

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Correlation globale</b>	<b>4</b>
1.1 Echelle de corrélation . . . . .	4
1.2 Vérification de l'isomorphisme . . . . .	5
1.3 Quelle loi d'échelle $h(t)$ ? . . . . .	7
1.4 La partie stationnaire . . . . .	8
<b>2 Fluctuations locales</b>	<b>10</b>
2.1 1 <sup>er</sup> regard sur les <i>pdf</i> de $C_r$ . . . . .	10
2.2 Influence de la longueur de corrélation $\xi$ . . . . .	12
<b>Figures</b>	<b>13</b>
<b>Annexe</b>	<b>22</b>

# Introduction

J'ai effectu e mon stage de Master 2 au Laboratoire de Physique Theorique et Hautes Energies (LPTHE) des Universites Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Denis Diderot (Paris 7), sous la direction de Leticia Cugliandolo et de Marco Picco. Mon travail a porte sur les verres de spin, et plus precisement sur l'etude des fonctions de correlation dans le modele d'Edwards-Anderson a 3D.

Depuis plusieurs decennies, la communaute scientifique s'interesse de plus en plus aux systemes hors-equilibre que l'on rencontre frequemment en matiere condensee, rheologie, milieux granulaires (pour une presentation generale, voir [1]) ... Dans le cas des verres de spin qui nous interessent plus particulierement, nous avons affaire a des alliages sans propriete magnetique dans lesquels nous injectons des impuretes magnetiques. Ces impuretes sont reparties aleatoirement dans le milieu et interagissent differemment selon leur distance respective, ce qui cree du desordre magnetique. A haute temperature le systeme peut etre mis a l'equilibre, mais en le refroidissant il subit une *transition vitreuse* a la temperature  $T_g$ , au dela de laquelle sa relaxation devient tres lente et non-exponentielle. Dans de nombreux cas, nous pouvons considerer que les observables ne dependent que d'un seul temps  $t$ , telle que l'energie totale du systeme  $E(t)$ , sont quasiment constantes durant l'experience ou la simulation numerique. Ceci etant insuffisant pour apprehender certains phenomenes tels que le vieillissement, nous allons utiliser des fonctions de correlation a deux temps  $t$  et  $t_w$  [2] :

$$C(t, t_w) = \langle O(t)O(t_w) \rangle / N \quad (1)$$

ou  $N$  est un facteur de normalisation et  $\langle \dots \rangle$  est une moyenne sur differentes conditions initiales. Si le systeme est suffisamment grand (ce qui sera notre cas), la moyenne n'est pas necessaire et on peut simplement ecrire  $C(t, t_w) = O(t)O(t_w)/N$  pour des temps suffisamment longs. Pour les verres de spin le choix naturel de l'observable est l'aimantation du systeme.

Il existe de nombreux modeles qui tentent d'expliquer les caracteritques des verres de spin. Dans ce rapport, nous allons considerer celui propose par Edwards et Anderson (not e *EA* par la suite) ou les impuretes sont des spins d'Ising  $s_i$  placees sur les noeuds d'un reseau cubique simple qui interagissent avec leurs

plus proches voisins. L'Hamiltonien est :

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j \quad (2)$$

ou  $J_{ij}$  est choisie aleatoirement selon une distribution de probabilité de moyenne nulle et de variance 1. Nous avons le choix entre une distribution gaussienne et bimodale; nous avons préféré la première car elle évite une dégénérescence artificielle de l'état fondamental mais les conclusions sont les mêmes dans les deux cas.

Ce modèle nous permet d'écrire la fonction de corrélation globale sous la forme :

$$C(t, t_w) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) s_i(t_w) \quad (3)$$

ou  $N$  est simplement le nombre total de spin; on remarque que l'on a bien  $C(t, t) = 1$ .

Les résultats présentés dans ce rapport ont été obtenus par méthode de Monte-Carlo de type *Metropolis* [7] appliquée sur un système de taille  $(60 \times 60 \times 60)$ . Il est suffisamment grand pour pouvoir négliger les problèmes de taille finie, i.e. que l'on aurait obtenu les mêmes résultats avec une taille  $L = 50$ . De plus, nous ne pouvions pas prendre beaucoup plus grand car cela aurait ralenti la vitesse du programme et je n'aurais pas eu assez de temps pour avoir des résultats intéressants en 4 mois.

Dans le cas d'une distribution gaussienne (et de variance 1) du désordre, on trouve  $T_g = 0,92$  (cf. [8]); après avoir fait plusieurs essais à  $T = 0,3 : 0,6 : 0,9$ , nous en avons conclu que le meilleur choix est  $T = 0,6$ , car il n'est pas trop près de  $T_g$  (ou l'on observe moins bien la séparation des échelles - cf le prochain chapitre), ni trop proche de 0 où la dynamique est trop lente.

\*\*\*\*\*introduire le plan\*\*\*\*\*

# 1 Correlation globale

## 1.1 Echelle de correlation

Comme ceci est explique en detail dans [4] et [3], la dynamique de relaxation ne peut se comprendre qu'en supposant une separation des echelles de correlation, i.e. que la fonction de correlation globale est la somme d'une partie stationnaire et d'une partie hors-equilibre (c'est le phenomene de vieillissement) :

$$C(t, t_w) = C_{ST}(t, t_w) + C_A(t, t_w) \quad (4)$$

On peut comprendre ce principe intuitivement en considerant le phenomene de croissance de domaine. Refroidissons brusquement un systeme en-dessous de  $T_g$  et definissons cet instant comme l'origine des temps. Sa configuration initiale est donc totalement aleatoire. Laissons le relaxer pendant  $t_w$  ; il s'est alors forme des domaines de taille caracteristique  $R(t_w)$ . Meme si le systeme est toujours hors-equilibre, les domaines sont *localement* a l'equilibre (sauf au niveau des frontieres entre domaines). Soit un temps  $\tau$  tel que  $0 < \tau \ll t_w$  ; les frontieres entre les domaines n'ont pas eu le temps de beaucoup bouger car  $R(t_w) \sim R(t_w + \tau)$ , c'est pourquoi la relaxation se fait tout d'abord par des fluctuations locales *a l'equilibre* et on peut alors ecrire  $C_{ST}(t, t_w) = C_{ST}(t - t_w)$  (invariance par translation temporelle). Par contre pour  $t_w \ll \tau$ , on a  $R(t_w) \ll R(t_w + \tau)$  et nous retrouvons une dynamique hors-equilibre. Nous comprenons ainsi toute l'utilite de la fonction de correlation a *deux* temps.

Ce concept est parfaitement illustre sur la figure (1) pour des temps  $t_w > 10^2$  ; pour  $t \lesssim t_w$ , on a une sorte de plateau puis un changement d'echelle a  $t \approx t_w$ . On definit le parametre d'ordre d'Edwards-Anderson  $q_{EA}$  comme la valeur de la correlation a cet instant :  $q_{EA} \cong C(t_w + t_w, t_w) \approx 0.75$  pour  $T = 0,6$ . Ce parametre est d'une importance cruciale pour notre etude, car nous voyons que l'evolution de la fonction de correlation depend de sa valeur par rapport a  $q_{EA}$ . En effet, pour  $C(t, t_w) < q_{EA}$  (resp.  $C(t, t_w) > q_{EA}$ ), c'est la partie lente vieillissante  $C_A(t, t_w)$  (resp. la partie rapide stationnaire  $C_{ST}(t - t_w)$ ) qui predomine. La forme de  $C_{ST}(t - t_w)$  est generalement bien donnee par  $\frac{A}{(t - t_w)^\alpha}$  [4], où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes que nous chercherons a determiner. Par contre, il existe deux principales possibilites pour  $C_A(t, t_w)$ . Pour allonger l'ecriture, notons  $C_{ij} = C_A(t_i, t_j)$ . Soient  $1 \ll t_3 < t_2 < t_1$  tels que ces trois temps soient suf-

fisamment espaces pour toujours rester dans le regime de vieillissement. Les 2 cas sont alors :

- pour le modele des pieges, au niveau du point critique, il y a *ultrametricite*, i.e. que  $C_{13} = \min(C_{23} : C_{12})$ . Le sens physique de cette idee est que soit la dynamique n'a pas eu le temps de se mettre en place entre  $t_3$  et  $t_2$  (s'ils sont proches l'un de l'autre), soit le systeme n'a pas evolue entre  $t_2$  et  $t_1$  (si cette fois  $t_2$  est proche de  $t_1$ ). On peut alors montrer que [5] :

$$C_A(t, t_w) = f\left(\frac{\ln(t - t_w)}{\ln(t_w)}\right) \quad (5)$$

. Le lecteur pourra se reporter à l'annexe pour vérifier que l'ultramétrie apparaît bien de cette loi d'échelle. Le modèle des pièges ne correspond pas à celui d'EA, mais ce n'est pas une raison pour rejeter d'emblée l'éq. (5).

- pour des modeles de type champ moyen ou croissance de domaine, on a ultrametricite seulement si  $C_{23} < q_{EA} < C_{12}$  (ou vice-versa). Si  $C_{12}, C_{23} < q_{EA}$  ou  $C_{12}, C_{23} > q_{EA}$ , alors nous avons [1], [3] :

$$C_A(t, t_w) = f\left(\frac{h(t_w)}{h(t)}\right) \quad (6)$$

ou  $h(t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions croissantes. On en deduit rapidement que :

$$\begin{aligned} f^{-1}(C_{13}) &= \frac{h(t_3)}{h(t_1)} = \frac{h(t_3) h(t_2)}{h(t_2) h(t_1)} \\ &= f^{-1}(C_{12}) f^{-1}(C_{23}) \end{aligned} \quad (7)$$

qui est une relation d'isomorphisme par rapport au produit.

Maintenant que nous avons presente les bases necessaires, nous allons dans un premier temps verifier la formule (7), ce qui nous permettra de trouver la fonction  $f$  sans s'occuper de  $h(t)$ . Ensuite nous chercherons quel est le meilleur *scaling* entre les equations (5) et (6) sans considerer la partie stationnaire (ce qui compliquerait notre tache en rajoutant les parametres  $\tau$  et  $\alpha$  a optimiser), puis nous essaierons d'ameliorer nos resultats en tenant compte de  $C_{ST}(t, t_w)$ .

## 1.2 Vérification de l'ultramétrie et de l'isomorphisme

D'après l'éq. (6), la fonction  $f(x)$  recherchée doit respecter certaines contraintes. En l'occurrence, pour  $t \rightarrow +\infty$  le systeme n'est plus corrélé avec son passé en  $t_w$  ce qui nous donne  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C_A(t, t_w) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  en supposant  $h(t \rightarrow +\infty) = +\infty$ , ce qui sera toujours le cas. D'après [4], on peut écrire  $C(t_w, t_w) = 1 = (1 - q_{EA}) + q_{EA} = C_{ST}(t_w, t_w) + C_A(t_w, t_w)$ , ce qui implique que  $C_A(t_w, t_w) = f(1) = q_{EA}$ . La fonction la plus simple qui respecte

toutes ces conditions est  $f(x) = q_{EA} x^\beta = C$ , ce qui nous donne en l'inversant  $f^{-1}(C) = (C/q_{EA})^{1/\beta}$ . En l'appliquant à (7), on trouve la formule :

$$q_{EA} \times C_{13} = C_{12} \times C_{23} \quad (8)$$

que l'on peut vérifier selon la méthode suivante. Comme précisé en introduction, je suis parti d'un système 3D de taille (60 \* 60 \* 60), de configuration initiale aléatoire, ce qui équivaut à un refroidissement brutal de  $T > T_g$  (phase paramagnétique) à  $T = 0,6 < T_g = 0,92$  (phase vitreuse). Le désordre modélisé par les interactions  $J_{ij}$  est tiré d'une distribution de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance 1. J'ai tout d'abord lancé mon programme de type Monte-Carlo pendant 3 semaines, ce qui m'a permis d'aller jusqu'à  $9.10^6$  Monte-Carlo steps (MCs). Dans la suite, je n'écrirai plus MCs par commodité. J'ai régulièrement enregistré la configuration du système à différents temps  $t$ . Comme nous étudions la dynamique de vieillissement, nous n'avons pas besoin d'attendre l'équilibre comme c'est généralement le cas dans les simulations Monte-Carlo; par contre, nos hypothèses ne sont valables qu'à temps longs

\*\*\*\*\*pourquoi?\*\*\*\*\*

et nous avons choisi  $t_3 = 5.10^4 \gg 1$  et  $t_1 = 9.10^6$ . Ces 2 temps sont suffisamment éloignées l'un de l'autre pour être sûr de se trouver dans la dynamique lente de vieillissement. Nous avons ainsi plusieurs valeurs de  $t_2 \in [t_3 : t_1]$  et nous pouvons calculer  $C_{13}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{23}$  selon la formule (3). A chaque temps  $t_2$  correspond un point  $(C_{12}, C_{23})$  qui nous donne la courbe verte de la figure (2). Avant d'aller plus loin, attardons-nous quelques instants sur cette courbe.

Considérons le point le plus haut, où  $C_{12} = 1$ ; cela veut dire que  $t_1 = t_2 = 9.10^6$ , et donc  $C_{t_1, t_3} = C_{t_2, t_3} \approx 0,35$  en ce point précis. En diminuant  $t_2$ , nous descendons le long de la courbe verte et ce qui est remarquable, c'est que  $C_{23}$  reste constant et fixé à la valeur de  $C_{13} \approx 0,35$  tant que  $C_{12} \gtrsim 0,75 \approx q_{EA}$ . Nous avons donc  $C_{13} = \min(C_{23} : C_{12})$  quand  $C_{23} < q_{EA} < C_{12}$ ; l'ultramétrie est donc présente là où nous nous y attendions! De même pour  $C_{23} > q_{EA}$  à droite de la figure, on devrait avoir  $C_{12} \approx cst = C_{13}$ ; même si c'est moins flagrant, c'est à peu près correct. Peut-être est-ce parce que le premier temps  $t_2$  que nous avons choisi est trop éloigné de  $t_3 = 5.10^4$  et que nous sommes déjà là où il y a isomorphisme. Toujours est-il que lorsque  $C_{12}$  et  $C_{23}$  sont plus petits que  $q_{EA}$ , nous n'avons plus ultramétrie puisque  $C_{12}$  et  $C_{23}$  sont plus grands que  $C_{13} \approx 0,35$ .

Pour vérifier s'il y a isomorphisme, nous avons tracé  $C_{12}$  en fonction de  $C_{23}$  sur cette plage de valeur ( $C_{12}, C_{23} < q_{EA}$ ) à l'aide de la formule (8) :  $C_{12} = q_{EA} \frac{C_{13}}{C_{23}}$  à  $C_{13}$  fixé. Nous avons fait varier  $q_{EA}$  afin d'optimiser la superposition entre ces 2 courbes et avons obtenu la courbe rouge pour  $q_{EA} = 0.785$ . On voit que les courbes sont proches l'une de l'autre mais ne se superposent pas parfaitement : je ne pense pas que l'on puisse faire mieux que cela, car la formule (7) impose une symétrie entre  $C_{12}$  et  $C_{23}$  qui n'est pas rigoureusement présente dans la courbe numérique. Le résultat est néanmoins satisfaisant et cette première étude semble valider les hypothèses d'ultramétrie et d'isomorphisme. Nous allons maintenant aller un peu plus loin et voir quelle est la forme la plus adaptée de la fonction  $h(t)$  de l'éq. (6).

### 1.3 Quelle loi d'échelle $h(t)$ ?

Tout d'abord, vérifions si la proposition (5) est correcte? Sur la figure (3), nous avons tracé  $C(t, t_w)$  en fonction de  $\left(\frac{\ln(t-t_w)}{\ln(t_w)}\right)$  pour différents  $t_w$  et jusqu'à  $t_{max} = 9.10^6$ . La théorie prédit que toutes les courbes devraient se superposer, or ce n'est pas le cas. Il semble donc que cette loi d'échelle ne soit pas bonne pour le modèle d'Edwards-Anderson en 3D. Mais qu'en est-il du champ moyen avec une loi de la forme (6) ?

Le review [1] nous donne plusieurs possibilités :

- $h_1(t) = \ln^\gamma(t/t_0)$  : on retrouve cette loi dans la théorie sur la croissance de domaine dans un verre de spin.
- $h_2(t) = \exp(\ln^\gamma(t/t_0))$  : cette fonction décrit bien les données expérimentales.
- $h_3(t) = t^\gamma$  : cette loi est prédite par la théorie sur la croissance de domaine dans un ferromagnétique.

Nous allons étudier  $C(t, t_w) = q_{EA} \left(\frac{h(t_w)}{h(t)}\right)^\beta$ , ce qui nous laisse 4 paramètres à optimiser :  $q_{EA}$ ,  $\beta$ ,  $t_0$  et  $\gamma$ . On voit tout de suite que  $\beta$  n'a aucune influence sur les fonctions  $h_1$  et  $h_3$  car il intervient en exposant avec  $\gamma$  et c'est donc le produit  $\beta \times \gamma$  qui compte. En ce qui concerne  $h_2$ , l'influence de  $\beta$  peut être compensée en jouant sur  $\gamma$  et  $q_{EA}$ , c'est pourquoi nous allons fixer  $\beta = 1$  par commodité. Pour chacune des 3 fonctions  $h$ , nous allons considérer 7 courbes différentes en prenant 7 valeurs de  $t_w$  allant de  $5.10^4$  (que nous prenons volontairement très grand) à  $5.10^5$  et avec  $t_{max} = 9.10^6$ . Dans un premier temps nous laisserons de côté les  $t_w > 5.10^5$ , pour être sûr de toujours avoir  $t_{max} - t_w \gg 1$ . Pour rendre cette étude quantitative, nous allons calculer pour chacune de ces courbes la droite de régression  $C = m \times \frac{h(t_w)}{h(t)} + p$  et le coefficient de corrélation  $r$  correspondant. Les dépendances en  $\gamma$  et en  $t_0$  sont liées l'une à l'autre, puisque si l'on augmente  $t_0$ , il suffit de diminuer  $\gamma$  pour retrouver de bons coefficients  $r$  (proche de 1) et  $p$  (proche de 0); néanmoins,  $r$  est légèrement plus proche de 1 pour  $\gamma$  grand, donc nous avons pris  $t_0$  le plus petit possible, i.e.  $t_0 = 1$  (en gardant  $t_0 \in \mathbb{N}$ ). Ce qui est rassurant, c'est que  $p \rightarrow 0 \Leftrightarrow m \rightarrow q_{EA}$ , donc nous ne sommes pas obligé de faire un compromis entre les 2 coefficients  $m$  et  $p$ ; ils tendent conjointement vers la valeur que nous désirons. Dans les résultats

ci-dessous, nous donnons la valeur moyenne sur les 7 courbes de  $m$ ,  $p$  et  $r$  :

$$\begin{aligned}
C_1(t, t_w) &= (0,807 \pm 0,006) \frac{\ln^\gamma(t_w/t_0)}{\ln^\gamma(t/t_0)} + (0,000 \pm 0,014) \\
&\quad (\gamma = 2,038 \text{ et } \langle r \rangle = 0,9982) \\
C_2(t, t_w) &= (0,799 \pm 0,007) \frac{\exp(\ln^\gamma(t_w/t_0))}{\exp(\ln^\gamma(t/t_0))} + (0,000 \pm 0,007) \\
&\quad (\gamma = 0,519 \text{ et } \langle r \rangle = 0,9985) \\
C_3(t, t_w) &= (0,791 \pm 0,009) \left(\frac{t_w}{t}\right)^\gamma + (0,001 \pm 0,006) \\
&\quad (\gamma = 0,146 \text{ et } \langle r \rangle = 0,9984)
\end{aligned} \tag{9}$$

que l'on peut voir sur les figures (4) à (6). A chaque fois, la valeur de  $q_{EA}$  est proche de 0,785 trouvée dans la section précédente. Les coefficients de corrélation  $r$  sont à peu près les mêmes et assez proches de 1 : cela veut dire que les 3 fonctions  $h(t)$  décrivent assez bien la dynamique du système pour *une* valeur donnée de  $t_w$ . Ce qui est intéressant, c'est l'écart à la valeur moyenne  $\langle p \rangle$  ; il est plus important dans le cas de  $h_1$  et nous voyons bien sur la figure (4) que les courbes ne se superposent pas, elles sont plus ou moins parallèles entre elles. Cette loi d'échelle n'est donc pas adéquate. Les deux autres fonctions  $h_2$  et  $h_3$  donnent un bien meilleur résultat, avec une préférence pour  $h_3(t) = t^\gamma$ . Nous pouvons voir que les courbes grises, pour lesquelles  $t_w > 5.10^5$ , s'écartent de plus en plus des autres quand  $t_w$  augmente, surtout pour  $h_2(t)$  (celles pour  $t_w = 3.10^4$  ou  $3,8.10^4$  restent collées aux autres). Mais peut être est-ce parce que nous avons pour l'instant délibérément mis de côté la partie stationnaire  $C_{ST}(t - t_w) = \frac{A}{(t-t_w)^\alpha}$  ? Nous allons maintenant extraire ce terme de nos résultats pour les deux meilleures lois d'échelle  $h_2$  et  $h_3$ .

## 1.4 La partie stationnaire

La méthode est la même que précédemment, mais cette fois-ci l'axe des ordonnées n'est plus seulement  $C(t, t_w)$ , mais  $C_A(t, t_w) = C(t, t_w) - \frac{A}{(t-t_w)^\alpha}$  en fonction de  $q_{EA} \frac{h_3(t_w)}{h_3(t)}$  ou  $q_{EA} \left(\frac{h_2(t_w)}{h_2(t)}\right)^\beta$ . Nous avons fait réapparaître le coefficient  $\beta \neq 1$ , car il donne de meilleurs résultats. Les coefficients de corrélation sont les mêmes mais nous voyons sur les figures (7) et (8) que la superposition des courbes est bien meilleure pour la loi en puissance  $h_3(t) = t^\alpha$ , *y compris pour*  $t_w > 5.10^5$ . De plus, nous trouvons dans ce cas  $\alpha = 0,5$  qui est la même valeur que celle donnée dans l'article [4] pour d'autres modèles.

Nous devons rester prudent car le grand nombre de paramètres rend difficile leur optimisation ; peut-être est-il possible de faire mieux ? Je pense néanmoins que nous pouvons conclure que la dynamique lente de vieillissement est bien

décrite par une loi de puissance :

$$C_{ST}(t - t_w) \propto \frac{1}{\sqrt{t - t_w}} \text{ et } C_A(t, t_w) = q_{EA} \left(\frac{t_w}{t}\right)^\gamma$$

où  $q_{EA} \approx 0,78$  et  $\gamma \approx 0,142$  (10)

caractéristique d'une approche de type champ moyen ou croissance de domaine. De plus l'influence de la dynamique rapide est notable aux temps courts; sur les figures (6) et (8), les courbes sont nettement plus resserrées en haut à droite (temps courts) lorsqu'on prend en compte cette partie stationnaire.

Cette étude détaillée nous a permis de mieux comprendre l'évolution temporelle de la fonction de corrélation globale du modèle  $EA$  en 3D; le prochain chapitre va nous permettre d'aller plus loin en s'intéressant aux fluctuations locales.

## 2 Fluctuations locales

### 2.1 1<sup>er</sup> regard sur les pdf \* de $C_r$

La fonction de corrélation locale est définie de la même manière que pour la fonction globale, i.e. :

$$C_r(t, t_w) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} s_i(t) s_i(t_w) \quad (11)$$

où la somme se fait sur un nombre  $N_r$  de spins centrés au point  $r$  (*coarse-grained*). Dans notre cas, nous choisirons des cubes de côté  $l < L = 60$  et  $N_r = l^3$ . Dans un premier temps nous avons simplement divisé notre système en boîtes de volume  $l^3$  côte à côte, mais comme nous allons calculer des distributions de probabilités, nous avons besoin de suffisamment de valeurs pour avoir une statistique raisonnable; or, pour un  $l$  donné, correspond  $(L/l)^3$  boîtes, soit 8000 valeurs différentes de  $C_r$  pour  $l = 3$  et seulement 216 pour  $l = 10$ , ce qui n'est pas suffisant. Nous avons donc préféré considérer des boîtes qui se superposent, décalées seulement d'un spin entre plus proches voisines avec des conditions aux bords périodiques. Chaque spin est donc le coin de coordonnée  $(0, 0, 0)$  d'une boîte et nous avons ainsi  $L^3 = N = 216000$  échantillons, soit autant que de spins.

\*\*\*\*\*meilleure explication ?\*\*\*\*\*

En prenant des spins entiers  $\pm 1$  nous devons également faire attention la *discretisation* de  $C_r$  qui peut poser problème pour les petites valeurs de  $l$ . En effet, considérons 2 boîtes de configuration quasi-identique où seul un spin change (il est *up* dans le 1<sup>er</sup> cas et *down* dans le 2<sup>me</sup>); nous aurons donc (éq.11)  $C_r^1 - C_r^2 = (1 - (-1))/N_r = 2/l^3$ .  $C_r$  ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs entre  $-1$  et  $1$ , espacées de  $2/l^3$ . Même si ceci est assez négligeable pour  $l \geq 6$  où  $2/l^3 \leq 0.01$ , cela devient gênant pour  $l = 3$  ou  $4$ . Pour diminuer l'influence de cette discrétisation, nous avons décidé de faire intervenir une moyenne temporelle en définissant une nouvelle valeur du spin à l'instant  $t$ .

$$\bar{s}_i(t) \equiv \frac{1}{2\tau + 1} \sum_{k=-\tau}^{\tau} s_i(t + k) \quad (12)$$

---

\*fonction de distribution de probabilité

où  $\tau \ll t$ . Nous prendrons typiquement  $\tau = \{1, 11, 101, 1001\}$ .

Avant d'aller plus loin, nous avons voulu vérifier que notre programme donnait les mêmes résultats que ceux obtenus par H.E. Castillo *et al* [6] en fig. (16) et (17) pour un désordre bimodal. Cette article montre que pour de petites tailles de boîtes ( $l < \xi(t, t_w)$ , la longueur de corrélation), la fonction de distribution de probabilité (notée *pdf*) ne dépend que du rapport  $(t/t_w)$  (à température donnée) et est toujours piquée en une valeur fixe indépendante de  $(t/t_w)$ .

\*\*\*\*\***pourquoi le scaling doit marcher ?**\*\*\*\*\*

D'après le résultat du chapitre précédent et l'éq.(10), si la pdf est uniquement fonction de  $(t/t_w)$ , alors elle est de manière équivalente fonction de  $C(t, t_w)$

\*\*\*\*\***(en négligeant la partie stationaire).**\*\*\*\*\*

Or ce n'est pas ce que nous voyons sur la figure (9), où les 3 courbes ne se superposent pas. Pour voir d'où vient ce problème, nous avons tracé de nouvelles *pdf* pour d'autres valeurs de  $C$  et de  $t_w$  (par exemple (10)) et avons retrouvé ce que nous cherchions, i.e. que les *pdf* sont les mêmes à  $C$  fixé. La condition *sine qua non* est donc l'hypothèse  $t_w \gg 1$ , mais cette méthode nous permet de quantifier la valeur limite de  $t_w$ . D'après la fig.(11), nous voyons le résultat n'est pas bon pour  $t_w = 10^3$ , qu'il s'améliore pour  $10^4$  et devient très bon au-dessus de  $3.10^4$ . En nous basant sur la figure (10)), nous considérons comme limite inférieure  $5.10^4$  (utilisée en section 1.3), ne pouvant pas monter plus haut afin de garder un certain écart avec  $t_{max} = 9.10^6$ .

Essayons maintenant d'analyser ces courbes. La fonction de corrélation  $C(t, t_w)$  de tout le système représente bien sûr la valeur moyenne de la *pdf*. Pourtant pour  $l = 3$ , le maximum de la *pdf* est toujours situé au même endroit quelque soit  $C$  (cf. fig. 12). Nous voyons sur la fig.(1) que plus  $t_w$  est grand, plus le système passe de temps dans la région  $C > q_{EA}$ . Or comme nous travaillons à  $t_w \gg 1$ , nous avons atteint le régime ????????? et il semblerait que même si la corrélation *globale* diminue, une grande partie du système reste *localement* figé à  $C \gtrsim q_{EA}$ . De manière logique, lorsque la différence  $t - t_w$  augmente, la corrélation totale  $C$  diminue et le système a plus de temps pour relaxer ; de moins en moins de boîtes conservent une grande  $C_r$  (même si le maximum reste juste au-dessus de  $q_{EA}$ ), et la *pdf* devient de plus en plus plate (courbe bleue). Nous remarquons également que les valeurs négatives de  $C_r$  ne sont pas négligeables ; en effet, pour des boîtes de taille  $l = 3$ , les fluctuations thermiques sont importantes car si nous avons localement beaucoup de spins qui se sont retournés entre les instants  $t_w$  et  $t$ , il n'y a pas assez d'autres spins dans une petite boîte pour compenser cet effet et  $C$  devient négatif.

Nous voyons d'ailleurs sur la figure (13) qu'en augmentant  $l$ , la *pdf* se centre de plus en plus autour de sa valeur moyenne (ici,  $C = 0, 50$ ) ; les valeurs négatives disparaissent petit à petit, le maximum se déplace vers  $C$  et l'allure de la *pdf* semble devenir de plus en plus gaussienne. Pour  $l \rightarrow L = 60$ , on s'approchera d'une fonction de Dirac piquée en  $C$ , mais les courbes ayant une même valeur de corrélation globale ne se superposent plus pour de grandes tailles de boîtes (fig. 14) **pourquoi ?**. Pour finir, on remarquera que le changement d'allure de la *pdf* semble avoir lieu vers  $l = 5$  ou 6 ; la courbe est moins asymétrique et le

maximum s'élève de plus en plus. La raison est que les boîtes deviennent plus grandes que la longueur de corrélation  $\xi(t, t_w)$  dont nous pouvons ainsi donner une estimation :  $\xi \approx 6$  pour cette plage de temps considérée. Nous allons pousser le raisonnement un peu plus loin en essayant de caractériser et d'expliquer l'allure de cette *pdf* dans la prochaine section.

## 2.2 Influence de la longueur de corrélation $\xi$

# Figures

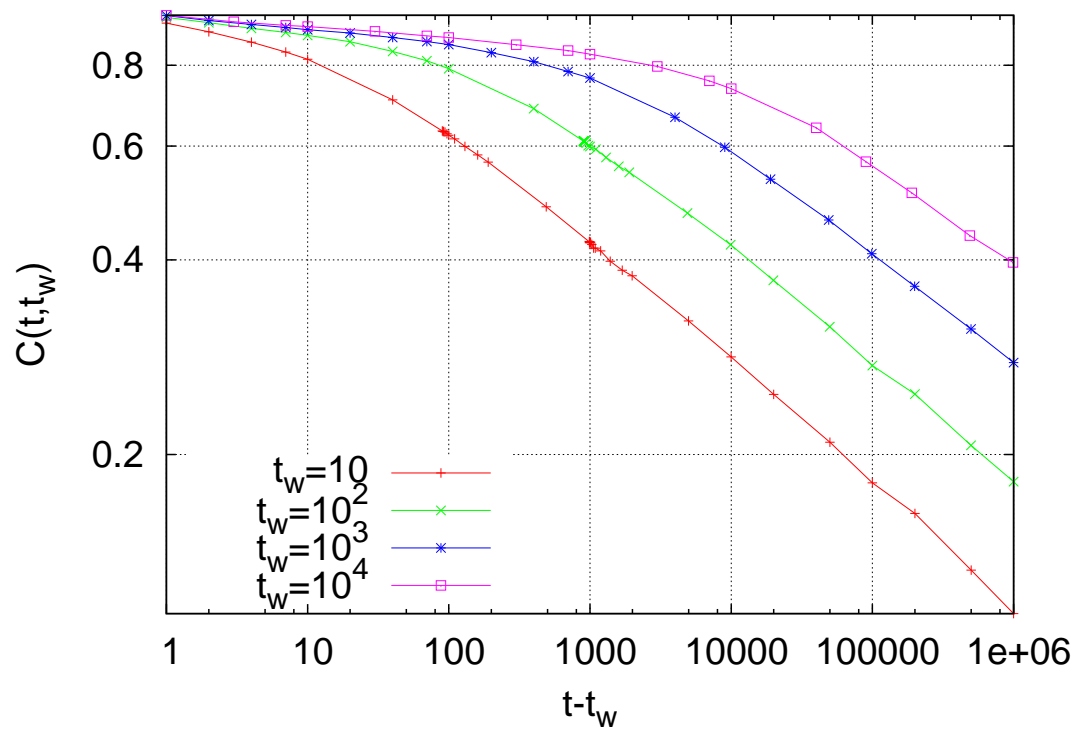


FIG. 1 – Evolution temporelle de  $C(t, t_w)$  pour  $T = 0,6$ . Attention à l'échelle logarithmique : la dynamique est beaucoup plus rapide au debut qu'à la fin.

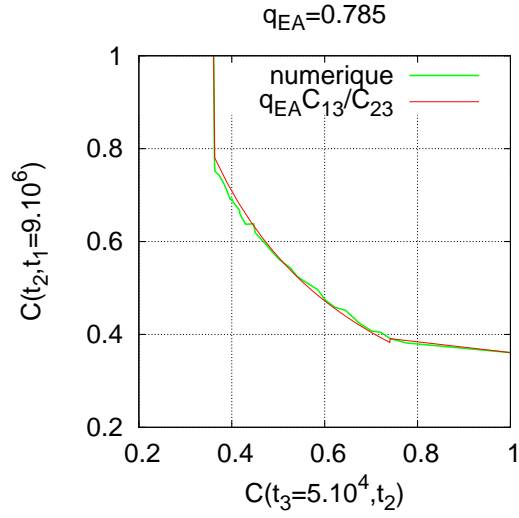


FIG. 2 –  $C_{12}$  en fonction de  $C_{23}$  obtenus numériquement (verte) et en fitant directement la formule  $q_{EA} \frac{C_{13}}{C_{23}}$  (rouge).

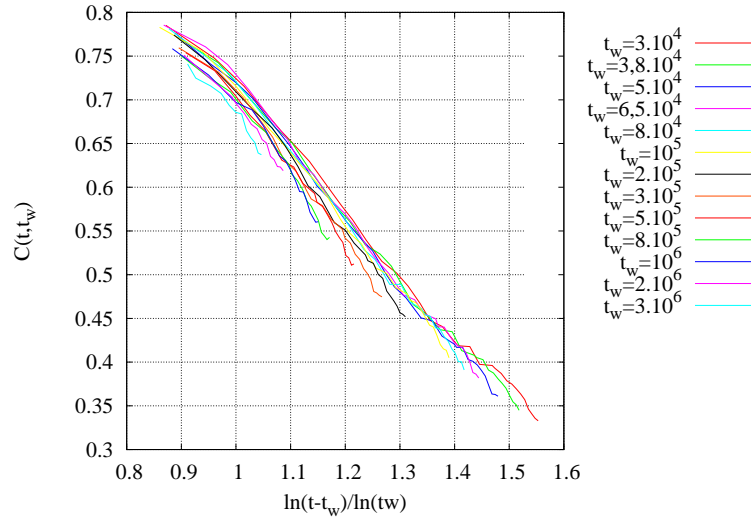


FIG. 3 –  $C(t_w, t)$  en fonction de  $\left(\frac{\ln(t-t_w)}{\ln(t_w)}\right)$  pour différents temps  $t_w$ .

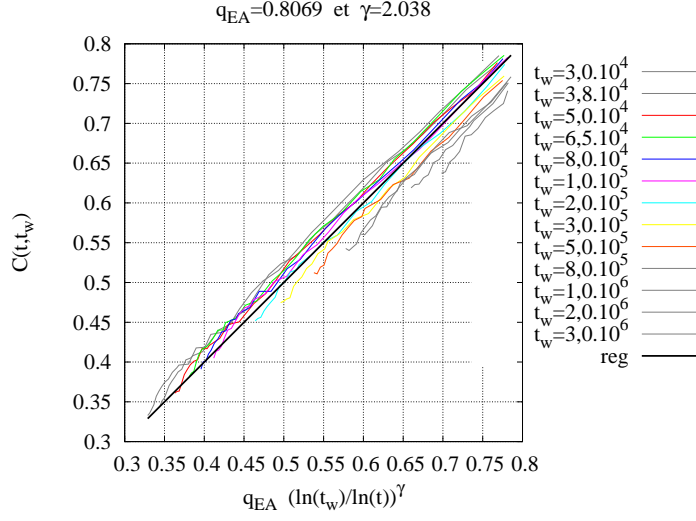


FIG. 4 –  $C(t_w, t)$  en fonction de  $\left( q_{EA} \frac{\ln^\gamma(t_w/t_0)}{\ln^\gamma(t/t_0)} \right)$  pour différents temps  $t_w$ . La droite *reg* est la moyenne des droites de régression des courbes en couleur. Les courbes en gris n'ont pas été prises en compte pour l'optimisation des paramètres  $q_{EA}$  et  $\gamma$  donnés en haut du graphique.

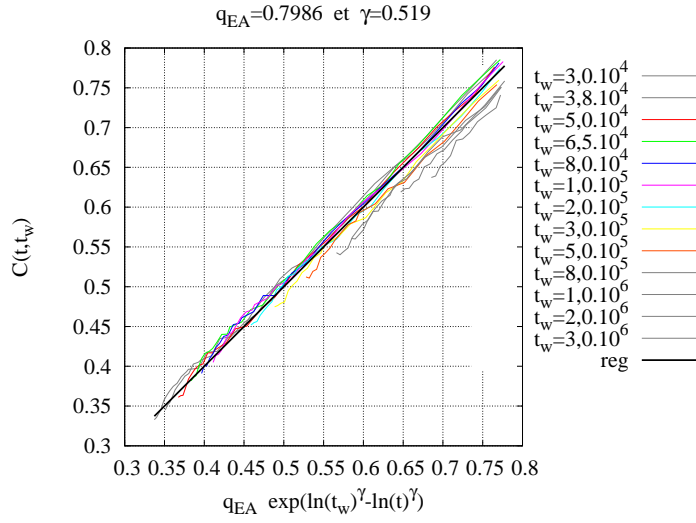


FIG. 5 –  $C(t_w, t)$  en fonction de  $\left( q_{EA} \frac{\exp(\ln^\gamma(t_w/t_0))}{\exp(\ln^\gamma(t/t_0))} \right)$  pour différents temps  $t_w$ . La droite *reg* est la moyenne des droites de régression des courbes en couleur. Les courbes en gris n'ont pas été prises en compte pour l'optimisation des paramètres  $q_{EA}$  et  $\gamma$  donnés en haut du graphique.

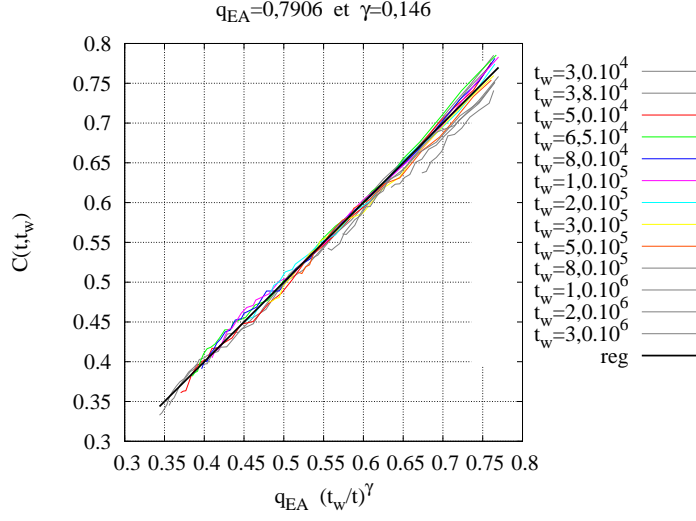


FIG. 6 –  $C(t_w, t)$  en fonction de  $(q_{EA} (t_w/t)^\gamma)$  pour différents temps  $t_w$ . La droite *reg* est la moyenne des droites de régression des courbes en couleur. Les courbes en gris n'ont pas été prises en compte pour l'optimisation des paramètres  $q_{EA}$  et  $\gamma$  donnés en haut du graphique.

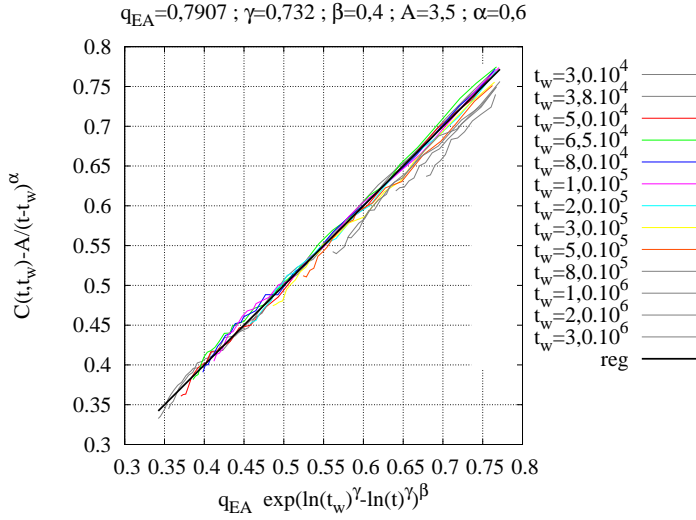


FIG. 7 –  $C_A(t, t_w) = C(t, t_w) - \frac{A}{(t-t_w)^\alpha}$  en fonction de  $(q_{EA} \frac{\exp(\ln^\gamma(t_w/t_0))}{\exp(\ln^\gamma(t/t_0))})^\beta$  pour différents temps  $t_w$ . La droite *reg* est la moyenne des droites de régression des courbes en couleur. Les courbes en gris n'ont pas été prises en compte pour l'optimisation des paramètres donnés en haut du graphique.

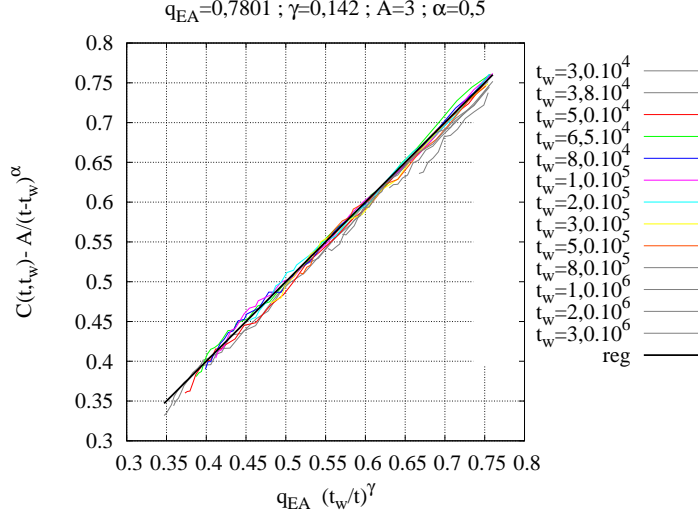


FIG. 8 –  $C_A(t, t_w) = C(t, t_w) - \frac{A}{(t-t_w)^\alpha}$  en fonction de  $(q_{EA} (\frac{t_w}{t})^\gamma)$  pour différents temps  $t_w$ . La droite *reg* est la moyenne des droites de régression des courbes en couleur. Les courbes en gris n'ont pas été prises en compte pour l'optimisation des paramètres donnés en haut du graphique.

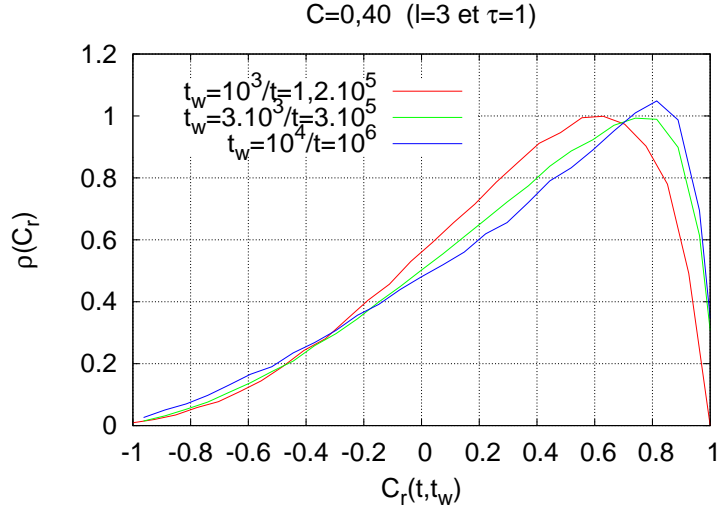


FIG. 9 – *pdf* de  $C_r$  pour  $C(t, t_w) = 0,4$ ,  $l = 3$  et  $\tau = 1$ . Les 3 courbes ne superposent pas.

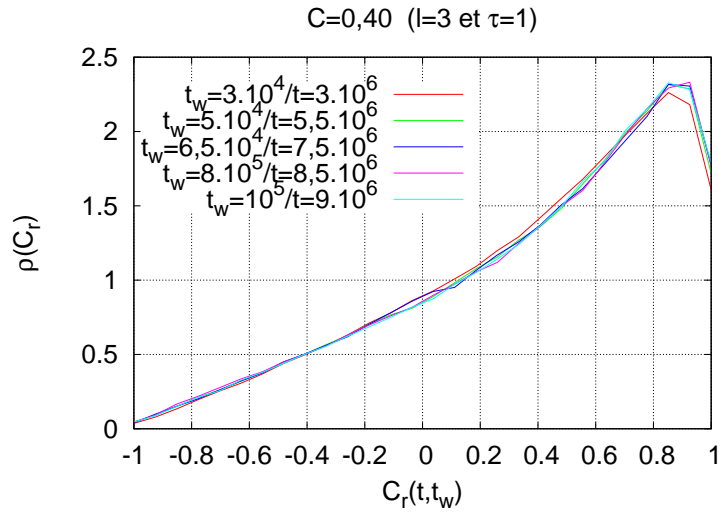


FIG. 10 – pdf de  $C_r$  pour  $C(t, t_w) = 0,4$ ,  $l = 3$  et  $\tau = 1$  qui ne dépend que de la valeur de  $C$ .

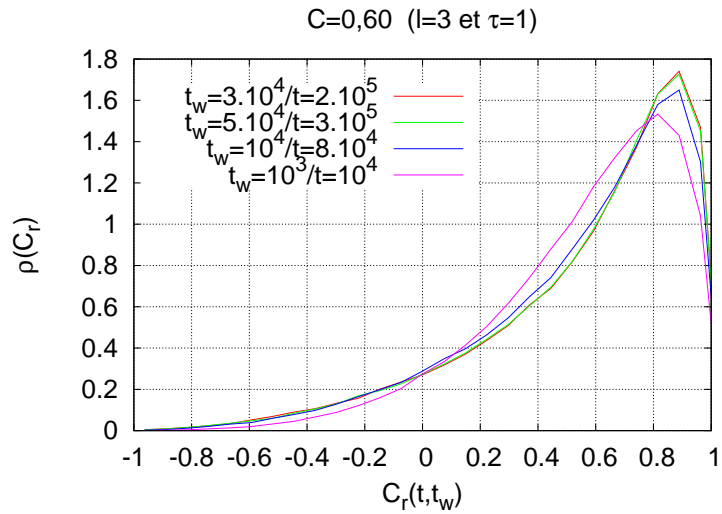


FIG. 11 – pdf de  $C_r$  pour  $C(t, t_w) = 0,6$ ,  $l = 3$  et  $\tau = 1$ .

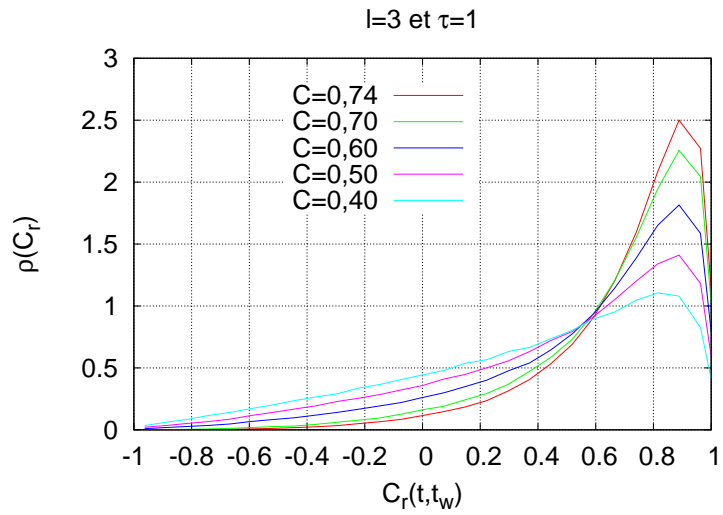


FIG. 12 – pdf de  $C_r$  pour  $l = 3$ ,  $\tau = 1$  et différentes valeurs de  $C$ .

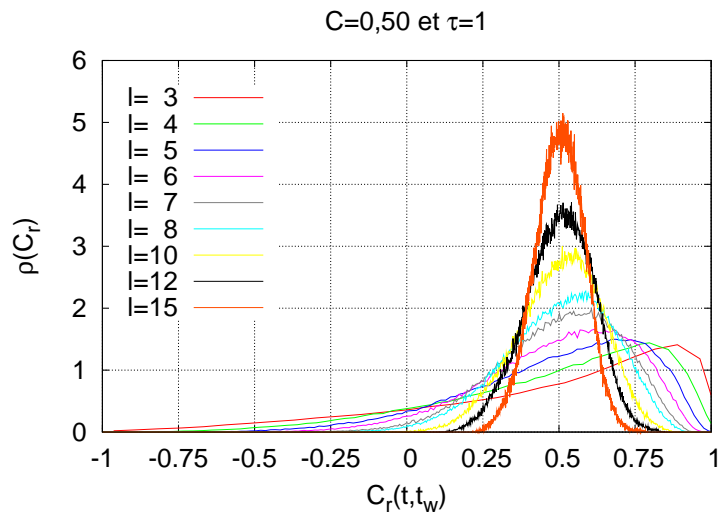


FIG. 13 – pdf de  $C_r$  pour  $C = 0,50$ ,  $\tau = 1$  et différentes valeurs de  $l$ .

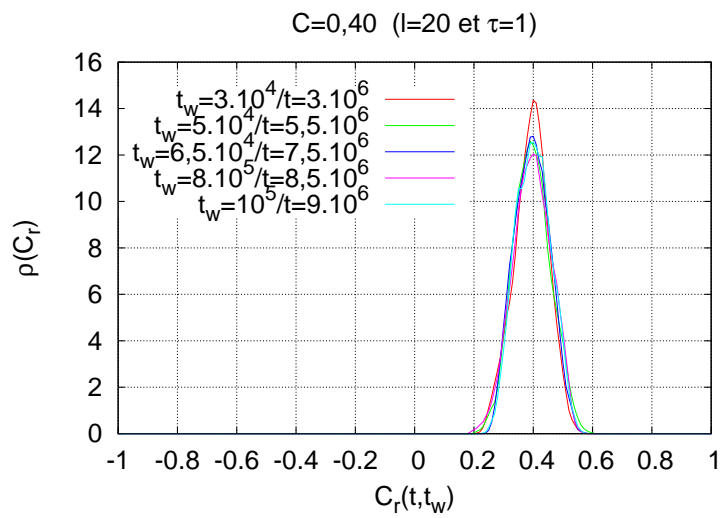


FIG. 14 – *pdf* de  $C_r$  pour  $C(t, t_w) = 0,4$ ,  $l = 20$  et  $\tau = 1$ .

# Annexe

Nous rappelons que  $t_3 < t_2 < t_1$  et que  $C_{ij} = C_A(t_i, t_j) = f\left(\frac{\ln(t_i - t_j)}{\ln(t_j)}\right)$ .  
Nous voulons montrer que :

$$C_{13} = \min(\{C_{12}, C_{23}\} / t_2 \in [t_3, t_1]) \quad (13)$$

Du fait que  $C_A(t, t_w)$  est une fonction décroissante de  $t$  à  $t_w$  fixé, nous avons  $C_{13} \leq \min(\{C_{12}, C_{23}\})$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer l'égalité avec l'un des 2 termes. Pour cela, nous devons préciser de quelle manière  $t_2$  et  $t_3$  se comporte vis-à-vis de  $t_1$  :

$$\begin{aligned} t_1 - t_3 &\sim a t_3^\mu \\ t_2 - t_3 &\sim b t_3^\nu \end{aligned} \quad (14)$$

Comme nous nous plaçons à la limite  $t_1 \gg 1$  et que  $t_2 < t_1$ , nous devons imposer la condition  $\nu < \mu$ . Ces expressions ont l'avantage de rendre  $C_{ij}$  indépendant de  $t_i$  et  $t_j$  à la limite  $t_j \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{aligned} C_{13} &= f\left(\frac{\ln(t_1 - t_3)}{\ln(t_3)}\right) = f\left(\frac{\ln(a) + \mu \ln(t_3)}{\ln(t_3)}\right) \xrightarrow{t_3 \rightarrow +\infty} f(\mu) \\ C_{23} &= f\left(\frac{\ln(t_2 - t_3)}{\ln(t_3)}\right) = f\left(\frac{\ln(b) + \nu \ln(t_3)}{\ln(t_3)}\right) \xrightarrow{t_3 \rightarrow +\infty} f(\nu) \end{aligned} \quad (15)$$

ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= a t_3^\mu - b t_3^\nu \sim a t_3^\mu \\ \Rightarrow C_{12} &= f(\mu) = C_{13} \end{aligned} \quad (16)$$

L'ultramétrie découle ainsi de la formule  $C_{ij} = f\left(\frac{\ln(t_i - t_j)}{\ln(t_j)}\right)$ .

# Bibliographie

- [1] See L. F. Cugliandolo, *Dynamics of glassy systems*, cond-mat/0210312 for a review.
- [2] C. Chamon, P. Charbonneau, L. F. Cugliandolo, D. R. Reichman, M. Sellitto, *J. Chem. Phys.* **121**, 10120 (2004)
- [3] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, *J. Phys. A*, **27**, 5749-5772 (1994)
- [4] E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J-P. Bouchaud, L.F. Cugliandolo cond-mat/9607224
- [5] E. Bertin, J.-P. Bouchaud, *J. Phys. A* **35**, 3039-3051 (2002)
- [6] H.E. Castillo, *Phys. Rev. B*, **68**, 134442 (2003)
- [7] W. Krauth, *Introductions to Monte Carlo methods*, cond-mat/0311623
- [8] M. Pleilimg, I.A. Campbell, *Phys. Rev. B*, **72**, 184429 (2005)