ordre entre deux phases ainsi, un bon moyen de vérifier si nous avons le même phénomène physique au voisinage du point critique est de comparer leur ensemble d'exposant critique. En effet, les systèmes ayant les mêmes exposants appartiennent à une même classe d'universalité ainsi, se comportent similairement au voisinage du point critique. Ce point de vue de classe d'universalité nous donne un pouvoir explicatif et prédictif des propriétés d'organisation et lois d'échelle de ces systèmes<sup>[2]</sup>. En particulier, nous pouvons comparer les exposants critiques de trois lois de puissance. L'exposant critique  $\beta$  est celui du paramètre d'ordre. Il caractérise l'état du système au cours de la transition de phase. Pour la percolation, le paramètre d'ordre est la probabilité de percolation :

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{pour } p < p_c \\ > 0 & \text{pour } p > p_c \end{cases}$$

avec  $p$  notre paramètre de contrôle,  $p_c = 0,59$  la probabilité critique pour la percolation de site et lorsque  $p \rightarrow p_c^+$ ,  $\theta(p) \approx (p - p_c)^\beta$ . Pour le MI à deux dimensions, nous pouvons prendre son application à la transition de phase ferromagnétique / paramagnétique ainsi, le paramètre d'ordre correspondant est la magnétisation dans un domaine de Weiss (où la magnétisation est uniforme) :

$$m \approx \begin{cases} (T_c - T)^\beta & \text{pour } T < T_c \\ 0 & \text{pour } T > T_c \end{cases}$$

avec  $T$  la température étant notre paramètre de contrôle et  $T_c$  la température critique ou température de Curie analogue à la probabilité critique  $p_c$  (par exemple,  $T_c = 1\,043$  K pour le fer). Ainsi, nous pouvons dire qu'un amas infini engendre une magnétisation du système en l'absence de champ magnétique (ferromagnétisme). Cependant, nous n'avons pas la même classe d'universalité car, nous n'avons pas les mêmes exposants critiques,  $\beta_{perc} = \frac{5}{36} \approx 0,139$  et  $\beta_{IM} = \frac{1}{8} = 0,125$ , donc, nous n'avons pas le même phénomène physique au point critique.

Le cœur de notre sujet est la comparaison entre la percolation et le MI bidimensionnel dont on refroidit le réseau puis, on étudie sa cinétique à une température proche de zéro. Des premières observations ont été trouvées par le groupe de recherche de S. Redner<sup>[3]</sup> en 2001 puis, peu après, l'équipe de Mme.

Cugliandolo<sup>[4]</sup> a observé directement que cette cinétique du MI semble suivre les lois de la percolation. Ce sujet a été approfondi, notamment, par Mr. M. Picco et Mme. L. F. Cugliandolo du LPTHE et Mr. R. Santachiara du Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques de l'Université Paris-Sud<sup>[5]</sup> et <sup>[6]</sup>. Le but est de vérifier, à basse température, que ce qui ressemble à de la percolation est vraiment la percolation en calculant la constante de structure de la fonction à trois points qui est une caractéristique universelle de la percolation au point critique avec une valeur :  $C_{perc} = 1,02$ .

*Peut-on lier la constante de structure du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions à celle de la percolation ?*

Le but de ce stage est de répondre à cette question car, si on peut lier les constantes de structure de ces deux modèles alors, on peut montrer que nous avons le même phénomène physique. La démarche est d'utiliser la méthode numérique Monte-Carlo simulant le MI bidimensionnel en réseau carré après un refroidissement. Le programme a été créé et modifié par Mr. Marco Picco et Mr. Alessandro Tartaglia et le but de la première partie sera de l'expliquer. Puis, nous simulerons et analyserons la magnétisation et les fonctions de corrélation. Pour finir, nous calculerons et analyserons les constantes de structures à trois points pour différentes tailles linéaires de réseau et différents nombres d'échantillons dont la précision sera soutenue par la donnée des écarts. Et, nous visualiserons la cinétique du système via des snapshots.

## Outils

La démarche utilisée pour savoir si nous pouvons lier la constante de structure du MI à celle de la percolation est une démarche numérique par l'utilisation d'un programme implémentant la méthode de Monte-Carlo en Fortran conçu et modifié par Mr. Marco Picco et Mr. Alessandro Tartaglia et de plusieurs autres programmes d'analyse de données conçus par mes soins avec l'aide ponctuelle de Mr. Alessandro Tartaglia. Le programme source est composé d'approximativement 700 lignes ainsi, nous ne pourrons pas l'insérer dans le rapport. L'intérêt sera plutôt de décrire sa structure et d'en expliquer les parties principales.

Le programme source est compilé en exécutables via un script en Bash. Ce script génère différentes versions d'exécutables à partir d'une liste de nombres premiers correspondant à des configurations aléatoires différentes. L'utilisation de plusieurs versions permet de multiplier le nombre de versions par le nombre d'échantillons définis dans le programme source et de lancer simultanément les différents exécutables pour minimiser le temps de l'exécution des programmes.

Le programme met à jour le spin d'un site choisi aléatoirement et que l'on retourne ( $s_i \rightarrow -s_i$ ) avec une probabilité<sup>[7]</sup> :

$$W_{e_{flip}} = \frac{e^{-\frac{\beta\Delta E}{2}}}{e^{-\frac{\beta\Delta E}{2}} + e^{\frac{\beta\Delta E}{2}}} \quad (1)$$

avec :

- $\beta = \frac{1}{k_B T}$  avec  $k_B = 1$  la constante de Boltzmann pour notre programme et  $T \rightarrow 0$  la température du système.
- $\Delta E \propto 2Je$  avec  $J$  la constante de couplage et  $e$  l'énergie d'un site qui dépend du spin de ses quatre premiers voisins. Et, l'énergie d'un site est :

$$e = s_i \left( \sum_{j \in N_i} s_j \right)$$

avec  $s_i = \pm 1$  le spin du site choisi aléatoirement et  $s_j = \pm 1$  le spin du premier voisin parmi les quatre de l'ensemble  $N_i$ . Ainsi, nous avons cinq configurations possibles en fonction de l'énergie :

Configuration	$\Delta E$	$W_{e_{flip}}$
	$-8J$	1
	$-4J$	1
	0	1/2
	$4J$	$e^{-4\beta J}$
	$8J$	$e^{-8\beta J}$

Tableau 1 : Classes en fonction de  $\Delta E$ .

Ainsi, nous pouvons définir un ensemble pour les cinq configurations (classes) possibles  $A_e = \{\text{spins étant dans la classe } e\}$ .

Il existe trois méthodes pour choisir la dynamique du système d'une configuration à une autre par le retournement d'un spin. En effet, nous pouvons utiliser l'algorithme de Metropolis, l'algorithme du bain thermique et l'algorithme de Glauber. L'algorithme de Metropolis est le plus flexible car, il s'applique à quasiment tous les cas (réseau ou non, discret ou continu, interaction à courte ou à longue portée...). Pour cet algorithme, la probabilité de retournement d'un spin est :

$$W_{e_{flip}}^{Metropolis} = \begin{cases} 1 & \text{si } E_{new} < E_{old} \\ e^{-\beta(E_{new}-E_{old})} & \text{si } E_{new} \geq E_{old} \end{cases}$$

avec  $E_{new}$  l'énergie de la nouvelle configuration et  $E_{old}$  l'énergie de l'ancienne configuration. Nous étudions le réseau à  $T = cte \approx 0$  ainsi, nous sommes dans l'ensemble canonique et cet algorithme respecte bien la minimisation du potentiel thermodynamique de cet ensemble qu'est l'énergie libre (approximativement l'énergie pour  $T \approx 0$ ). Cependant, nous utilisons l'algorithme du bain thermique exprimant mieux le sens physique de l'évolution du système car, nous avons une probabilité de retournement de  $\frac{1}{2}$ , cf. (1), pour la classe  $\Delta E = 0$  et non 1 donné par l'algorithme de Metropolis. En effet, si on retourne le spin central de cette configuration, cf. Tableau 1, nous n'avons pas une énergie minimisée mais, une énergie égale à l'état initial ainsi, il est plus naturel de passer d'une configuration à l'autre avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  que de façon systématique. **Remarque :** La probabilité de retournement d'un spin pour l'algorithme du bain thermique est égale à celle de l'algorithme de Glauber pour le modèle d'Ising (modèle de Potts pour  $Q = 2$ ).

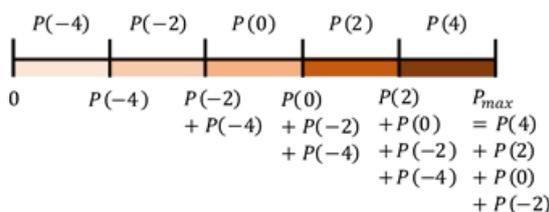


Figure 4 : Sommes partielles des probabilités de sélectionner une certaine classe.

Le programme sélectionne aléatoirement une classe (parmi les classes dont les énergies correspondantes sont  $e = \pm 4, \pm 2$  ou 0) puis, dans la classe sélectionnée on choisit aléatoirement un site, la probabilité de choisir une classe étant :  $P_{flip}(e) = W_{flip}(e) \times N_e$  avec  $N_e = \#A_e$  le nombre de spins dans une classe donnée (par rapport à ses quatre voisins). En effet, le programme génère un nombre aléatoire par

une loi de probabilité uniforme entre 0 et  $P_{max}$  la probabilité maximale (somme des probabilités associées à chaque classe) ainsi, il permet de choisir une classe parmi une répartition selon des sommes partielles, cf. Figure 4. Après le retournement du spin choisi, le programme change sa classe. Puis, le programme change la classe des quatre voisins du spin choisi précédemment. Pour notre projet, nous utilisons la méthode Monte-Carlo en temps continu (CTMC) car, la mise à jour d'une configuration du système ne se fait pas de façon discrète (en incrémentant le temps de 1) mais, on exprime un temps continu via un pas de temps  $\Delta t \sim e^\lambda$  avec  $\lambda^{-1} = \sum_e N_e W_{eflip}$ .

Un sous-programme créé par Makoto Matsumoto et Takuji Nishimura en 1997 (MT19937) génère une liste de nombres aléatoires pour chaque version d'un exécutable ainsi, il permet d'avoir des résultats différents d'une version à une autre afin de moyennner les différentes configurations aléatoires.

Pour finir, le programme calcule les fonctions de corrélation à deux et trois points. En effet, il existe, au moins, deux façons de parcourir les sites d'un réseau (un graphe) : par l'algorithme du parcours en largeur (BFS pour Breadth First Search) et l'algorithme du parcours en longueur (DFS pour Depth First Search). Le

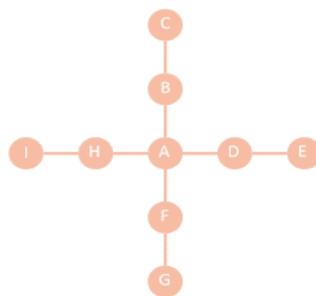


Figure 5 : Graphe.

DFS correspond à la méthode intuitive qu'on utilise pour sortir efficacement d'un labyrinthe. Cet algorithme explore en profondeur les chemins un par un. En effet, pour celui-ci, l'ordre de visite des sites suivant l'ordre alphabétique, cf. Figure 5. Dans notre programme, le BFS a été choisi. Cet algorithme explore un nœud source puis, ses premiers voisins, ses seconds voisins... En effet, pour celui-ci, l'ordre de visite des sites est : A puis, « simultanément » B, D, F, H puis, de même, C, E, G, I. Il a sans doute été choisi car, il permet d'explorer tous les sites de façon plus efficace. En pratique, le sous-programme « analysis1 » est composé de deux boucles. Une itération de la première boucle est représentée par les flèches fines, cf. Figure 6. Elle explore un site et ses premiers voisins pour identifier s'ils appartiennent au même amas puis, pour chaque premier voisin dont c'est le cas, il explore les premiers voisins de ce nouveau site. Une itération de la seconde boucle est représentée par la flèche épaisse, cf. Figure 6. Elle explore le réseau non plus au sein d'un même amas mais, de façon linéaire afin de trouver l'amas suivant pour lequel le spin change de signe. Une fois le premier site de ce nouvel amas trouvé, la première boucle reprend le relais en explorant tous les sites de cet amas. Le nombre des sites de l'amas sera mis à jour. Et, chaque amas sera labelisé d'un chiffre. De plus, le sous-programme implémente les conditions aux bords périodiques. Finalement, ce sous-programme calcule les fonctions de corrélation à deux et trois points. En effet, pour chaque site, il donne la valeur 1 aux fonctions de corrélations dont les sites appartiennent au même amas. Puis, le sous-programme fait les moyennes parmi tous les sites de chaque fonction de corrélation (en les normalisant par le nombre de sites) ainsi, les fonctions de corrélation moyennées seront comprises entre 0 et 1. Leur évolution en fonction de la distance séparant un site d'un autre nous permettra de **calculer la constante de structure à trois points du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions afin de la comparer à celle de la percolation.**

DFS correspond à la méthode intuitive qu'on utilise pour sortir efficacement d'un labyrinthe. Cet algorithme explore en profondeur les chemins un par un. En effet, pour celui-ci, l'ordre de visite des sites suivant l'ordre alphabétique, cf. Figure 5. Dans notre programme, le BFS a été choisi. Cet algorithme explore un nœud source puis, ses premiers voisins, ses seconds voisins... En effet, pour celui-ci, l'ordre de visite des sites est : A puis, « simultanément » B, D, F, H puis, de même, C, E, G, I. Il a sans doute été choisi car, il permet d'explorer tous les sites de façon plus efficace. En pratique, le sous-programme « analysis1 » est composé de deux boucles. Une itération de la première boucle est représentée par les flèches fines, cf. Figure 6. Elle explore un site et ses premiers voisins pour identifier s'ils appartiennent au même amas puis, pour chaque premier voisin dont c'est le cas, il explore les premiers voisins de ce nouveau site. Une itération de la seconde boucle est représentée par la flèche épaisse, cf. Figure 6. Elle explore le réseau non plus au sein d'un même amas mais, de façon linéaire afin de trouver l'amas suivant pour lequel le spin change de signe. Une fois le premier site de ce nouvel amas trouvé, la première boucle reprend le relais en explorant tous les sites de cet amas. Le nombre des sites de l'amas sera mis à jour. Et, chaque amas sera labelisé d'un chiffre. De plus, le sous-programme implémente les conditions aux bords périodiques. Finalement, ce sous-programme calcule les fonctions de corrélation à deux et trois points. En effet, pour chaque site, il donne la valeur 1 aux fonctions de corrélations dont les sites appartiennent au même amas. Puis, le sous-programme fait les moyennes parmi tous les sites de chaque fonction de corrélation (en les normalisant par le nombre de sites) ainsi, les fonctions de corrélation moyennées seront comprises entre 0 et 1. Leur évolution en fonction de la distance séparant un site d'un autre nous permettra de **calculer la constante de structure à trois points du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions afin de la comparer à celle de la percolation.**

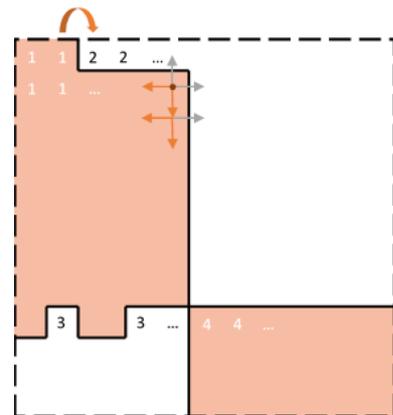


Figure 6 : Schéma du sous-programme analysis1.

## Travail réalisé / Analyse

Le travail réalisé pendant mon stage s'est composé d'une recherche bibliographique sur un article scientifique de référence<sup>[5]</sup> et un article d'ouverture<sup>[6]</sup> et au suivi de conférences et séminaires par :

- Mme. Cugliandolo sur l'*Étude numérique de la dynamique stochastique du modèle p-spin avec des interactions non symétriques*, sujet de stage de Master 1 de Ludovic Dumoulin se situant dans le même domaine que le mien.
- Mr. Picco sur le modèle d'Ising cinétique en deux dimensions et la percolation, en lien avec mon sujet.

- Mr. Raoul Santachiara sur la méthode de théorie conforme des champs afin de lier ces deux modèles, c'est le cœur de mon sujet.
- Mme. Cugliandolo sur le coarsening, un phénomène physique que nous expliquerons dans cette partie.
- Mr. Alessandro Tartaglia sur la Méthode Monte-Carlo utilisée pour mon sujet.
- Mr. Hiromitsu Takeuchi de l'Université d'Osaka au Japon sur la *Percolation in segregating Bose-Einstein condensates* mettant notamment en avant l'hypothèse d'une certaine hiérarchie dans l'arrangement de phases : il y aurait des régimes microscopiques et macroscopiques d'arrangement des amas. Et, il y aurait une anomalie due à l'effet quantique-fluide dans le régime microscopique. En effet, l'évolution des petits amas a un comportement différent pour les différents modèles présentés pendant le séminaire alors que pour les grands amas (à l'échelle macroscopique), nous avons un comportement similaire de leur évolution. Nous tenterons également de mettre en évidence ce phénomène dans notre comparaison du MI cinétique bidimensionnel et de la percolation.

De plus, dans le cadre de mon stage, j'ai également pu suivre un séminaire très intéressant de Mme. Bulbul Chakraborty de l'Université de Brandeis à Boston sur la *Fragile Matter : Stress Networks and Rigidity of Granular Materials*, en lien avec la physique statistique en général. Son séminaire mettait en évidence des transitions de phase de matériaux granuleux (comme du sable). En effet, l'application de contraintes sur ces matériaux engendre des chaînes de forces (comme lorsque l'on marche sur du sable sec à la plage, on peut dire que ce sont ces chaînes de forces qui soutiennent notre poids). Le plus intéressant a été le changement de point de vue adopté dans cette étude. En effet, les matériaux granuleux soumis à leur contrainte sont étudiés dans l'espace des forces.

La dernière partie du travail réalisé pendant mon stage sera présenté dans cette partie. Nous simulerons et analyserons la magnétisation en fonction du temps et les fonctions de corrélation en fonction de la distance entre les sites du réseau. Puis, nous simulerons et analyserons les constantes de structure pour différentes tailles de réseau et différents nombres d'échantillons. Nous en ferons la comparaison avec les constantes de structure de la percolation et mettrons en évidence l'effet du coarsening (grossissement des amas). Et, nous visualiserons et analyserons la cinétique du système via des snapshots.

## Magnétisation

Le programme Monte-Carlo calcule la magnétisation pour plusieurs échantillons. Mon travail a été de réaliser des programmes moyennant les magnétisations sur l'ensemble des échantillons pour différentes tailles du réseau et un script permettant de visualiser leur évolution en fonction du temps normalisé.

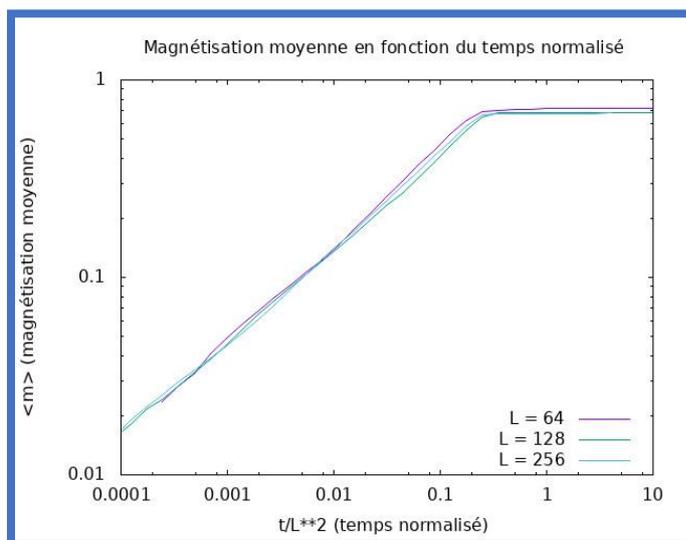


Figure 7: Magnétisation moyenne en fonction du temps normalisé.

$$\langle m \rangle = \left\langle \left| \frac{1}{N} \sum_i s_i \right| \right\rangle \quad (2)$$

avec  $N = L^2$  le nombre de sites du réseau,  $s_i$  le spin du  $i$ ème site avec  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $M = \sum_i s_i$  l'aimantation du réseau. La magnétisation moyenne augmente en fonction du temps que nous avons normalisé par le carré de la taille linéaire du système (nous avons, ainsi,  $\frac{t}{L^2}$ ), cf. Figure 7. En effet, les sites du MI sont corrélés ainsi, la répartition probabiliste d'un site existant d'un réseau du MI dépend de celle des autres sites. De plus, nous sommes à une température proche de zéro ce qui évite l'agitation thermique donc, les amas de taille finie croissent dû aux corrélations entre les sites d'où l'augmentation de la magnétisation.

À partir d'un certain temps (que nous discuterons dans le paragraphe suivant), la magnétisation moyenne atteint un palier correspondant à l'état d'équilibre du réseau ( $\langle m \rangle_{eq} \approx 0,72$ ). Pour cet état, le réseau est totalement magnétisé, c'est-à-dire que nous avons des amas finis stables dans le temps. En effet, parmi les différentes configurations d'équilibre de chaque échantillon que nous moyennons, nous pouvons avoir au moins un échantillon pour lequel nous avons  $m_{eq} = 1$  (probabilité  $2/3$ ) correspondant à un réseau composé uniquement de spins positifs ou à un réseau composé uniquement de spins négatifs (nous calculons  $\langle m \rangle$  avec une valeur absolue, cf. (2)). Pour d'autres échantillons, nous pouvons avoir une configuration de bandes (probabilité  $1/3$ ), cf. Figures 3 (haut) et 8. Pour la figure 8, nous avons  $m_{eq} = 0$  car, il y a autant de spins positifs que de spins négatifs mais, en moyenne,  $m_{eq} = \frac{1}{4}$  pour des configurations de bandes. Ainsi, pour chaque type de configuration, la moyenne des  $m_{eq}$  pondérée par les probabilités d'avoir un type de configuration ( $\frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ ) donne :  $\langle m \rangle_{eq} \approx 0,72$ . Nous pouvons également avoir une configuration d'équilibre en bande diagonale, cf. Figure 3 (bas). Pour un refroidissement vers zéro, le système se bloque souvent dans des configurations de bandes<sup>[9-11]</sup>.

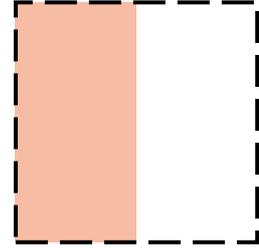


Figure 8 : Exemple de configuration de bandes.

Plus généralement, l'évolution de la magnétisation moyenne montre une transition de phase d'un état initial désordonné vers un état final d'équilibre ordonné. Nous avons différents régimes d'échelle pour observer les changements de ses structures :  $\xi_{micro} \ll \xi(t) \ll L$  avec  $\xi(t)$  la taille linéaire typique d'une structure du réseau,  $\xi_{micro}$  une longueur d'échelle microscopique du même ordre de grandeur que la taille d'un site du réseau et  $L$  étant toujours la taille linéaire (macroscopique) du système. Le phénomène agissant à l'échelle microscopique (à l'échelle d'un site) est le grossissement local des amas, il est engendré par la corrélations entre les sites, c'est le **coarsening**. Pour notre cas d'un paramètre d'ordre non conservé (magnétisation moyenne), la dépendance temporelle (due au coarsening) de la taille linéaire typique d'une structure du réseau est<sup>[8]</sup> :

$$\xi(t) \sim t^{\frac{1}{z}} \quad (3)$$

avec  $z = 2$ . Ainsi, l'ordre de grandeur de la taille typique d'équilibration est  $\xi(t_{eq}) \sim L$ . En effet, à l'état d'équilibre, l'ordre de grandeur de la taille typique d'une bande ou d'un réseau dont tous les spins sont du même signe est bien  $L$ . Donc, cf. (3), l'ordre de grandeur du temps d'équilibration est<sup>[5]</sup> :  $t_{eq} \sim L^2$  (4). En effet, d'après notre résultat, cf. Figure 7, l'état d'équilibre est déjà atteint à ce moment ( $t = L^2 \Rightarrow \frac{t}{L^2} = 1$ ) et même plus tôt :  $\frac{t_{eqnum}}{L^2} \approx 0,25$ .

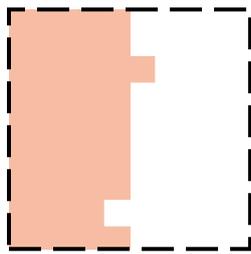


Figure 9 : Configuration de bandes rugueuses.

Nous pouvons justifier physiquement que les bandes et anneaux soient stables à l'état d'équilibre (interfaces plus lisses). En effet, en considérant que l'interface de la figure 8 est finalement rugueuse, cf. Figure 9, les rugosités disparaissent car, leur spin correspond finalement à la classe  $\Delta E = -4J$ , cf. Tableau 1, et dont la probabilité de leur retournement est bien  $W_{-4J flip} = 1$ . L'énergie est ainsi minimisée. Remarque : Pour un réseau refroidi, les bandes diagonales sont instables et disparaissent via un mécanisme différent (non étudié) au-delà d'une échelle de temps bien plus longue<sup>[12, 13]</sup>.

## Fonctions de corrélation

Les fonctions de corrélation nous aideront à calculer la constante de structure à trois points du MI (pour la comparer à celle de la percolation) ceci étant notre but principal cependant, nous pouvons nous intéresser à l'évolution des fonctions de corrélations en fonction de la distance entre les sites du réseau pour différents temps afin de mieux comprendre leur sens physique.

Dans notre programme, nous avons calculé les fonctions de corrélation à deux points et celles à trois points.

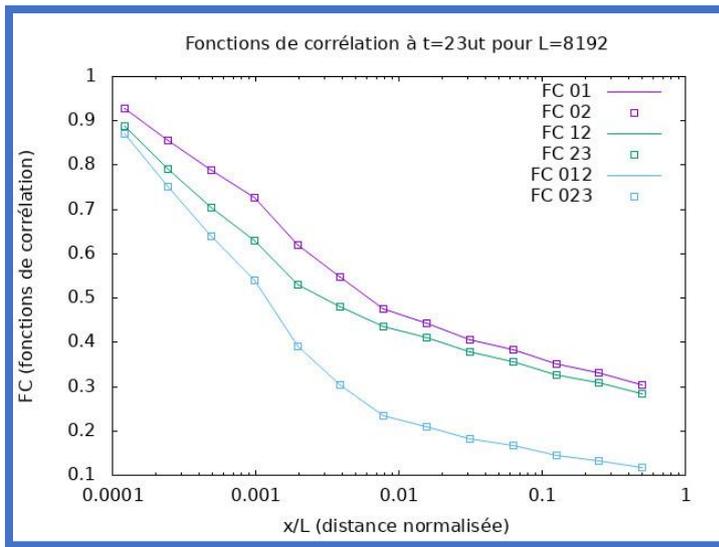


Figure 10 : Fonctions de corrélation à t=23ut pour L=8192.

L'isotropie de l'espace, cf. Figure 2, nous permet d'affirmer que les valeurs des fonctions de corrélation horizontales et verticales sont approximativement égales entre elles (en considérant toujours les différences entre les échantillons) de même que pour l'ensemble des corrélations diagonales entre elles et celles à trois points entre elles. Ces égalités ont été vérifiées pour toutes les fonctions de corrélations à différents temps et, pour plus de clarté, nous pouvons montrer que ces fonctions de corrélations sont égales (dans chaque ensemble) en prenant deux fonctions de corrélation de chaque ensemble pour un temps intermédiaire ( $t = 23 ut$ , unités de temps), cf. Figure 10. En effet, les courbes avec des lignes coïncident avec

celles avec des points.

Nous observons que les fonctions de corrélation diminuent en fonction de la distance entre les sites. En effet, plus les sites sont éloignés, moins ils sont corrélés cependant, les courbes varient de moins en moins à grande distance dû aux conditions au bords périodiques. Plus généralement, une fonction de corrélation à  $N$  points est la probabilité que  $N$  points appartiennent à un même amas. Donc, la figure 10 confirme qu'il est plus probable d'avoir deux points dans un même amas (courbes violette et verte) que trois (courbe bleue). De plus, le fait que les corrélations diminuent avec la distance engendre que deux sites voisins horizontaux ou verticaux (courbe violette) soient plus corrélés que deux sites voisins diagonaux (courbe verte). En effet, deux sites voisins diagonaux sont, de façon effective, plus éloignés que deux sites voisins horizontaux ou verticaux car, il n'existe pas de corrélation diagonale *directe* entre deux sites.

La dépendance temporelle des fonctions de corrélation montre l'effet du coarsening, cf. Figure 11

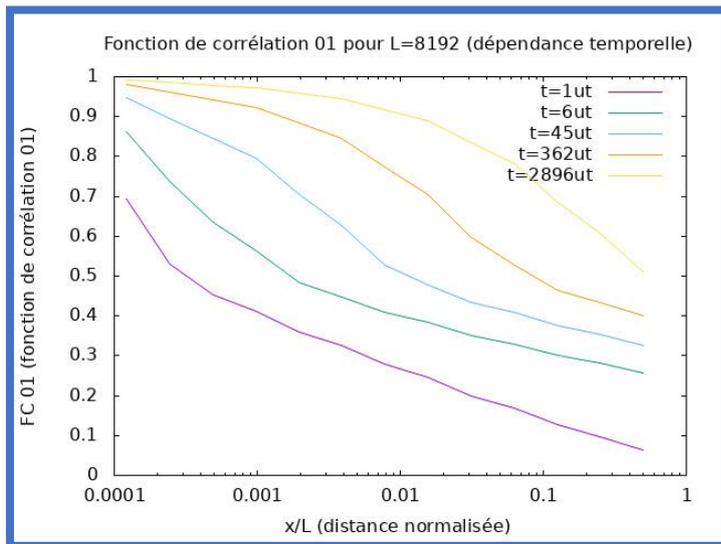


Figure 11 : Fonction de corrélation 01 pour L=8192 (dépendance temporelle)

(nous avons pris l'exemple de la fonction de corrélation suivant  $x$  mais, nous avons les mêmes observations pour une fonction de corrélation à trois points). En effet, en particulier pour de courtes distances, nous observons que la probabilité que deux points aient la même valeur de spin (valeur de la fonction de corrélation) augmente correspondant au grossissement local d'un amas (coarsening). De plus, nous observons que pour un temps assez long comme  $t = 2896 ut$  et à courte distance, la fonction de corrélation tend vers 1. En effet, à un temps aussi avancé, on s'est rapproché un peu plus de l'état d'équilibre ( $t_{eq}^{L=8192} \sim 8192^2 = 7 \cdot 10^7 ut$ ) pour lequel il n'est pas probable que deux sites proches voisins n'appartiennent pas au même amas (à part aux interfaces).

## Constante de structure du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions et son lien avec celle de la percolation

Il existe deux phénomènes physiques agissant sur la cinétique du réseau du modèle d'Ising en deux dimensions : la *percolation* et le *coarsening*. L'effet de la percolation se produit assez rapidement au contraire de celui du coarsening. En effet, l'échelle de temps de l'apparition de la percolation est<sup>[5]</sup> :  $t_p \sim L^{\alpha_p}$  avec  $\alpha_p \sim 0,5$ . À cette échelle de temps, nous avons un amas infini (= un amas qui « percole ») c'est-à-dire qu'il existe au moins un amas traversant le réseau dans au moins une direction. Nous pouvons l'illustrer pour une taille de réseau plus petite ( $L = 512$ ) pour laquelle l'échelle de temps de la percolation est :  $t_p^{L=512} \sim \sqrt{512} \approx 23 ut$ . En effet, à  $t = 23 ut$ , nous avons un amas infini vertical que l'on peut visualiser, cf. *Figure 12 (haut et droite)*, pour un temps légèrement supérieur (pour une meilleure visualisation). Les flèches bleues montrent le passage de l'amas infini d'un bord à l'autre du réseau. La valeur de la constante de structure à trois points de la percolation sera donnée plus loin, cf. (5), p.12.

Le coarsening est le grossissement des grands amas dû aux corrélations entre les sites. Son effet sera observable bien plus tard et consistera à faire disparaître les petits amas (par le grossissement des plus grands amas) et à lisser les interfaces (il s'agit de l'équilibration du réseau due également au coarsening, cf. (4)). En effet, l'action du coarsening se fait à partir d'un site jusqu'à s'étendre à tout le réseau (dans la limite du coarsening des sites de spins opposés) ainsi, sa longueur caractéristique est  $L$ . Donc, son échelle de temps est, cf. (3) :  $t_c \sim L^2$ . Nous pouvons illustrer les deux effets du coarsening en revenant à un réseau pour  $L = 512$  ainsi,  $t_c^{L=512} \sim 512^2 \approx 262\,144 ut$ , cf. *Figure 12 (bas)* (nous avons choisi un temps très supérieur à l'échelle du coarsening pour mieux visualiser son effet). En effet, nous observons que les petits amas ont disparus (cercles bleus) et que les interfaces ont été lissées (cercles orangés).

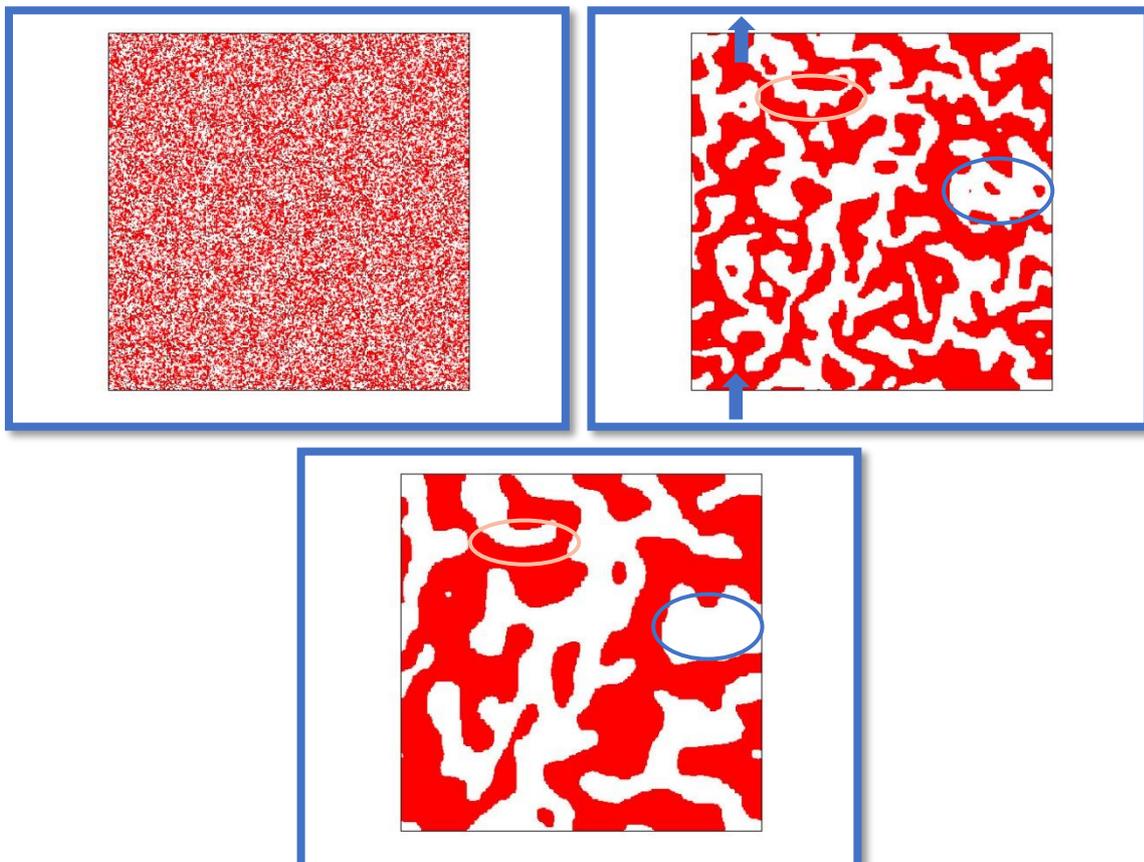


Figure 12 : Snapshots de l'évolution d'un réseau du MI bidimensionnel pour  $L=512$  à  $t=0ut$ ,  $127ut$  et  $10^7ut$  (dans l'ordre de la lecture)

L'expression d'une constante de structure à trois points est :

$$C = \frac{\langle \phi(i)\phi(j)\phi(k) \rangle}{\sqrt{\langle \phi(i)\phi(j) \rangle} \sqrt{\langle \phi(j)\phi(k) \rangle} \sqrt{\langle \phi(i)\phi(k) \rangle}}$$

avec  $\langle \phi(i)\phi(j)\phi(k) \rangle$  une fonction de corrélation à trois points et  $\langle \phi(i)\phi(j) \rangle$ ,  $\langle \phi(j)\phi(k) \rangle$  et  $\langle \phi(i)\phi(k) \rangle$  les fonctions de corrélation à deux points associés. Nous pourrions calculer la constante de structure en faisant une moyenne sur les quatre fonctions de corrélation à trois points et sur leurs fonctions à deux points correspondantes cependant, nous avons vu dans la partie précédente que l'isotropie de l'espace nous permet de ne prendre en compte qu'une fonction de corrélation par type. En effet, le nombre élevé de versions (100 graines) et d'échantillons pour chaque version (nsample=100) nous donne assez de précision pour calculer la constante de structure (10 000 échantillons en tout). Nous choisissons de le faire via les fonctions de corrélation 012, 01, 02 et 12 :

$$C_{M12} = \frac{\langle \phi(0)\phi(1)\phi(2) \rangle}{\sqrt{\langle \phi(0)\phi(1) \rangle} \sqrt{\langle \phi(1)\phi(2) \rangle} \sqrt{\langle \phi(0)\phi(2) \rangle}}$$

De plus, l'isotropie de l'espace nous permet de faire une simplification supplémentaire ( $\langle \phi(0)\phi(1) \rangle \approx \langle \phi(0)\phi(2) \rangle$ ), cf. Figure 10 :

$$C_{M12} = \frac{\langle \phi(0)\phi(1)\phi(2) \rangle}{\langle \phi(0)\phi(1) \rangle \sqrt{\langle \phi(1)\phi(2) \rangle}}$$

Numériquement, nous avons les courbes représentatives suivantes, cf. Figure 13. La constante de structure a été tracée pour  $L = 8192$  et différents temps et la ligne rouge correspond à la constante de structure de la percolation (phénomène géométrique donc, nous n'avons pas de dépendance temporelle) que nous avons divisé par  $\sqrt{2}$  (nous expliquerons pourquoi dans le paragraphe suivant). Nous avons utilisé la méthode Jackknife<sup>[6]</sup> pour estimer les barres d'erreurs de la constante de structure du MI que nous n'avons pas tracé car, elles sont finalement très petites, nous avons une différence entre les constantes de structure des échantillons d'un ordre de grandeur  $10^{-4}$ . Cette méthode statistique consiste en la séparation des échantillons en groupes pour lesquels nous faisons une moyenne (une moyenne pour chaque groupe) puis, nous comparons ces moyennes entre elles. Cette méthode permet d'éliminer un (ou plusieurs) groupes pour lesquels un (ou plusieurs) échantillon engendrerait un écart important à la valeur moyenne de tous les échantillons. Nous avons séparé nos 100 échantillons en quatre groupes et n'avons observé que ce faible écart :  $\sigma_{C_{M12}} = 10^{-4}$ . La constante de structure de la percolation m'a été donnée par Mr. Picco<sup>[6]</sup> et l'ordre de grandeur de son écart à la valeur moyenne (sur l'ensemble des distances) est :  $\sigma_{C_p} \in [10^{-8}, 10^{-4}]$  (plus la distance augmente, plus l'écart est élevé).

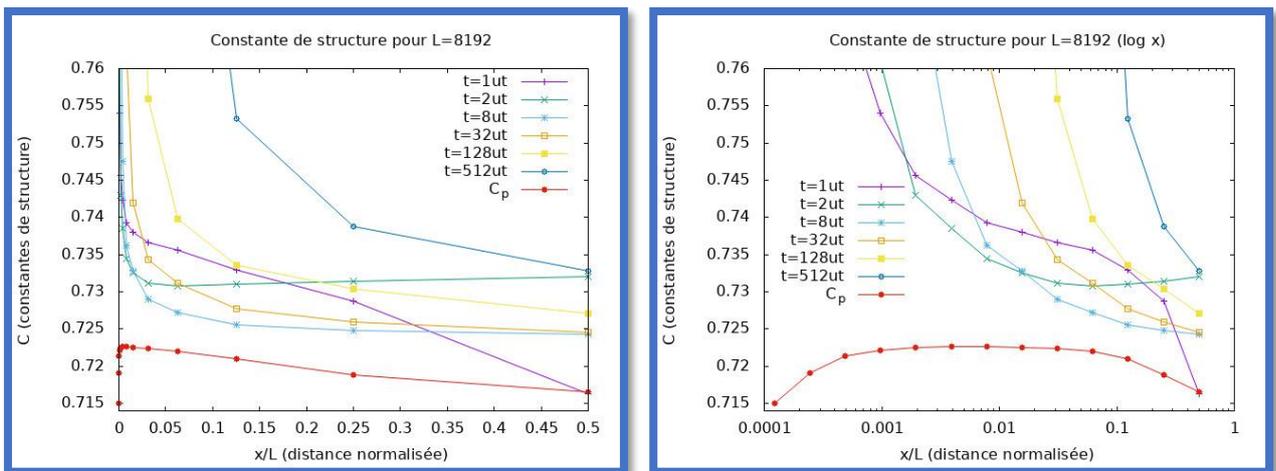


Figure 13 : Constante de structure pour  $L=8192$ .

Pour  $L = 8192$ , l'échelle temporelle de la percolation est  $t_p^{L=8192} \sim \sqrt{8192} \approx 91 ut$ . Nous observons un résultat en accord avec la prédiction précédente car, pour les courbes bleu clair ( $t = 8 ut$ ) et

orange ( $t = 32 ut$ ) appartenant au temps d'action de la percolation, nous observons que la constante de structure à approximativement le même comportement et, en particulier, converge à longue distance vers une valeur proche de celle de la constante de structure de la percolation à une erreur de  $5 \cdot 10^{-3}$  près. Cette égalité des constantes de structure du MI bidimensionnel et de la percolation à des temps courts montre que nous avons le même phénomène physique. En effet, l'erreur que nous avons observée est due au fait que le coarsening commence tout de même à jouer un rôle (négligeable) dans le comportement de la constante de structure. Notre interprétation se confirme si nous observons la courbe violette ( $t = 1 ut$ ). En effet, à une unité de temps aussi courte, il est très peu probable que le coarsening puisse contribuer à l'évolution de la constante de structure ainsi, c'est la percolation qui domine cette évolution et c'est pourquoi la constante de structure de la percolation et celle du MI à ce temps convergent vers une même valeur :

$\frac{C_p}{\sqrt{2}} \approx C_{MI2}^{t=1 ut} \approx 0,72$ . Nous pouvons revenir sur l'origine physique de cette valeur numérique. En effet, à moyenne distance<sup>[6]</sup> :  $C_p \approx 1,022$  (5), cette constante de structure à trois points de la percolation vient d'un calcul de théorie conforme des champs que je ne peux comprendre pour le moment mais, que je site à titre indicatif. Rappelons que la percolation est le modèle de Potts pour  $Q = 1$  car, un site existe ou n'existe pas. Le MI correspond au modèle de Potts pour  $Q = 2$  car, tous les sites existent mais, avec deux valeurs possibles pour leur spin ( $s_i = \pm 1$ ). Ainsi, les sites du MI sont deux fois plus corrélés que ceux de la percolation car, ils en existent deux fois plus. Cela s'exprime par une valeur doublée de la fonction de corrélation d'où :

$$C_{MI2} = \frac{\langle \phi(i)\phi(j)\phi(k) \rangle \times 2}{\langle \phi(i)\phi(j) \rangle \times 2 \times \sqrt{\langle \phi(j)\phi(k) \rangle \times 2}} = \frac{\langle \phi(i)\phi(j)\phi(k) \rangle}{\langle \phi(i)\phi(j) \rangle \sqrt{\langle \phi(j)\phi(k) \rangle}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{C_p}{\sqrt{2}}$$

Donc, ce résultat montre bien que le modèle d'Ising cinétique en deux dimensions connaît de la percolation.

De plus, l'échelle temporelle du coarsening est  $t_c^{L=8192} \sim 8192^2 \approx 67\,108\,864 ut$ . En effet, l'effet du coarsening apparaît pour des temps très longs devant ceux de la percolation cependant, nous observons déjà cet effet pour les courbes jaune ( $t = 128 ut$ ) et bleue foncé ( $t = 512 ut$ ) pour lesquels la valeur de la constante de structure augmente (ne converge plus vers 0,72). Remarque : Il est possible que nous ayons un comportement particulier comme pour celui de la courbe verte ( $t = 2 ut$ ). En effet, pour chaque phénomène, à chaque échelle de temps correspond une échelle de longueur. Pour la percolation,

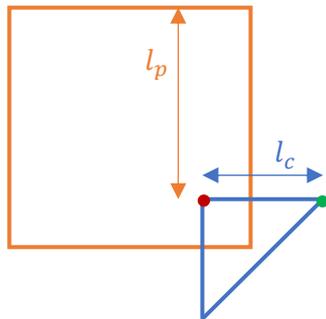


Figure 14 : Explication de l'évolution de la constante de structure du MI à  $t=2ut$  (non à l'échelle).

nous avons  $t_p \sim \sqrt{L} \rightarrow \boxed{l_p \sim t^2}$  (on inverse la relation). Pour le coarsening, nous avons  $t_c \sim L^2 \rightarrow \boxed{l_c \sim \sqrt{t}}$ . Ainsi, pour  $t = 2 ut$ , nous avons le cas particulier où la longueur caractéristique du coarsening n'est pas incluse dans celle de la percolation (en partant du même site), ce qui est rare en pratique car, nous avons une puissance 4 entre les deux. Nous pouvons l'illustrer, cf. Figure 14, en partant du site repéré en rouge, à courte distance (en restant dans le carré orange représentant l'effet de la percolation), la percolation domine. En effet, cf. Figure 13, à courte distance la courbe est « attirée » vers la valeur de la percolation (0,72). Cependant, le coarsening se propageant de site en site, en partant toujours du site repéré en rouge et en considérant sa corrélation avec son site voisin de droite repéré en vert, nous observons bien qu'à une plus longue distance, on sort de l'effet de la percolation (du carré

orange) jusqu'à ce que l'effet du coarsening prédomine. En effet, cf. Figure 13, à longue distance, la courbe verte finit par changer de comportement en devenant croissante puis, converge vers une valeur plus éloignée de celle de la percolation.

## Conclusion

Dans notre étude faite à une température constante proche du zéro absolu, nous avons finalement montré que la constante de structure à trois points du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions est égale à celle de la percolation pour une échelle de temps courte  $t_p \sim \sqrt{L}$  avec  $L$  la taille linéaire du réseau. Cela nous permet d'affirmer que le modèle d'Ising bidimensionnel percole dès cette échelle de temps c'est-à-dire qu'il existe au moins un amas infini traversant le réseau suivant une ou deux directions. De plus, le coarsening est un phénomène physique supplémentaire agissant pour une échelle de temps plus longue  $t_c \sim L^2$ . Il s'agit du grossissement des amas par les corrélations de leurs sites. Le coarsening engendre la disparition des amas de petite taille par le grossissement des plus grands amas et lisse les interfaces entre les amas. Se faisant à des temps longs, il est la cause principale de l'équilibration du système.

## Bilan personnel et remerciements

Ce stage m'a permis de comprendre les deux phénomènes physiques à l'origine de l'évolution du modèle d'Ising cinétique en deux dimensions : la percolation et le coarsening. Cela a été une chance car, c'est un modèle que j'ai pu étudier en statique (modèle géométrique) dans le cadre d'un projet numérique ainsi, j'ai pu faire un pas de plus dans ma compréhension en n'ayant plus pour paramètre de contrôle la température mais, en étudiant ce modèle à température constante et en étudiant les différentes dépendances temporelles et spatiales des grandeurs d'intérêt. J'ai également eu cette chance d'utiliser des concepts appris en physique macroscopique (transitions de phases et matière molle, 4P054) et de comprendre ceux qui m'ont été difficile. Ce stage a été très intéressant également car, j'ai pu me familiariser avec l'étude de plusieurs phénomènes sur différentes échelles de temps et de longueur afin de l'intégrer dans une évolution plus globale. De plus, j'ai pu appréhender la théorie conforme des champs via l'outil théorique qu'est la constante de structure, que je ne connaissais pas et que je peux mettre en parallèle avec l'étude des exposants critique, cette constante nous permettant, au minimum, de faire le lien entre des phénomènes physiques en l'absence de criticalité.

J'ai pu à nouveau être surpris du pouvoir de modélisation et d'analogie que nous offre la physique. Et, en particulier, la physique statistique, la percolation, modèle géométrique (statique), et le modèle d'Ising cinétique pouvant permettre de modéliser des phénomènes naturels tels que la propagation d'une épidémie, des feux de forêts, de l'économie ou d'une émulsion photographique étant tant de sujets en lien (ou non) avec les enjeux de notre temps et auxquels la physique statistique peut y répondre, à son échelle. Je tiens à remercier Mme. Cugliandolo et Mr. Picco, pour avoir encadré mon stage, pour leur disponibilité et pour la qualité de leur explications et Alessandro Tartaglia, également pour sa disponibilité et le modèle qu'il incarne en tant que doctorant ainsi que les secrétaires, Mmes. Isabelle Nicolai et Françoise Got pour leur très bon accueil et aux membres du laboratoires et visiteurs (Bulbul Chakraborty et Hiromitsu Takeuchi) par qui j'ai pu apprendre des choses intéressantes et tous pour cette expérience professionnelle et humaine enrichissante me donnant envie de rester dans le domaine de la physique statistique.

## Bibliographie

- [1] Bollobás, Béla ; Riordan, Oliver (2006). « Sharp thresholds and percolation in the plane ». *Random Structures and Algorithms*. **29** (4) : 524-548.
- [2] *Singularités, sens et universalité* – Gerard Weisbuch – Rochebrune 2015, hal-01304216, version 2.
- [3] V. Spirin, P. L. Krapivsky, and S. Redner, Phys. Rev. E **63**, 036118 (2001), Phys. Rev. E **65**, 016119 (2001).
- [4] J. J. Arenzon, A. J. Bray, L. F. Cugliandolo, and A. Sicilia, Phys. Rev. Lett. **98**, 145701 (2007).
- [5] *How soon after a zero-temperature quench is the fate of the Ising model sealed ?* – T. Blanchard, F. Corberi, L. F. Cugliandolo and M. Picco – EPL (Europhysics Letters), Volume 106, Number 6.
- [6] *Connectivities of Potts Fortuin-Kasteleyn clusters and time-like Liouville correlator* – M. Picco, R. Santachiara, J. Viti, G. Delfino – Nuclear Physics B, Volume 743, Issue 3, 29 May 2006, Pages 153-206.
- [7] *Monte Carlo Methods in Classical Statistical Physics* – W. Janke – Computational Many-Particle Physics, 2008 – Springer.
- [8] A. J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
- [9] K. Barros, P. L. Krapivsky, and S. Redner, Phys. Rev. E **80**, 040101 (2009).
- [10] J. Olejarz, P. L. Krapivsky, and S. Redner, Phys. Rev. Lett. **109**, 195702 (2012).
- [11] T. Blanchard and M. Picco, Phys. Rev. E **88**, 032131 (2013).
- [12] A. Lipowski, Physica A, **268**, 6-13 (1999).
- [13] V. Spirin, P. L. Krapivsky, and S. Redner, Phys. Rev. E **63**, 036118 (2001), Phys. Rev. E **65**, 016119 (2001).
- [15] Marie Théret – Pourquoi chaleur et magnétisme ne font pas bon ménage ? - <http://idm-old.math.cnrs.fr/Pourquoi-chaleur-et-magnetisme-ne.html>.

## Démarche documentaire

Ma démarche de documentation a commencé par deux articles scientifiques donnés (et publiés) par mon encadrant de stage, Mr. Picco<sup>[5, 6]</sup>. La partie *Sujet / Problématique* a dû être étoffée car, faisant un stage théorique, il a fallu que je pose les bases afin de faciliter la compréhension du lecteur. Pour cette partie, j'ai pris quelques informations d'intérêt via le moteur de recherche Google<sup>[1-2]</sup>, la majeure partie de mon rapport venant de ce que j'ai pu comprendre grâce aux explications de Mr. Picco. Pour l'explication du programme dans la partie *Outils*, je me suis aidé de ma compréhension du programme source, des explications d'Alessandro Tartaglia et de Mr. Picco ainsi que d'un article<sup>[7]</sup> pour l'explication des différents algorithmes. Pour la partie principale *Travail réalisé / Analyse*, je me suis partiellement aidé d'un article<sup>[5]</sup> dans lequel j'ai pu préciser plusieurs références<sup>[8-13]</sup> et la méthode statistique Jackknife utilisée dans cette partie m'a été donnée par Mr. Picco<sup>[14]</sup>. La dernière référence<sup>[15]</sup> est celle de l'image de la page de garde.